

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Методические указания
и контрольные задания для самостоятельной работы
для студентов направления подготовки
44.03.05 - Педагогическое образование
с двумя профилями подготовки
(профили: «Математика и физика», «Математика и информатика»).

Севастополь
СевГУ
2022

УДК 511.2(075.8)
ББК 22.13я73
Т33

Р е ц е н з е н т :

Ю.И. Папкова - канд. физ.-мат. наук,
доцент кафедры "Высшая математика".

Составители : С.О. Папков, А.И. Друшляк

Т33 Теория чисел : методические указания и контрольные задания для самостоятельной работы для студентов направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование с двумя профилями подготовки (профили: «Математика и физика», «Математика и информатика») / Севастопольский государственный университет, кафедра «Высшая математика» ; сост.: С.О. Папков, А.И. Друшляк. – Севастополь: СевГУ, 2022. – 30 с. – Текст : электронный.

Целью настоящих методических указаний является оказание помощи студентам дневной формы обучения при изучении дисциплины "Теория чисел". В них приведены теоретические сведения, рассмотрены примеры решения типовых задач.

Представлены 20 вариантов индивидуальных заданий для самостоятельного решения.

УДК 511.2(075.8)
ББК 22.13я73

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании кафедры "Высшая математика", протокол № 7 от 31 марта 2022 г.

Допущено учебно-методическим центром СевГУ в качестве методических указаний.

Содержание

1	Образец выполнения нулевого варианта	4
2	Варианты контрольного задания	19
	Приложение	28
	Список литературы	29

1 Образец выполнения нулевого варианта

Задача 1. Найти НОД трех чисел 196, 4410, 12012, используя алгоритм Евклида.

Решение. $(196, 4410, 12012) = (196, (4410, 12012))$. Сначала по алгоритму Евклида находим НОД двух чисел $(4410, 12012)$:

$$\begin{array}{r} 12012 \mid \underline{4410} \\ - \underline{8820} \quad 2 \\ \hline 3192 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4410 \mid \underline{3192} \\ - \underline{3192} \quad 1 \\ \hline 1218 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3192 \mid \underline{1218} \\ - \underline{2436} \quad 1 \\ \hline 756 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1218 \mid \underline{756} \\ - \underline{756} \quad 1 \\ \hline 462 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 756 \mid \underline{462} \\ - \underline{462} \quad 1 \\ \hline 294 \end{array} \quad \begin{array}{r} 462 \mid \underline{294} \\ - \underline{294} \quad 1 \\ \hline 168 \end{array} \quad \begin{array}{r} 294 \mid \underline{168} \\ - \underline{168} \quad 1 \\ \hline 126 \end{array} \quad \begin{array}{r} 168 \mid \underline{126} \\ - \underline{126} \quad 1 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 126 \mid \underline{42} \\ - \underline{126} \quad 3 \\ \hline 0 \end{array} \quad \text{Следовательно, } (4410, 12012) = 42.$$

Теперь находим $(196, 42)$:

$$\begin{array}{r} 196 \mid \underline{42} \\ - \underline{168} \quad 4 \\ \hline 28 \end{array} \quad \begin{array}{r} 42 \mid \underline{28} \\ - \underline{28} \quad 1 \\ \hline 14 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \mid \underline{14} \\ - \underline{28} \quad 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Таким образом, $(196, 42) = 14$.

Ответ. $(196, 4410, 12012) = 14$

Задача 2. Найти линейные разложения НОД чисел 348 и 254.

Решение. Согласно алгоритму Евклида, если $(a, b) = d$, то существуют такие целые числа x и y , что $d = ax + by$, и наоборот. Данное представление называется (*линейным представлением НОД*).

Воспользуемся алгоритмом Евклида:

$$\begin{array}{r} 348 \mid \underline{254} \\ - \underline{254} \quad 1 \\ \hline 94 \end{array} \quad \begin{array}{r} 254 \mid \underline{94} \\ - \underline{188} \quad 2 \\ \hline 66 \end{array} \quad \begin{array}{r} 94 \mid \underline{66} \\ - \underline{66} \quad 1 \\ \hline 28 \end{array} \quad \begin{array}{r} 66 \mid \underline{28} \\ - \underline{56} \quad 2 \\ \hline 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \mid \underline{10} \\ - \underline{20} \quad 2 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \mid \underline{8} \\ -\underline{8} \quad 1 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \mid \underline{2} \\ -\underline{8} \quad 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} d = 2 &= 10 - 1 \cdot 8; \\ 8 &= 28 - 2 \cdot 10; \\ 10 &= 66 - 2 \cdot 28; \\ 28 &= 94 - 1 \cdot 66; \\ 66 &= 254 - 2 \cdot 94; \\ 94 &= 348 - 1 \cdot 254. \end{aligned}$$

Последовательно выразим d через предыдущие остатки. Получим:

$$\begin{aligned} d = 2 &= 10 - 1 \cdot \underline{8} = \underline{10} - 1 \cdot (28 - 2 \cdot \underline{10}) = \\ &= \underline{10} \cdot 3 - 1 \cdot 28 = (66 - 2 \cdot \underline{28}) \cdot 3 - 1 \cdot \underline{28} = \\ &= 3 \cdot 66 - 7 \cdot \underline{28} = 3 \cdot \underline{66} - (94 - 1 \cdot \underline{66}) \cdot 7 = \\ &= \underline{66} \cdot 10 - 7 \cdot 94 = (254 - 2 \cdot \underline{94}) \cdot 10 - 7 \cdot \underline{94} = \\ &= 254 \cdot 10 - 27 \cdot \underline{94} = \underline{254} \cdot 10 - 27 \cdot (348 - 1 \cdot \underline{254}) = 37 \cdot 254 - 27 \cdot 348. \end{aligned}$$

Ответ. $(348, 254) = 37 \cdot 254 - 27 \cdot 348$.

Задача 3. Найти НОК чисел 3124 и 216.

Решение. По алгоритму Евклида найдем $(3124, 216) = 4$, затем применим формулу нахождения НОК $[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$, получим:

$$[3124, 216] = \frac{3124 \cdot 216}{(3124, 216)} = \frac{674784}{4} = 168696.$$

Ответ. $[3124, 216] = 168696$.

Задача 4. Найти натуральные числа a и b , если:

$$\begin{cases} a + b = 168; \\ (a, b) = 24. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся тем фактом, что $(a, b) = d$ и $a = da_1$, $b = db_1$, то $(a_1, b_1) = 1$.

В данном случае $(a, b) = 24$. Тогда, $a = 24a_1$, $b = 24b_1$, где $(a_1, b_1) = 1$. Поскольку $a + b = 168$, то $24a_1 + 24b_1 = 168$, т.е. $a_1 + b_1 = 7$. Поскольку натуральные числа a_1 и b_1 взаимно простые, то рассматривая все возможные варианты, выясним, что a_1 и b_1 принимают следующие значения: 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4, и наоборот. Таким образом, числа a и b равны 24 и 144, 48 и 120, 72 и 96, и наоборот.

Ответ. 24 и 144, 48 и 120, 72 и 96, и наоборот.

Задача 5. Найти все простые числа, находящиеся между числами 810 и 860.

Решение. Составим таблицу чисел от 811 до 859.

811 812 813 814 815 816 817 818 819 820
821 822 823 824 825 826 827 828 829 830
831 832 833 834 835 836 837 838 839 840
841 842 843 844 845 846 847 848 849 850
851 852 853 854 855 856 857 858 859.

Применяя «решето Эратосфена», подчеркнем сначала все числа, кратные 2, потом 3, затем 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, и, наконец, числу 29. На этом процесс подчеркивания заканчивается, т.к. наименьший натуральный делитель составного числа a , отличный от 1, является простым числом и не превышает число $\sqrt{a}$. В данном случае, квадраты последующих неподчеркнутых чисел больше $\sqrt{860} \approx 29,32$. Все числа, оставшиеся не подчеркнутыми и будут простыми.

Ответ. $\{811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859\}$.

Задача 6. Определить, является ли число 3841 простым.

Положительное число $a > 1$, которое не делится на числа, больше 1 и не превосходящие $\sqrt{a}$, является простым. Поэтому нам необходимо проверить, будут ли среди делителей числа 3841 простые числа, меньшие $\sqrt{3841} \approx 61,1$.

$$\begin{aligned}
 3841 &= 2 \cdot 1920 + 1; & 3841 &= 7 \cdot 548 + 5; & 3841 &= 17 \cdot 225 + 16; \\
 3841 &= 3 \cdot 1280 + 1; & 3841 &= 11 \cdot 349 + 2; & 3841 &= 19 \cdot 202 + 3; \\
 3841 &= 5 \cdot 768 + 1; & 3841 &= 13 \cdot 295 + 6; & 3841 &= 23 \cdot 167.
 \end{aligned}$$

На этом процесс останавливается, так как число 3841 без остатка делится на 23, значит оно является составным.

