

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
И УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания
для самостоятельной работы
студентов технических специальностей
по дисциплине «Высшая математика»

Севастополь
СевГУ
2022

УДК 512.64(07)

ББК 22.143я73

Л59

Р е ц е н з е н т :

Ю.Е. Обжерин - д-р техн. наук, профессор
кафедры «Высшая математика»

Составители : С.О. Папков, Ю.И. Папкина, М.М. Никитин

Л59 Линейная алгебра : методические указания для самостоятельной работы студентов технических специальностей по дисциплине «Высшая математика» / Севастопольский государственный университет, Институт информационных технологий и управления в технических системах ; сост.: С.О. Папков, Ю.И. Папкина, М.М. Никитин. - Севастополь: СевГУ, 2022. - 48 с. - Текст: электронный.

Настоящее пособие предназначено для студентов технических специальностей, изучающих курс высшей математики. Оно содержит материалы, необходимые для выполнения индивидуальных заданий.

Для более глубокого изучения теоретического курса рекомендуется следующая учебная литература [1, 2, 3, 4, 5, 6], приведенная в библиографическом списке данного учебного пособия.

УДК 512.64(07)

ББК 22.143я73

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании кафедры «Высшая математика», протокол № 5 от 24 января 2022 г.

Допущено учебно-методическим центром СевГУ в качестве методических указаний.

СОДЕРЖАНИЕ

Образец решения заданий.....	4
Задания для индивидуальной работы.....	24
Задание №1.....	24
Задание №2.....	25
Задание №3.....	26
Задание №4.....	33
Задание №5.....	36
Задание №6.....	38
Задание №7.....	41
Задание №8.....	43
Задание №9.....	45
Библиографический список.....	48

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta \end{vmatrix}$.

Решение. Используем правило вычисления определителя II порядка и преобразуем затем полученное выражение согласно тригонометрическим формулам:

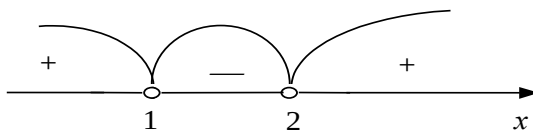
$$\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta \end{vmatrix} = \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha = (\sin \alpha \cos \beta)^2 - (\sin \beta \cos \alpha)^2 = \\ = (\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha)(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) = \sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta).$$

2. Решить неравенство $\begin{vmatrix} x^2 + 5 & 3 \\ x + 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$.

Решение. Раскрывая определитель, получаем неравенство:

$$\begin{vmatrix} x^2 + 5 & 3 \\ x + 1 & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) > 0.$$

Решение данного неравенства строим методом интервалов



Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

3а) Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение.

1) Чтобы получить значение определителя III порядка воспользуемся правилом Саррюса, для чего добавим справа от определителя два первых его столбца, после чего выделим диагонали, содержащие положительные (отмечены —) и отрицательные (отмечены -) произведения элементов определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

Тогда значение определителя оказывается равным

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) \cdot 3 + 4 \cdot (-2) \cdot (-4) - 4 \cdot 1 \cdot 3 - \\ - 1 \cdot (-3) \cdot (-4) - 2 \cdot (-2) \cdot 0 = 0 - 18 + 32 - 12 - 12 + 0 = -10.$$

2) Найдём значение данного определителя более рациональным, с вычислительной точки зрения, методом – преобразованием к «удобному» виду с последующим разложением по элементам строки (столбца). Преобразуем определитель добавлением ко второй строке II удвоенной первой $2 \cdot I$, и вычитанием из третьей строки определителя III утроенной первой $3 \cdot I$. Согласно свойствам определителя он не изменит своего значения:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{II + 2 \cdot I} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{III - 3 \cdot I} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -10 & -12 \end{vmatrix}$$

Используя разложение определителя по элементам первого столбца (он содержит лишь один ненулевой элемент) получаем следующее значение определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -10 & -12 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -10 & -12 \end{vmatrix} = -10.$$

Ответ: -10.

3b) Вычислить определитель четвёртого порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Действуя аналогично решению задания 3а (см. 2 способ), преобразуем исходный определитель с последующим разложением по элементам ряда:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{II} - 9 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 3 \cdot \text{I} \\ \text{IV} - 7 \cdot \text{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ -22 & 0 & -34 & -3 \\ -4 & 0 & -7 & 5 \\ -12 & 0 & -19 & -4 \end{vmatrix} = \\ & = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -22 & -34 & -3 \\ -4 & -7 & 5 \\ -12 & -19 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{I} - 2 \cdot \text{III} \end{matrix} = \\ & = \begin{vmatrix} -2 & -4 & -5 \\ 4 & 7 & -5 \\ 12 & 19 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{II} + 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} + 6 \cdot \text{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} -2 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & -15 \\ 0 & -5 & -26 \end{vmatrix} = \\ & = -2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -15 \\ -5 & -26 \end{vmatrix} = -2 \cdot (26 - 5 \cdot 15) = 98. \end{aligned}$$

Ответ: 98.

4. Найти $f(A)$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $f(A) = A^3 - 7A^2 + 13A - 5E$.

Решение.

По условию задачи $f(A) = A^3 - 7A^2 + 13A - 5E$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица III порядка. Вычислим

степени A^3, A^2 по правилу умножения двух матриц $A_{n \times m} \cdot B_{m \times p} = C_{n \times p}$, где элементы матрицы

C ($C_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, p$), находятся как

сумма произведений элементов i -ой строки матрицы A и j -го столбца матрицы B .

Получаем:

$$\begin{aligned} A^2 = A \cdot A &= \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cdot 5 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 & 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 & -5 \cdot 3 - 1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 1 \cdot 2 & -1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \\ 2 \cdot 5 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 & -2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 21 & 10 & -14 \\ 6 & 9 & -5 \\ 10 & 8 & -7 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$A^2 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 21 & 10 & -14 \\ 6 & 9 & -5 \\ 10 & 8 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 & 44 & -59 \\ 29 & 29 & -22 \\ 44 & 30 & -31 \end{pmatrix}.$$

По правилам умножения матрицы на скаляр и сложения матриц находим $f(A)$:

$$\begin{aligned}
 f(A) &= A^3 - 7A^2 + 13A - 5E = \begin{pmatrix} 87 & 44 & -59 \\ 29 & 29 & -22 \\ 44 & 30 & -31 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 21 & 10 & -14 \\ 6 & 9 & -5 \\ 10 & 8 & -7 \end{pmatrix} + \\
 &+ 13 \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 87 - 7 \cdot 21 + 13 \cdot 5 - 5 & 44 - 7 \cdot 10 + 13 \cdot 2 & -59 + 7 \cdot 14 - 13 \cdot 3 \\ 29 - 7 \cdot 6 + 13 \cdot 1 & 29 - 7 \cdot 9 + 13 \cdot 3 - 5 & -22 + 7 \cdot 5 - 13 \\ 44 - 7 \cdot 10 + 13 \cdot 2 & 30 - 7 \cdot 8 + 13 \cdot 2 & -31 + 7 \cdot 7 - 13 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Найти матрицу, обратную данной

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Решение.

