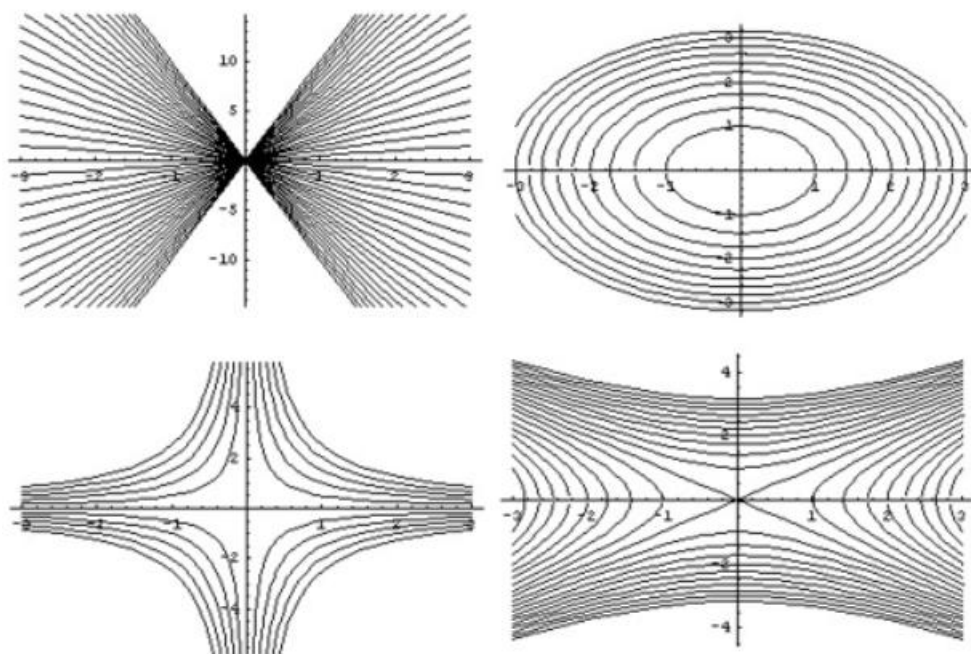


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Л.В. Третьякова, С.А. Чернявская, В.Г. Царёв

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА



Методические указания
к проведению практических занятий
по высшей математике
для студентов технических
и естественно-научных специальностей

Севастополь
СевГУ
2022

УДК 519.622.1(07)
ББК 22.161.612я73
Т66

Р е ц е н з е н т :

О.В. Матузаева – кандидат технических наук, доцент

Третьякова Л. В.

Т66 Дифференциальные уравнения первого порядка: методические указания к проведению практических занятий по высшей математике для студентов технических и естественно-научных специальностей / Л.В. Третьякова, С.А. Чернявская, В.Г. Царёв ; Севастопольский государственный университет, Институт информационных технологий и управления в технических системах, кафедра высшей математики. – Севастополь: СевГУ, 2022. – 42 с.: ил. – Текст: электронный.

Методические указания разработаны преподавателями кафедры «Высшая математика» СевГУ и предназначено для студентов 1 курса технических и естественно-научных специальностей, выполняющих индивидуальные задания по дисциплине «Высшая математика».

Пособие знакомит читателя с понятиями: обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, с некоторыми типами дифференциальных уравнений первого порядка, их характерными особенностями и методами решения. В пособии приведено достаточное количество примеров и задач по рассматриваемым темам, приведены варианты индивидуальных заданий по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка» и решение нулевого варианта. Для студентов, желающих расширить свой кругозор знаний по рассматриваемой теме, в конце пособия приводится список литературы.

УДК 519.622.1(07)
ББК 22.161.612я73

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Высшая математика», протокол № 5 от 24 января 2022 года.

СОДЕРЖАНИЕ

Основные понятия теории дифференциальных уравнений 1-го порядка	4
Практическое занятие по теме: «Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными»	7
Практическое занятие по теме: «Дифференцирование однородных уравнений первого порядка»	12
Практическое занятие по теме: «Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли»	17
Практическое занятие по теме: «Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах»	22
Варианты индивидуального задания	31
Решение типового варианта	36
Литература	42

Основные понятия теории дифференциальных уравнений 1-го порядка

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее неизвестную функцию ее производные (дифференциалы) и независимые переменные (аргументы).

Определение. Если неизвестная функция зависит от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называют *обыкновенным*, и уравнением *в частных производных*, если функция зависит от нескольких аргументов.

Определение. Наивысший порядок производной (дифференциала) входящей в уравнение называется *порядком* этого уравнения.

Примеры.

$y' + 2yx = x^2$ – обыкновенное дифференциальное уравнение I порядка.

$\frac{d^2V}{dt^2} = -kV^2$ – обыкновенное дифференциальное уравнение II порядка.

$(x''')^3 + 3x = \cos 3t$ – обыкновенное дифференциальное уравнение III порядка.

$x^3 \frac{\partial z}{\partial x} + y^3 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ – дифференциальное уравнение в частных производных I порядка.

Будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Определение. *Решением или интегралом* дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в верное тождество.

Процесс отыскания решений дифференциального уравнения называется интегрированием.

Пример. Для дифференциального уравнения $y' + 2y = 0$ решением является функция $y = e^{-2x}$. Действительно,

$$y' = -2e^{-2x},$$

подставляя в уравнение, получим

$$-2e^{-2x} + 2e^{-2x} = 0$$

Решением этого уравнения будут и функции $y = -3e^{-2x}$, $y = 5e^{-2x}$ и вообще функция $y = Ce^{-2x}$, где C – произвольная постоянная. Очевидно, если уравнение имеет хотя бы одно решение, то оно имеет их бесчисленное множество.

Дифференциальное уравнение первого порядка может быть записано в виде:

- 1) $y' = f(x, y)$ – разрешенное относительно первой производной;
- 2) $F(x, y, y') = 0$ – неразрешенное относительно первой производной;
- 3) $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ – в дифференциальной форме.

Очевидно, что всегда можно перейти от одного вида записи дифференциального уравнения к другому.

Определение. *Общим решением* (о.р.) дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ называется функция $y = \varphi(x, C)$, отвечающая двум условиям:

1) эта функция является решением д.у. при каждом конкретном значении постоянной C ;

2) каково бы ни было начальное условие $y|_{x=x_0} = y_0$, существует такое единственное значение константы $C = C_0$, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Определение. Решение д.у. $y' = f(x, y)$, полученное из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении произвольной постоянной C называется *частным решением* (ч.р.).

Определение. Равенство $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно задающее общее решение д.у. $y' = f(x, y)$ называется *общим интегралом* (о.и.) этого д.у.

Определение. Неявная запись ч.р. называется *частным интегралом* (ч.и.) д.у. $y' = f(x, y)$.

Задача отыскания решения дифференциального уравнения удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется задачей Коши. Для дифференциального уравнения второго порядка задача Коши сводится к нахождению решения, которое при $x = x_0$ принимает наперед заданное значение $y = y_0$, т.е. удовлетворяет начальному условию $y|_{x=x_0} = y_0$.

Решить задачу Коши для д.у. $y' = f(x, y)$ – значит:

1) найти общее решение данного д.у.

2) используя указанное начальное условие выделить из полученного о.р. (о.и.) единственное ч.р. (ч.и.).

Для всякого уравнения $y' = f(x, y)$ справедлива следующая теорема.

Теорема (существования и единственности решения дифференциальных уравнений). Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в некоторой области D на плоскости $ХОУ$, содержащей некоторую точку (x_0, y_0) , то существует единственное решение этого уравнения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее условию $y|_{x=x_0} = y_0$.

Геометрически это означает, что через заданную точку (x_0, y_0) проходит единственная кривая $y = \varphi(x, C_0)$.

Геометрически общий интеграл представляет собой семейство кривых на координатной плоскости, зависящее от одной произвольной постоянной C . Эти кривые называются интегральными кривыми. Так в примере $y' + 2y = 0$ такими кривыми являются $y = C \cdot e^{-2x}$.

Дадим геометрическую интерпретацию дифференциальному уравнению I порядка.

Пусть дано уравнение $y' = f(x, y)$ и пусть $y = \varphi(x, C)$ есть общее решение этого уравнения. Для каждой точки $M(x, y)$ плоскости $ХОУ$ определено y' , т.е. угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Таким образом, дифференциальное уравнение дает совокупность направлений или, как говорят, поле направлений. Геометрически решить дифференциальное это значит найти кривую, направление касательной которой совпадает с направлением поля в соответствующих точках.

Такое геометрическое истолкование дифференциального уравнения позволяет проинтегрировать его графически, т.е. представить на чертеже приближенную картину хода интегральных кривых. Обычно, при этом используется метод изоклин.

Определение. *Изоклиной* называется линия, вдоль которой направление поля, определяемого дифференциальным уравнением $y' = f(x, y)$, одно и то же.

Уравнение изоклины получается, если положить $y' = \text{const}$, т.е. $f(x, y) = C$ (*). Придавая в (*) параметру C ряд значений (например: $C = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$), строят несколько изоклин и на каждой из них наносят ряд стрелочек, наклоненных к оси под углом α , для которых $\text{tg} \alpha = C$. По направлению этих стрелочек проводят интегральную кривую.

Пример. С помощью изоклин начертить общую картину хода интегральных кривых уравнения.

Решение. Приравнявая правую часть уравнения к постоянной C , получим уравнение изоклин $\frac{x}{2} = C$, или $x = 2C$.

Следовательно, изоклинами являются прямые, параллельные оси $ОУ$. Начертим ряд изоклин, придавая C конкретные значения.