Ответ. Составное.

Задача 7. Найти НОД и НОК чисел 46920 и 128400 по их каноническому разложению.

Решение. Если в разложении натурального числа $a > 1$ на простые сомножители объединить одинаковые множители, то получим так называемое *каноническое разложение числа*

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m},$$

где p_i, p_j – различные простые числа, $i, j = 1, 2, \dots, m$ $i \neq j$; k_i – натуральные числа.

Каноническое разложение чисел на простые множители позволяет найти НОД и НОК чисел.

Теорема 1.1. Пусть $a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ и $b = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_m^{l_m}$, где $k_i \geq 0, l_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) – канонические разложения чисел a и b на простые множители. Тогда:

$$1. \text{НОД}(a, b) = p_1^{\min\{k_1, l_1\}} \dots p_m^{\min\{k_m, l_m\}};$$

$$2. \text{НОК}[a, b] = p_1^{\max\{k_1, l_1\}} \dots p_m^{\max\{k_m, l_m\}}.$$

Здесь, возможно, число $p_i (i = 1, 2, \dots, m)$ входит только в одно из разложений.

Разложим числа 46920 и 128400 на простейшие множители:

46920	2	128400	2
23460	2	64200	2
11730	2	32100	2
5865	3	16050	2
1955	5	8025	3
391	17	2675	5
23	23	535	5
1		107	107
		1	

$$46920 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 23;$$

$$128400 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 107;$$

$$(46920, 128400) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120;$$

$$[46920, 128400] = \frac{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 22^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 107}{2^3 \cdot 3 \cdot 5} = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 23 \cdot 107 = 50204400.$$

$$\text{Ответ. } (46920, 128400) = 120; [46920, 128400] = 50204400.$$

Задача 8. Найти показатель степени простого числа $p = 17$ в каноническом разложении числа 2386!.

Решение. Показатель s , с которым данное простое число p входит в разложение $n!$, равен

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

Здесь функция $[x]$ – целая часть числа x она равна наибольшему целому числу, не превосходящему x .

$$s = \left[\frac{2386}{17} \right] + \left[\frac{2386}{17^2} \right] + \left[\frac{2386}{17^3} \right] + \dots = 140 + 8 + 0 = 148.$$

Ответ. 148.

Задача 9. Найти $\tau(n)$, $\mu(n)$, $\sigma(n)$, $\varphi(n)$ числа $n = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^4$.

Решение.

Теорема 1.2. Пусть $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$, – каноническое разложение натурального числа n на простые множители. Тогда:

1) множество чисел вида

$$d = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_m^{l_m}, \quad 0 \leq l_i \leq k_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1.1)$$

исчерпывает множество натуральных делителей числа n ;

2) число натуральных делителей числа n равно

$$\tau(n) = (1 + k_1) \dots (1 + k_m); \quad (1.2)$$

3) сумма натуральных делителей числа равна

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_m^{k_m+1} - 1}{p_m - 1}. \quad (1.3)$$

4) Функция Мёбиуса

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & \text{существует простое } p \text{ такое, что } p^2 \text{ делит } n, \\ (-1)^k, & \text{если } n \text{ – произведение различных } k \text{ простых чисел.} \end{cases} \quad (1.4)$$

5) функция Эйлера

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right) = (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}) \dots (p_m^{k_m} - p_m^{k_m-1}) \quad (1.5)$$

В частности, если p – простое число, то $\varphi(p^m) = p^m - p^{m-1}$.

$$\tau(2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^4) = (1 + 1)(1 + 3)(1 + 1)(1 + 4) = 80;$$

$$\sigma(2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^4) = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^4 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^2 - 1}{5 - 1} \cdot \frac{7^5 - 1}{7 - 1} = 2016840;$$

$$\mu(2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^4) = 0;$$

$$\varphi(2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^4) = (2^1 - 2^0)(3^3 - 3^2)(5^1 - 5^0)(7^4 - 7^3) = 1 \cdot 18 \cdot 4 \cdot 2058 = 148176.$$

Задача 10. Найти остаток от деления числа 4882^{26} на 18.

Решение. По свойству сравнений $4882 \equiv 271 \cdot 18 + 4 \equiv 4 \pmod{18}$. Так как обе части сравнения можно возводить в степень, то $4882^{26} \equiv 4^{26} \pmod{18}$.

Далее, поскольку $(4, 18) = 2$, то для того, чтобы можно было воспользоваться теоремой Эйлера:

Теорема 1.3. Если $m > 1$, $(a, m) = 1$ то

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

нам необходимо разделить на 2 и $4^{26} = 4 \cdot 4^{25}$ и $18 = 2 \cdot 9$. Таким образом и остаток будет в два раза меньше. Применив теорему Эйлера получим сравнение: $2 \cdot 4^{25} \equiv 2 \cdot (4^3)^8 \cdot 4^1 \equiv 2 \cdot 4 = 8 \pmod{9}$. Вернувшись к исходному основанию сравнения, получим остаток, равный $8 \cdot 2 = 16$.

Ответ. 16.

Задача 11. Найти две последние цифры числа 193^{163} .

Решение. Достаточно найти остаток от деления 193^{163} на 100.

Имеем сравнение: $193^{163} \equiv 93^{163} \pmod{100}$.

Поскольку $(93, 100) = 1$, а $\varphi(100) = 2^2 \cdot 5^2 (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{5}) = 40$, то $93^{40} \equiv 1 \pmod{100}$.

Так как $163 = 40 \cdot 4 + 3$, то $93^{163} = 93^{40 \cdot 4 + 3} \equiv 93^3 = 804357 \equiv 57 \pmod{100}$.

Таким образом, последними двумя цифрами числа 193^{163} являются 5 и 7.

Задача 12. Найти остаток от деления $16^{100} + 11^{100}$ на число 13.

Решение. Имеем следующее сравнение: $16^{100} + 11^{100} \equiv 3^{100} + 11^{100} \pmod{13}$.

Так как $(3, 13) = 1$, а число 13 является простым, то можно воспользоваться малой теоремой Ферма:

Теорема 1.4. Если число p – простое, $(a, p) = 1$, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Таким образом получим: $13^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, причем $100 = 12 \cdot 8 + 4$. Значит, $3^{100} = (3^{12})^8 \cdot 3^4 \equiv 3^4 \pmod{13}$. С помощью последовательного умножения сравнений найдем $3^1 \equiv 3 \pmod{13}$;

$$3^2 \equiv 9 \pmod{13};$$

$$3^3 \equiv 27 \equiv 1 \pmod{13};$$

$$3^4 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{13}.$$

Аналогично, $(11, 13) = 1$, и $\varphi(13) = 12$, Получим: $11^{100} \equiv 11^4 \pmod{13}$;

$$11^1 \equiv -2 \pmod{13};$$

$$11^4 \equiv (-2)^4 \equiv 16 \equiv 3 \pmod{13}.$$

Значит остаток от деления $16^{100} + 11^{100}$ на 13 равен $3+3=6$.

Ответ. 6.

Задача 13. Решить сравнение $ax \equiv b \pmod{m}$.

Решение. 1-й способ. Решим сравнение методом проб. Выпишем полную систему вычетов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и подставим каждый вычет в данное сравнение:

$$5 \cdot 0 \not\equiv 7 \pmod{8}, \quad 5 \cdot 1 \not\equiv 7 \pmod{8}, \quad 5 \cdot 2 \not\equiv 7 \pmod{8},$$

$5 \cdot 3 \equiv 7 \pmod{8} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{8}$ – решение. Дальше проверять не следует, так как поскольку $(5, 8) = 1$, то данное сравнение имеет единственное решение.

2-й способ. Прибавив к правой части 8, получим:

$$5x \equiv 7 + 8 \pmod{8},$$

$$5x \equiv 15 \pmod{8}.$$

Так как $(5, 8) = 1$, то обе части сравнения можно поделить на 5. Получим: $x \equiv 7 \pmod{8}$.

