

МЕХАНИКА

УДК 539.3

С.О. Папков

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

pap_kurg@stel.sebastopol.ua

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ

На основе построенных собственных форм вынужденных установившихся колебаний прямоугольной призмы получено решение задачи о ее динамическом деформировании. Преобразование Лапласа позволяет получить аналитическое представление решения. Численно исследован случай деформирования призмы при внезапно приложенной постоянной нагрузке.

Рассмотрим задачу о нестационарном деформировании прямоугольной призмы (рисунок 1) под воздействием меняющихся во времени напряжений на границе и объемных сил.

Для изотропного материала с упругими постоянными ν и G вектор смещений $\vec{U}(x, y, t)$ должен удовлетворять в безразмерных координатах $x = X/h$ и $y = Y/h$ векторному уравнению Ламе

$$\mathbf{L}[\vec{U}] = \frac{\rho h}{G} \left(h \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} - \vec{F} \right), \quad (1)$$

где $\mathbf{L}[\vec{U}] \equiv \Delta \vec{U} + \frac{1}{1-2\nu} \mathbf{grad} \mathbf{div} \vec{U}$ - дифференциальный оператор левой части уравнений Ламе. Краевые условия в напряжениях запишутся как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_{xx}(1, y, t) &= \tilde{\sigma}_x(y, t); \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xy}(1, y, t) = 0; \\ \frac{1}{2G} \sigma_{yy}(x, 1, t) &= \tilde{\sigma}_y(x, t); \quad \frac{1}{2G} \sigma_{yx}(x, 1, t) = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

а начальные условия при $t = 0$ будут иметь вид:

$$\vec{U} \Big|_{t=0} = \vec{u}_0(x, y); \quad \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \Big|_{t=0} = \vec{v}_0(x, y). \quad (3)$$

В [1] для анализа нестационарных процессов в конечном цилиндре использовалась информация о собственных частотах и формах вынужденных установившихся колебаний. Так как после применения преобразования Лапласа к (1) система соотношений оказывается близкой к системе соотно-

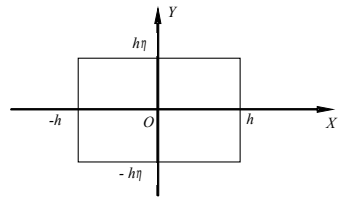


Рисунок 1 - Сечение призмы

шений в стационарном случае, то в [1] изображение по Лапласу для вектора смещений строится аналогично случаю установившихся колебаний. Трудность данного подхода заключается в вычислении оригинала, поскольку вычеты изображения находятся численно с использованием аппарата бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

В [2] предлагаются новые достаточные условия существования ограниченного решения для квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, которые позволяют построить эффективный алгоритм вычисления с требуемой точностью собственных частот установившихся колебаний прямоугольной призмы. Знание собственных частот $\{\Omega_m\}_{m=1}^{\infty}$ установившихся колебаний позволяет, в свою очередь, построить формы колебаний призмы $\{\bar{U}_m\}_{m=1}^{\infty}$, удовлетворяющие системе соотношений

$$L[\bar{U}] = -(\pi \Omega_m / 2)^2 \bar{U}_m \quad (4)$$

при однородных граничных условиях на напряжения:

$$\sigma_{xx}(1, y) = \sigma_{xy}(x, 1) = \sigma_{xy}(1, y) = \sigma_{yy}(x, 1) = 0.$$

Известно, что собственные формы колебаний обладают ортогональностью и полнотой в соответствующем классе функций:

$$\iint_D \bar{U}_n \bar{U}_m dx dy = 0 \quad (n \neq m) \quad (D - \text{сечение призмы}). \quad (5)$$

Наличие в явном виде построенных с заданной точностью первых N собственных форм позволяют предложить отличный от [1] подход к решению задачи (1)-(3) о нестационарном деформировании прямоугольной призмы, основанный на полноте и ортогональности $\{\bar{U}_m\}_{m=1}^l$.

Применение преобразования Лапласа к уравнению Ламе (1) и граничным условиям (2) по переменной t приводит к следующей краевой задаче в изображениях

$$L[\bar{U}^*] = \frac{\rho h}{G} (hp^2 \bar{U}^* - hp \bar{u}_0 - h \bar{v}_0 - \bar{F}^*) \quad (6)$$

с краевыми условиями, зависящими от параметра p

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_{xx}^*(1, y, p) &= \tilde{\sigma}_x^*(y, p); \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xy}^*(1, y, p) = 0; \\ \frac{1}{2G} \sigma_{yy}^*(x, 1, p) &= \tilde{\sigma}_y^*(x, p); \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xy}^*(x, 1, p) = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

где $\bar{U}(x, y, t) \doteq \bar{U}^*(x, y, p)$;

$$\frac{1}{2G}\sigma_{xx}^* = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_x^*}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_y^*}{\partial y}; \quad \frac{1}{2G}\sigma_{yy}^* = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_y^*}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_x^*}{\partial x};$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_{xy}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x^*}{\partial y} + \frac{\partial U_y^*}{\partial x} \right);$$

$$\bar{F}(x, y, t) \doteq \bar{F}^*(x, y, p); \quad \bar{\sigma}_x(x, y, t) \doteq \bar{\sigma}_x^*(x, y, p); \quad \bar{\sigma}_y(x, y, t) \doteq \bar{\sigma}_y^*(x, y, p).$$