1. Пусть $C = 0$, тогда уравнение изоклин $x = 0$ (ось $ОУ$). Найдем направление поля этой изоклины. $y' = \frac{x}{2}$, $y' = \text{tg} \alpha = 0$, $\alpha = 0$.
2. Пусть $C = 1$, тогда $x = 2$ – уравнение изоклин, $y' = \text{tg} \alpha = 1$, $\alpha = 45^\circ$.
3. Пусть $C = -1$, тогда $x = -2$ – уравнение изоклин, $y' = \text{tg} \alpha = -1$, $\alpha = -45^\circ$.

И так далее.

По направлениям стрелочек проводим линии, которые приближенно представляют интегральные кривые данного дифференциального уравнения.

Интегральные кривые есть семейство парабол (Рис.1).

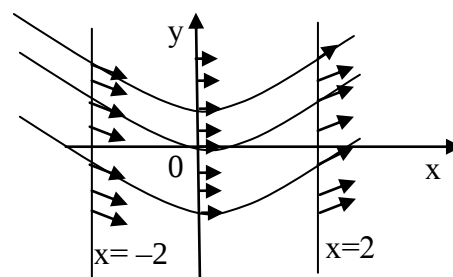


Рис.1.

Теория дифференциального уравнения имеет широкое прикладное значение. Большинство задач техники, физики и других прикладных теоретических наук приводят к составлению дифференциальных уравнений и последующему их решению. Составление дифференциального уравнения по условию задачи состоит в определении математической зависимости между искомой функцией, ее аргументом и производными (или дифференциалами)

Исчерпывающих правил для составления дифференциального уравнения нет. Однако в ряде задач можно использовать геометрический смысл первой производной или механический смысл первой и второй производных.

Рассмотрим некоторые задачи, приводящие к составлению дифференциальных уравнений.

Задача 1. Найти кривые, обладающие в каждой точке тем свойством, что отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка кривой (Рис.2), обладающая требуемым свойством: $|AM| = |MB|$.

Из треугольника OAB имеем: $\frac{|OB|}{|OA|} = \operatorname{tg}(\angle BAO)$ и так как

$$|OA| = 2x, \quad |OB| = 2y, \quad \operatorname{tg}(\angle BAO) = -\operatorname{tg}(\angle BAD) = -y',$$

то приходим к соотношению: $\frac{y}{x} = -y'$ – дифференциальному уравнению

I порядка (для кривых, расположенных в I и III четверти)/

Если кривая находится во II или IV четверти, то дифференциальное уравнение имеет вид $\frac{y}{x} = y'$ – дифференциальные уравнения I порядка.

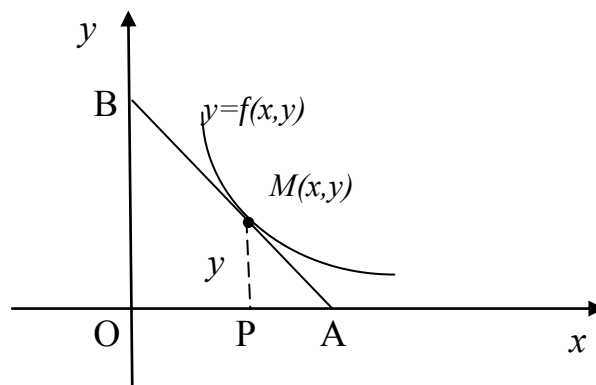


Рис.2.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ:

«Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными»

Определение. Д.у. первого порядка, *разрешенное относительно производной* y' , называется уравнением *с разделяющимися переменными*, если его правая часть представляет собой произведение двух функций, одна из которых зависит только от x , другая только от y .

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Метод решения. Полагая $y' = \frac{dy}{dx}$, получим $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$, разделяя переменные $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$ и интегрируя $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C$, получим общее решение или общий интеграл.

Определение. Д.у. первого порядка *в дифференциальной форме* называется уравнением *с разделяющимися переменными*, если при дифференциалах dx и dy стоят произведения двух функций, одна из которых зависит только от x , другая только от y .

$$P_1(x) \cdot P_2(y)dx + Q_1(x) \cdot Q_2(y)dy = 0$$

Метод решения. Для этого поделим обе части на $Q_1(x) \cdot P_2(y)$. Будем иметь $\frac{P_1(x)dx}{Q_1(x)} + \frac{Q_2(y)dy}{P_2(y)} = 0$. Перенесем второе слагаемое в правую часть

$$\frac{P_1(x)dx}{Q_1(x)} = -\frac{Q_2(y)dy}{P_2(y)}.$$

После интегрирования получим общий интеграл.

Замечание. В частности функции $f_1(x)$, $f_2(y)$, $P_1(x)$, $P_2(y)$, $Q_1(x)$, $Q_2(y)$ могут быть константами.

Пример 1. Решить уравнение $(\sqrt{xy} - \sqrt{y})y' = x - 1$.

Решение:

Дано дифференциальное уравнение первого порядка, относительно неизвестной функции $y(x)$, необходимо найти общее решение (общий интеграл).

Для определения типа уравнения разрешим его относительно производной y' :

$$y' = \frac{x-1}{(\sqrt{xy} - \sqrt{y})}.$$

Вынесем в знаменателе за скобки $\sqrt{y}$, и представим правую часть в виде произведения двух функций:

$$y' = \frac{x-1}{\sqrt{y}(\sqrt{x}-1)} \Rightarrow y' = \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Первый из множителей зависит только от x — $f_1(x) = \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)}$, второй только от y — $f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$.

Поэтому тип этого уравнения — **с разделяющимися переменными**.

$$1. \ y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

2. Разносим дифференциалы в разные части уравнения, для чего домножаем обе части на dx :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \quad / \cdot dx$$

$$dy = \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} dx.$$

3. Требуем соответствие функций при дифференциалах, для чего умножаем обе части на $\sqrt{y}$:

$$dy = \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} dx \quad / \cdot \sqrt{y}$$

$$\sqrt{y} dy = \frac{(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} dx$$

$$\sqrt{y} dy = (\sqrt{x}+1) dx.$$

4. Интегрируем левую часть последнего равенства по y , правую по x :

$$\int \sqrt{y} dy = \int (\sqrt{x}+1) dx$$

$$\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + x + C_1 \quad / \cdot 3$$

$$2\sqrt{y^3} = 2\sqrt{x^3} + 3x + 3C_1, \quad (3C_1 = C)$$

$$\sqrt{y^3} - 2\sqrt{x^3} - 3x = C, \text{ получили общий интеграл.}$$

Ответ: $\sqrt{y^3} - 2\sqrt{x^3} - 3x = C$ – общий интеграл данного д.у.

Пример 2. Решить уравнение $z' = z$, если $z|_{u=0} = \frac{1}{e}$.

Решение:

Дано д.у. первого порядка, относительно функции $z(u)$, необходимо найти ч.р. (ч.и.).

Тип уравнения – с разделяющимися переменными, так как правую часть уравнения $z' = z$ можно представить в виде произведения константы и функции, зависящей только от z : $z' = 1 \cdot z$.

$$\frac{dz}{du} = z$$

$$dz = z du$$

$$\frac{dz}{z} = du$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int du$$

$$\ln|z| = u + C_1$$

$$\ln|z| = \ln e^u + \ln|C_2|, \text{ где } \ln|C_2| = C_1$$

$$\ln|z| = \ln(e^u \cdot |C_2|)$$

$$|z| = e^u \cdot |C_2|$$

$$z = \pm C_2 \cdot e^u, \text{ положим } \pm C_2 = C$$

$z = C \cdot e^u$ – общее решение.

Для получения частного решения подставим в общее решение начальное условие и из полученного равенства найдем значение константы C :

$$\frac{1}{e} = C \cdot e^0, \text{ откуда}$$

$$C = \frac{1}{e}.$$

Поэтому частное решение будет иметь вид:

$$z = \frac{1}{e} \cdot e^u \text{ или } z = e^{u-1}.$$

Ответ: $z = e^{u-1}$ – частное решение данного д.у.

Пример 3. Решить уравнение $(xy + y)dx + (xy + x)dy = 0$.

Решение:

Дано дифференциальное уравнение первого порядка, относительно функции $y(x)$, необходимо найти о.р. (о.и.).

Для определения типа уравнения вынесем за скобки y при дифференциале dx , и x при дифференциале dy , получим:

$$y(x+1)dx + x(y+1)dy = 0.$$

При дифференциалах стоят произведения двух функций, одна из которых зависит только от x , а другая только от y :

$$P_1(x) = x+1, P_2(y) = y, Q_1(x) = x, Q_2(y) = y+1.$$

Тип уравнения – с разделяющимися переменными.

1. Разносим дифференциалы в разные части уравнения:

$$x(y+1)dy = -y(x+1)dx.$$

2. Требуем соответствия функций при дифференциалах:

$$x(y+1)dy = -y(x+1)dx \quad / : x$$

$$\frac{x(y+1)}{x}dy = -\frac{y(x+1)}{x}dx$$

$$(y+1)dy = -\frac{y(x+1)}{x}dx \quad / : y$$

$$\frac{(y+1)}{y}dy = -\frac{y(x+1)}{xy}dx$$

$$\frac{(y+1)}{y}dy = -\frac{(x+1)}{x}dx.$$

3. Интегрируем левую часть последнего равенства по y , правую по x :

$$\int \frac{(y+1)}{y} dy = -\int \frac{(x+1)}{x} dx$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{y}\right) dy = -\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$y + \ln|y| = -x - \ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln|y| + \ln|x| + y + x = \ln|C| \Rightarrow \ln|xy| + \ln e^{x+y} = \ln|C|$$

$xye^{x+y} = C$ – общий интеграл.

Ответ: $xye^{x+y} = C$ – общий интеграл данного д.у.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. $2\sqrt{y}dx = dy \quad y|_{x=0} = 1$

Ответ: $y = (x+1)^2$.

2. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$

Ответ: $1 + y^2 = C(1 - x^2)$.

3. $(1+2y)x dx + (1+x^2)dy = 0$

Ответ: $(1+2y)(1+x^2) = C$.

4. $y(1+x^2)y' = x(1+y^2)$

Ответ: $(1+y^2) = C(1+x^2)$.

5. $(1+y^2)dx - xydy = 0 \quad y|_{x=2} = 1$

Ответ: $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$.

6. $y' \sin x = y \ln y \quad y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$

Ответ: $\ln y = tg \frac{x}{2}$.

7. $x \frac{dx}{dt} - t = 1$

Ответ: $x^2 - (t+1)^2 = C$.

8. $UV' + V = V^2 \quad V|_{U=1} = 0,5$

Ответ: $V = \frac{1}{1+U}$.

9. $\frac{tgy}{\cos^2 x} dx + \frac{tgx}{\cos^2 y} dy = 0$

Ответ: $tgx \cdot tgy = C$.

10. $(2x+1)dy + y^2 dx = 0 \quad y|_{x=0} = 1$

Ответ: $\frac{2}{y} = \ln|2x+1| + 2$.

11. $y' + y^2 = 1$

Ответ: $\ln \left| \frac{1-y}{1+y} \right| = 2x + C$.

12. $y' = \sin \frac{x-y}{2} - \sin \frac{x+y}{2}$

Ответ: $\ln \left| tg \frac{y}{2} \right| = C + 2 \sin x$.

13. Ускорение прямолинейного движения материальной точки выражается формулой $a = (2t+10) м/с^2$. Найти скорость в момент времени $t = 10$.

Ответ: $V = 200 м/с$.

14. Известно, что тело движется со скоростью, пропорциональной пройденному пути, и проходит за $2с$ путь $10м$, а за $4с$ – $50м$. Какой путь пройдет тело за $6с$ от начала движения?

Ответ: $V = 250 м$.

15. Металлическая деталь, нагретая до $500^\circ C$, охлаждается в воздухе при температуре $20^\circ C$. Через $10_{мин}$ после начала охлаждения температура детали понизилась до $100^\circ C$. Считая скорость охлаждения пропорциональной разности между температурой детали и температурой окружающего воздуха, определить температуру детали через $20_{мин}$ после охлаждения.

Ответ: $\left(33\frac{1}{3}\right)^{\circ}\text{C}$

16. Найти линию, проходящую через точку $(2,1)$ и обладающую тем свойством, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен удвоенной абсциссе точки. Построить линию.

Ответ: $y = x^2 - 3$.

17. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a^2 .

Ответ: $(C \pm x)y = 2a^2$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ

«Дифференцирование однородных уравнений первого порядка»

Определение. Функция $f(x, y)$ называется **однородной функцией** n -го измерения относительно x и y , если равенство $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ справедливо для любого $\lambda \in R$ и отличного от нуля, при котором функция $f(\lambda x, \lambda y)$ определена, $n = \text{const}$.

Например, функция $f(x, y) = 3x^4 - x^2y^2 + 5y^4$ является однородной четвертого измерения ($n = 4$), так как

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= 3 \cdot (\lambda x)^4 - (\lambda x)^2 (\lambda y)^2 + 5 \cdot (\lambda y)^4 = \\ &= \lambda^4 (3x^4 - x^2y^2 + 5y^4) = \lambda^4 f(x, y). \end{aligned}$$

Функция $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{xy} + 4\sqrt[3]{y^2}$ является однородной измерения $n = \frac{2}{3}$, поскольку

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \sqrt[3]{(\lambda x)^2} - 2\sqrt[3]{(\lambda x)(\lambda y)} + 4\sqrt[3]{(\lambda y)^2} = \\ &= \sqrt[3]{\lambda^2} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{xy} + 4\sqrt[3]{y^2}) = \lambda^{\frac{2}{3}} f(x, y). \end{aligned}$$

Очевидно, функция $f(x, y) = 9x^2y^3 + 12xy$ – неоднородная.

Однородная функция нулевого измерения определяется равенством:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y).$$

Например, функция $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y} \ln\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)$ однородная функция нулевого измерения, так как

$$\begin{aligned}
 f(\lambda x, \lambda y) &= \frac{\lambda x - \lambda y}{\lambda x + \lambda y} \ln \left(\frac{(\lambda x)^2}{(\lambda y)^2} + 1 \right) = \\
 &= \frac{\lambda(x - y)}{\lambda(x + y)} \ln \left(\frac{\lambda^2 x^2}{\lambda^2 y^2} + 1 \right) = \\
 &= \frac{x - y}{x + y} \ln \left(\frac{x^2}{y^2} + 1 \right) = f(x, y).
 \end{aligned}$$

Признак однородной функции нулевого измерения состоит в том, что такая функция не меняет своего значения при замене x на λx , y на λy :

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y).$$

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно первой производной $y' = f(x, y)$ называется **однородным**, если его правая часть является однородной функцией нулевого измерения.

Метод решения. Уравнение $y' = f(x, y)$ заменой переменной по формуле

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{или} \quad y = u \cdot x$$

где $u = u(x, y)$ – дифференцируемая функция от x , сводят к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Действительно $y' = u' \cdot x + u$. Так как $f(x, y)$ – однородная нулевого измерения, то

$$f(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(u).$$

Отсюда $u'x + u = f(u) \Rightarrow u'x = f(u) - u$ – дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

Разделяя переменные, получим

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

при условии, что $f(u) - u \neq 0$.

Интегрируя, получаем общий интеграл.

Определение. Дифференциальное уравнение в дифференциальной форме $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ будет однородным тогда и только тогда, когда при дифференциалах стоят однородные функции одного и того же измерения n , то есть $P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n P(x, y)$ и $Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n Q(x, y)$.

Метод решения. Свести уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ к уравнению вида $y' = f(x, y)$, а затем делаем замену $y = u \cdot x$.

Пример 1. Решить уравнение $2x^2 y' = x^2 + y^2$, если $y(1) = 0$.

Решение:

Дано дифференциальное уравнение первого порядка, относительно функции $y(x)$, необходимо найти частное решение (ч.и.).

Для определения типа уравнения разрешим его относительно первой производной

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}.$$

Правая часть уравнения есть однородная функция нулевого измерения так как

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{2(\lambda x)^2} = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}{2\lambda^2 x^2} = \frac{\lambda^2 (x^2 + y^2)}{\lambda^2 2x^2} = f(x, y).$$

Поэтому тип уравнения – **однородное** первого порядка.

1. Вводим новую функцию $u(x) = \frac{y}{x}$, при чем $y = u \cdot x$ и $y' = u' \cdot x + u$.

$$\begin{aligned} 2. \quad u' \cdot x + u &= \frac{x^2 + (u \cdot x)^2}{2x^2} \\ u' \cdot x &= \frac{x^2 + u^2 \cdot x^2}{2x^2} - u \\ u' \cdot x &= \frac{x^2(1+u^2)}{2x^2} - u \\ u' \cdot x &= \frac{(1+u^2)}{2} - u \\ u' \cdot x &= \frac{1+u^2-2u}{2} \quad / : x \\ u' &= \frac{1+u^2-2u}{2x}. \end{aligned}$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$. Решаем его:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{(u-1)^2}{2x} \quad / \cdot dx \\ du &= \frac{(u-1)^2}{2x} dx \quad / : (u-1)^2 \\ \frac{du}{(u-1)^2} &= \frac{dx}{2x}. \end{aligned}$$

Берем интегралы от обеих частей последнего равенства

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{(u-1)^2} &= \int \frac{dx}{2x} \\ -\frac{1}{u-1} &= \frac{1}{2} \ln|x| + \ln C \\ -\frac{1}{u-1} &= \ln(C\sqrt{|x|}) \\ 1 &= (1-u) \ln(C\sqrt{|x|}). \end{aligned}$$

Подставляем в последнее равенство вместо u значение $\frac{y}{x}$.

Получим общий интеграл

$$1 = \left(1 - \frac{y}{x}\right) \ln(C\sqrt{|x|})$$

$$x = (x - y) \ln(C\sqrt{|x|}).$$

Разрешив его относительно y получим общее решение исходного уравнения

$$y = x - \frac{x}{\ln(C\sqrt{|x|})}.$$

Используя начальное условие $y(1) = 0$, определяем значение константы C .

$$0 = 1 - \frac{1}{\ln C} \quad \ln C = 1 \quad C = e.$$

Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y = x - \frac{x}{1 + \ln \sqrt{|x|}}.$$

Ответ: $y = x - \frac{x}{1 + \ln \sqrt{|x|}}$ – частное решение данного д.у.

Пример 2. Решить уравнение $xdy - \left(y + x \sin^2 \frac{y}{x}\right)dx = 0$.

Решение: Дано дифференциальное уравнение первого порядка в дифференциальной форме, необходимо найти общий интеграл (о.и.).

Функции $P(x, y) = -\left(y + x \sin^2 \frac{y}{x}\right)$, и $Q(x, y) = x$ – однородные первого порядка. Действительно,

$$P(\lambda x, \lambda y) = -\left(\lambda y + \lambda x \sin^2 \frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = -\lambda \left(y + x \sin^2 \frac{y}{x}\right),$$

$$Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda x.$$

Преобразуем данное дифференциальное уравнение к уравнению разрешенному относительно y' , получим

$$y' = \frac{y + x \sin^2 \frac{y}{x}}{x}$$

Делаем замену $y = u \cdot x$, тогда $y' = u'x + u$.

