

УДК 531.383(07)

А.И. Бохонский, проф., д-р техн. наук,

А.Ю. Даскалица, аспирант

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

nmc@sevgtu.sebastopol.ua

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧ- КОЙ

Анализируются результаты численного решения нелинейных динамических уравнений сферического движения твердого тела для различных случаев, в том числе - Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

В истории становления и развития теории движения твердых тел с одной неподвижной точкой (сферического движения) известны три частных случая точного аналитического решения нелинейных динамических уравнений движения: случай Эйлера – моменты инерции твердого тела относительно собственных осей равны и центр тяжести совпадает с точкой опоры; Лагранжа – эллипсоид инерции тела симметричный и центр тяжести лежит на оси вращения; Ковалевской – моменты инерции твердого тела относительно двух осей равны удвоенному моменту инерции относительно третьей оси и центр тяжести тела находится в плоскости экватора эллипсоида инерции.

Как известно, в этих трех случаях решения динамических уравнений Эйлера выражаются через эллиптические и гиперэллиптические функции, но численное решение позволяет анализировать движение твердого тела (рисунок 1) при варьировании некоторых исходных данных в широких пределах.

В 2007 году исполняется 300-летие со дня рождения великого математика и механика Л. Эйлера, юбилейной дате которого посвящена работа [1]. В связи с этим возрастает интерес к творческому наследию великого ученого. В [2] динамические уравнения Эйлера для случая Ковалевской решены в MathCad. В этой работе уравнения

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = mg(z_c \gamma_2 - y_c \gamma_3),$$

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_x - I_y) \omega_z \omega_x = mg(x_c \gamma_3 - z_c \gamma_1),$$

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = mg(y_c \gamma_1 - x_c \gamma_2)$$

интегрировались для случая, когда кинематические уравнения представлены в форме Пуассона

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \omega_z \gamma_2 - \omega_y \gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \omega_x \gamma_3 - \omega_z \gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \omega_y \gamma_1 - \omega_x \gamma_2,$$

где

$$\gamma_1 = \cos(z_1, x) = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \cos(z_1, y) = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_3 = \cos(z_1, z) = \cos \theta$$

параметры представляют собой косинусы углов прецессии оси oz_1 с осями подвижной системы координат $oxyz$; m – масса тела; g – ускорение силы тяжести; x_c, y_c, z_c – координаты центра тяжести твердого тела в подвижной системе координат.

Пример фазового портрета движения твердого тела в переменных Пуассона для случая гироскопа Ковалевской изображен на рисунке 2.

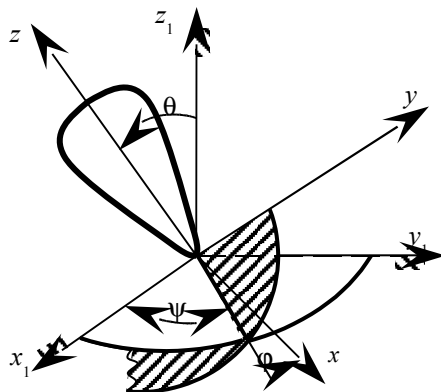


Рисунок 1 – Движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку (вращение вокруг неподвижной точки (сферическое движение))

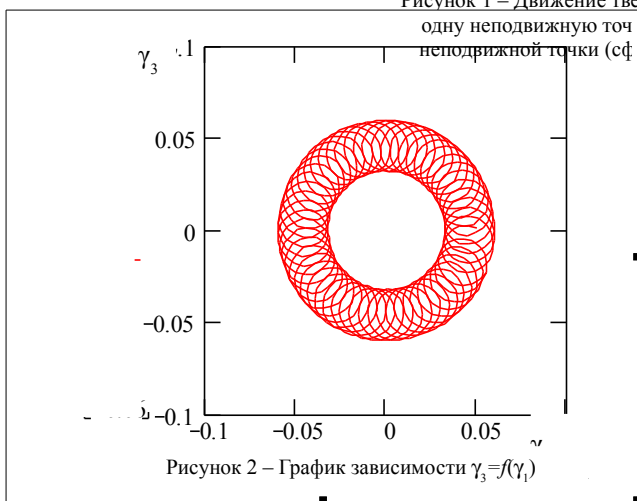


Рисунок 2 – График зависимости $\gamma_3 = f(\gamma_1)$

В данной статье численное решение осуществляется с использованием кинематических переменных $\varphi, \dot{\varphi}, \psi, \dot{\psi}, \theta, \dot{\theta}$ (введенных Л. Эйлером для описания движения твердого тела) динамических уравнений в проекциях на оси подвижной системы координат (рисунок 1) - в предположении, что эти оси являются главными осями инерции. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned}
I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z &= M_y^e, \\
I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\omega_z\omega_x &= M_z^e, \\
I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y &= M_x^e,
\end{aligned} \tag{1}$$