3-й способ. Применим теорему Эйлера:

$$5^{\varphi(8)} \equiv 1 \pmod{8}, \quad \varphi(8) = 4, \quad 5^4 \equiv 1 \pmod{8}.$$

Умножим обе части сравнения на 5^3 :

$$5 \cdot 5^3 \cdot x \equiv 7 \cdot 5^3 \pmod{8},$$

$$5^4 \cdot x \equiv 7 \cdot 5^3 \pmod{8},$$

$$x \equiv 7 \cdot 5^3 \pmod{8},$$

$$x \equiv (-1)(-3)^3 \pmod{8},$$

$$x \equiv 3 \pmod{8}.$$

Ответ. $x \equiv 3 \pmod{8}$.

Задача 14. Решить в целых неотрицательных числах уравнение

$$14x + 37y = 1774$$

Решение. Так как $(14, 37) = 1$, то уравнение разрешимо. Число y целое, значит разность $14x - 1774$ делится на 37. Получим сравнение: $14x \equiv 1774 \pmod{37}$; разделим левую и правую части сравнения на 2;

$7x \equiv 887 \equiv 36 \pmod{37}$; будем прибавлять к правой части сравнения 37 до тех пор, пока не получим число, кратное 7;

$7x \equiv 36 + 3 \cdot 37 \equiv 147 \pmod{37}$; разделим обе части сравнения на 7.
 $x \equiv 21 \pmod{37}$.

Итак, $x \equiv 21 \pmod{37}$. является решением сравнения. Тогда пара $\{21, 40\}$ является частным решением данного уравнения. Общий вид решения данного уравнения получим по формулам:

$$x' = x_0 + \frac{m}{d}t, \quad y' = y_0 - \frac{a}{d}t,$$

где $x_0 = 21$, $y_0 = 40$, $m = 37$, $d = 1$. Значит, общее решение данного уравнения имеет вид:

$$x' = 21 + 37t, \quad y' = 40 - 14t,$$

где t – произвольное целое число.

Так как по условию числа x и y должны быть целыми неотрицательными, то методом подбора получим следующие частные решения: $\{21, 40\}$, $t = 0$; $\{68, 26\}$, $t = 1$; $\{75, 12\}$, $t = 2$. Других решений нет, так как при $t < 0$, $x' < 0$, при $t > 2$, $y' < 0$.

Ответ. $\{21, 40\}$; $\{68, 26\}$; $\{75, 12\}$.

Задача 15. Решите текстовую задачу.

Для решения текстовой задачи необходимо составить уравнение и привести его к виду $ax + by = c$, затем решить получившееся уравнение аналогично задаче 14.

Задача 16. Решить систему сравнений

$$\begin{cases} 5x \equiv 3 \pmod{4} \\ 12x \equiv 3 \pmod{7} \\ 6x \equiv 10 \pmod{19} \end{cases}$$

Решение. Решая каждое сравнение в отдельности, получим следующую систему:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4}, \\ x \equiv 2 \pmod{7}, \\ x \equiv 8 \pmod{19}. \end{cases}$$

Система сравнений с одним неизвестным

$$\begin{cases} x \equiv c_1 \pmod{m_1}, \\ x \equiv c_2 \pmod{m_2}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ x \equiv c_k \pmod{m_k}, \end{cases} \quad (1.6)$$

где числа $m_1, m_2, \dots, m_k$ попарно взаимно простые имеет единственное решение

$$x \equiv x_0 \pmod{M}, \quad (1.7)$$

где

$$M = m_1 m_2 \dots m_k, \\ x_0 = M_1 y_1 c_1 + M_2 y_2 c_2 + \dots M_k y_k c_k,$$

причем числа M_i и y_i определяются следующим образом:

$$M_i = \frac{M}{m_i}, \quad M_i y_i \equiv 1 \pmod{m_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Теорема 1.5 (Китайская теорема об остатках). Если числа $m_1, m_2, \dots, m_k$ попарно взаимно простые, то для любых чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$ таких, что $0 \leq a_j < m_j$ существует (можно найти) такое число b , что остаток от деления b на m_j равен a_j ,
 $j = 1, 2, \dots, k.$

Так как в данном случае модули являются взаимнопростыми, то:

$$c_1 = 3; c_2 = 2; c_3 = 8; \quad m_1 = 4; m_2 = 7; m_3 = 19.$$

$$M_1 = 7 \cdot 19 = 133; M_2 = 4 \cdot 19 = 76; M_3 = 4 \cdot 7 = 28.$$

$$133 \cdot 1 \equiv 1 \pmod{4};$$

$$76 \cdot 6 \equiv 1 \pmod{7};$$

$$28 \cdot 17 \equiv 1 \pmod{19}.$$

$$x_0 = 133 \cdot 1 \cdot 3 + 76 \cdot 6 \cdot 2 + 28 \cdot 17 \cdot 8 = 5119. \text{ Таким образом, } x \equiv 5119 \equiv 331 \pmod{532}.$$

$$\text{Ответ. } x \equiv 331 \pmod{532}$$

Задача 17. Исследовать на разрешимость сравнение $x^2 \equiv 983 \pmod{1103}$.

Решение. Заметим, что 1103 – простое число. Вычислим символ Лежандра.

Определение 1.1. Символ Лежандра $\left(\frac{a}{p}\right)$ для целого a и простого p определяется следующим образом

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & a \text{ делится на } p; \\ 1, & a \text{ квадратичный вычет по модулю } p; \\ -1, & a \text{ квадратичный невычет по модулю } p. \end{cases}$$

Основные свойства символа Лежандра

Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, p) = 1$, $(b, p) = 1$, q – нечетное простое число, $(p, q) = 1$.

1. $a \equiv b \pmod{p} \Rightarrow \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right);$
2. $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \pmod{p}$ (Критерий Эйлера);
3. $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8};$
4. $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2};$
5. $\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)$ (квадратичный закон взаимности).

$$\begin{aligned} \text{Используем квадратичный закон взаимности } \left(\frac{983}{1103}\right) &= (-1)^{\frac{983-1}{2} \cdot \frac{1103-1}{2}} \cdot \left(\frac{1103}{983}\right) = \\ &= -\left(\frac{1103}{983}\right) = -\left(\frac{120}{983}\right) = -\left(\frac{2}{983}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{983}\right) \cdot \left(\frac{5}{983}\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(-1)^{\frac{983^2-1}{8} \cdot 3} \cdot \left(\frac{983}{3}\right) \cdot \left(\frac{983}{5}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = \\
&= (-1)^{\frac{3-1}{2} \cdot \frac{5-1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = (-1)^{\frac{3^2-1}{8} \cdot 2} = 1.
\end{aligned}$$

Ответ. Сравнение $x^2 \equiv 983 \pmod{1103}$ разрешимо.

Задача 18. Исследовать на разрешимость сравнение $x^2 \equiv 983 \pmod{1103}$.

Решение. В силу китайской теоремы об остатках исходное сравнение разрешимо тогда и только тогда, когда разрешимо каждое из сравнений $x^2 \equiv 557 \equiv 1 \pmod{2}$, $x^2 \equiv 557 \equiv 4 \pmod{7}$, $x^2 \equiv 557 \equiv 8 \pmod{61}$. Первое и второе сравнения разрешимы, так как 1 и 4 являются полными квадратами. Вычислим символ Лежандра $\left(\frac{8}{61}\right)$, рассматривая его как символ Якоби.

Определение 1.2. Пусть n – нечетное натуральное число, больше 1, и $n = p_1 \dots p_k$ – разложение числа n на простые множители (не обязательно различные). Для любого целого a , $(a, n) = 1$ символ Якоби $\left(\frac{a}{n}\right)$ определяется через символ Лежандра по формуле:

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right) \dots \left(\frac{a}{p_k}\right).$$

Основные свойства символа Якоби

Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, p) = 1$, $(b, p) = 1$, q – нечетное число, большее 1, $(p, q) = 1$.

1. $a \equiv b \pmod{p} \Rightarrow \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$;
2. $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$;
3. $a = \pm 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{p}\right) = a^{(p-1)/2}$;
4. $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}$;
5. $\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)$ (квадратичный закон взаимности).

Имеем: $\left(\frac{8}{61}\right) = \left(\frac{2^2 \cdot 2}{61}\right) = \left(\frac{2}{61}\right) = (-1)^{\frac{61^2-1}{8}} = -1$. Таким образом, третье сравнение не разрешимо, а значит, и исходное также не разрешимо.

Ответ. Сравнение $x^2 \equiv 983 \pmod{1103}$ неразрешимо.

Задача 19. Решить квадратичное сравнение $4x^2 - 11x - 3 \equiv 0 \pmod{13}$, приведя его к двучленному.