Вычисляем определитель матрицы:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \overset{\text{II-III}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 6 = -12,
 \end{aligned}$$

так как определитель матрицы $\Delta = -12 \neq 0$, то существует обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов исходной матрицы.

Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -14;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Строим обратную матрицу A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} -2 & -6 & 20 \\ -1 & 3 & -14 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 & -5/3 \\ 1/6 & -1/4 & 7/6 \\ -1/6 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}.$$

Проверка полученного решения:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -6 & 20 \\ -1 & 3 & -14 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} -6 - 4 - 2 & -18 + 12 + 6 & 60 - 56 - 4 \\ -2 - 2 + 4 & -6 + 6 - 12 & 20 - 28 + 8 \\ -1 + 1 & 3 - 3 & -14 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= A^{-1} \cdot A = \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} -2 & -6 & 20 \\ -1 & 3 & -14 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} -6-6 & -8-12+20 & 4-24+20 \\ -3+3 & -4+6-14 & 2+12-14 \\ 3-3 & 4-6+2 & -2-12+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 & -5/3 \\ 1/6 & -1/4 & 7/6 \\ -1/6 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}.$

6. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 0. \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

а) Решение системы по правилу Крамера.

Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & -7 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{I} \cdot 3 \cdot \text{III} \\ \text{II} \cdot 5 \cdot \text{III} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 9 & -17 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -17 \end{vmatrix} = -17 + 27 = 10 \neq 0$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то данная система имеет единственное решение. Чтобы воспользоваться формулами Крамера, находим дополнительные определители, полученные из определителя системы путем замены коэффициентов при неизвестном x_i столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -7 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 40; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 30.$$

Используя формулы Крамера, получаем решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 4; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3.$$

б) Решение системы методом обратной матрицы.

Матричное решение системы имеет вид

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

В нашем случае

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} - \text{матрица обратная к } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & -7 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу A^{-1} (см. задание №5):

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -17 & 3 & 36 \\ -9 & 1 & 22 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение системы в матричном виде имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -17 & 3 & 36 \\ -9 & 1 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4+6 \\ -68+108 \\ -36+66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, имеем решение заданной системы:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 4; \quad x_3 = 3.$$

с) Решение системы методом Гаусса.

Составим расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & -7 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right).$$

Проведем элементарные преобразования над строками таким образом, чтобы все элементы, расположенные ниже главной диагонали, стали равными нулю.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & -7 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) &\cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -7 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \text{II} - 5 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{array} \\ &\cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & -17 & -15 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ 9 \cdot \text{III} - \text{II} \end{array} \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & -17 & -15 \\ 0 & 0 & -10 & -30 \end{array} \right). \end{aligned}$$

В результате этих преобразований система принимает следующий вид

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 9x_2 - 17x_3 = -15 \\ -10x_3 = -30 \end{cases}$$

Из последнего уравнения имеем $x_3 = 3$, подставив это значение во второе уравнение, получим $x_2 = 4$ и, наконец, из первого уравнения находим

$$x_1 = 3 - 2 \cdot x_3 + x_2 = 3 - 2 \cdot 3 + 4 = 1.$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 4$; $x_3 = 3$.

7. Решить систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение.

С помощью элементарных преобразований приведем матрицу системы к треугольному виду

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Pi - I \cong \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} I \cdot 4 \cong \begin{pmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 12 & 9 & 3 \end{pmatrix} I \cdot 4 \cong \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Pi - I.$$

Отсюда следует, что ранг матрицы $r(A) = 2$, так как минор

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0. \text{ Данный минор является базисным, при этом}$$

переменные x_1, x_2 , при которых выбраны столбцы базисного минора, являются базисными. Переменная x_3 оказывается свободной.

Так как ранг системы меньше числа неизвестных системы $r(A) < 3$, однородная система линейных уравнений имеет бесконечное множество решений. Найдем их, решая систему относительно базисных неизвестных

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}; \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = \frac{-x_3 - 2x_2}{3} \\ x_2 = x_3 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}.$$

Свободная переменная может принимать любые значения, поэтому положим $x_3 = C$. Тогда общее решение однородной системы может быть записано следующим образом $x_1 = -C, x_2 = C, x_3 = C$.

Ответ: $x_1 = -C, x_2 = C, x_3 = C$.

8. Найти собственные числа матрицы и соответствующие им собственные векторы

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение. Известно, что собственные числа матрицы являются корнями характеристического уравнения в виде определителя

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

то есть, собственные числа λ_i матрицы A это корни

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 8 & 3 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ -4 & 8 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив определитель левой части по элементам первой строки, получим

$$-(3+\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 8 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2-\lambda \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-(3+\lambda) \cdot \{(2-\lambda) \cdot (4-\lambda) - 8\} - 8 \cdot \{-(4-\lambda) + 4\} + 3 \cdot (-8 + 4 \cdot (2-\lambda)) = 0, \text{ или преобразуя, получаем}$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

Решив последнее уравнение, находим

$$\lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=2.$$

Получим собственные векторы, соответствующие каждому из найденных собственных чисел. Используем соотношение $A \cdot v_i = \lambda_i \cdot v_i$, откуда для каждого собственного числа множество собственных векторов определяется решением однородной системы линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda \cdot E) \cdot v = 0$, (см. задание №7).

а) $\lambda = 0$.

$$\begin{cases} -3 \cdot v_{11} + 8 \cdot v_{12} + 3 \cdot v_{13} = 0 \\ -v_{11} + 2 \cdot v_{12} + v_{13} = 0 \\ -4 \cdot v_{11} + 8 \cdot v_{12} - 4 \cdot v_{13} = 0 \end{cases}.$$

Ранг матрицы этой системы равен двум (две последних строки пропорциональны, $\begin{vmatrix} -3 & 8 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$), система не содержит нулевых столбцов, поэтому можно её решить, взяв первое и второе уравнение с любыми двумя компонентами в качестве базиса.