Отсюда

$$u'x + u = \frac{ux + x \sin^2 u}{x}$$

$$u'x = -u + u + \sin^2 u$$

$$u'x = \sin^2 u$$

$$\frac{du}{\sin^2 u} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируем левую и правую части, имеем

$$-ctgu = \ln x + C$$

После обратной подстановки

$$-ctg \frac{y}{x} = \ln x + C \text{ или } \ln x + c + ctg \frac{y}{x} = 0.$$

Ответ: $\ln x + c + ctg \frac{y}{x} = 0$. – общий интеграл данного дифференциального уравнения.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Проверить функции на однородность:

а) $f(x, y) = 3x^3 - 3xy^2 + 5y^3$

в) $f(x, y) = \frac{x^2 + xy}{y^2 \sin \frac{x}{y}}$

б) $f(x, y) = 5x^2 + 3x^2y$

г) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - \ln(x^2 + 1)$

2. Определить тип дифференциальных уравнений:

а) $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y, y(2) = \pi$

г) $xy' - x \frac{1}{\cos \frac{y}{x}} - y = 0$

б) $ydx + (\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy = 0$

д) $(xy + y)dx = 3xy^3dy$

в) $xy' = y - e^{\frac{x}{y}}$

е) $5x^2dx = 6 \cos y dy$

3. Решить дифференциальные уравнения:

а) $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0 \quad y|_{x=1} = 0$

Ответ: $y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2$.

б) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0 \quad y|_{x=1} = 1$

Ответ: $y^2 - y^3 = x^2$.

в) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$

Ответ: $\frac{y}{x} = e^{Cx}$.

г) $y' = e^{\frac{x}{y}} + \frac{y}{x}$

Ответ: $\ln |Cx| = -e^{-\frac{y}{x}}$.

д) $y - x \frac{dy}{dx} = x + y \frac{dy}{dx}$

Ответ: $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\arctg \frac{y}{x}}$.

е) $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0$

Ответ: $y \cdot e^{2\sqrt{\frac{x}{y}}} = C$.

ж) $(x^2 + y^2)dx = 2xydy$

Ответ: $y = \sqrt{(C+x) \cdot x}$.

з) $(x^2 + xy + y^2)dx = x^2dy$

Ответ: $Cx = e^{\arctg \frac{y}{x}}$.

4. Найти кривую, подкасательная которой есть среднее арифметическое координат точки касания.

Ответ: $(x - y)^2 - Cy = 0$.

5. Найти кривую, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

Ответ: $y = C(x^2 + y^2)$.

6. Найти кривую, у которой расстояние любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания.

Ответ: $x^2 + y^2 = Cx$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ

«Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Уравнение Бернулли»

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если оно линейно относительно неизвестной функции и ее производной.

Линейное относительно y и y' дифференциальное уравнение принято записывать в виде $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$,

где функции $P(x) \neq 0$ и $Q(x) \neq 0$, непрерывны в некоторой области.

Или в виде $x' + P(y) \cdot x = Q(y)$ – линейное относительно x и x' д.у.

Признаки линейного дифференциального уравнения первого порядка:

- искомая функция и ее производная входят в уравнение в первой положительной степени, и нет их произведений;
- аргумент входит в уравнение в любой допустимой форме.

Определение. *Уравнением Бернулли* называется уравнение вида

$$y' + P(x) \cdot y = y^n \cdot Q(x),$$

где функции $P(x) \neq 0$ и $Q(x) \neq 0$, непрерывны в некоторой области, n – любое действительное число, причем $n \neq 0$ и $n \neq 1$.

Решение линейного уравнения и уравнения Бернулли ищут в виде произведения двух функций $y = u(x) \cdot v(x)$, одну из которых выбирают произвольно, а вторую так чтобы их произведение было решением дифференциального уравнения.

Подставим в линейное уравнение $y = u \cdot v$ и $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$, получим

$$u' \cdot v + u \cdot v' + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x).$$

Объединяем второе и третье слагаемые в левой части уравнения в скобки и выносим общий множитель u за скобки.

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + P(x) \cdot v) = Q(x).$$

Подберем функцию v таким образом, чтобы выполнялось условие

$$(v' + P(x) \cdot v) = 0.$$

Решаем полученное д.у. с разделяющимися переменными, получаем общее решение

$$v = e^{-\int P(x) dx} + C_1.$$

Достаточно найти одну единственную функцию $v(x)$, поэтому из общего решения, выбираем одну соответствующую значению константы $C_1 = 0$

$$v = e^{-\int P(x) dx}.$$

Таким образом, найдена часть общего решения. Теперь найдем функцию $u(x)$ такую, чтобы произведение $u \cdot v$ было решением д.у. Для этого подставим найденную функцию $v = e^{-\int P(x) dx}$ в уравнение $u' \cdot v + u \cdot (v' + P(x) \cdot v) = Q(x)$, получим $u' \cdot e^{-\int P(x) dx} = Q(x)$. Тогда, решая последнее уравнение, получим

$$u = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx + C.$$

Следовательно, общее решение будет иметь вид

$$y = \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx + C \right) \cdot e^{-\int P(x) dx}.$$

Пример 1. Решить уравнение $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, если $y(\pi) = 1$.

Решение:

Дано дифференциальное уравнение первого порядка, относительно функции $y(x)$, необходимо найти частное решение (ч.и.).

Тип уравнения – **линейное** первого порядка, так как искомая функция $y(x)$ и ее производная $y'(x)$ входят в уравнение в первой положительной степени и нет их произведений.

1. Решение ищем в виде $y = u(x) \cdot v(x)$.

2. Подставляем в исходное уравнение $y = u \cdot v$ и $y = u' \cdot v + u \cdot v'$, получаем

$$u' \cdot v + u \cdot v' + u \cdot v \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$$

3. Объединяем второе и третье слагаемые в левой части уравнения в скобки и выносим общий множитель u за скобки.

$$u' \cdot v + (u \cdot v' + u \cdot v \cdot \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + v \cdot \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}.$$

4. Приравниваем выражение в скобках к нулю и решаем полученное дифференциальное уравнение относительно функции $v(x)$:

$$v' + v \cdot \operatorname{tg} x = 0$$

$$v' = -v \cdot \operatorname{tg} x$$

$$\frac{dv}{dx} = -v \cdot \operatorname{tg} x \quad / \cdot dx$$

$$\frac{dv}{v} = -\operatorname{tg} x dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \operatorname{tg} x dx$$

$$\ln|v| = \ln|\cos x| + C_1.$$

Полагая $C_1 = 0$, получаем частное решение вида

$$\ln|v| = \ln|\cos x|$$

$$v = \cos x.$$

5. Подставляем найденное значение функции v в уравнение

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + v \cdot \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x},$$

получаем уравнение вида $u' \cdot \cos x = \frac{1}{\cos x}.$

Это уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$.

$$u' \cdot \cos x = \frac{1}{\cos x} \Big/ : \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \Big/ \cdot dx$$

$$du = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\int du = \int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$u = \operatorname{tg} x + C.$$

5. Общее решение д.у. будет иметь вид

$$y = (\operatorname{tg} x + C) \cdot \cos x.$$

Для нахождения частного решения используем начальное условие $y(\pi) = 1$.

$$1 = (\operatorname{tg} \pi + C) \cdot \cos \pi$$

$$1 = (0 + C) \cdot (-1)$$

$$C = -1.$$

Поэтому частное решение будет иметь вид:

$$y = (\operatorname{tg} x - 1) \cdot \cos x.$$

Ответ: $y = (\operatorname{tg} x - 1) \cdot \cos x$ – частное решения данного д.у.

Пример 2. Решить уравнение $y' + 2e^x y = 2e^x \sqrt{y}$.

Решение:

Дано дифференциальное уравнение первого порядка, относительно неизвестной функции $y(x)$, необходимо найти общее решение (о.и.).

Тип уравнения – уравнение Бернулли, так как в левой части неизвестная функция и ее производная находятся в первой положительной степени и нет их произведений, а справа неизвестная функция стоит в степени $\frac{1}{2}$.

Полагаем $y = u(x) \cdot v(x)$, следовательно $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставляем y и y' в исходное уравнение:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + 2e^x u \cdot v = 2e^x \sqrt{u \cdot v}$$

$$u' \cdot v + (u \cdot v' + 2e^x u \cdot v) = 2e^x \sqrt{u \cdot v}$$

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + 2e^x v) = 2e^x \sqrt{u \cdot v}.$$

Приравниваем скобку к нулю и решаем полученное уравнение:

$$v' + 2e^x v = 0$$

$$v' = -2e^x v$$

$$\frac{dv}{dx} = -2e^x v \Big/ \cdot dx$$

$$dv = -2e^x v dx \Big/ : v$$

$$\frac{dv}{v} = -2e^x dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2 \int e^x dx$$

$$\ln v = -2e^x + C_1.$$

Полагаем $C_1 = 0$, получаем функцию $v(x)$

$$v = e^{-2e^x} \quad \text{или} \quad v = \frac{1}{(e^{e^x})^2}.$$

Подставляем найденное значение v в уравнение со скобкой

$$u' \cdot \frac{1}{(e^{e^x})^2} = 2e^x \sqrt{u \cdot \frac{1}{(e^{e^x})^2}}.$$

Выражаем из последнего равенства u'

$$u' = 2e^x \sqrt{u} \cdot \frac{1}{(e^{e^x})^2}$$

$$u' = 2e^x \sqrt{u} \cdot (e^{e^x})$$

$$\frac{du}{dx} = 2e^x \sqrt{u} \cdot (e^{e^x}) / \cdot dx$$

$$du = 2e^x \sqrt{u} \cdot (e^{e^x}) dx / : \sqrt{u}$$

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = 2e^x (e^{e^x}) dx$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2 \int e^x (e^{e^x}) dx$$

$$2\sqrt{u} = 2e^{e^x} + 2C$$

$$\sqrt{u} = e^{e^x} + C$$

$$u = (e^{e^x} + C)^2.$$

Следовательно, общее решение исходного д.у. будет иметь вид:

$$y = (e^{e^x} + C)^2 \cdot \frac{1}{(e^{e^x})^2} \quad \text{или} \quad y = \left(\frac{e^{e^x} + C}{e^{e^x}} \right)^2.$$