Решение. Коэффициент при старшей степени x является взаимнопростым с модулем, поэтому проведем следующие преобразования сравнения. Определим множитель k таким образом, чтобы $4k \equiv 1 \pmod{13}$. Получим $k \equiv 10 \pmod{13}$. Домножив обе части сравнения $4x^2 - 11x - 3 \equiv 0 \pmod{13}$ на 10, получим:

$$40x^2 - 110x - 30 \equiv 0 \pmod{13},$$

$$x^2 - 6x - 4 \equiv 0 \pmod{13}.$$

Выделим полный квадрат $x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9 - 4 \equiv 0 \pmod{13}$,

$$(x - 3)^2 - 13 \equiv 0 \pmod{13},$$

$$(x - 3)^2 \equiv 0 \pmod{13}.$$

Так как $(x - 3)^2 \equiv 0 \pmod{13}$, то $(x - 3) \cdot (x - 3) \equiv 0 \pmod{13}$, это значит, что $(x - 3) \equiv 0 \pmod{13}$, или $x \equiv 3 \pmod{13}$.

Ответ. $x \equiv 3 \pmod{13}$.

Задача 20. [4] С помощью таблицы индексов решить степенное сравнение

$$8 \cdot x^4 \equiv 7 \pmod{13}.$$

Решение. Так как $(8, 13) = 1$, 13 – простое число. Индексируя сравнение, переходим к равносильному сравнению по модулю $13 - 1$:

$$\text{ind}8 + 4\text{ind}x \equiv \text{ind}7 \pmod{12}.$$

Полагая $y = \text{ind}x$ и подставляя значения индексов из таблицы индексов по модулю 13, получим:

$$3 + 4y \equiv 11 \pmod{12},$$

$$4y \equiv 8 \pmod{12}.$$

Так как $(4, 12) = 4$, и 4 делит 8, то количество решений сравнения равно 4. Разделив обе части сравнения и модуль на 4, получим $y \equiv 2 \pmod{3}$.

Отсюда $\text{ind}x_1 \equiv 2 \pmod{12}$, $\text{ind}x_2 \equiv 5 \pmod{12}$, $\text{ind}x_3 \equiv 8 \pmod{12}$, $\text{ind}x_4 \equiv 11 \pmod{12}$.

По таблице антииндексов находим решения исходного сравнения.

Ответ. $x_1 \equiv 4 \pmod{13}$, $x_2 \equiv 6 \pmod{13}$, $x_3 \equiv 9 \pmod{13}$, $x_4 \equiv 7 \pmod{13}$.

Задача 21. [4] С помощью таблицы индексов решить показательное сравнение

$$8 \cdot 10^x \equiv 7 \pmod{13}.$$

Решение. Так как $(8, 13) = (10, 13) = 1$, 13 – простое число. Индексируя сравнение, переходим к равносильному сравнению по модулю $13 - 1$:

$$\text{ind}8 + x\text{ind}10 \equiv \text{ind}7 \pmod{12}.$$

Подставим значения индексов:

$$3 + 10x \equiv 11 \pmod{12}. \text{ Откуда } 10x \equiv 8 \pmod{12}.$$

Так как $(10, 12) = 2 \mid 8$, то число решений равно 2. Разделив обе части сравнения и модуль на 2, получим: $5x \equiv 4 \pmod{6}$. Методом проб находим $x \equiv 2 \pmod{6}$.

Ответ. $x_1 \equiv 2 \pmod{12}$, $x_2 \equiv 8 \pmod{12}$.

Задача 22. [4] Определить длину периода s при обращении обыкновенной дроби $\frac{1}{11 \cdot 41}$ в десятичную.

Решение. Так как $(10, 11 \cdot 41) = 1$, то число $\frac{1}{11 \cdot 41}$ при обращении в 10-ичную дробь будет чисто периодической с периодом $s = O(10 \pmod{11 \cdot 41}) = \text{НОК}[O(10 \pmod{11}), O(10 \pmod{41})]$. По таблицам индексов для модулей $p = 11$ и $p = 41$ находим индексы числа 10: $\text{ind}10 = 5 \pmod{10}$; $\text{ind}10 = 32 \pmod{40}$. Следовательно, $O(10 \pmod{11}) = \frac{10}{(5,10)} = 2$, $O(10 \pmod{41}) = \frac{40}{(32,40)} = 5$.

Ответ. $s = \text{НОК}[2, 5] = 10$.

Задача 23. Представьте $\frac{319}{97}$ в виде цепной дроби.

Решение. Используем алгоритм Евклида.

$$\begin{array}{r}
 319 \mid 97 \\
 -291 \quad 3 \\
 \hline
 28
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 97 \mid 28 \\
 -84 \quad 3 \\
 \hline
 13
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 28 \mid 13 \\
 -26 \quad 2 \\
 \hline
 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 13 \mid 2 \\
 -12 \quad 6 \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2 \mid 1 \\
 -2 \quad 2 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Ответ. $\frac{319}{97} = [3; 3, 2, 6, 2]$.

Задача 24. Найдите действительное число, которое обращается в данную цепную дробь $\alpha = [3; 3, 2, 6, 2]$.

Решение. Для нахождения числа $\alpha = \frac{a}{b}$, найдем подходящие дроби, построив соответствующую таблицу.

k	-2	-1	0	1	2	3	4
q_k	—	—	3	3	2	6	2
P_k	0	1	3	10	23	148	319
Q_k	1	0	1	3	7	45	97

Здесь

$$P_{-1} = 1; P_0 = q_0; Q_{-1} = 0; Q_0 = 1;$$

$$P_k = q_k P_{-1} + P_{k-2}; Q_k = q_k Q_{-1} + Q_{k-2}.$$

Так как цепная дробь конечная, то

$$\alpha = \frac{a}{b} = \frac{P_4}{Q_4} = \frac{319}{97}.$$

Ответ. $\alpha = \frac{319}{97}$.

Задача 25. Решить сравнение $142x \equiv 17 \pmod{867}$ с помощью цепных дробей.

Решение. Так как $(142, 867) = 1$, то сравнение имеет единственное решение. Представим обыкновенную дробь в виде цепной: $\frac{867}{142} = [6; 9, 2, 7]$, $n = 3$.

k	-2	-1	0	1	2	3
q_k	—	—	6	9	2	7
P_k	0	1	6	55	116	867

$$x \equiv (-1)^n P_{n-1} b \pmod{n}.$$

$$x \equiv (-1)^3 \cdot 116 \cdot 17 \equiv 629 \pmod{867}.$$

Ответ. $x \equiv 629 \pmod{867}$.

Задача 26. Разложить в цепную дробь и заменить подходящей дробью с точностью до 0,0001 числа $\sqrt{14}$.

По теореме Дирихле:

Теорема 1.6. Пусть α и $\tau \geq 1$ — действительные числа; существует несократимая дробь $\frac{a}{b}$, для которой $|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{b\tau}$, $0 < b \leq \tau$,

(или: существует такая пара взаимно простых целых чисел a и b , что $|b\alpha - a| < \frac{1}{\tau}$, $0 < b \leq \tau$).

Используя алгоритм выделения целой части для числа $\sqrt{14}$, получим:

$$\sqrt{14} = 3 + \frac{1}{\alpha_1},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{14} - 3} = \frac{\sqrt{14} + 3}{5} = 1 + \frac{1}{\alpha_2},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{14}+3}{5} - 1} = \frac{5}{\sqrt{14} - 2} = \frac{\sqrt{14} + 2}{2} = 2 + \frac{1}{\alpha_3},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{14}+2}{2} - 2} = \frac{2}{\sqrt{14} - 2} = \frac{\sqrt{14} + 2}{5} = 1 + \frac{1}{\alpha_4},$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{\frac{\sqrt{14}+2}{5} - 1} = \frac{5}{\sqrt{14} - 3} = \sqrt{14} + 3 = 6 + \frac{1}{\alpha_5},$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{\sqrt{14} + 3 - 6} = \frac{1}{\sqrt{14} - 3}.$$

Поскольку $\alpha_1 = \alpha_5$, то

$$\sqrt{14} = [3; (1, 2, 1, 6)].$$

Для нахождения приближенного значения найдем подходящие дроби, построив соответствующую таблицу.

k	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	...
q_k	—	—	3	1	2	1	6	1	2	1	...
P_k	0	1	3	4	11	15	101	116	333	449	...
Q_k	1	0	1	1	3	4	27	31	89	120	...

Погрешность приближения к числу α подходящей дроби не превышает

$$\frac{1}{Q_k Q_{k+1}} \text{ или } \frac{1}{Q_k^2}.$$

Поскольку в данном случае $\frac{1}{Q_6 Q_7} = \frac{1}{89 \cdot 120} < 0,0001$, то в качестве приближенного значения с точностью до 0,0001 можно взять подходящую дробь $\frac{P_6}{Q_6} = \frac{333}{89} \approx 3,7416$.