Возьмём базис $\{v_{12}, v_{13}\}$, оставив компоненту v_{11} свободной. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} 8 \cdot v_{12} + 3 \cdot v_{13} = 3 \cdot v_{11} \\ 2 \cdot v_{12} + v_{13} = v_{11} \end{cases}.$$

Решив систему, запишем первое множество собственных векторов матрицы A :

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ 0 \\ v_{11} \end{pmatrix}. \text{ В частности, при } v_{11} = 1 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

б) $\lambda = 1$.

$$\begin{cases} (-3-1) \cdot v_{21} + 8 \cdot v_{22} + 3 \cdot v_{23} = 0 \\ -v_{21} + (2-1) \cdot v_{22} + v_{23} = 0 \\ -4 \cdot v_{21} + 8 \cdot v_{22} + (4-1) \cdot v_{23} = 0 \end{cases}, \text{ или}$$

$$\begin{cases} -4 \cdot v_{21} + 8 \cdot v_{22} + 3 \cdot v_{23} = 0 \\ -v_{21} + v_{22} + v_{23} = 0 \\ -4 \cdot v_{21} + 8 \cdot v_{22} + 3 \cdot v_{23} = 0 \end{cases}.$$

Ранг матрицы этой системы равен двум (первая и третья строки равны, $\begin{vmatrix} -4 & 8 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$), система не содержит нулевых столбцов, поэтому её можно решить, взяв первое и второе уравнение с любыми двумя компонентами в качестве базиса.

Возьмём базис $\{v_{22}, v_{23}\}$, оставив компоненту v_{21} свободной. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} 8 \cdot v_{22} + 3 \cdot v_{23} = 4 \cdot v_{21} \\ v_{22} + v_{23} = v_{21} \end{cases}.$$

Решив систему, запишем второе множество собственных векторов матрицы A :

$$v_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ \frac{1}{5} \cdot v_{21} \\ \frac{4}{5} \cdot v_{21} \end{pmatrix}. \text{ В частности, при } v_{21} = 1 \text{ } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

с) $\lambda = 2$.

$$\begin{cases} (-3-2) \cdot v_{31} + 8 \cdot v_{32} + 3 \cdot v_{33} = 0 \\ -v_{31} + (2-2) \cdot v_{32} + v_{33} = 0 \\ -4 \cdot v_{31} + 8 \cdot v_{32} + (4-2) \cdot v_{33} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -5 \cdot v_{31} + 8 \cdot v_{32} + 3 \cdot v_{33} = 0 \\ -v_{31} + 0 \cdot v_{32} + v_{33} = 0 \\ -4 \cdot v_{31} + 8 \cdot v_{32} + 2 \cdot v_{33} = 0 \end{cases}.$$

С помощью элементарных преобразований приведем матрицу системы к треугольному виду, получим

$$\begin{cases} -v_{31} + 0 \cdot v_{32} + v_{33} = 0 \\ 0 \cdot v_{31} + 8 \cdot v_{32} - 2 \cdot v_{33} = 0 \\ 0 \cdot v_{31} + 0 \cdot v_{32} + 0 \cdot v_{33} = 0 \end{cases}$$

Ранг матрицы этой системы равен двум (в треугольной матрице две ненулевые строки), система не содержит нулевых столбцов, поэтому её можно решить, взяв первое и второе уравнение с любыми двумя компонентами в качестве базиса.

Возьмём базис $\{v_{32}, v_{33}\}$, оставив компоненту v_{31} свободной. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} 0 \cdot v_{32} + v_{33} = v_{31} \\ 8 \cdot v_{32} - 2 \cdot v_{33} = 0 \cdot v_{31} \end{cases}.$$

Решив систему, запишем третье множество собственных векторов матрицы A :

$$v_3 = \begin{pmatrix} v_{31} \\ \frac{1}{4} \cdot v_{31} \\ v_{31} \end{pmatrix}. \text{ В частности, при } v_{31} = 1 \text{ } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. Найти собственные числа матрицы и соответствующие им собственные векторы

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ -6 & 4 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Решение.

Будем искать собственные числа λ_i матрицы A как корни уравнения

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda & 3 \\ -6 & 4 & 0 & -8-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Используя разложение полученного определителя по элементам второй строки, так как она содержит только один ненулевой элемент, запишем уравнение в следующем виде

$$(1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 8-\lambda & 0 & -6 \\ 1 & -1-\lambda & 3 \\ -6 & 0 & -8-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда сразу получаем один из корней $\lambda_1=1$.

Оставшиеся корни будем искать, раскрывая полученный определитель третьего порядка. Раскладывая определитель по элементам второго столбца, преобразуем уравнение к виду

$$-(1+\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 \\ -6 & -8-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

что даёт нам $\lambda_2=-1$ и $-(64-\lambda^2)=36$.

Решив последнее уравнение, получим

$$\lambda_3=10, \lambda_4=-10.$$

Получим собственные векторы, соответствующие каждому из найденных собственных чисел (см. задание №8).

a) $\lambda=1$.

$$\begin{cases} (8-1) \cdot v_{11} + 2 \cdot v_{12} + 0 \cdot v_{13} - 6 \cdot v_{14} = 0 \\ 0 \cdot v_{11} + (1-1) \cdot v_{12} + 0 \cdot v_{13} + 0 \cdot v_{14} = 0 \\ v_{11} + 0 \cdot v_{12} + (-1-1) \cdot v_{13} + 3 \cdot v_{14} = 0 \\ -6 \cdot v_{11} + 4 \cdot v_{12} + 0 \cdot v_{13} + (-8-1) \cdot v_{14} = 0 \end{cases},$$

откуда

$$\begin{cases} 7 \cdot v_{11} + 2 \cdot v_{12} + 0 \cdot v_{13} - 6 \cdot v_{14} = 0 \\ v_{11} + 0 \cdot v_{12} - 2 \cdot v_{13} + 3 \cdot v_{14} = 0 \\ -6 \cdot v_{11} + 4 \cdot v_{12} + 0 \cdot v_{13} - 9 \cdot v_{14} = 0 \end{cases}.$$

Ранг матрицы системы равен 3 (в частности,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -12 \neq 0), \text{ поэтому допустим базис из трёх}$$