Ищем решение краевой задачи (7)-(8) в виде разложения по собственным функциям $\{\bar{U}_m\}_{m=1}^{\infty}$. Так как граничные условия неоднородные, то к данному разложению прибавим функцию $\bar{U}_\sigma^*$, удовлетворяющую граничным условиям (7), но не обязательно удовлетворяющую (6):

$$\bar{U}^* = \bar{U}_\sigma^*(x, y, p) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(p) \bar{U}_m(x, y). \quad (8)$$

Построить $\bar{U}_\sigma^*$ можно, например, следующим образом:

$$\bar{U}_\sigma^* = \left(\frac{1-2\nu}{\nu} \int \bar{\sigma}_y(x, p) dx - \frac{(1-\nu)^2}{\nu} \bar{\sigma}_y(1, p)x + (1-\nu) \bar{\sigma}_x(\eta, p)x \right) \\ \left(\frac{1-2\nu}{\nu} \int \bar{\sigma}_x(y, p) dy - \frac{(1-\nu)^2}{\nu} \bar{\sigma}_x(\eta, p)y + (1-\nu) \bar{\sigma}_y(1, p)y \right). \quad (9)$$

В этом можно убедиться непосредственным расчетом по (9) компонентов тензора напряжений. При таком построении разложения (8) граничные условия (7) для изображения $\bar{U}^*(x, y, p)$ будут выполняться с той точностью, с которой построены собственные формы колебаний $\{\bar{U}_m\}_{m=1}^{\infty}$.

Коэффициенты разложения $A_m(p)$ находятся на основе ортогональности собственных функций $\{\bar{U}_m\}_{m=1}^{\infty}$. Действительно, подставим разложение (8) в уравнение (6):

$$\mathbf{L}[\bar{U}_\sigma^* + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(p) \bar{U}_m] = \frac{\rho h}{G} \left(h p^2 \left(\bar{U}_\sigma^* + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(p) \bar{U}_m \right) - h p \bar{u}_0 - h \bar{v}_0 - \bar{F}^* \right).$$

В силу линейности оператора $\mathbf{L}[\bar{f}]$ и с учетом равенства (4) получаем

$$\mathbf{L}[\bar{U}_\sigma^*] - \sum_{m=1}^{\infty} A_m(p) \left(\frac{\pi \Omega_m}{2} \right)^2 \bar{U}_m =$$

$$= \frac{\rho h^2}{G} p^2 \sum_{m=1}^{\infty} A_m(p) \bar{U}_m + \frac{\rho h^2}{G} p^2 \bar{U}_\sigma^* - \frac{\rho h^2}{G} p \bar{u}_0 - \frac{\rho h}{G} (h \bar{v}_0 + \bar{F}^*).$$

Приведем подобные слагаемые при $\{\bar{U}_m\}_{m=1}^{\infty}$:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} A_m(p) \left(\left(\frac{\pi \Omega_m}{2} \right)^2 + \frac{\rho h^2}{G} p^2 \right) \bar{U}_m = \\ = \mathbf{L}[\bar{U}_0^*] - \frac{\rho h^2}{G} p^2 \bar{U}_0^* + \frac{\rho h^2}{G} p \bar{u}_0 + \frac{\rho h}{G} (h \bar{v}_0 + \bar{F}^*). \end{aligned}$$

Скалярно умножим на $\bar{U}_n$, проинтегрируем по сечению призмы $D = \{(x, y) \in [-1; 1] \times [-\eta; \eta]\}$ и тогда из ортогональности (5) следует

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\pi \Omega_n}{2} \right)^2 + \frac{\rho h^2}{G} p^2 \right) A_n(p) \iint_D \bar{U}_n^2 dx dy = \\ = \iint_D \left(\mathbf{L}[\bar{U}_0^*] - \frac{\rho h^2}{G} p^2 \bar{U}_0^* + \frac{\rho h^2}{G} p \bar{u}_0 + \frac{\rho h^2}{G} \bar{v}_0 + \frac{\rho h}{G} \bar{F}^* \right) \bar{U}_n dx dy. \end{aligned}$$

Откуда получаем формулу для расчета $A_m(p)$:

$$A_m(p) = \frac{1}{\left(\left(\frac{\pi \Omega_m}{2} \right)^2 + \frac{\rho h^2}{G} p^2 \right)} \frac{\iint_D \left(\mathbf{L}[\bar{U}_0^*] - \frac{\rho h^2}{G} p^2 \bar{U}_0^* + \frac{\rho h^2}{G} p \bar{u}_0 + \frac{\rho h^2}{G} \bar{v}_0 + \frac{\rho h}{G} \bar{F}^* \right) \bar{U}_m dx dy}{\iint_D \bar{U}_m^2 dx dy}. \quad (10)$$

Подстановка (10) в (8) дает выражение для изображения вектора смещения, откуда на основе обратного преобразования Лапласа можно найти оригинал – искомый вектор смещений.

Как следует из вышеприведенных формул для собственных форм желательно иметь аналитическое представление. Рассмотрим алгоритм построения собственных форм вынужденных установившихся колебаний прямоугольной призмы.