Ответ. $\sqrt{14} = [3; (1, 2, 1, 6)] \approx \frac{333}{89}$.

Задача 27. Перевести число 14155 из 6-ичной системы счисления в 8-ичную.

Решение. Сначала запишем число в 10-ичной системе счисления:

$$14154_6 = 1 \cdot 6^4 + 4 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 + 5 = 2230.$$

Теперь запишем полученное число в 8-ичной системе счисления, при помощи последовательного деления на 8, до тех пор, пока неполное частное не будет равно нулю. В результате будет получено число из остатков деления записанное справа налево:

$$2230 : 8 = 278, \text{ остаток: } 6;$$

$$278 : 8 = 34, \text{ остаток: } 6;$$

$$34 : 8 = 4, \text{ остаток: } 2;$$

$$4 : 8 = 0 \text{ остаток: } 4.$$

Ответ. $14154_6 = 4266_8$.

Задача 28. Запишите числа $a = 2164_7$ и $b = 31_4$ в системе счисления с основанием 6 и разделите большее на меньшее.

Решение. Аналогично предыдущей задаче представим числа a и b в системе счисления с основанием 6.

Значит $a = 2164_7 = 3341_6$, $b = 31_4 = 21_6$. Далее будем производить деление в 6-ичной системе счисления:

$$\begin{array}{r}
3341_6 \quad | \quad 21_6 \\
-21 \quad \quad 140_6 \\
\hline
124 \\
-124 \\
\hline
1
\end{array}$$

Ответ. $a = 3341_6$, $b = 21_6$, $3341_6 = 140_6 \cdot 21_6 + 1_6$.

Задача 29. Выразите систематическую дробь $13, 17_8$ в виде:

а) обыкновенной дроби, числитель и знаменатель которой записаны в десятичной системе;

б) обыкновенной дроби в той же системе счисления.

Решение. а) $13, 17_8 = 1 \cdot 8 + 3 + \frac{1}{8} + \frac{7}{8^2} = \frac{512 + 192 + 8 + 7}{64} = \frac{719}{64}$.

б) $13, 17_8 = \left(\frac{1374}{100}\right)_8 = \left(\frac{576}{40}\right)_8 = \left(\frac{277}{20}\right)_8$.

Ответ. а) $\frac{719}{64}$; б) $\left(\frac{277}{20}\right)_8$.

Задача 30. Проверить результаты действий с помощью чисел 9 и 11: а) $24667 + 18265 = 42932$, б) $4325 \cdot 879 = 451425$.

Решение. а) $24667 + 18265 = 42932$, Суммы цифр слагаемых соответственно равны 25 и 22; сумма цифр суммы равна 20. Легко заметить, что $25 + 22 \equiv 20 \pmod{9}$. Можно полагать, что сложение выполнено правильно. Проверка с помощью сравнения по модулю 9 может не установить разве что только ошибку, кратную 9.

Теперь осуществим проверку с помощью числа 11. Суммы цифр, взятых попеременно со знаками $+$, $-$, $+$, $-$, ... справа налево, соответственно равны у слагаемых: $7 - 6 + 6 - 4 + 2 = 5$, $5 - 6 + 2 - 8 + 1 = -6$; у суммы: $2 - 3 + 9 - 2 + 4 = 10$. Получаем верное сравнение $5 - 6 \equiv 10 \pmod{11}$. Таким образом мы видим, что при проверке ошибка не выявлена.

б) $4325 \cdot 879 = 451425$ Суммы цифр множителей соответственно равны 14 и 24; сумма цифр произведения равна 21. Легко заметить, что $14 \cdot 24 \equiv 21 \pmod{9}$. Еще раз используем "правило девятки" получим сравнение: $5 \cdot 6 \equiv 3 \pmod{9}$ или $3 \equiv 3 \pmod{9}$. Можно полагать, что умножение выполнено правильно.

Теперь осуществим проверку с помощью числа 11: $5 - 2 + 3 - 4 = 2$, $7 - 9 + 8 = 6$; у произведения: $5 - 2 + 4 - 1 + 5 - 4 = 7$. Получаем неверное сравнение $2 \cdot 6 \not\equiv 7 \pmod{11}$. Таким образом мы видим, что при проверке выявлена ошибка.

Ответ. а) верно, б) нет.

2 Варианты контрольного задания

Задача 1. Найти НОД трех чисел a , b , c , используя алгоритм Евклида.

№	a	b	c	№	a	b	c	№	a	b	c	№	a	b	c
1	2428	788	120	6	1636	532	120	11	4262	842	106	16	2016	978	104
2	2916	944	106	7	2794	552	102	12	386	186	120	17	1298	318	106
3	780	376	104	8	1220	584	120	13	1734	424	106	18	4734	780	120
4	1714	422	106	9	808	114	106	14	3110	1490	106	19	536	174	102
5	442	214	104	10	1536	738	104	15	2938	484	120	20	1058	174	102

Задача 2. Найти линейные разложения НОД чисел a и b .

№	a	b	№	a	b	№	a	b	№	a	b	№	a	b
1	840	342	5	565	235	9	308	128	13	825	335	17	812	332
2	392	161	6	345	140	10	548	224	14	534	222	18	436	176
3	284	116	7	318	132	11	584	236	15	696	282	19	925	385
4	692	280	8	798	324	12	745	310	16	452	188	20	580	235

Задача 3. Найти НОК чисел a и b .

№	a	b	№	a	b	№	a	b	№	a	b	№	a	b
1	2348	462	5	2310	565	9	6084	862	13	2676	870	17	4698	519
2	1374	660	6	860	211	10	4722	586	14	3171	779	18	2948	366
3	2889	358	7	1951	242	11	867	282	15	903	438	19	2064	675
4	5686	628	8	3636	892	12	2742	672	16	1655	538	20	5734	633

Задача 4. Найти натуральные числа a и b , если:

1. $\begin{cases} a + b = 150; \\ (a, b) = 30. \end{cases}$
2. $\begin{cases} [a, b] = 2380; \\ (a, b) = 170. \end{cases}$
3. $\begin{cases} ab = 588; \\ (a, b) = 14. \end{cases}$
4. $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{3}{8}; \\ (a, b) = 18. \end{cases}$
5. $\begin{cases} [a, b] = 10; \\ ab = 20. \end{cases}$
6. $\begin{cases} a + b = 144; \\ (a, b) = 24. \end{cases}$
7. $\begin{cases} [a, b] = 2496; \\ (a, b) = 24. \end{cases}$
8. $\begin{cases} ab = 8400; \\ (a, b) = 20. \end{cases}$
9. $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{4}{7}; \\ (a, b) = 37. \end{cases}$
10. $\begin{cases} [a, b] = 28; \\ ab = 56. \end{cases}$
11. $\begin{cases} a + b = 75; \\ (a, b) = 15. \end{cases}$
12. $\begin{cases} [a, b] = 24; \\ (a, b) = 4. \end{cases}$
13. $\begin{cases} ab = 720; \\ (a, b) = 4. \end{cases}$
14. $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{7}{11}; \\ (a, b) = 45. \end{cases}$
15. $\begin{cases} [a, b] = 54; \\ ab = 324. \end{cases}$
16. $\begin{cases} a + b = 128; \\ (a, b) = 32. \end{cases}$
17. $\begin{cases} [a, b] = 12; \\ (a, b) = 4. \end{cases}$
18. $\begin{cases} ab = 2025; \\ (a, b) = 15. \end{cases}$
19. $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{5}{9}; \\ (a, b) = 28. \end{cases}$
20. $\begin{cases} [a, b] = 144; \\ ab = 288. \end{cases}$

Задача 5. Найти все простые числа, находящиеся между числами a и b .

№	a	b	№	a	b	№	a	b	№	a	b	№	a	b
1	100	150	5	540	590	9	330	380	13	150	200	17	720	870
2	410	460	6	900	950	10	190	240	14	340	390	18	690	740
3	210	260	7	500	550	11	120	170	15	600	650	19	590	640
4	800	850	8	750	800	12	300	350	16	740	790	20	650	700

Задача 6. Определить, является ли число a простым.

№	a	№	a	№	a	№	a	№	a
1	6947	5	6703	9	6557	13	5917	17	3337
2	7207	6	6961	10	6733	14	7979	18	4891
3	7489	7	7219	11	6977	15	6763	19	8611
4	2623	8	1271	12	7243	16	6997	20	6791

Задача 7. Найти НОД и НОК чисел a и b по их каноническому разложению.