компонент вектора v_1 . Взяв базис из компонент v_{12} , v_{13} и v_{14} , и оставив компоненту v_{11} свободной, запишем систему в виде

$$\begin{cases} 2 \cdot v_{12} + 0 \cdot v_{13} - 6 \cdot v_{14} = -7 \cdot v_{11} \\ 0 \cdot v_{12} - 2 \cdot v_{13} + 3 \cdot v_{14} = -v_{11} \\ 4 \cdot v_{12} + 0 \cdot v_{13} - 9 \cdot v_{14} = 6 \cdot v_{11} \end{cases}.$$

Решив систему одним из методов задания №6, запишем первое множество собственных векторов матрицы A

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ \frac{33}{2} \cdot v_{11} \\ \frac{21}{2} \cdot v_{11} \\ \frac{20}{3} \cdot v_{11} \end{pmatrix}, \text{ в частности, при } v_{11}=1 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{33}{2} \\ \frac{21}{2} \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}.$$

b) $\lambda = -1$.

$$\begin{cases} (8+1) \cdot v_{21} + 2 \cdot v_{22} + 0 \cdot v_{23} - 6 \cdot v_{24} = 0 \\ 0 \cdot v_{21} + (1+1) \cdot v_{22} + 0 \cdot v_{23} + 0 \cdot v_{24} = 0 \\ v_{21} + 0 \cdot v_{22} + (-1+1) \cdot v_{23} + 3 \cdot v_{24} = 0 \\ -6 \cdot v_{21} + 4 \cdot v_{22} + 0 \cdot v_{23} + (-8+1) \cdot v_{24} = 0 \end{cases},$$

откуда

$$\begin{cases} 9 \cdot v_{21} + 2 \cdot v_{22} + 0 \cdot v_{23} - 6 \cdot v_{24} = 0 \\ 0 \cdot v_{21} + 2 \cdot v_{22} + 0 \cdot v_{23} + 0 \cdot v_{24} = 0 \\ v_{21} + 0 \cdot v_{22} + 0 \cdot v_{23} + 3 \cdot v_{24} = 0 \\ -6 \cdot v_{21} + 4 \cdot v_{22} + 0 \cdot v_{23} - 7 \cdot v_{14} = 0 \end{cases}.$$

С помощью элементарных преобразований приведем матрицу системы к треугольному виду, получим

$$\begin{cases} v_{21} + 0 \cdot v_{22} + 0 \cdot v_{23} + 3 \cdot v_{24} = 0 \\ 0 \cdot v_{21} + 2 \cdot v_{22} + 0 \cdot v_{23} + 0 \cdot v_{24} = 0 \\ 0 \cdot v_{21} + 0 \cdot v_{22} + 0 \cdot v_{23} - 33 \cdot v_{24} = 0 \\ 0 \cdot v_{21} + 0 \cdot v_{22} + 0 \cdot v_{23} + 0 \cdot v_{14} = 0 \end{cases}.$$

Матрица системы содержит три ненулевые строки, следовательно, её ранг равен трём. Вследствие того, что третий столбец — нулевой, компонента v_{23} должна быть свободной и допустим базис только из компонент v_{21} , v_{22} и v_{24} .

Так как $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -33 \end{vmatrix} = -66 \neq 0$, то при любом значении v_{23}

оставшаяся система будет давать только тривиальное решение $v_{21} = 0$, $v_{22} = 0$ и $v_{24} = 0$.

Запишем второе множество собственных векторов матрицы A

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{23} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ в частности, при } v_{23} = 1 \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

с) $\lambda = -10$.

$$\begin{cases} (8+10) \cdot v_{31} + 2 \cdot v_{32} + 0 \cdot v_{33} - 6 \cdot v_{34} = 0 \\ 0 \cdot v_{31} + (1+10) \cdot v_{32} + 0 \cdot v_{33} + 0 \cdot v_{34} = 0 \\ v_{31} + 0 \cdot v_{32} + (-1+10) \cdot v_{33} + 3 \cdot v_{34} = 0 \\ -6 \cdot v_{31} + 4 \cdot v_{32} + 0 \cdot v_{33} + (-8+10) \cdot v_{34} = 0 \end{cases},$$

откуда

$$\begin{cases} 18 \cdot v_{31} + 2 \cdot v_{32} + 0 \cdot v_{33} - 6 \cdot v_{34} = 0 \\ 0 \cdot v_{31} + 11 \cdot v_{32} + 0 \cdot v_{33} + 0 \cdot v_{34} = 0 \\ v_{31} + 0 \cdot v_{32} + 9 \cdot v_{33} + 3 \cdot v_{34} = 0 \\ -6 \cdot v_{31} + 4 \cdot v_{32} + 0 \cdot v_{33} + 2 \cdot v_{34} = 0 \end{cases}.$$

С помощью элементарных преобразований приведём матрицу системы к треугольному виду, получим

$$\begin{cases} v_{31} + 0 \cdot v_{32} + 9 \cdot v_{33} + 3 \cdot v_{34} = 0 \\ 0 \cdot v_{31} + 11 \cdot v_{32} + 0 \cdot v_{33} + 0 \cdot v_{34} = 0 \\ 0 \cdot v_{31} + 0 \cdot v_{32} - 162 \cdot v_{33} - 60 \cdot v_{34} = 0 \\ 0 \cdot v_{31} + 0 \cdot v_{32} + 0 \cdot v_{33} + 0 \cdot v_{34} = 0 \end{cases}.$$

Матрица системы содержит три ненулевые строки, следовательно, её ранг равен трём. Взяв базис из компонент v_{32} , v_{33} и v_{34} , и оставив компоненту v_{31} свободной, запишем систему в виде

$$\begin{cases} 0 \cdot v_{32} + 9 \cdot v_{33} + 3 \cdot v_{34} = -v_{31} \\ 11 \cdot v_{32} + 0 \cdot v_{33} + 0 \cdot v_{34} = 0 \\ 0 \cdot v_{32} - 162 \cdot v_{33} - 60 \cdot v_{34} = 0 \end{cases}.$$

Решив систему, запишем третье множество собственных векторов матрицы A

$$v_3 = \begin{pmatrix} v_{31} \\ 0 \\ -\frac{10 \cdot v_{31}}{9} \\ 3 \cdot v_{31} \end{pmatrix}, \text{ в частности, при } v_{31}=1 \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{10}{9} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

d) $\lambda = 10$.