Для краткости изложения ограничимся случаем симметричного напряженно-деформированного состояния призмы, для которого общее решение задачи $u\vec{i} + v\vec{j}$ о вынужденных установившихся колебаниях с частотой ω имеет вид [4]:

$$\begin{aligned} u(x, y) = C_0 \sin \Omega_1 x - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \frac{\alpha_n}{p_{1n}} \operatorname{ch} p_{1n} y + B_n \frac{p_{2n}}{\alpha_n} \operatorname{ch} p_{2n} y \right) \sin \alpha_n x + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \operatorname{sh} q_{1n} x + D_n \operatorname{sh} q_{2n} x) \cos \beta_n y, \\ v(x, y) = A_0 \sin \Omega_1 y + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{sh} p_{1n} y + B_n \operatorname{sh} p_{2n} y) \cos \alpha_n x - \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \frac{\beta_n}{q_{1n}} \operatorname{ch} q_{1n} x + D_n \frac{q_{2n}}{\beta_n} \operatorname{ch} q_{2n} x) \sin \beta_n y. \end{aligned}$$

Здесь $\alpha_n = \pi n$; $\beta_n = \frac{\pi n}{\eta}$ (η — отношение сторон призмы);
 $q_{l,n}^2 = \beta_n^2 - \Omega_l^2$, $p_{l,n}^2 = \alpha_n^2 - \Omega_l^2$ ($l=1,2$), $\Omega_1 = \frac{\omega h}{c_1}$, $\Omega_2 = \frac{\omega h}{c_2}$ (безразмерные частоты); $c_1 = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}$ — скорость продольной волны; $c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ — скорость сдвиговой волны.

Подстановка данного решения в однородные граничные условия приводит к бесконечной системе

$$\begin{cases} \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\sin \Omega_1 \eta}{\eta} A_0 + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \Omega_1 \cos \Omega_1 C_0 = \frac{\nu \Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-2\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\alpha_n^2 p_{1n}^2}, \\ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \Omega_1 \cos(\Omega_1 \eta) A_0 + \frac{\nu}{1-2\nu} \sin \Omega_1 C_0 = \frac{\nu \Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-2\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{\beta_n^2 q_{1n}^2}, \\ x_m = -\frac{\Omega_1^2}{(1-2\nu) \Delta_m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2 + p_{1m}^2} \left(\frac{2\alpha_m^2}{\beta_n^2 + p_{2m}^2} - \frac{\nu \Omega_2^2}{\beta_n^2} \right) y_n + \frac{2\nu \Omega_1^2 \sin \Omega_1}{(1-2\nu) \Delta_m p_{1m}^2} C_0, \\ y_m = -\frac{\Omega_1^2}{(1-2\nu) \Delta_m^*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2 + q_{1m}^2} \left(\frac{2\beta_m^2}{\alpha_n^2 + q_{2m}^2} - \frac{\nu \Omega_2^2}{\alpha_n^2} \right) x_n + \frac{2\nu \Omega_1^2 \sin \Omega_1 \eta}{(1-2\nu) \eta \Delta_m^* q_{1m}^2} A_0, \end{cases} \quad (11)$$

($m = 1, 2, \dots$)

где $x_m = \frac{(-1)^m \text{sh } p_{2m} \eta}{\eta} B_m$; $y_m = \frac{(-1)^m \text{sh } q_{2m} D_m}{\eta}$; $\Delta_m = \eta \left(p_{2m} \text{cth } p_{2m} \eta - \frac{(\alpha_m^2 + p_{2m}^2)^2}{4\beta_m^2 p_{1m}} \text{cth } p_{1m} \eta \right)$;

$$\Delta_m^* = q_{2m} \text{cth } q_{2m} - \frac{(\beta_m^2 + q_{2m}^2)^2}{4\alpha_m^2 q_{1m}} \text{cth } q_{1m}.$$

Относительно (11) известно, что данная система является квазирегулярной [3].

В основе предлагаемого алгоритма лежит возможность сведения однородной квазирегулярной бесконечной системы

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} c_{k,n} x_n \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (12)$$

заменой вида $x_k = \sum_{j=1}^{N^*} z_k^{(j)} x_j$ ($k > N^*$, где N^* — номер, начиная с которого для (12) выполняются условия регулярности) к совокупности регулярных бесконечных систем относительно $\{z_k^{(j)}\}_{k=N^*+1}^{\infty}$ ($j = 1, 2, \dots, N^*$) с одинаковой матрицей:

$$z_k^{(j)} = \sum_{n=N^*+1}^{\infty} c_{k,n} z_n^{(j)} + c_{k,j} \quad (k > N^*, \quad j = 1, 2, \dots, N^*) \quad (13)$$

и при $k=1, 2, \dots, N^*$ к конечной системе

$$x_k = \sum_{j=1}^{N^*} [c_{k,j} + \sum_{n=N^*+1}^{\infty} c_{k,n} z_n^{(j)}] x_j. \quad (14)$$

Применение данного подхода к системе (11) позволяет установить для (13) справедливость асимптотического закона, аналогичного [3], на основе которого оказывается возможным определить решение (13) с требуемой точностью (в частности, методом улучшенной редукции или методом лимитант). При этом регулярные бесконечные системы (13) одинаково эффективно решаются на всем диапазоне частот, включая собственные частоты. Таким образом, построение нетривиального решения бесконечной системы (11) сводится к построению нетривиального решения конечной системы вида (14). Очевидно, что на собственных значениях призмы определитель конечной системы (14) должен обращаться в нуль, что требует в расчетах максимально точного определения собственных значений.