№	a	b	№	a	b
1	3240	415800	11	11520	120960
2	864000	2520	12	10080	5040
3	7560	3240	13	99000	120960
4	37800	1209600	14	3240	1900800
5	201600	693000	15	70560	317520
6	172800	27000	16	1764000	95040
7	126000	7920	17	594000	564480
8	2910600	693000	18	864000	760320
9	69120	432000	19	504000	100800
10	11520	2419200	20	16200	5544000

Задача 8. Найти показатель степени простых чисел p в каноническом разложении чисел $n!$.

№	p	n	№	p	n	№	p	n	№	p	n	№	p	n
1	17	1253	5	19	2413	9	31	1872	13	19	2432	17	41	1910
2	19	2091	6	17	2479	10	11	2391	14	47	2102	18	41	1824
3	29	2501	7	29	2772	11	23	1709	15	41	2448	19	47	1788
4	31	1658	8	13	1786	12	13	2149	16	47	2386	20	37	1148

Задача 9. Найти $\sigma(n)$, $\tau(n)$, $\mu(n)$, $\varphi(n)$ числа $n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4}$.

№	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$	№	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$	№	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$	№	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$
1	3, 0, 2, 1	6	4, 1, 1, 1	11	2, 5, 1, 0	16	2, 2, 1, 3
2	1, 2, 2, 3	7	4, 2, 0, 2	12	6, 1, 0, 0	17	5, 0, 2, 1
3	2, 1, 3, 1	8	2, 0, 4, 1	13	0, 2, 1, 4	18	4, 3, 0, 0
4	2, 1, 0, 3	9	1, 0, 1, 4	14	0, 2, 5, 1	19	2, 4, 1, 2
5	3, 1, 1, 2	10	2, 1, 3, 0	15	3, 3, 0, 1	20	1, 3, 3, 2

Задача 10. Найти остаток от деления числа a^k на b .

№	a	k	b	№	a	k	b	№	a	k	b	№	a	k	b
1	6652	28	12	6	1252	22	14	11	5242	29	12	16	2062	28	18
2	4912	23	14	7	3742	30	12	12	2812	23	12	17	3202	23	20
3	1282	28	12	8	1702	28	18	13	1432	29	12	18	1882	22	20
4	5992	24	18	9	4102	23	18	14	2572	30	14	19	3202	21	12
5	1432	29	18	10	2302	20	14	15	3172	28	18	20	2872	20	20

Задача 11. Найти две последние цифры числа a^k .

№	a	k	№	a	k	№	a	k	№	a	k
1	123	122	6	193	160	11	173	282	16	173	203
2	143	124	7	183	121	12	119	122	17	139	162
3	153	164	8	133	202	13	161	163	18	167	202
4	127	201	9	141	243	14	177	162	19	159	162
5	131	163	10	157	203	15	191	161	20	139	123

Задача 12. Найти остаток от деления $a^{100} + b^{100}$ на число n .

№	a	b	n	№	a	b	n	№	a	b	n	№	a	b	n
1	12	22	17	6	14	19	17	11	29	3	23	16	49	45	47
2	15	22	19	7	27	32	29	12	25	15	13	17	38	43	41
3	32	26	29	8	15	12	13	13	18	22	19	18	43	38	41
4	28	34	31	9	29	3	31	14	45	50	47	19	18	23	19
5	18	2	19	10	12	19	11	15	38	2	41	20	35	40	37

Задача 13. Решить сравнение $ax \equiv b \pmod{m}$.

№	a	b	m	№	a	b	m	№	a	b	m	№	a	b	m
1	39	5	11	6	139	7	8	11	2	2	5	16	15	7	44
2	11	15	24	7	19	4	25	12	64	5	13	17	27	11	106
3	21	10	25	8	27	16	58	13	37	16	11	18	73	39	28
4	8	17	23	9	111	49	179	14	39	19	53	19	4	7	9
5	5	7	9	10	2	13	15	15	15	7	16	20	29	35	123

Задача 14. Решить в целых неотрицательных числах уравнение $ax + by = c$.

№	a	b	c	№	a	b	c	№	a	b	c	№	a	b	c
1	25	11	759	6	15	29	1034	11	30	41	4819	16	21	19	1259
2	28	47	3971	7	20	23	1757	12	36	37	4385	17	27	17	1199
3	35	41	4050	8	25	19	1430	13	45	31	4532	18	32	13	1141
4	42	37	4927	9	30	17	1672	14	12	29	869	19	40	11	1468
5	10	31	1045	10	36	13	1575	15	16	23	940	20	45	47	6747

Задача 15. Решите текстовую задачу.

1. Для перевозки зерна имеются мешки по 60 и 80 кг. Сколько нужно тех и других мешков для перевозки 440 кг зерна?
2. Сколько билетов стоимостью 30 и 50 коп. можно купить на 14 руб. 90 коп.?
3. Детский сад выделил 33 руб. для приобретения стульев стоимостью по 1 руб. 40 коп. и табуреток по 60 коп. Сколько следует купить стульев и табуреток, чтобы полностью израсходовать отпущенную сумму денег?
4. Туристское бюро, имеющее в своем распоряжении двадцатитрехместные автобусы и шестиместные легковые автомобили, организует экскурсионную поездку для 310 туристов. Сколько машин того и другого типа следует выделить для экскурсантов при условии, что в выделенных автомашинах не должно оставаться свободных мест?
5. Шахматная база парка культуры и отдыха приобрела некоторое количество комплектов шахмат и шашек на 62 руб. Комплект шахмат стоит 4 руб. 60 коп, а шашек — 1 руб. 90 коп. Сколько комплектов шахмат и шашек было закуплено базой?

6. Требуется найти два натуральных числа, каждое из которых не превышает 200, причем таких, что разность между ними равна 11, уменьшаемое кратно 9, а вычитаемое кратно 17.
7. Сколько потребуется сосудов емкостью по 0,5 и по 0,8 л для разлива 12 л жидкости так, чтобы все взятые сосуды были наполнены?
8. Для проведения эстафеты по бегу требуется разделить дистанцию в 6,7 км на участки размером по 175 м для женщин и по 300 м для мужчин. Из скольких спортсменов, как мужчин, так и женщин, должны состоять команды, участвующие в эстафете?
9. В населенный пункт, с которым установлено лишь авиационное сообщение, требуется доставить 150 контейнеров груза. В распоряжении отправителей имеются транспортные самолеты грузоподъемностью соответственно в 8 и 13 контейнеров. Сколько понадобится самолетов того и другого типа для того, чтобы перевезти указанный груз одним рейсом? Грузоподъемность каждого самолета должна быть использована полностью.
10. На обработку каждой из деталей типов А и Б токарь затрачивает соответственно 43 и 12,5 мин. Сколько деталей типа А и Б обработает токарь в течение семичасового рабочего дня? Рабочее время должно быть использовано полностью.
11. При каких целых числах выражение $\frac{7-11x}{10}$ равно такому целому положительному числу, при делении которого на 4 получается остаток, равный 3?
12. Найдите общий вид чисел, кратных 8, которые при делении на 5 дают в остатке 3.
13. Разложите число 150 на два положительных слагаемых, одно из которых кратно 11, а второе — 17.
14. Товарные вагоны с грузом типов А и Б весят соответственно 27 и 43 т. Сколько вагонов, груженых товарами А и Б, потребуется для формирования товарного состава весом 1800 т?
15. Из имеющихся резисторов сопротивлением по 1,2 и 1,7 Ом требуется составить последовательным соединением цепь сопротивлением 11,1 Ом. Сколько резисторов того и другого типа потребуется?
16. Сколькими способами можно уплатить 200 руб., имея денежные купюры по 3 и 5 руб.?

17. Для транспортировки зерна есть мешки по 60 и 80 кг. Сколько необходимо тех и других мешков для транспортировки 440 кг зерна?
18. Сколько билетов стоимостью 30 и 40 руб. можно купить на 1490 руб?
19. Разложите число 100 на сумму таких двух натуральных чисел, одно из которых делится на 7, а другое на 11.
20. Для того, чтобы застелить пол в комнате шириной 3 метра есть доски шириной 11 и 13 см. Сколько потребуется тех и других досок, если длина каждой доски равна длине комнаты?

Задача 16. Решить систему сравнений с коэффициентами

$$\begin{cases} a_1x \equiv b_1 \pmod{m_1} \\ a_2x \equiv b_2 \pmod{m_2} \\ a_3x \equiv b_3 \pmod{m_3} \end{cases}$$

с коэффициентами a_1, b_1, m_1 ; a_2, b_2, m_2 ; a_3, b_3, m_3 .