$$\begin{cases} (8-10) \cdot v_{41} + 2 \cdot v_{42} + 0 \cdot v_{43} - 6 \cdot v_{44} = 0 \\ 0 \cdot v_{41} + (1-10) \cdot v_{42} + 0 \cdot v_{43} + 0 \cdot v_{44} = 0 \\ v_{41} + 0 \cdot v_{42} + (-1-10) \cdot v_{43} + 3 \cdot v_{44} = 0 \\ -6 \cdot v_{41} + 4 \cdot v_{42} + 0 \cdot v_{43} + (-8-10) \cdot v_{44} = 0 \end{cases},$$

откуда

$$\begin{cases} -2 \cdot v_{41} + 2 \cdot v_{42} + 0 \cdot v_{43} - 6 \cdot v_{44} = 0 \\ 0 \cdot v_{41} - 9 \cdot v_{42} + 0 \cdot v_{43} + 0 \cdot v_{44} = 0 \\ v_{41} + 0 \cdot v_{42} - 11 \cdot v_{43} + 3 \cdot v_{44} = 0 \\ -6 \cdot v_{41} + 4 \cdot v_{42} + 0 \cdot v_{43} - 18 \cdot v_{44} = 0 \end{cases}.$$

С помощью элементарных преобразований приведем матрицу системы к треугольному виду, получим

$$\begin{cases} v_{41} + 0 \cdot v_{42} - 11 \cdot v_{43} + 3 \cdot v_{44} = 0 \\ 0 \cdot v_{41} - 9 \cdot v_{42} + 0 \cdot v_{43} + 0 \cdot v_{44} = 0 \\ 0 \cdot v_{41} + 0 \cdot v_{42} - 22 \cdot v_{43} + 0 \cdot v_{44} = 0 \\ 0 \cdot v_{41} + 0 \cdot v_{42} + 0 \cdot v_{43} + 0 \cdot v_{44} = 0 \end{cases}.$$

Матрица системы содержит три ненулевые строки, следовательно, её ранг равен трём, нулевых столбцов матрица не содержит. Взяв базис из компонент v_{42} , v_{43} , v_{44} , и оставив компоненту v_{41} свободной, запишем систему в виде

$$\begin{cases} 0 \cdot v_{42} - 11 \cdot v_{43} + 3 \cdot v_{44} = -v_{41} \\ -9 \cdot v_{42} + 0 \cdot v_{43} + 0 \cdot v_{44} = 0 \\ 0 \cdot v_{42} - 22 \cdot v_{43} + 0 \cdot v_{44} = 0 \end{cases}.$$

Решив систему, запишем четвёртое множество собственных векторов матрицы A

$$v_4 = \begin{pmatrix} v_{41} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \cdot v_{41} \end{pmatrix}, \text{ в частности, при } v_{41} = 1 \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание №1. Вычислить определитель второго порядка:

$$1.1. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} \quad 1.2. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} \quad 1.3. \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$$

$$1.4. \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg} \alpha \end{vmatrix} \quad 1.5. \begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix} \quad 1.6. \begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$1.7. \begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} \quad 1.8. \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} \quad 1.9. \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^3+x+1 \end{vmatrix}$$

$$1.10. \begin{vmatrix} \sqrt{a}-1 & -1 \\ a & \sqrt{a}+1 \end{vmatrix} \quad 1.11. \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} \quad 1.12. \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

$$1.13. \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg} \alpha & \operatorname{ctg} \alpha \end{vmatrix} \quad 1.14. \begin{vmatrix} a-b & a+b \\ a+b & a-b \end{vmatrix} \quad 1.15. \begin{vmatrix} \log_b a & 1 \\ 1 & \log_a b \end{vmatrix}$$

$$1.16. \begin{vmatrix} 1-\sqrt{5} & 1-\sqrt{7} \\ 1+\sqrt{7} & 1+\sqrt{5} \end{vmatrix} \quad 1.17. \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a+b & a-b \end{vmatrix} \quad 1.18. \begin{vmatrix} \sqrt{m}-\sqrt{n} & 1 \\ m+n & \sqrt{m}+\sqrt{n} \end{vmatrix}$$

$$1.19. \begin{vmatrix} \log_{\sqrt{2}} 2 & 3 \\ 2 & 2^{\log_2 3} \end{vmatrix} \quad 1.20. \begin{vmatrix} \log_3 \frac{1}{9} & -2 \\ 3 & \log_2 8 \end{vmatrix} \quad 1.21. \begin{vmatrix} \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{4} \end{vmatrix}$$

$$1.22. \begin{vmatrix} \sin \frac{7\pi}{6} & \cos \frac{7\pi}{6} \\ \cos \frac{5\pi}{4} & \sin \frac{5\pi}{4} \end{vmatrix} \quad 1.23. \begin{vmatrix} 0,25 & 2^{-3} \\ \frac{1}{2} & 2^{-2} \end{vmatrix} \quad 1.24. \begin{vmatrix} 2^{\log_2 3 - \log_2 4} & \frac{1}{2} \\ 3 & \log_{\sqrt{2}} 2 \end{vmatrix}$$

$$1.25. \left| \begin{array}{cc} \log_{25} 5 & \frac{1}{4} \\ 2 \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{6} \end{array} \right| \quad 1.26. \left| \begin{array}{cc} 2^x & \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \\ 8 & 2^{1-x} \end{array} \right| \quad 1.27. \left| \begin{array}{cc} \sqrt{39} - \sqrt{26} & 2 \\ \sqrt{3} - \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{13}} \end{array} \right|$$

$$1.28. \left| \begin{array}{cc} a-b & 3ab \\ a-b & a^2 + ab + b^2 \end{array} \right| \quad 1.29. \left| \begin{array}{cc} a^2 - ab + b^2 & -3ab \\ a+b & a+b \end{array} \right|$$

$$1.30. \left| \begin{array}{cc} \cos 2\alpha & 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} & -1 \end{array} \right|.$$

Задание №2. Решить неравенство.

$$2.1. \left| \begin{array}{cc} x & 3x \\ 4 & 2x \end{array} \right| < 14 \quad 2.2. \left| \begin{array}{cc} x & x+5 \\ 2 & x \end{array} \right| > -7 \quad 2.3. \left| \begin{array}{cc} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{array} \right| > 0$$

Ответ: $(-1; 7)$. Ответ: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$. Ответ: $(3; +\infty)$.