Ранее [2] был предложен алгоритм определения собственных частот призмы на основе достаточного признака существования ограниченного решения для квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Для симметричного случая на рисунке 2 изображены первые три ветви собственных значений, рассчитанные на основе данного подхода.

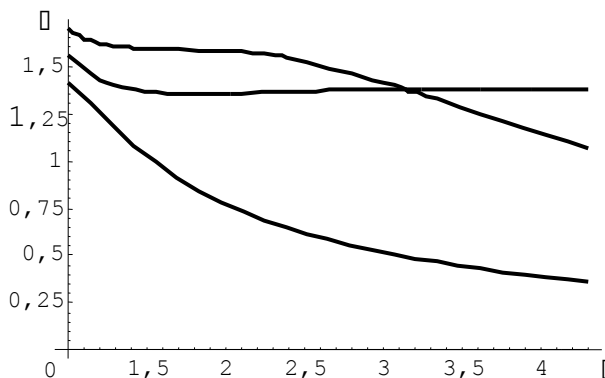


Рисунок 2 — Зависимость собственных частот призмы от отношения ее сторон η ($v = 0,17$)

Найденное на собственной частоте призмы нетривиальное решение системы (14) позволяет по формулам замены восстановить все компоненты

нетривиального решения бесконечной системы (11). Его подстановка в общее решение дает возможность получить аналитическое выражение для собственных форм призмы $\vec{U}_m = U_m^x \vec{i} + U_m^y \vec{j}$:

$$\begin{aligned}
 U_m^x = & C_0(m) \sin \Omega_1 x - \eta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p_{2n}}{\alpha_n} \frac{\text{ch } p_{2n} y}{\text{sh } p_{2n} \eta} - \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{2\alpha_n p_{1n}} \frac{\text{ch } p_{1n} y}{\text{sh } p_{1n} \eta} \right) (-1)^n x_n(m) \sin \alpha_n x + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\text{sh } q_{2n} x}{\text{sh } q_{2n}} - \frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{2\beta_n^2} \frac{\text{sh } q_{1n} x}{\text{sh } q_{1n}} \right) (-1)^n y_n(m) \cos \beta_n y, \\
 U_m^y = & A_0(m) \sin \Omega_1 y + \eta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\text{sh } p_{2n} y}{\text{sh } p_{2n} \eta} - \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{2\alpha_n^2} \frac{\text{sh } p_{1n} y}{\text{sh } p_{1n} \eta} \right) (-1)^n x_n(m) \cos \alpha_n x - \\
 & - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q_{2n}}{\beta_n} \frac{\text{ch } q_{2n} x}{\text{sh } q_{2n}} - \frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{2\beta_n q_{1n}} \frac{\text{ch } q_{1n} x}{\text{sh } q_{1n}} \right) (-1)^n y_n(m) \sin \beta_n y.
 \end{aligned} \tag{15}$$

В формулах (15) все величины, зависящие от частоты, вычисляются на соответствующей собственной частоте $\Omega = \Omega_m$; $C_0(m)$, $A_0(m)$, $x_n(m)$, $y_n(m)$ - нетривиальное решение (11) соответствующее m -ой собственной форме.

Аналогично случаю вынужденных колебаний, ряды, представляющие собственные формы колебаний, требуют улучшения сходимости на границе области. Используя закон, описывающий асимптотическое поведение нетривиального решения (11)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a_0, \tag{16}$$

можно аналитически свернуть остатки рядов в общем решении, полагая при $n > \hat{N}$, что $x_n \approx a_0$; $y_n \approx -a_0$. Ниже представлены выражения для компонентов собственной формы после улучшения сходимости:

$$\begin{aligned}
 U_m^x = & C_0(m) \sin \Omega_1 x - \eta \sum_{n=1}^{\hat{N}} \left(\frac{p_{2n}}{\alpha_n} \frac{\text{ch } p_{2n} y}{\text{sh } p_{2n} \eta} - \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{2\alpha_n p_{1n}} \frac{\text{ch } p_{1n} y}{\text{sh } p_{1n} \eta} \right) (-1)^n x_n(m) \sin \alpha_n x + \\
 & + \sum_{n=1}^{\hat{N}} \left(\frac{\text{sh } q_{2n} x}{\text{sh } q_{2n}} - \frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{2\beta_n^2} \frac{\text{sh } q_{1n} x}{\text{sh } q_{1n}} \right) (-1)^n y_n(m) \cos \beta_n y - \frac{\eta a_0(m)}{2} (\Omega_2^2 - \Omega_1^2) \left(\frac{x(\eta - y)}{2} - \frac{x \ln 2}{2\pi} - \right. \\
 & - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi x} \ln(\cos t + \text{ch } \pi(\eta - y)) dt - \sum_{n=1}^{\hat{N}} \frac{(-1)^n e^{-\alpha_n(\eta - y)}}{\alpha_n^2} \sin \alpha_n x \Bigg) - \\
 & - \frac{a_0(m) \Omega_2^2 \eta^2}{2\pi^2} \left(\text{Li}_2 \left(-e^{-\pi(1-x)/\eta} \right) + \int_0^{\pi y/\eta} \text{arctg} \frac{\sin t}{\cos t + e^{\pi(1-x)/\eta}} dt - \frac{\pi^2}{\eta^2} \sum_{n=1}^{\hat{N}} \frac{(-1)^n e^{-\beta_n(1-x)}}{\beta_n^2} \cos \beta_n y \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_m^y = & A_0(m) \sin \Omega_1 y + \eta \sum_{n=1}^{\hat{N}} \left(\frac{\operatorname{sh} p_{2n} y}{\operatorname{sh} p_{2n} \eta} \times \chi - \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{2\alpha_n^2} \frac{\operatorname{sh} p_{1n} y}{\operatorname{sh} p_{1n} \eta} \right) (-1)^n x_n(m) \cos \alpha_n x - \\
 & - \sum_{n=1}^{\hat{N}} \left(\frac{q_{2n} \operatorname{ch} q_{2n} x}{\beta_n \operatorname{sh} q_{2n}} - \frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{2\beta_n q_{1n}} \frac{\operatorname{ch} q_{1n} x}{\operatorname{sh} q_{1n}} \right) (-1)^n y_n(m) \sin \beta_n y + \frac{a_0(m) \eta \Omega_2^2}{2\pi^2} \times \\
 & \times \left(\operatorname{Li}_2 \left(-e^{-\pi(\eta-y)} \right) + \int_0^{\pi x} \operatorname{arctg} \frac{\sin t}{\cos t + e^{\pi(\eta-y)}} dt - \right. \\
 & - \pi^2 \sum_{n=1}^{\hat{N}} \frac{(-1)^n e^{-\alpha_n(\eta-y)}}{\alpha_n^2} \cos \alpha_n x \left. \right) + \frac{a_0(m) \eta^2 (\Omega_2^2 - \Omega_1^2)}{2\pi^2} \times \\
 & \times \left(\frac{\pi^2 y(1-x)}{2\eta^2} - \frac{\pi y}{2\eta} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^{\pi y/\eta} \ln \left(\cos t + \operatorname{ch} \frac{\pi(1-x)}{\eta} \right) dt - \right. \\
 & \left. - \frac{\pi^2}{\eta^2} \sum_{n=1}^{\hat{N}} \frac{(-1)^n e^{-\beta_n(1-x)}}{\beta_n^2} \sin \beta_n y \right).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь $\hat{N}$ - количество первых неизвестных, удерживаемых при определении нетривиального решения (11); $\operatorname{Li}_2(z)$ - дилогарифм Эйлера.

Для отношения сторон призмы $\eta_L = \frac{2n-1}{2m-1} (n, m \in \mathbf{N})$ значения ряда

собственных частот оказываются равны $\Omega_L^m = \sqrt{2}(2m-1)$, а соответствующие им формы колебаний выражаются через произведения тригонометрических функций:

$$u_L = -C \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2} \cos \frac{(2m-1)\pi y}{2}; \quad v_L = C \cos \frac{(2m-1)\pi x}{2} \sin \frac{(2m-1)\pi y}{2}.$$

Исторически за данными формами колебаний закрепилось название моды Ламе. Ниже проводится сравнение построенной собственной формы с модами Ламе (таблица 1) для $v=0,17$ при частоте $\Omega^* = \sqrt{2}$, которая соответствует первой собственной частоте. Увеличение $\bar{N}$ - числа уравнений, удерживаемых в расчетах при использовании метода улучшенной редукции, и улучшение сходимости рядов (17) на основе (16) позволяет получить результаты достаточно близкие к аналитическому решению.

Таблица 1 – Сравнение построенных собственных форм с модами Ламе

x_j	$u_L(x_j, x_j)$	$u(x_j, x_j)$ без улучшения сходимости		$u(x_j, x_j)$ с улучшением сходимости	
		$\bar{N} = 10$	$\bar{N} = 100$	$\bar{N} = 10$	$\bar{N} = 100$
0,1	0,154508	0,154510	0,154508	0,154510	0,154508
0,2	0,293893	0,293895	0,293893	0,293895	0,293893
0,3	0,404508	0,404512	0,404508	0,404512	0,404508
0,4	0,475528	0,475531	0,475528	0,475531	0,475528
0,5	0,5	0,500002	0,5	0,500002	0,5
0,6	0,475528	0,475528	0,475528	0,475528	0,475528
0,7	0,404508	0,404506	0,404508	0,404506	0,404508
0,8	0,293893	0,293883	0,293893	0,293883	0,293893
0,9	0,154508	0,154351	0,154508	0,154351	0,154508
1	0	0,030290	0,003167	-0,000090	$2,1 \cdot 10^{-8}$

Даже в случае близких собственных частот, построенные собственные формы оказываются ортогональными и имеют тенденцию к возрастанию амплитуды на краю области.

Отметим также, что во всех расчетных случаях ранг матрицы конечной системы (14) оказывался на единицу меньше порядка системы, т.е. собственному значению призмы соответствует с точностью до постоянного множителя единственная собственная форма колебаний.