№	a_1, b_1, m_1	a_2, b_2, m_2	a_3, b_3, m_3	№	a_1, b_1, m_1	a_2, b_2, m_2	a_3, b_3, m_3
1	5, 1, 6	8, 2, 5	4, 10, 17	11	5, 5, 8	12, 4, 11	4, 2, 19
2	5, 1, 6	8, 1, 7	6, 4, 13	12	7, 1, 4	6, 3, 5	4, 16, 17
3	5, 1, 6	12, 1, 7	4, 6, 19	13	7, 1, 4	6, 2, 7	6, 1, 13
4	5, 1, 6	12, 4, 11	6, 5, 17	14	5, 5, 8	6, 6, 7	4, 6, 13
5	7, 5, 8	6, 4, 5	4, 10, 13	15	5, 3, 8	6, 5, 7	6, 3, 19
6	5, 1, 6	6, 4, 5	4, 10, 13	16	5, 1, 8	8, 1, 11	4, 16, 17
7	5, 1, 6	6, 1, 5	6, 5, 19	17	5, 3, 4	12, 4, 5	4, 1, 13
8	5, 5, 6	8, 4, 7	4, 9, 17	18	5, 1, 4	12, 4, 5	6, 2, 19
9	5, 1, 6	8, 2, 11	6, 8, 13	19	7, 1, 4	6, 5, 7	4, 3, 17
10	5, 5, 6	12, 7, 11	4, 6, 19	20	7, 3, 4	6, 4, 11	6, 12, 13

Задача 17. Исследовать на разрешимость сравнение $x^2 \equiv a \pmod{p}$.

№	a,p	№	a,p	№	a,p	№	a,p	№	a,p
1	149,907	5	521,1061	9	233,739	13	443,1277	17	281,1381
2	467,1087	6	211,1171	10	769,1223	14	277,1373	18	811,1153
3	751,1049	7	503,1049	11	607,1201	15	383,641	19	929,1193
4	257,1063	8	409,1229	12	419,1571	16	719,1297	20	613,1153

Задача 18. Исследовать на разрешимость сравнение $x^2 \equiv a \pmod{n}$.

№	a,n	№	a,n	№	a,n	№	a,n	№	a,n
1	149,854	5	839,1022	9	233,1106	13	443,742	17	281,658
2	467,984	6	211,1113	10	769,1491	14	277,903	18	811,1659
3	751,1005	7	503,915	11	609,1245	15	324,885	19	655,1455
4	257,1034	8	409,946	12	419,902	16	735,1166	20	625,1298

Задача 19. Решить квадратичное сравнение $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{m}$, приведя его к двучленному.

№	a,b,c,m	№	a,b,c,m	№	a,b,c,m	№	a,b,c,m	№	a,b,c,m
1	3,-5,-7,5	5	2,4,-1,5	9	2,-4,-5,7	13	2,3,-2,7	17	3,2,-1,7
2	4,-7,-3,11	6	5,7,1,13	10	4,2,-3,13	14	3,-1,0,5	18	3,7,8,17
3	6,3,1,17	7	3,13,-10,19	11	12,-6,-7,19	15	7,15,-11,23	19	2,3,-12,7
4	4,-2,10,13	8	4,4,-14,11	12	2,-1,4,5	16	7,-8,12,23	20	3,-10,-9,17

Задача 20. С помощью таблицы индексов решить степенное сравнение

$$a \cdot x^k \equiv b \pmod{m}.$$

№	a	k	b	m	№	a	k	b	m
1	38	137	37	79	11	48	163	38	53
2	61	101	3	67	12	5	139	28	31
3	7	171	5	11	13	25	101	5	31
4	12	119	3	19	14	8	163	12	17
5	28	149	14	31	15	6	137	51	67
6	29	139	15	37	16	2	155	3	19
7	10	103	8	13	17	8	135	2	23
8	25	129	44	53	18	3	185	42	59
9	5	169	4	19	19	3	133	5	13
10	17	151	20	61	20	16	107	24	59

Задача 21. С помощью таблицы индексов решить показательное сравнение

$$a \cdot b^x \equiv c \pmod{m}.$$

№	a	b	c	m	№	a	b	c	m
1	12	45	20	73	11	21	7	38	41
2	21	19	16	23	12	23	7	34	41
3	24	67	44	71	13	11	77	24	79
4	36	15	35	41	14	78	58	14	83
5	61	48	62	67	15	8	10	11	17
6	8	17	13	61	16	11	28	9	41
7	10	38	59	89	17	63	77	26	79
8	27	7	2	12	18	34	8	17	53
9	26	30	4	43	19	8	7	22	23
10	9	11	5	13	20	7	14	15	29

Задача 22. Определить длину периода при обращении обыкновенной дроби $\frac{1}{m}$ в десятичную.

№	m	№	m	№	m	№	m	№	m
1	$3 \cdot 17$	5	$11 \cdot 17$	9	$11 \cdot 19$	13	$7 \cdot 13$	17	$11 \cdot 19$
2	$3 \cdot 23$	6	$19 \cdot 23$	10	$19 \cdot 73$	14	$11 \cdot 41$	18	$23 \cdot 67$
3	$17 \cdot 23$	7	$13 \cdot 19$	11	$29 \cdot 63$	15	$19 \cdot 23$	19	$13 \cdot 23$
4	$29 \cdot 37$	8	$17 \cdot 43$	12	$13 \cdot 41$	16	$37 \cdot 67$	20	$19 \cdot 47$

Задача 23. Представьте в виде цепных дробей.

№		№		№		№		№	
1	$\frac{125}{67}$	5	$\frac{845}{113}$	9	$\frac{875}{122}$	13	$\frac{954}{355}$	17	$\frac{325}{139}$
2	$\frac{135}{199}$	6	$\frac{85}{47}$	10	$\frac{354}{213}$	14	$\frac{359}{204}$	18	$\frac{324}{151}$
3	$\frac{111}{24}$	7	$\frac{578}{213}$	11	$\frac{425}{379}$	15	$\frac{687}{292}$	19	$\frac{357}{185}$
4	$\frac{135}{47}$	8	$\frac{346}{139}$	12	$\frac{657}{224}$	16	$\frac{138}{47}$	20	$\frac{327}{243}$

Задача 24. Найдите действительные числа, которые обращаются в данные цепные дроби.

№		№		№		№		№	
1	$[2; 1, 3, 4, 2]$	5	$[2; 1, 1, 6, 8]$	9	$[0; 1, 4, 3, 2]$	13	$[0; 3, 1, 2, 7]$	17	$[1; 1, 2, 4, 5]$
2	$[0; 1, 4, 3, 2]$	6	$[3; 1, 1, 2, 6]$	10	$[2; 1, 3, 4, 2]$	14	$[0; 4, 1, 3, 2]$	18	$[1; 2, 3, 4, 2]$
3	$[3; 5, 1, 3, 8]$	7	$[0; 2, 3, 9, 2]$	11	$[2; 5, 6, 2, 6]$	15	$[1; 2, 4, 1, 7]$	19	$[2; 3, 4, 1, 3]$
4	$[2; 1, 5, 7, 2]$	8	$[1; 4, 3, 7, 9]$	12	$[1; 2, 4, 6, 2]$	16	$[0; 2, 1, 6, 3]$	20	$[2; 3, 6, 1, 3]$

Задача 25. Решить сравнение $ax \equiv b \pmod{m}$ с помощью цепных дробей.

№	a	b	m	№	a	b	m
1	251	28	1053	11	265	29	1097
2	394	23	1619	12	94	9	593
3	173	26	1071	13	127	14	779
4	194	28	1185	14	38	36	277
5	71	22	510	15	251	6	1806
6	406	11	2899	16	394	27	2801
7	59	30	253	17	203	28	877
8	82	27	339	18	292	35	1209
9	447	23	1837	19	117	17	739
10	222	17	1375	20	210	40	1289

Задача 26. Разложить в цепную дробь и заменить подходящей дробью с точностью до 0,0001 числа $\sqrt{a}$.

№	$\sqrt{a}$	№	$\sqrt{a}$	№	$\sqrt{a}$	№	$\sqrt{a}$	№	$\sqrt{a}$
1	$\sqrt{11}$	5	$\sqrt{20}$	9	$\sqrt{38}$	13	$\sqrt{48}$	17	$\sqrt{17}$
2	$\sqrt{12}$	6	$\sqrt{24}$	10	$\sqrt{39}$	14	$\sqrt{51}$	18	$\sqrt{41}$
3	$\sqrt{15}$	7	$\sqrt{27}$	11	$\sqrt{35}$	15	$\sqrt{42}$	19	$\sqrt{68}$
4	$\sqrt{18}$	8	$\sqrt{30}$	12	$\sqrt{40}$	16	$\sqrt{66}$	20	$\sqrt{50}$

Задача 27. Перевести число a из p -ичной системы счисления в q -ичную.