$$2.4. \left| \begin{array}{cc} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{array} \right| < 0 \quad 2.5. \left| \begin{array}{cc} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{array} \right| > 5 \quad 2.6. \left| \begin{array}{cc} x & x \\ 2 & x \end{array} \right| > -1$$

Ответ: $(-10; +\infty)$. Ответ: $(-\infty, -3)$. Ответ: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

$$2.7. \left| \begin{array}{cc} 2x+1 & 1 \\ 5x & 3 \end{array} \right| > 0 \quad 2.8. \left| \begin{array}{cc} 5x+7 & 5 \\ x & 3 \end{array} \right| > 0 \quad 2.9. \left| \begin{array}{cc} 2x & 4 \\ 3x & x \end{array} \right| > 0$$

Ответ: $(-3; +\infty)$. Ответ: $(-2, 1; +\infty)$ Ответ: $(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$

$$2.10. \left| \begin{array}{cc} x & 2 \\ 3x-4 & 5 \end{array} \right| > 1 \quad 2.11. \left| \begin{array}{cc} x & -1 \\ 5x+6 & x \end{array} \right| > 0 \quad 2.12. \left| \begin{array}{cc} x & x+5 \\ 2 & x \end{array} \right| < -7$$

Ответ: $(-\infty, 7)$. Ответ: $(-\infty, -3) \cup (-2, +\infty)$ Ответ: $(-1; 3)$

$$2.13. \begin{vmatrix} 3x-2 & x \\ -x & -1 \end{vmatrix} > 0 \quad 2.14. \begin{vmatrix} x & x-1 \\ 5 & x \end{vmatrix} > -1 \quad 2.15. \begin{vmatrix} x & 2 \\ x+5 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

Ответ: $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$. Ответ: $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ Ответ: $(-\infty, -10)$

$$2.16. \begin{vmatrix} 2 & x \\ x & x+5 \end{vmatrix} > 7 \quad 2.17. \begin{vmatrix} x & 2x+8 \\ -8 & x \end{vmatrix} \geq 0 \quad 2.18. \begin{vmatrix} 3x & 2 \\ 2 & 3x \end{vmatrix} \geq 0$$

Ответ: $(-1, 3)$ Ответ: $(-\infty, +\infty)$. Ответ: $(-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, +\infty)$

$$2.19. \begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} > 14 \quad 2.20. \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 3x-3 \end{vmatrix} < 0 \quad 2.21. \begin{vmatrix} x & 2 \\ x & x \end{vmatrix} < -1$$

Ответ: $(-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$ Ответ: $(-\infty, 3)$ Ответ: $x \in \emptyset$.

$$2.22. \begin{vmatrix} 2 & x \\ x & x+5 \end{vmatrix} < 7 \quad 2.23. \begin{vmatrix} 2 & 7x \\ 1 & 2x-2 \end{vmatrix} < 5 \quad 2.24. \begin{vmatrix} x & -16 \\ x+4 & x \end{vmatrix} \leq 0$$

Ответ: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$. Ответ: $(-3, +\infty)$. Ответ: $x = -8$.

$$2.25. \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 3x & x \end{vmatrix} < 0 \quad 2.26. \begin{vmatrix} 3x & x \\ 6 & x \end{vmatrix} > 0 \quad 2.27. \begin{vmatrix} x & 5 \\ x-1 & x \end{vmatrix} < -1$$

Ответ: $(0; 6)$ Ответ: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ Ответ: $(2; 3)$

$$2.28. \begin{vmatrix} 2 & 2x \\ -x & 2x \end{vmatrix} < 0 \quad 2.29. \begin{vmatrix} x^2 & -x \\ 6 & 6 \end{vmatrix} \geq 0 \quad 2.30. \begin{vmatrix} x & 6 \\ x & 3x \end{vmatrix} \leq 0.$$

Ответ: $(-2; 0)$. Ответ: $(-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$ Ответ: $[0; 2]$

Задание №3. Вычислить определители третьего и четвёртого порядка.

$$3.1. \text{ a) } \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{ b) } \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

Ответ: a) -12 ; b) -197 .

$$3.2. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}$$

Ответ: а) -2; б) 392.

$$3.3. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Ответ: а) 29; б) 202.

$$3.4. \text{ a) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

Ответ: а) 87; б) -276.

$$3.5. \text{ a) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Ответ: а) 0; б) 320.

$$3.6. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

Ответ: а) 180; б) 281

$$\text{b) } \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ -4 & -1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & -6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 9 \\ 5 & -6 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} -5 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 6 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$3.7. \text{ a) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 10 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Ответ: а)80; б) 260.

$$3.8. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & -4 & 1 \\ 6 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Ответ: а)18; б) 70.

$$3.9. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 7 & -1 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \\ -2 & 8 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

Ответ: а)0; б)204.

$$3.10. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 7 & 4 \\ 6 & 1 & 5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Ответ: а)12; б) 188.

$$3.11. \text{ a) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & 8 & 3 \\ 2 & 7 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

Ответ: а)3; б) 160.

$$3.12. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Ответ: а)0; б) 222.

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 & 4 \\ 4 & -5 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$3.13. \text{ a) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix}$$

Ответ: а)3; б) 38.

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 5 & -6 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$3.14. \text{ a) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

Ответ: а)0; б) -293.

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ -5 & 5 & 6 & 8 \\ 7 & 8 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$3.15. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}$$

Ответ: а)-3; б) -54.

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 0 & 8 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3.16. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}$$

Ответ: а)-3; б) 242.

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 6 & 2 & 6 & 1 \\ -7 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 9 & 7 \\ 2 & -8 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$3.17. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Ответ: а)10; б) –110.

$$3.18. \text{ a) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Ответ: а)–10; б)–296.

$$3.19. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 8 & -15 \end{vmatrix}$$

Ответ: а) 0; б) –18.

$$3.20. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$$

Ответ: а)144; б) –267.

$$3.21. \text{ a) } \begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

Ответ: а)–96; б) –68.

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 7 & 5 & 8 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 7 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & 0 \\ -5 & 2 & 1 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \\ 7 & -6 & 4 & 2 \\ 2 & -8 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 5 & 5 & 6 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 8 \\ 7 & -9 & -3 & 4 \\ 8 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -6 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 7 \\ -1 & 1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$3.22. a) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Ответ: a)10; b) 293.

$$3.23. a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ответ: a)–2; b) –13.

$$3.24. a) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

Ответ: a)17; b)–186.

$$3.25. a) \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Ответ: a) –16; b) 219.

$$3.26. a) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Ответ: a)21; b) –214.