Аналитическое представление для собственной формы $\bar{U}_m$ позволяют получить аналитически значение интегралов, входящих в (10). В частности, для интеграла

$$\begin{aligned}
 & \iint_D \bar{U}_m^2 dx dy = C_0^2(m) \left(2 - \frac{\sin 2\Omega_1}{\Omega_1} \right) + 2C_0(m) (2\Omega_1^2 - \Omega_1^2) \eta \times \\
 & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x_n(m)}{a_n P_{1n}^2} \left(\frac{\sin(a_n - \Omega_1)}{a_n - \Omega_1} - \frac{\sin(a_n + \Omega_1)}{a_n + \Omega_1} \right) + A_0^2(m) \left(2\eta - \frac{\sin 2\Omega_1 \eta}{\Omega_1} \right) + 2A_0(m) (2\Omega_1^2 - \Omega_1^2) \times \\
 & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n y_n(m)}{\beta_n q_{1n}^2} \left(\frac{\sin(\beta_n - \Omega_1 \eta)}{\beta_n - \Omega_1} - \frac{\sin(\beta_n + \Omega_1 \eta)}{\beta_n + \Omega_1} \right) + \\
 & + \eta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(a_n^2 + p_{2n}^2)(a_n^2 + p_{1n}^2) \operatorname{cth} p_{1n} \eta + \frac{a_n^2 + p_{2n}^2}{a_n^2 p_{2n}} \operatorname{cth} p_{2n} \eta - \frac{2(a_n^2 + p_{2n}^2) \operatorname{cth} p_{1n} \eta}{a_n^2 p_{1n}} + \frac{\eta a_n^2 (a_n^2 + p_{2n}^2)^2}{4a_n^4 p_{1n}^2 \operatorname{sh}^2 p_{1n} \eta} - \frac{\eta a_n^2}{a_n^2 \operatorname{sh}^2 p_{2n} \eta} \right) x_n^2(m) + \\
 & + \eta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(\beta_n^2 + q_{2n}^2)(\beta_n^2 + q_{1n}^2) \operatorname{cth} q_{1n} + \frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{\beta_n^2 q_{2n}} \operatorname{cth} q_{2n} - \frac{2(\beta_n^2 + q_{2n}^2) \operatorname{cth} q_{1n}}{\beta_n^2 q_{1n}} + \frac{\Omega_1^2 \beta_n^2 + q_{2n}^2}{4\beta_n^4 q_{1n}^2 \operatorname{sh}^2 q_{1n}} - \frac{\Omega_1^2}{\beta_n^2 \operatorname{sh}^2 q_{2n}} \right) y_n^2(m) + \\
 & + 2\eta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k(m) y_n(m)}{(q_{1n}^2 + a_k^2)(q_{2n}^2 + a_k^2)} \left(\frac{-3 + 7\eta - 3\eta^2}{(1 - \eta)^2} \Omega_1^2 (\beta_n^2 + a_k^2) + \frac{2 - 8\eta + 4\eta^2}{(1 - \eta)^2} \Omega_2^2 + \frac{\eta \Omega_1^2}{1 - \eta} \left(\frac{a_k^4}{\beta_n^2} + \frac{\beta_n^4}{a_k^2} \right) - \frac{2\eta \Omega_1^2}{1 - \eta} \left(\frac{a_k^2}{\beta_n} + \frac{\beta_n^2}{a_k} \right) + \frac{\eta \Omega_1^2}{1 - \eta} \left(\frac{1}{\beta_n^2} + \frac{1}{a_k^2} \right) \right).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Ряды в (18) сходятся достаточно быстро, что позволяет обойтись без улучшения сходимости на основе (16). Тестирование на модах Ламе подтверждает этот факт.

Возможности анализа нестационарных процессов в прямоугольной призме на основе предложенного подхода проиллюстрируем на примере задачи о внезапно приложенной в начальный момент времени внешней нагрузке

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_{xx}(1, y, t) &= K_0 H(t); \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xy}(1, y, t) = \frac{1}{2G} \sigma_{yx}(x, \eta, t) = \\ &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy}(x, \eta, t) = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где $H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ - единичная функция Хевисайда. Положим также, что отсутствуют объемные силы и в начальный момент времени призма находится в состоянии покоя: $\vec{u}_0 = 0$; $\vec{v}_0 = 0$; $\vec{F} = 0$.

Тогда $\tilde{\sigma}_x^* = \frac{K_0}{p}$, $\tilde{\sigma}_y^* = 0$ и по формуле (9) можно найти

$$\vec{U}_\sigma^* = \left((1 - \nu) x \vec{i} - \nu y \vec{j} \right) \frac{K_0}{p}. \quad (20)$$

Очевидно, что $\mathbf{L}[\vec{U}_\sigma^*] = 0$ и формула для вычисления коэффициентов разложения по собственным модам в (8) приобретает следующий вид:

$$A_m(p) = \frac{\frac{\rho h^2}{G} p^2}{\left(\left(\frac{\pi \Omega_m}{2} \right)^2 + \frac{\rho h^2}{G} p^2 \right)} \frac{\iint_D \vec{U}_\sigma^* \cdot \vec{U}_m dx dy}{\iint_D \vec{U}_m^2 dx dy}. \quad (21)$$