где I_x, I_y, I_z – моменты инерции тела относительно главных осей x, y, z ; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции угловой скорости тела на оси подвижной системы координат; M_x, M_y, M_z – главные моменты всех внешних сил относительно осей x, y, z . Кинематические уравнения Эйлера, как известно, записываются так:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\
\omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\
\omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь φ, ψ, θ , – углы Эйлера соответственно собственного вращения, прецессии и нутации. Система уравнений (2) предварительно решена как алгебраическая относительно неизвестных производных от углов $\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$ (использовалась процедура solve в Maple):

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \omega_z - (\omega_x \sin \varphi + \omega_y \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta; \\
\dot{\psi} &= (\omega_x \sin \varphi + \omega_y \cos \varphi) / \sin \theta; \\
\dot{\theta} &= \omega_x \cos \varphi - \omega_y \sin \varphi.
\end{aligned} \tag{3}$$

При поиске численного решения системы шести дифференциальных уравнений (1) и (3) использовалась процедура Рунге-Кутты Rkadapt в MathCad, предполагающая автоматический выбор шага интегрирования.

Для известных трех случаев численные решения найдены при ряде общих исходных данных: случай Эйлера $I_x=I_y=0,05$ кг·м²; $I_z=0,1$ кг·м²; $\omega_1=6000$ с⁻¹; $\omega_2=0,01$ с⁻¹; $\omega_3=0$. Начальные условия для $\omega_x(0), \omega_y(0), \omega_z(0)$ вычислялись по формулам

$$\begin{aligned}
\omega_x(0) &= \omega_2(0) \sin \theta \sin \psi + \omega_3(0) \cos \varphi, \\
\omega_y(0) &= \omega_2(0) \sin \theta \cos \psi + \omega_3(0) \sin \varphi, \\
\omega_z(0) &= \omega_2(0) \cos \theta + \omega_1(0),
\end{aligned}$$

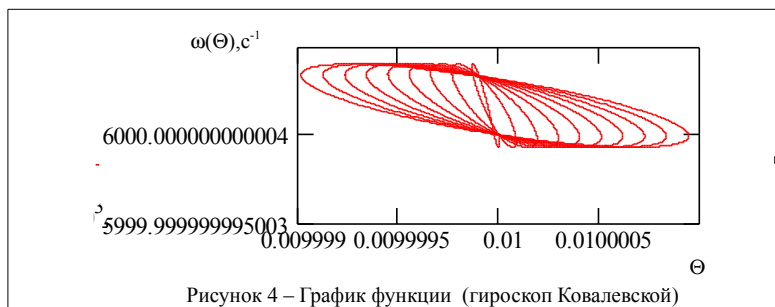
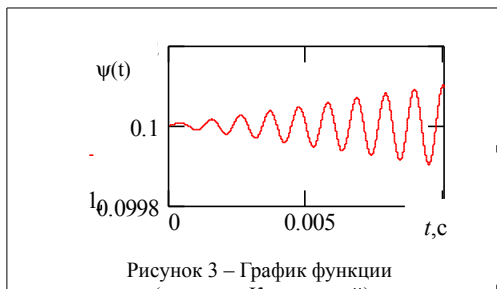
из которых следует что: $\omega_x(0) = 0$; $\omega_y(0) = 2 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}$; $\omega_z(0) = 6 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$.

При этом для углов Эйлера $\varphi(0)=0,00002$ рад и $\psi(0)=\theta(0)=0$.

Для случая Лагранжа помимо принятых ранее исходных данных и начальных условий дополнительно задано: $P=0,5 \text{ Н}$ – вес тела; $L=0,05 \text{ м}$ – расстояние от центра тяжести до неподвижной точки.