Ответ: $y = \left(\frac{e^{e^x} + C}{e^{e^x}} \right)^2$ – общее решение данного д.у.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Определить тип дифференциальных уравнений:

а) $y = x \left(y' - e^{\frac{x}{y}} \right)$ ж) $\frac{y'}{y} = \frac{\ln y}{\sin x}$

б) $(x + xy^2) dx + y(1 + x^2) dy = 0$ и) $y \sin x + y' \cos x = 1$

в) $\left(\frac{x}{y} + \frac{1}{4y} \right) dx = x dy$ к) $y - xy' = x + yy'$

г) $xy' + y = xy^2$ л) $y' = \frac{y}{2x \ln y + y - x};$

$$\text{д) } (1 + e^{2x})y^2 dy - e^x dx = 0;$$

$$\text{е) } y^2 + x^2 y' = xy y'$$

$$\text{м) } xy' + y - y^2 = 0;$$

$$\text{н) } 2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0;$$

2. Решить дифференциальные уравнения:

$$\text{а) } x \frac{dy}{dx} + 2y = x^5 y^2$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{1}{\frac{1}{3}x^5 + Cx^2}.$$

$$\text{б) } y' + y = xy^3$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + x + Ce^{2x}}}.$$

$$\text{в) } y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

$$\text{Ответ: } y = e^{-x^2} (x^2 + C).$$

$$\text{г) } x \frac{dy}{dx} + y = 3x$$

$$\text{Ответ: } y = x^2 + \frac{C}{x}.$$

$$\text{д) } \frac{dy}{dx} = x + y$$

$$\text{Ответ: } y = Ce^x - x - 1.$$

$$\text{е) } y' - y = e^x$$

$$\text{Ответ: } y = (x + C)e^x.$$

$$\text{ж) } \frac{dy}{dx} + \frac{4xy}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{\frac{x^3}{3} + C}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$\text{з) } y' - \frac{y}{x-3} = \frac{y^2}{x-3}, y(1) = -2$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{3-x}{x-2}.$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ

«Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах»

Пусть задана функция. Полный дифференциал этой функции имеет вид

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy.$$

С другой стороны, учитывая, что $U(x, y) = C$, то поэтому имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = 0.$$

Если функция U и ее частные производные непрерывны, то

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}.$$

Т.о. если в уравнении

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

правая часть есть полный дифференциал, то его решением будет функция $u(x, y) = C$.

Ответ на вопрос, в каком случае выражение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

есть уравнение, в полных дифференциалах, дает следующая теорема.

Теорема. Для того, чтобы выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ было полным дифференциалом в некоторой области D , необходимо и достаточно, чтобы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ были непрерывны вместе со своими частными производными в этой области, и выполнялось равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Необходимость.

Дано. Выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом функции $U(x, y)$, т.е. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU(x, y)$, функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ непрерывны в области D .

Доказать. $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ в области D .

Доказательство.

Известно, что полный дифференциал функции $U(x, y)$ двух независимых переменных имеет вид

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy, \text{ то}$$
$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Продифференцировав обе части первого равенства по y , а второго по x будем иметь

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}.$$

По условию частные производные $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$; $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ непрерывны в области D . Следовательно, непрерывны и функции $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$. Но смешанные производные $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ будучи непрерывными равны между собой. Т.е.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}.$$

Отсюда следует, $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ в области D .

Достаточность.

Дано: $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ в области D .

Доказать. Существует функция $U(x, y)$ в области D такая, что

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Доказательство.

Искомая функция $U(x, y)$ должна удовлетворять двум требованиям.

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \quad (*)$$

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = Q(x, y) \quad (**)$$

Выберем функцию $U(x, y)$ так, чтобы она удовлетворяла условию (*). Общий вид такой функции

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \varphi(y), \quad y = \text{const} \quad (***)$$

где в качестве произвольной постоянной интегрирования взяли функцию от y , т.е. $\varphi(y)$, так как интегрирование производится в предположении, что y сохраняет неизменное значение.

Функция $U(x, y)$ должна удовлетворять и равенству (**).

Продифференцируем функцию (***) по переменной y :

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y)dx \right) + \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y}$$

Учитывая условие (**), имеем

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y)dx \right) + \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} = Q(x, y)$$

Отсюда

$$\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y)dx \right) \quad (****)$$

В левой части равенства (****) записана функция одной переменной y . Чтобы убедиться, что и правая часть (****) зависит только от y , необходимо продифференцировать её по x , в результате чего должны получить нуль.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y) dx \right) \right) = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y) dx \right) \right) = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\int P(x, y) dx \right) \right) = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 0, \text{ так как по условию } \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

Из равенства (****) имеем

$$\varphi(y) = \int \left(Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y) dx \right) \right) dy + C, \text{ где } C - \text{ постоянная.}$$

Подставляя найденное выражение для $\varphi(y)$ в формулу (***), найдем функцию $U(x, y)$ такую, что

$$dU(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

Теорема доказана полностью.

Доказательство этой теоремы дает способ решения дифференциальных уравнений в полных дифференциалах.

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка в дифференциальной форме $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ называется **дифференциальным уравнением в полных дифференциалах**, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции двух переменных.

Признак д.у. в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах определяется одной из следующих формул:

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = C,$$

$$\int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = C,$$

где точка $M_0(x_0, y_0) \in D$, области определения функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$.

Пример 1 Решить уравнение $\frac{x^2 - y}{x^2} dx + \frac{x + 1}{x} dy = 0$.

Решение: В нашем случае $P(x, y) = \frac{x^2 - y}{x^2}$, $Q(x, y) = \frac{x + 1}{x}$.

И так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^2},$$

т.е. условие полного дифференциала выполнено, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Его общий интеграл можно найти по одной из формул:

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy = C,$$

$$\int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = C,$$

где нижние пределы x_0, y_0 могут быть выбраны произвольно. Выберем $x_0 = 1, y_0 = 0$. Выбор этих значений x_0, y_0 допустим, так как точка $M_0(1, 0) \in D$ принадлежит области определения функций $P(x, y), Q(x, y)$.

По первой формуле $\int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy = C$ имеем

$$\int_1^x dx + \int_0^y \frac{x+1}{x} dy = C,$$

$$x - 1 + \frac{x+1}{x} y = C, \Rightarrow x + y + \frac{y}{x} - 1 = C.$$

Получаем общий интеграл по второй формуле $\int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = C$:

$$\int_1^x \frac{x^2 - y}{x^2} dx + \int_0^y 2 dy = C,$$

$$x - 1 + \frac{y}{x} - y + 2y = C, \Rightarrow x + y + \frac{y}{x} - 1 = C,$$

который совпадает с уже найденным.

Ответ: $x + y + \frac{y}{x} - 1 = C$ – общее решение данного д.у.

Пример 2 Решить уравнение $(y - \sin x) dx + (x + 1) dy = 0$, если $y(0) = 1$.

Решение: Имеем $P(x, y) = y - \sin x, Q(x, y) = x + 1$.

Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Частные производные равны. Следовательно, данное уравнение является дифференциальным уравнением в полных дифференциалах.

Найдем функцию $U(x, y)$, для которой

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y - \sin x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x + 1$$

Из первого уравнения находим

$$U(x, y) = \int (y - \sin x) dx + \varphi(y) = yx + \cos x + \varphi(y)$$

Найдем $\varphi(y)$, используя уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x+1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x + \varphi'(y)$$

Приравнявая правые части последних двух равенств, получим

$$x+1 = x + \varphi'(y)$$

Следовательно, $\varphi'(y) = 1$ и $\varphi(y) = y + C_1$

Выражение для $\varphi(y)$ подставим в $U(x, y)$:

$$U(x, y) = xy + \cos x + y + C_1$$

Общий интеграл уравнения примет следующий вид $xy + \cos x + y = C$

Найдем частный интеграл. Для этого подставим начальное условие $y=1$ при $x=0$ в общий интеграл: $1+1=C$, $C=2$.

В итоге $xy + \cos x + y = 2$ - частный интеграл.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

а) $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x \cos y)dy = 0$; Ответ: $e^x + e^y + x(y + \sin y) - 2 = C$.

б) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$; Ответ: $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$.

в) $y' = \frac{(y - 3x^2)}{(4y - x)}$ Ответ: $\frac{8}{3}x^3 - xy + 2y^2 = C$.

г) $(2 - 9xy^3)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0$; Ответ: $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = C$.

д) $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$; Ответ: $4y \ln x + y^4 = C$.

е) $\frac{2x^2 + y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0$; Ответ: $x^2 + \frac{x^3}{y^2} + \frac{5}{y} = C$.

ж) $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$. Ответ: $x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} = C$.

2. Решить задачу Коши:

а) $e^{-y}dx + (2y - xe^{-y})dy = 0, y(-3) = 0$; Ответ: $xe^{-y} + y^2 = -3$.

б) $(\ln y - 2x)dx + \left(\frac{x}{y} - 2y\right)dy = 0, y(2) = 1$; Ответ: $x \ln |y| - x^2 - y^2 = -5$.

в) $x + ye^x + (y + e^x)y' = 0, y(0) = 4$ Ответ: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + ye^x = 12$.

г) $(ye^{xy} + 2x)dx + (xe^{xy} + 1)dy = 0, y(0) = 1$; Ответ: $e^{xy} + x^2 + y = 2$.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

в форме, разрешенной
относительно первой производной

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

характерная особенность:
правая часть есть произведение двух
функций, одна из которых зависит
только от x , вторая только от y .