Подставляя (20) в (21) и учитывая, что $c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$, получаем

$$A_m(p) = \frac{p K_0}{\left(\frac{\pi c_2 \Omega_m}{2h} \right)^2 + p^2} \frac{\iint_D \left((1 - \nu) x \vec{i} - \nu y \vec{j} \right) \cdot \vec{U}_m dx dy}{\iint_D \vec{U}_m^2 dx dy}. \quad (22)$$

Формулы (8), (20), (22) дают следующее представление для изображения вектора смещений:

$$\vec{U}^* = K_0 \left(\frac{((1-\nu)x\vec{i} - \nu y\vec{j})}{p} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p}{\left(\frac{\pi c_2}{2h} \Omega_m\right)^2 + p^2} \frac{\iint_D ((1-\nu)x\vec{i} - \nu y\vec{j}) \cdot \vec{U}_m dx dy}{\iint_D \vec{U}_m^2 dx dy} \vec{U}_m \right)$$

Откуда, вычисляя оригинал, получаем искомый вектор смещений

$$\vec{U}(x, y) = K_0 \left((1-\nu)x\vec{i} - \nu y\vec{j} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\iint_D ((1-\nu)x\vec{i} - \nu y\vec{j}) \cdot \vec{U}_m dx dy}{\iint_D \vec{U}_m^2 dx dy} \vec{U}_m(x, y) \cos \Omega_m T \right), \quad (23)$$

где $T = \frac{\pi c_2}{2h} t$ - безразмерное время. В формулу (23) входит отношение двойных интегралов с участием собственных форм. Интеграл в знаменателе представлен формулой (18), интеграл в числителе вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_D ((1-\nu)x\vec{i} - \nu y\vec{j}) \cdot \vec{U}_m dx dy &= \frac{4\eta(1-\nu)C_0(m)}{\Omega_1} \left(\frac{\sin \Omega_1}{\Omega_1} - \cos \Omega_1 \right) - \\ &- \frac{4\nu A_0(m)}{\Omega_1} \left(\frac{\sin \Omega_1 \eta}{\Omega_1} - \eta \cos \Omega_1 \eta \right) + \\ &+ 2\eta(1-\nu)(\Omega_2^2 - 2\Omega_1^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n(m)}{\alpha_n^2 p_{1n}^2} - 2\eta\nu(\Omega_2^2 - 2\Omega_1^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(m)}{\beta_n^2 q_{1n}^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Ряды в (24) сходятся как $O(n^{-4})$ поэтому здесь можно обойтись без улучшения сходимости на основе (16). Таким образом, получено аналитическое представление (23) решения исходной задачи.

Реализация описанного подхода сопряжена с рядом трудностей. Во-первых, число найденных собственных значений и собственных форм всегда конечно, в связи с чем, возникает вопрос о сходимости решения. Во-вторых, собственные формы строятся на основе анализа и численного решения квазирегулярной бесконечной системы (11), т. е. могут содержать численную погрешность. Для оценки влияния возможных недостатков метода на решение рассмотрим численный пример.

При нагрузке вида (19) полагаем значения параметров следующими: $\eta = 1; \nu = 0,17$. Рассчитанные для данного случая значения первых собственных частот Ω_m представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Собственные частоты призмы для численного примера

M	Ω_m	m	Ω_m
1	$\sqrt{2}=1,414213\dots$	11	5,125023
2	1,550006	12	5,493796
3	1,701971	13	5,884476
4	2,668599	14	6,030617
5	3,192239	15	6,550588
6	3,970183	16	6,876247
7	$3\sqrt{2}=4,242640\dots$	17	7,034632
8	4,743816	18	$5\sqrt{2}=7,071067\dots$
9	4,793296	19	7,604074
10	4,972369	20	7,905052

Согласно данным собственным числам строятся собственные формы колебаний. Отметим, что первая, седьмая и восемнадцатая собственные формы совпадают с модами Ламе и допускают элементарное представление.

Конкретные вычисления характеристик смещений и напряжений проведены с удержанием в формуле (23) первых двадцати слагаемых ряда. Значение K_0 в (19) полагалось равным единице.

Характер напряженно-деформированного состояния призмы при нестационарном нагружении по закону (19) иллюстрируют рисунки 3 - 5. На рисунках 3, 4 показано изменение с течением времени T смещений и нормальных напряжений в фиксированной точке призмы $M(0,5; 0,5)$.

Данные рисунков 3,б и 4,с указывают на то, что поля смещений и напряжений формируются за счет нескольких низших мод, при этом первая собственная форма является определяющей при формировании данных полей. На рисунках 3,а, 3,б, 4,а видно, что при выходе на стационарный режим значительную роль играют моды с высшими номерами, с увеличением времени T их роль в формировании полей смещений и напряжений уменьшается.

О выполнении нулевых начальных условий (3) на смещения можно судить по данным рисунка 3,а. Отметим, что и в других точках призмы данные условия выполняются с высокой точностью уже при удержании 15 первых собственных мод, с увеличением числа вовлекаемых в расчеты собственных мод увеличивается и точность выполнения начальных условий.

Начальные условия на $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$ выполняются согласно форме полученного решения (23).