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & -4 \\ 8 & 7 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 7 & 2 & 9 & 7 \\ 8 & 3 & 6 & 4 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 & 8 \\ 5 & -5 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 8 & 1 \\ -2 & -4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 4 \\ -5 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$3.27. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ -3 & 6 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 9 & 8 \\ 3 & -4 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

Ответ: а)–2; б) 271.

$$3.28. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Ответ: а)2; б)–28.

$$3.29. \text{ a) } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 15 \\ 1 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} -4 & 6 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Ответ: а)115; б) 244.

$$3.30. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 & 1 \\ -6 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & -8 & 4 & 2 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ответ: а) –11; б) –2.

Задание №4. Вычислить $f(A)$ если

$$4.1. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}, f(A) = 3A^2 - 2A + 5E \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 6 & 16 & 21 \\ 8 & 61 & 1 \\ 21 & 85 & 13 \end{pmatrix}.$$

$$4.2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, f(A) = A^2 - A - 3E. \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & 2 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$4.3. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, f(A) = 2A^3 + 4A - 5E. \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 61 & 0 & 24 \\ 6 & 19 & 66 \\ 24 & 66 & 265 \end{pmatrix}.$$

$$4.4. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, f(A) = A^2 + A + 2E. \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 4 & 12 & 2 \\ 6 & 14 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$4.5. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, f(A) = A^2 - A + 2E. \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$4.6. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, f(A) = 6A^2 + 11A - 6E. \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 11 & 2 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ -5 & 140 & 40 \end{pmatrix}.$$

$$4.7. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, f(A) = A^3 - 3A^2 + 4E \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4.8. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f(A) = -A^3 + 5A^2 + 8E \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$4.9. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f(A) = A^2 + 2A - 3E \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 5 & 15 & 0 \\ 15 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$4.10. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(A) = A^2 + 2A + 3E \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 11 & 3 & 24 \\ 3 & 11 & 24 \\ 24 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$4.11. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(A) = A^2 - 3A + 2E \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4.12. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(A) = 2A^2 - 3A + E \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4.13. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad f(A) = A^2 + A + E \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 7 & 0 & 42 \\ 42 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 43 \end{pmatrix}.$$

$$4.14. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(A) = A^3 - 2A + 3E \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$4.15. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(A) = A^2 - A - E \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$4.16. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f(A) = 2A^2 - 3A - 2E \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$4.17. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(A) = A^2 + 4A + 4E \quad \text{Ответ:} \begin{pmatrix} 9 & 12 & 5 \\ 0 & 9 & 12 \\ 21 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$4.18. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(A) = 4A^2 + A + E \quad \text{Ответ:} \begin{pmatrix} 19 & 5 & 5 \\ 39 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 19 \end{pmatrix}.$$

$$4.19. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(A) = 4A^2 - 4A + E \quad \text{Ответ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4.20. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(A) = 3A^2 - 3A - 3E \quad \text{Ответ:} \begin{pmatrix} 3 & 18 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

.

$$4.21. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f(A) = 2A^2 - 2A + 2E \quad \text{Ответ:} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$4.22. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(A) = A^2 + 3A + E \quad \text{Ответ:} \begin{pmatrix} 29 & 4 & 4 \\ 4 & 11 & 0 \\ 4 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$4.23. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(A) = 3A^2 - 2A + 4E \quad \text{Ответ:} \begin{pmatrix} 12 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 8 \\ 5 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$4.24. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(A) = 5A^3 + A^2 + E \quad \text{Ответ:} \begin{pmatrix} 7 & 44 & -126 \\ 0 & 7 & 44 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$4.25. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, f(A) = 2A^2 + 3A + 2E \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 16 & 14 & 27 \\ 5 & 1 & 0 \\ -1 & 14 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$4.26. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, f(A) = A^2 - 5A + 3E \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ -6 & -1 & -6 \\ -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$4.27. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, f(A) = A^2 + A - E \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 11 & 2 & 2 \\ 12 & 1 & 20 \\ 6 & 30 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$4.28. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, f(A) = A^2 + 3A + E \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 5 & 10 & 18 \\ 10 & 29 & 54 \\ 18 & 54 & 109 \end{pmatrix}.$$

$$4.29. A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, f(A) = A^2 + 4A + 3E \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 5 & 12 & 35 \end{pmatrix}.$$

$$4.30. A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, f(A) = A^3 + 2A^2 + A \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} 180 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задание №5. Найти матрицу обратную данной и сделать проверку

$$5.1. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad 5.2. \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad 5.3. \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ 4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5.4. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad 5.5. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad 5.6. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5.7. \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5.8. \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$5.9. \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5.10. \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5.11. \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$5.12. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$5.13. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5.14. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$5.15. \begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$5.16. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5.17. \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$5.18. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$5.19. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5.20. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & -3 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$5.21. \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$5.22. \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$5.23. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5.24. \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$5.25. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$5.26. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5.27. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$5.28. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad 5.29. \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad 5.30. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Задание №6. Решить систему линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера, методом обратной матрицы и с помощью метода Гаусса.

$$6.1. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases} \quad 6.2. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 36 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = 3; x_3 = 2$. Ответ: $x_1 = 24,5; x_2 = 21,5; x_3 = 10$.

$$6.3. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \quad 6.4. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = 3; x_3 = 2$. Ответ: $x_1 = \frac{5}{3}; x_2 = 0; x_3 = -\frac{2}{3}$.

$$6.5. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases} \quad 6.6. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = -1$. Ответ: $x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 1$.

$$6.7. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad 6.8. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 0,5; x_2 = 2; x_3 = 1,5$. Ответ: $x_1 = -14; x_2 = -5; x_3 = 25$.

$$6.9. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases} \quad 6.10. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x_1 = 5; x_2 = 6; x_3 = 10$. ОТВЕТ: $x_1 = -1; x_2 = 0; x_3 = 1$.

$$6.11. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases} \quad 6.12. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 13 \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x_1 = 1,3; x_2 = 1,7; x_3 = -0,1$. ОТВЕТ: $x_1 = \frac{8}{3}; x_2 = -\frac{40}{39}; x_3 = \frac{23}{39}$.

$$6.13. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \quad 6.14. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 21 \\ 7x_1 - x_2 - 3x_3 = 6 \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x_1 = 4; x_2 = 5; x_3 = -3$. ОТВЕТ: $x_1 = 0; x_2 = 3; x_3 = -3$.