метод решения

1. представляем производную y' , как
отношение дифференциалов $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

2. разносим дифференциалы в разные
части уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad / \quad : dx$$

$$dy = f_1(x) \cdot f_2(y) dx$$

3. требуем соответствие функций при
дифференциалах:

$$dy = f_1(x) \cdot f_2(y) dx \quad / \quad : f_2(y)$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx$$

4. интегрируем правую часть по x ,
левую по y , получаем о.р. (о.и.)

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx$$

в дифференциальной форме

$$P_1(x) \cdot P_2(y) dx + Q_1(x) \cdot Q_2(y) dy = 0$$

характерная особенность:
при дифференциалах dx и dy стоят
произведения двух функций, одна из
которых зависит только от x , вторая
только от y .

метод решения

1. разносим дифференциалы в разные
части уравнения:

$$Q_1(x) \cdot Q_2(y) dy = -P_1(x) \cdot P_2(y) dx$$

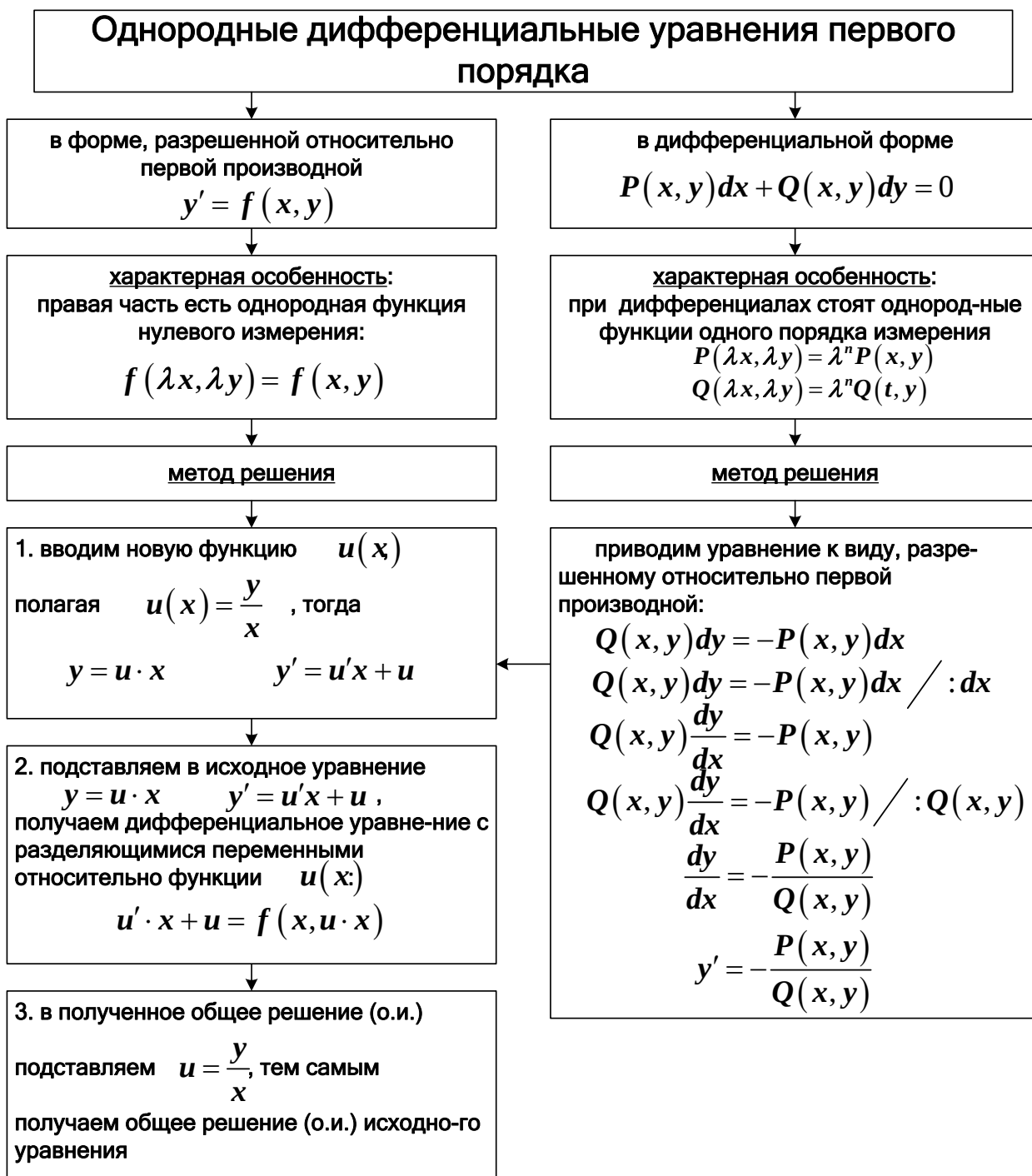
2. требуем соответствие функций при
дифференциалах:

делим обе части уравнения на
произведение функций $Q_1(x) \cdot P_2(y)$

$$\frac{Q_1(x) \cdot Q_2(y)}{Q_1(x) \cdot P_2(y)} dy = -\frac{P_1(x) \cdot P_2(y)}{Q_1(x) \cdot P_2(y)} dx$$

3. интегрируем правую часть по x ,
левую по y , получаем о.р. (о.и.)

$$\int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)} dy = -\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx$$



Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

общий вид л.д.у.

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x)$$

характерные особенности:

1. неизвестная функция и ее производная входят в уравнение в первой положительной степени и нет их произведений
2. $P(x) \neq 0$ $Q(x) \neq 0$

метод решения

1. решение ищем в виде

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

2. подставляем в исходное уравнение
 $y = u \cdot v$ $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$,
 получаем дифференциальное уравнение вида

$$u' \cdot v + u \cdot v' + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x)$$

3. $u' \cdot v + u \cdot (v' + P(x) \cdot v) = Q(x)$
 приравняем выражение в скобках к нулю
 $v' + P(x) \cdot v = 0$

получили д.у. с разделяющимися переменными относительно $v(x)$

4. находим решение д.у. полагая $C_1 = 0$

$$\begin{aligned} v' &= -P(x) \cdot v \\ \frac{dv}{dx} &= -P(x) \cdot v \quad / \cdot dx \\ dv &= -P(x) \cdot v dx \quad / : v \\ \frac{dv}{v} &= -P(x) dx \\ \int \frac{dv}{v} &= -\int P(x) dx \\ \ln v &= -\int P(x) dx + C_1 \quad (C_1 = 0) \\ v &= e^{-\int P(x) dx} \end{aligned}$$

уравнение Бернулли

$$y' + P(x) \cdot y = y^n \cdot Q(x)$$

характерные особенности:

1. неизвестная функция и ее производная входят в уравнение в первой положительной степени и нет их произведений
2. $P(x) \neq 0$ $Q(x) \neq 0$
3. n любое действительное число,
 $n \neq 0$ $n \neq 1$

метод решения

5. подставляем найденное значение

функции $v = e^{-\int P(x) dx}$
 в уравнение
 $u' \cdot v + u \cdot (v' + P(x) \cdot v) = Q(x)$,

получаем $u' \cdot e^{-\int P(x) dx} = Q(x)$

$$\begin{aligned} u' &= Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} \\ \frac{du}{dx} &= Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} \quad / \cdot dx \\ du &= Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx \\ u &= \int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx + C \end{aligned}$$

6. общее решение уравнения имеет вид:

$$y = u \cdot v$$

$$y = e^{-\int P(x) dx} \cdot \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx + C \right)$$

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

характерные особенности:

выражение, стоящее справа является полным дифференциалом некоторой функции двух независимых переменных, то есть выполняется условие

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

метод решения

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах определяется одной из следующих формул:

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy = C$$

$$\int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy = C$$

где точка $M_0(x_0, y_0) \in D$, области определения функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$

Для дифференциальных уравнений найти общее решение (или общий интеграл) и частное решение (или частный интеграл), если дано начальное условие.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

Вариант 1. $(x + xy^2)dx + (y - x^2y)dy = 0$ $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$ $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$ $x(y' - y) = e^x, \quad y(1) = 0$ $y' = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2-1}$ $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$	Вариант 2. $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0$ $\sin x \cdot y' = y \cos x + 2 \cos x$ $y^2 + x^2 y' = xy y'$ $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $4y' + x^3 y = (x^3 + 8)e^{-2x} y^2$ $2xy dx + (x^2 - y^2)dy = 0$
Вариант 3. $3x^2 y dx + 2\sqrt{9-x^3} dy = 0$ $y'\sqrt{1-x^2} - \cos^2 y = 0$ $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$ $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad y(0) = 0$ $y' + 2y = y^2 e^x$ $(3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0$	Вариант 4. $e^x \sin y dx + \operatorname{tg} y dy = 0$ $xy y' = 1 - x^2$ $(y^2 - 3x^2)dy + 2xy dx = 0$ $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3, \quad y(0) = 0$ $xy' + y = y^2 \ln x$ $(2 - 9xy^2)dx + (4y^2 - 6x^3)dy = 0$
Вариант 5. $e^x \operatorname{tg} y dx = (1 - e^x) \sec^2 y dy$ $\sqrt{4-x^2} y' + xy^2 + x = 0$ $y' = \frac{x+3y}{3x}$ $x^2 y' + xy + 1 = 0, \quad y(1) = 0$ $y' + y = x / y^2$ $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$	Вариант 6. $y dx + (\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy = 0$ $3^{y^2-x^2} = \frac{yy'}{x}$ $y' = \frac{2y}{2x+y}$ $y = x(y' - x \cos x), \quad y(\pi/2) = 0$ $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$ $e^{-y} dx - (2y + x e^{-y})dy = 0$
Вариант 7. $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$ $\cos^3 y \cdot y' - \cos(2x + y) = \cos(2x - y)$ $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 3\frac{y}{x} + 4$	Вариант 8. $y' = y^3 \cos^2 x \cdot \sin x$ $6x dx - y dy = yx^2 dy - 3xy^2 dx$ $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ $(x+1)y' + y = x^3 + x^2, \quad y(0) = 0$

4. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, y(-1) = \frac{3}{2}$ 5. $x dx = (x^2 / y - y^3) dy$ 6. $(3x^2 y + 2y + 3) dx + (x^3 + 2x + 3y^2) dy = 0$	5. $3(xy' + y) = xy^2$ 6. $\frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0$
---	--

Вариант 9. 1. $\sqrt{1-x^2} y' + xy^2 + x = 0$ 2. $e^{x+3y} dy = x dx$ 3. $y'x + x + y = 0$ 4. $y' + \frac{y}{2x} = x^2, y(1) = 1$ 5. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$ 6. $y^2(x-3y) dy - \left(x - \frac{1}{3}y^3\right) dx = 0$	Вариант 10. 1. $y' = \operatorname{tg} y \cdot \frac{\ln^3 x}{x}$ 2. $(1+e^{3y}) x dx = e^{3y} dy$ 3. $y' = \frac{2x+3y}{5x}$ 4. $xy' + y = \sin x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ 5. $3xy' + 5y = (4x-5)y^4$ 6. $\frac{3x^2+y^2}{y^2} dx - \frac{2x^3+5y}{y^3} dy = 0$
Вариант 11. 1. $\sin x \operatorname{tg} y dx - \frac{dy}{\sin x} = 0$ 2. $\sqrt{1-x^2} yy' + \sqrt{3+y^2} = 0$ 3. $xy' = \sqrt{2x^2+y^2} + y$ 4. $y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5, y(2) = 4$ 5. $2x^3 yy' + 3x^2 y^2 + 1 = 0$ 6. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right) dx - \frac{2y}{x^3} dy = 0$	Вариант 12. 1. $y' = (2y+1) \cdot \operatorname{tg} x$ 2. $3e^x \sin y dx + (1-e^x) \cos y dy = 0$ 3. $y' = \frac{x+10y}{10x-y}$ 4. $y' \cdot \sin x + y = 1 + \cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ 5. $3y' + 2xy = 2xy^{-2} e^{-2x^2}$ 6. $2x(1+\sqrt{x^2-y}) dx - \sqrt{x^2-y} dy = 0$
Вариант 13. 1. $(1+e^x) yy' = e^x$ 2. $x\sqrt{5+y^2} dx + y\sqrt{4+x^2} dy = 0$ 3. $y' = \frac{3y}{3x+2y}$ 4. $y' - 3x^2 y - x^2 e^{x^3} = 0, y(0) = 0$ 5. $yx' + x = -yx^2$ 6. $\frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx - \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} + 2y\right) dy = 0$	Вариант 14. 1. $xy dx + (x+1) dy = 0$ 2. $yy' = \frac{e^{2x}}{\ln y}$ 3. $xy' = 3\sqrt{x^2+y^2} + y$ 4. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, y(1) = e$ 5. $2y' + y \cos x = y^{-1} \cos x (1 + \sin x)$ 6. $(1+y^2 \sin 2x) dx - 2y \cos^2 x dy = 0$
Вариант 15. 1. $y(4+e^x) dy - e^x dx = 0$ 2. $\cos^2 x \cdot yy' = x$	Вариант 16. 1. $y' = 3 \cdot \sqrt[3]{y^2}$ 2. $x dx - y dy = yx^2 dy - xy^2 dx$

3. $(x-y)ydx - x^2dy = 0$ 4. $(x+1)y' + y = x^3 + x^2, \quad y(0) = 0$ 5. $y' + xy = x^3y^3$ 6. $\left(1 + \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(\frac{1}{x} + 2y\right)dy = 0$	3. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$ 4. $y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}, \quad y(0) = 2$ 5. $2(y' + xy) = (1+x)e^{-x}y^2$ 6. $3x^2(1+\ln y)dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy$
---	---

Вариант 17. 1. $y \ln y + xy' = 0$ 2. $(1+y^2)dx - y\sqrt{1-x^2}dy = 0$ 3. $(x+2y)dx - xdy = 0$ 4. $xy' - 2y + x^2 = 0, \quad y(1) = 0$ 5. $y' - xy = -y^3e^{-x^2}$ 6. $\frac{1}{x^2y}dx + \frac{1}{xy^2}dy = 0$	Вариант 18. 1. $3^{x^2+y}dy + xdx = 0$ 2. $yy'\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$ 3. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$ 4. $y' - y \sin x = e^{-\cos x} \cdot \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ 5. $y' + 4x^3y = 4(x^3 + 1)e^{-4x} \cdot y^2$ 6. $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \frac{(x^2 + 1)\cos y}{\cos 2y - 1}dy = 0$
Вариант 19. 1. $y' = e^{x^2}x(1+y^2)$ 2. $\operatorname{ctg} x \cos^2 y dy + \sin^2 x \operatorname{tg} y dy = 0$ 3. $y' = \frac{2x+y}{4x}$ 4. $y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1$ 5. $(x+1)(y' + y^2) = -y$ 6. $\frac{dx}{y} - \frac{x+y^2}{y^2}dy = 0$	Вариант 20. 1. $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2ydy$ 2. $y' = \sqrt{2y+3} \cdot \operatorname{tg} x$ 3. $y' = \frac{y}{x} - 1$ 4. $xy' + y = \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ 5. $xy' + y = 2y^2 \ln x$ 6. $\frac{y}{x^2}dx - \frac{xy+1}{x}dy = 0$
Вариант 21. 1. $x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0, \quad y(0) = 0$ 2. $y' \sin x = y \ln y$ 3. $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1$ 4. $y' - 2xy = e^{x^2}$ 5. $y' + y = x\sqrt{y}$	Вариант 22. 1. $(x+4)dy - xydx = 0$ 2. $y' + y = e^{-x}$ 3. $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$ 4. $(x+x^2)y' = y+1, \quad y(1) = 2$ 5. $y' + 2y = y^2e^x$

6. $\frac{1}{x} dy - \frac{y}{x^2} = 0$	6. $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$
Вариант 23. 1. $y^2 \ln x dx - (y-1) x dy = 0$ 2. $(\sqrt{xy} + \sqrt{x}) y' - y = 0$ 3. $\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dy = \frac{y}{x} dx$ 4. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3, \quad y(1) = 0$ 5. $y' + 2y = y^2 e^x$ 6. $(2x - y + 1) dx + (2y - x - 1) dy$	Вариант 24. 1. $(y + y\sqrt{x}) dx = x dy$ 2. $xyy' = 1 - x^2$ если $y(1) = 2$ 3. $xy' \ln \frac{y}{x} = y + y \ln \frac{y}{x}$ 4. $y' + 2xy = e^{-x^2}$ 5. $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$ 6. $(1 - e^{x/y}) dx + e^{x/y} (1 - x/y) dy = 0$
Вариант 25. 1. $y dx + (2x\sqrt{y} - x) dy = 0$ 2. $y' = 3^{x+y}$ 3. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ 4. $xy' + 3y = x^2$, если $y(1) = 0$ 5. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$ 6. $(3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2 y + 4y^3) dy = 0$	Вариант 26. 1. $(x^2 + x) y dx + (y^2 + 1) dy = 0$ 2. $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$, если $y(1) = 16$ 3. $y' = \frac{y}{x+y}$ 4. $xy' - y^2 = 1$ 5. $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$ 6. $\left(3x^2 \operatorname{tg} y - \frac{2y^3}{x^3}\right) dx + \left(x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right) dy = 0$
Вариант 27. 1. $(xy^3 + x) dx + (x^2 y^2 - y^2) dy = 0$ 2. $yy' = \frac{1-2x}{y}$ 3. $(xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x, \quad y(1) = 1$ 4. $xy' + \frac{x+1}{x} y = 3x^2 e^{\frac{1}{x}}$ 5. $xy^2 y' = x^2 + y^3$ 6. $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right) dx + \left(y - \frac{\sin x}{y^2}\right) dy = 0$	Вариант 28. 1. $(y^2 x + y^2) dy + x dx = 0$ 2. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, если $y(0) = 5$ 3. $y' = \frac{x-y}{x+y}$ 4. $y' \operatorname{ctg} x = y^2 + 1$ 5. $y' x + y = -xy^2$ 6. $(3x^2 - 2x - y) dx + (2y - x + 3y^2) dy = 0$
Вариант 29. 1. $x dy + \cos^2 y \cdot \ln xy dx = 0$ 2. $xy' - y = y^2$ 3. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 4. $xy' + y = xy^2$ 5. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3, \quad y(0) = 0$	Вариант 30. 1. $(1 + x^3) y^3 dx - (y^2 - 1) x^3 dy = 0$ 2. $2y'\sqrt{x} = y$, если $y(4) = 1$ 3. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ 4. $y' - y = e^x$ 5. $x(x-1)y' + y^3 = xy$

$$6. \quad (3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0$$

$$6. \quad (5x^4y^4 + 28x^6)dx + (4x^5y^3 - 3y^2)dy = 0$$

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

Пример 1. Для дифференциального уравнения найти общее решение (или общий интеграл)

$$(x^2 + x^2 y^3)dx + (y^2 + y^2 x^3)dy = 0$$

Решение. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными вида: $P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0$. В этом легко убедиться, вынеся за скобки общие множители в первом и втором слагаемых:

$$x^2(1 + y^3)dx + y^2(1 + x^3)dy = 0$$

Предположив, что $x \neq -1, y \neq -1$ и разделив обе части данного уравнения на произведение $(1 + x^3)(1 + y^3)$, получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{x^2}{1 + x^3}dx + \frac{y^2}{1 + y^3}dy = 0.$$

Интегрируя его, последовательно находим (произвольную постоянную можно представить в виде $\frac{1}{3}\ln|C|$):

$$\int \frac{x^2}{1 + x^3}dx + \int \frac{y^2}{1 + y^3}dy = \frac{1}{3}\ln|C|,$$

$$\frac{1}{3}\ln|1 + x^3| + \frac{1}{3}\ln|1 + y^3| = \frac{1}{3}\ln|C|,$$

$$\ln(1 + x^3)(1 + y^3) = \ln|C|, \Rightarrow (1 + x^3)(1 + y^3) = C.$$

Последнее равенство является общим интегралом данного уравнения. При его нахождении были приняты ограничения $x \neq -1, y \neq -1$. Однако функции $x = -1$ и $y = -1$ также являются решениями исходного уравнения, что легко проверяется; с другой стороны, они получаются из общего интеграла при $C = 0$. Следовательно, $x = -1, y = -1$ - частные решения данного уравнения.