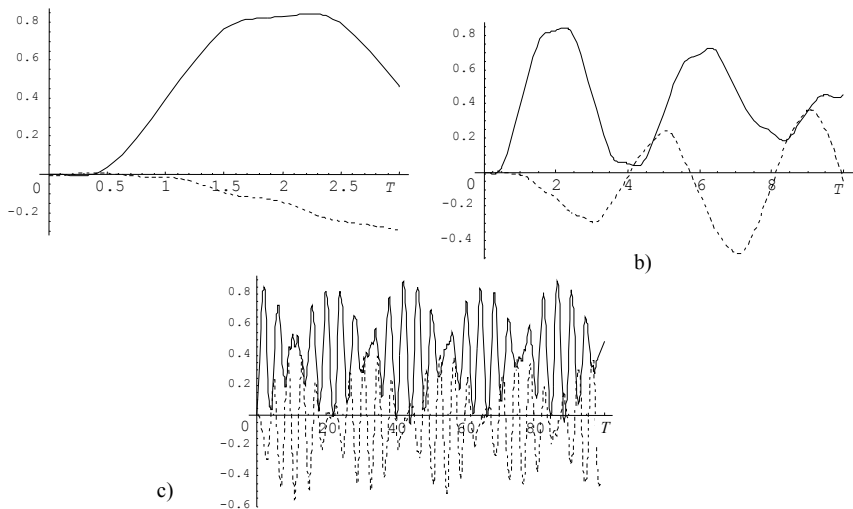


Рисунок 3 – Зависимость вектора смещений в точке $M(0,5; 0,5)$ от безразмерного времени T (;)

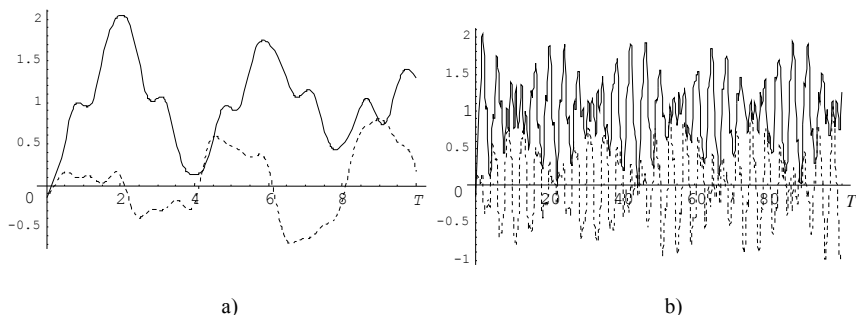


Рисунок 4 – Зависимость нормальных напряжений в точке $M(0,5; 0,5)$ от безразмерного времени T (;)

Рисунок 5 показывает нормальные напряжения $\frac{1}{2G}\sigma_{xx}(x; 0)$ с изменением времени колебаний T . Из него, в частности, следует, что граничные условия выполняются с высокой точностью для любого значения T . Это связано с тем, что для построенных собственных форм нулевые граничные условия удовлетворялись с максимальной погрешностью порядка 10^{-7} .

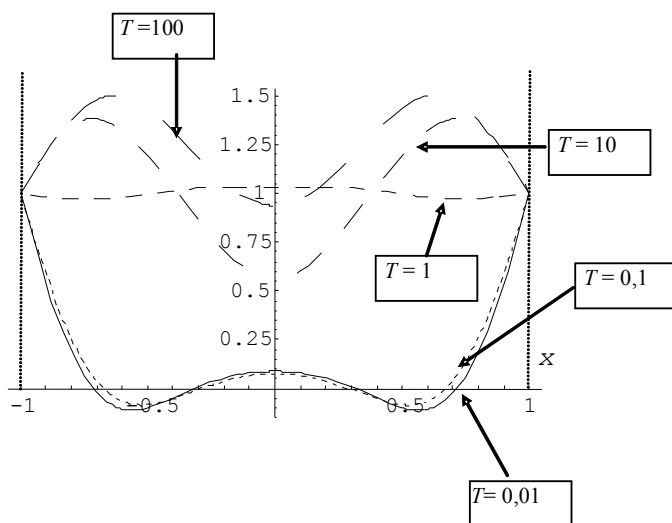


Рисунок 5- Сечение $y = 0$ для $\frac{1}{2G} \sigma_{xx}(x; 0)$ в различные моменты времени

Выводы. Результаты численных исследований показывают, что наблюдается быстрая сходимость ряда (23) по собственным модам. При этом начальные и граничные условия выполняются с высокой точностью. Данные факты показывают достаточную эффективность предлагаемого подхода к анализу нестационарных процессов в прямоугольной призме.

Дальнейшие исследования, основанные на использовании собственных форм колебаний призмы, дают возможность для решения и анализа ряда новых задач динамической теории упругости. В частности, задач с объемными силами, задач с затухающей во времени нагрузкой, задач с импульсным нагружением призмы сосредоточенными силами.

Библиографический список

1. Гринченко В.Т. Нестационарное деформирование цилиндра конечной длины / В.Т. Гринченко, Г.Л. Комисарова // Прикладная механика. — 1985. — Т. 21. — № 8. — С. 3 – 10.
2. Папков С.О. О локализации собственных частот прямоугольной призмы посредством исключения неизвестных в квазирегулярной бесконечной системе / С.О. Папков, В.Н. Чехов // Доповіді НАН України. — 2004. — № 10. — С. 57 – 62.
3. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. — К.: Наук. думка, 1981. — 284 с.

Поступила в редакцию 20.01.2005 г.