№	a	p	q	№	a	p	q	№	a	p	q	№	a	p	q
1	202002	3	5	6	13020	5	8	11	111110011	2	5	16	112001	3	6
2	31100	4	7	7	14100	5	7	12	10654	8	9	17	202100	3	5
3	104202	5	8	8	10320	4	5	13	14415	7	8	18	111331	5	8
4	14531	6	8	9	10430	5	6	14	10410	6	7	19	3462	8	9
5	31023	5	8	10	110023	4	7	15	5255	6	7	20	14155	6	8

Задача 28. Запишите числа a и b в системе счисления с основанием g и разделите большее на меньшее.

№	a	b	g	№	a	b	g
1	101 ₂	1420 ₅	3	11	121 ₃	537 ₈	5
2	1653 ₇	201 ₃	4	12	3745 ₉	430 ₅	6
3	152 ₆	3571 ₈	7	13	132 ₄	1643 ₇	5
4	132 ₄	443 ₆	5	14	4321 ₉	132 ₄	8
5	201 ₃	6514 ₇	5	15	7356 ₈	24 ₄	5
6	11011 ₂	3546 ₇	4	16	2101 ₃	1375 ₈	4
7	10111 ₂	3542 ₈	4	17	1221 ₃	4731 ₉	5
8	231 ₄	5541 ₆	5	18	3201 ₅	324 ₉	6
9	3513 ₇	133 ₄	5	19	7356 ₈	345 ₆	7
10	151 ₆	1210 ₃	4	20	7413 ₈	10110 ₂	6

Задача 29. Выразите систематические дроби в виде:

- а) обыкновенных дробей, числители и знаменатели которых записаны в десятичной системе;
б) обыкновенных дробей в той же системе счисления.

№		№		№		№		№	
1	2, 114 ₈	5	35, 13 ₇	9	2, 224 ₆	13	3, 201 ₅	17	5, 442 ₇
2	4, 521 ₈	6	7, 742 ₉	10	4, 234 ₆	14	74, 13 ₈	18	0, 6467 ₈
3	54, 31 ₆	7	6, 135 ₈	11	2, 561 ₉	15	32, 14 ₅	19	41, 32 ₆
4	4, 321 ₇	8	714, 2 ₈	12	25, 31 ₆	16	53, 32 ₈	20	0, 6567 ₉

Задача 30. Проверить результаты действий с помощью чисел 9 и 11.

№		№	
1	$8264 \cdot 5201 = 42\,981\,064;$	11	$42\,932 - 18\,265 = 24\,667;$
2	$25045 \cdot 1487 = 37\,240\,915;$	12	$141\,811 + 17\,128 = 158\,932;$
3	$3745 \cdot 8067 = 30\,210\,915;$	13	$37\,918 - 13\,207 = 24\,711;$
4	$1042 \cdot 1011 = 1\,053\,462;$	14	$25\,041 - 91\,382 = 116\,423;$
5	$4237 \cdot 7925 = 33\,568\,225;$	15	$38\,458 + 68\,412 = 106\,870;$
6	$4371 \cdot 1243 = 5\,433\,153;$	16	$42\,159 + 78\,452 = 120\,521;$
7	$8956 \cdot 4123 = 36\,925\,488;$	17	$125\,405 - 58\,629 = 67\,676;$
8	$5482 \cdot 5162 = 28\,298\,184;$	18	$245\,861 - 21\,984 = 223\,967;$
9	$5826 \cdot 3158 = 18\,398\,508;$	19	$12\,589 + 358\,197 = 371\,506;$
10	$4371 \cdot 1111 = 8\,678\,021;$	20	$48\,519 + 158\,762 = 206\,381;$

Приложение

Таблица индексов

	М о д у л и																							
Чис ла	3	5	7	11	13	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	87	97
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	3	4	3	7	14	7	12	17	24	11	14	27	18	49	15	31	17	6	8	4	79	16	34
3		1	5	4	4	1	1	8	1	1	34	25	1	20	1	54	6	3	26	6	1	30	1	70
4		2	2	6	2	12	14	2	6	18	22	28	12	36	46	30	2	34	12	16	8	76	32	68
5			1	2	3	5	4	17	10	20	1	18	25	1	15	32	22	57	28	1	62	1	70	1
6			3	7	11	15	8	20	18	25	9	39	28	38	50	11	37	20	32	14	5	27	17	8
7				1	5	11	6	15	8	28	28	1	35	32	10	38	19	61	1	33	53	58	81	31
8				9	9	10	3	14	23	12	33	2	39	8	43	45	33	51	18	24	12	73	48	6
9				8	8	2	2	16	2	2	32	10	2	40	2	50	12	6	52	12	2	60	2	44
10				5	10	3	11	7	27	14	12	32	10	19	1	47	53	8	34	9	66	80	86	35
11					1	7	1	21	5	23	6	37	30	7	34	7	45	13	31	55	68	10	84	6
12					6	13	15	10	7	19	20	13	13	10	47	26	8	37	38		9	4	33	42
13						4	17	18	6	11	13	9	32	11	32	37	40	59	39	59	34	15	3	25
14						9	13	5	25		3	15	20	4	7	53	50	12	7	41	57	55	9	65
15						6	5	3	11	1	35	3	26	1	16	28	28	60	54	7	63	31	71	71
16						8	10	4	12	6	8	16	24	6	40	2	4	2	24	32	16	70	64	40
17							16	9	21	7	5	7	38	16	22	20	17	32	49	21	21	78	6	89
18							9	6	19	26	7	24	29	12	51	7	43	23	58	20	6	57	18	78
19								13	13	4	25	31	19	45	45	48	26	38	16	62	32	23	35	81
20								19	16	8	23	6	37	37	9	4	24	25	40	17	70	77	14	69
21								1	9	29	26	26	36	6	11	34	25	64	27	39	54	6	82	5
22								11	22	17	17	11	15	25	31	42	16	30	37	63	72	7	12	24
23									4	27	21	4	16	5	39	51	27	14	15	46	26	66	57	77
24									24	13	31	7	40	28	44	41	39	54	44	30	13	21	49	76
25									20	10	2	36	8	2	30	6	44	48	56	2	46	2	52	2
26									15	5	24	23	17	29	29	52	11	10	45	67	38	12	39	59
27									3	3	30	35	3	14	3	46	18	9	8	18	3	8	3	18
28									14	16	14	29	5	22	4	10	21	29	13	49	61	52	25	3
29										9	15	33	41	35	18	14	5	22	68	35	11	46	59	13
30										15	10	17	11	39	13	43	59	11	60	15	67	28	87	9
31											27	12	34	3	5	39	29	7	11	11	56	5	31	46
32											19	30	9	44	37	17	35	19	30	40	20	67	80	74
33											4	22	31	27	35	23	51	16	57	61	69	40	85	60
34											16	21	23	34	19	35	48	48	55	29	25	75	22	27
35											29	19	18	33	25	12	41	52	29	34	37	59	63	32
36											18	38	14	30	48	22	14	40	64	28	10	54	34	16
37												8	7	42	14	13	9	44	20	64	16	22	11	91
38												5	4	17	42	5	57	55	22	70	36	20	51	19
39												34	33	31	33	33	46	62	65	65	35	45	24	95
40												20	22	9	6	16	55	42	46	25	74	74	30	7

Список литературы

- [1] Банникова Т.М., Баранова Н.А. Основы теории чисел: учебно-методическое пособие Ижевск, 2009. 95 с.
- [2] Завало С.Т., Левищенко С.С., Пылаев В.В. Алгебра и теория чисел: Практикум. Часть 2. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986. – 264 с. – Яз. укр.
- [3] Кочева А. А. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Ч. III. Для студейтов-заочников II курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1984. – 41 с. – Моск.
- [4] Ситников В.М. Теория чисел: учебное пособие. – Челябинск: Изд-во Челяб. гос. пед. ун-та, 2014. – 116с.

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

*Методические указания
и контрольные задания для самостоятельной работы*

Составители : Папков Станислав Олегович,
Друшляк Анастасия Игоревна

В авторской редакции

Изд. № 80/2022. Объем 2 п.л. Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 1,96.
РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»