Пример 2. Для дифференциального уравнения найти общее решение (или общий интеграл).

$$(1 + e^{2x})y^2 y' = e^x.$$

Решение. Запишем данное уравнение в дифференциальной форме, полагая $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$(1 + e^{2x})y^2 \frac{dy}{dx} = e^x,$$

или

$$(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx.$$

Теперь разделим переменные:

$$y^2 dy = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx.$$

Проинтегрируем последнее уравнение:

$$\int y^2 dy = \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx + \frac{C}{3},$$

$$\frac{y^3}{3} = \operatorname{arctg} e^x + \frac{C}{3},$$

$$y = \sqrt[3]{C + 3 \operatorname{arctg} e^x}.$$

Получили общее решение исходного уравнения.

Пример 3 Для дифференциального уравнения найти общее решение (или общий интеграл).

$$y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}.$$

Решение.

Правая часть уравнения есть однородная функция нулевого измерения так как

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + 2(\lambda x)(\lambda y) - 5(\lambda y)^2}{2(\lambda x)^2 - 6(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{\lambda^2 x^2 + 2\lambda^2 xy - 5\lambda^2 y^2}{2\lambda^2 x^2 - 6\lambda^2 xy} = \frac{\lambda^2 (x^2 + 2xy - 5y^2)}{\lambda^2 (2x^2 - 6xy)} = f(x, y)$$

Поэтому данное уравнение является однородным уравнением.

Преобразуем данное уравнение:

$$y' = \frac{x^2 \left(1 + 2 \frac{y}{x} - 5 \frac{y^2}{x^2} \right)}{x^2 \left(2 - 6 \frac{y}{x} \right)},$$

$$y' = \frac{1 + 2 \frac{y}{x} - 5 \frac{y^2}{x^2}}{2 - 6 \frac{y}{x}}.$$

Полагая $y = ux$, находим $y' = u'x + u$.

Подставим значения y и y' в преобразованное уравнение:

$$u'x + u = \frac{1 + 2u - 5u^2}{2 - 6u}.$$

Приводим его к уравнению с разделяющимися переменными:

$$u'x = \frac{1 + u^2}{2 - 6u}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int \frac{2-6u}{1+u^2} du = \int \frac{dx}{x},$$

откуда

$$2\operatorname{arctg} u - 3\ln|1+u^2| = \ln|x| + \ln C$$

Подставляя $u = \frac{y}{x}$, получаем

$$2\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - 3\ln\left|1 + \frac{y^2}{x^2}\right| = \ln|x| + \ln C.$$

Получили общее решение исходного уравнения.

Задание 4. Для дифференциального уравнения найти общее решение (или общий интеграл) и частное решение (или частный интеграл), если дано начальное условие.

$$xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}, \quad y(1) = 0.$$

Решение.

Данное уравнение является линейным, т.к. неизвестная функция y и ее производная y' входят в уравнение в первой положительной степени. Запишем его в виде $y' + p(x)y = g(x)$.

Преобразуем данное уравнение:

$$y' + \frac{x+1}{x}y = 3xe^{-x}.$$

Поэтому решение будем искать в виде: $y = U \cdot V \Rightarrow y' = U' \cdot V + U \cdot V'$.

После подстановки, получим:

$$u'v + uv' + \frac{x+1}{x}uv = 3xe^{-x}$$

или

$$u'v + u\left(v' + \frac{x+1}{x}v\right) = 3xe^{-x}.$$

В качестве функции v возьмем частное решение уравнения $v' + \frac{x+1}{x}v = 0$, обращающее в нуль коэффициент при u . Тогда получим два дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

$$v' + \frac{x+1}{x}v = 0, \quad u'v = 3xe^{-x}$$

Интегрируя первое уравнение системы, находим функцию v :

$$\begin{aligned} v' + \frac{x+1}{x}v &= 0, \\ \frac{dv}{v} + \frac{x+1}{x}dx &= 0, \end{aligned}$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{x+1}{x} dx + C$$

Полагаем $c = 0$, тогда $\ln|v| + x + \ln|x| = 0$, $v = \frac{e^{-x}}{x}$.

Проинтегрируем второе уравнение:

$$u'v = 3xe^{-x},$$

$$u' \frac{e^{-x}}{x} = 3xe^{-x},$$

$$u' = 3x^2,$$

$$u = \int 3x^2 dx + C,$$

$$u = x^3 + C.$$

Общее решение данного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$y = uv = \left(x^3 + C\right) \cdot \frac{e^{-x}}{x}.$$

Для нахождения C , подставим в общее решение начальное условие $y(1) = 0$:

$$\left(1^3 + C\right) \cdot \frac{e^{-1}}{1} = 0,$$

$$C = -1.$$

Частное решение исходного дифференциального уравнения, удовлетворяющее данному начальному условию, будет иметь вид:

$$y = \left(x^3 - 1\right) \cdot \frac{e^{-x}}{x}.$$

Пример 5. Для дифференциального уравнения найти общее решение (или общий интеграл).

$$xy' + y = xy^2 \ln x.$$

Решение.

Разделив обе части данного уравнения на $x \neq 0$, получим уравнение Бернулли. Решение ищем в виде: $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = (uv)^2 \ln x.$$

Группируем второе и третье слагаемое и выносим общий множитель u за скобки

$$u'v + u \left(v' + \frac{v}{x} \right) = (uv)^2 \ln x.$$

Функцию v ищем так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю:

$$v' + \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем последнее равенство и легко получаем частное решение

$$v = x^{-1} \text{ уравнения } v' + \frac{v}{x} = 0.$$

Теперь необходимо найти общее решение уравнения $u'v = u^2 v^2 \ln x$, где $v = x^{-1}$, т.е. уравнения $u' = u^2 \frac{\ln x}{x}$. Разделяем переменные в последнем уравнении и интегрируем его:

$$\begin{aligned} \frac{du}{u^2} &= \ln x \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int \ln x \frac{dx}{x}, \\ -\frac{1}{u} &= \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{C}{2} \Rightarrow u = -\frac{2}{C + \ln^2 x}. \end{aligned}$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения

$$y = uv = -\frac{2}{x(C + \ln^2 x)}.$$

Пример 6. Для дифференциального уравнения найти общее решение (или общий интеграл).

$$(x^2 + y - 4)dx + (x + y + e^y)dy = 0.$$

Решение. В нашем случае $P(x, y) = x^2 + y - 4$, $Q(x, y) = x + y + e^y$.

И так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1,$$

т.е. условие полного дифференциала выполнено, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Его общий интеграл можно найти по одной из формул

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy &= C, \\ \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy &= C, \end{aligned}$$

где нижние пределы x_0, y_0 могут быть выбраны произвольно. Выберем $x_0 = 0, y_0 = 0$. Выбор этих значений x_0, y_0 допустим, так как точка $M_0(0, 0) \in D$ принадлежит области определения функций $P(x, y), Q(x, y)$.

По первой формуле $\int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy = C$ имеем

$$\int_0^x (x^2 + 0 - 4) dx + \int_0^y (x + y + e^y) dy = C,$$

$$\frac{x^3}{3} - 4x + xy + \frac{y^2}{2} + e^y - 1 = C.$$

Получаем общий интеграл по второй формуле $\int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = C$:

$$\int_0^x (x^2 + y - 4) dx + \int_0^y (0 + y + e^y) dy = C,$$

$$\frac{x^3}{3} + xy - 4x + \frac{y^2}{2} + e^y - 1 = C,$$

который совпадает с уже найденным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1972.-Т.П.
2. *Бермант А.Ф.* Краткий курс математического анализа. – М.: Физматгиз, 1961.
3. *Фролов С.В., Шостак Р.Н.* Курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1966.
4. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.: ил. – (Высшее образование).
5. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. – М.: Наука, 1967. -т.2.
6. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальные уравнения. Кратные Интегралы. Функция комплексного переменного. – М.: Наука, 1981.
7. *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. 2-е изд., испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 384 с.
8. *Демидович Б. П., Моденов В. П.* Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. 3-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2008. — 288 с: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-0677-7
9. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1972.
10. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике. – Харьков: ХГУ, 1967.
11. *С.А. Агафонов, А.Д. Герман, Т.В. Муратова* Дифференциальные уравнения. - МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. -348 с. - (Математика в техническом университете)

**Третьякова Лилия Владимировна
Чернявская Светлана Алексеевна
Царёв Валентин Геннадьевич**

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

*Методические указания
к проведению практических занятий*

В авторской редакции

Изд. № 21/2022. Объем 2,75 п.л. Усл. печ. л. 2,56. Уч.-изд. л. 2,695.
РИИЦМ ФГАОУВО «Севастопольский государственный университет»