$$6.15. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases} \quad 6.16. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x_1 = 1; x_2 = \frac{1}{3}; x_3 = \frac{22}{3}$. ОТВЕТ: $x_1 = 1,5; x_2 = -0,5; x_3 = -3$.

$$6.17. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases} \quad 6.18. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 1$. ОТВЕТ: $x_1 = \frac{8}{9}; x_2 = \frac{4}{9}; x_3 = \frac{1}{3}$.

$$6.19. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -7 \end{cases} \quad 6.20. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 0$. ОТВЕТ: $x_1 = \frac{2}{11}; x_2 = \frac{26}{11}; x_3 = -1$.

$$6.21. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases} \quad 6.22. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x_1 = 3; x_2 = 1; x_3 = 1$. ОТВЕТ: $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = -2$.

$$6.23. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \quad 6.24. \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x_1 = 2; x_2 = 3; x_3 = 1$. ОТВЕТ: $x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 1$.

$$6.25. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \quad 6.26. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x_1 = \frac{4}{7}; x_2 = -\frac{8}{7}; x_3 = -1$. ОТВЕТ: $x_1 = 3; x_2 = -1; x_3 = 2$.

$$6.27. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \quad 6.28. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x_1 = 5; x_2 = -8; x_3 = 5,4$. ОТВЕТ: $x_1 = -\frac{3}{7}; x_2 = -\frac{2}{7}; x_3 = \frac{5}{7}$.

$$6.29. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases} \quad 6.30. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 5; x_2 = 6; x_3 = 10$. Ответ: $x_1 = 2; x_2 = -2; x_3 = 3$.

Задание №7. Решить систему линейных однородных уравнений.

$$7.1. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad 7.2. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$7.3. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 - 8x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad 7.4. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$7.5. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad 7.6. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$7.7. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad 7.8. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$7.9. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 14x_2 + 15x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad 7.10. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - 13x_3 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$7.11. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 14x_2 + 15x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad 7.12. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$7.13. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad 7.14. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$7.15. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 - 5x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases} \quad 7.16. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$7.17. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad 7.18. \begin{cases} 7x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$7.19. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases} \quad 7.20. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$$

$$7.21. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$7.22. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$7.23. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - 14x_2 + 15x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$7.24. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$7.25. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$7.26. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$7.27. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$7.28. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$7.29. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$7.30. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Задание №8. Найти собственные числа матрицы и соответствующие им собственные векторы

$$8.1. \begin{pmatrix} -7 & 4 & 1 \\ -9 & 1 & -7 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$8.2. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -9 & -2 & -7 \\ 9 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$8.3. \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ -9 & 0 & 9 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$8.5. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -9 & -3 & -3 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$8.7. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -9 & -9 & 3 \\ -7 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$8.9. \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ -9 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$8.11. \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ -9 & -9 & 5 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$8.13. \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 5 \\ 1 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$8.15. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -8 & -9 & -1 \\ -6 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$8.17. \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -6 \\ -4 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$8.4. \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ -9 & -9 & 0 \\ -6 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8.6. \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -9 & 1 & -7 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$8.8. \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ -9 & -9 & 9 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$8.10. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -9 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

$$8.12. \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 2 & -8 & 9 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$8.14. \begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -3 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$8.16. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -9 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$8.18. \begin{pmatrix} -4 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & -4 \\ 8 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$8.19. \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -5 & -9 & 1 \\ -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$8.21. \begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 4 & 3 & -4 \\ -3 & -9 & 9 \end{pmatrix}$$

$$8.23. \begin{pmatrix} 9 & 5 & -2 \\ 7 & -9 & -8 \\ 9 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$8.25. \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 8 & 4 & 4 \\ 2 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$8.27. \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -8 & -7 & 1 \\ -1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$8.29. \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$8.20. \begin{pmatrix} -2 & 7 & 8 \\ 5 & -6 & 3 \\ -7 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$8.22. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -6 & -3 & -9 \\ 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8.24. \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 5 & -6 & -4 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$8.26. \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 3 & -9 & -9 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$8.28. \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 3 & -9 & -1 \\ -9 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$

$$8.30. \begin{pmatrix} 7 & -3 & 6 \\ -2 & -9 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Задание №9. Найти собственные числа матрицы и соответствующие им собственные векторы

$$9.1. \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$9.2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$9.3. \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$9.5. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$9.7. \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 12 & 0 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$9.9. \begin{pmatrix} 12 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 6 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$9.11. \begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 & -8 \\ 5 & -7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ -8 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$9.13. \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & -1 \\ 8 & 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$9.4. \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$9.6. \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$9.8. \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & -12 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & -4 \\ -12 & 7 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$9.10. \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$9.12. \begin{pmatrix} -8 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \\ 6 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$9.14. \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 & -12 \\ 2 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ -12 & 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$9.15. \begin{pmatrix} 12 & 3 & 0 & -9 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 7 \\ -9 & -1 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$9.17. \begin{pmatrix} -12 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 7 \\ -9 & 4 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$9.19. \begin{pmatrix} 15 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 8 & 0 & 3 & -15 \end{pmatrix}$$

$$9.21. \begin{pmatrix} 15 & 0 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 5 & -15 \end{pmatrix}$$

$$9.23. \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$9.25. \begin{pmatrix} 15 & 0 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 4 & -15 \end{pmatrix}$$

$$9.16. \begin{pmatrix} -9 & 0 & 7 & 12 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 12 & 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$9.18. \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 & 15 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \\ 15 & 1 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$9.20. \begin{pmatrix} -8 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -7 & 4 \\ 15 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$9.22. \begin{pmatrix} 3 & 0 & -9 & -4 \\ 6 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$9.24. \begin{pmatrix} 6 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & -3 \\ 8 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$9.26. \begin{pmatrix} 12 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -5 & -3 \\ 9 & 4 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$9.27. \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & -4 \\ -4 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$9.29. \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 2 \\ 6 & -5 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$9.28. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$9.30. \begin{pmatrix} 12 & 0 & 1 & 5 \\ 9 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & -12 \end{pmatrix}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1987. – 350 с.
2. Крутицкая Н.И., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – М.: Высш. шк., 1985. – 120 с.
3. Фадеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1977. – 302 с.
4. Добротин Д.А. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. – 120 с.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1988. – 222 с.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974. – 296 с.

В авторской редакции