В случае Лагранжа в связи с тем, что $P \neq 0$, как и следовало ожидать, появляются нутационные колебания. Кроме того, легко численно проверить закон прецессии оси гироскопа $\dot{\omega}_z = P \cdot a / I_z \omega_1 \sin \theta$, где $\sin \theta = 1$; $a \sin \theta$ – плечо силы тяжести. Характерно, что для обоих численных примеров (Эйлера и Лагранжа) $\dot{\omega}_z = \text{const}$ на всем временном интервале движения твердого тела.

Для случая Ковалевской принято: $I_x = 2I_z = 0,025 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $L=0$; координаты центра тяжести $x_c = y_c = 0,001 \text{ м}$. График функции $\Psi(t)$ для этого случая изображен на рисунке 3, а график $\omega(\theta)$ изображен на рисунке 4. Как следует из графика $\Psi(t)$, вращение твердого тела вокруг оси oz неустойчиво.



Нельзя не отметить, что Парижская академия наук высоко оценила аналитическое решение задачи, найденное С. Ковалевской: «...после изучения мемуара, представленного на конкурс, обнаружили в этой работе не только свидетельство широкого и глубокого знания, но и признак ума великой изобретательности».

Используя численные эксперименты, можно, например, показать, что ось симметрии гироскопа устойчива в движении, когда она не вертикальна, а угол нутации весьма мал. Численный эксперимент позволяет также проверить устойчивость гироскопа в широких пределах изменения исходных

данных при малых и больших возмущениях, изучить регулярную прецессию гироскопа по инерции. Наконец, с помощью численного анализа можно проверить теорему Резаля, утверждающую, что скорость конца вектора момента количества движения (кинетического момента) гироскопа равна главному моменту внешних сил. Для этого достаточно приложить внешнюю силу к гироскопу в определенный момент времени и наблюдать на графике поведение оси симметрии гироскопа.

Рассмотренный подход, основанный на численном анализе уравнений движения, позволяет исследовать многие закономерности динамики твердого тела, изучить гироскопические явления [3, 4], а также эффекты, которые используются во многих гироскопических приборах.

Численное интегрирование нелинейных уравнений динамики твердого тела с одной неподвижной точкой (например, в MathCad) позволяет построить графики зависимостей каждого из кинематических параметров от любого другого. Один из примеров дан на рисунке 5.

В приложении к статье приведем фрагмент программы интегрирования динамических уравнений для гироскопа Лагранжа.

ГИРОСКОП (СЛУЧАЙ ЛАГРАНЖА)

Начальные
условия

$J_x := 0.05$ $J_y := 0.05$ $J_z := 0.3$ **ORIGIN** := 1 $P := 0.2$ $L := 0.005$

$\omega_1 := 6$ $\omega_2 := 3$ $\omega_3 := 0$ $\phi := 0.0001$ $\psi := 0.0001$ $\theta := 0.01$

$\omega x := \omega_2 \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) + \omega_3 \cdot \cos(\phi)$ $\omega x = 3 \times 10^{-6}$

$\omega y := \omega_2 \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi)) - \omega_3 \cdot \sin(\phi)$ $\omega y = 0.03$

$\omega z := \omega_2 \cdot (\cos(\theta)) + \omega_1$ $\omega z = 9$

$$y := \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^{-6} \\ 0.03 \\ 9 \\ 0.0001 \\ 0.0001 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

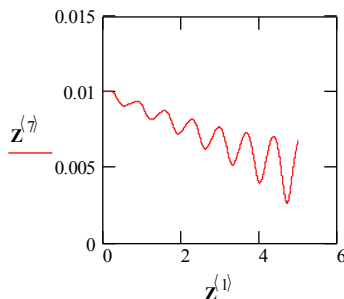
Вычисление правых частей уравнений движения

$$F(t, y) := \begin{bmatrix} -(J_z - J_y) \cdot y_2 \cdot \frac{y_3}{J_x} + P \cdot L \cdot \sin(y_4) \cdot \frac{\cos(y_6)}{J_x} \\ -(J_x - J_y) \cdot y_3 \cdot \frac{y_1}{J_y} - P \cdot L \cdot \sin(y_4) \cdot \frac{\sin(y_6)}{J_y} \\ -(J_y - J_x) \cdot y_1 \cdot \frac{y_2}{J_z} \cdot 0 \\ y_3 - (y_1 \cdot \sin(y_4) + y_2 \cdot \cos(y_4)) \cdot \cot(y_6) \\ \frac{(y_1 \sin(y_4) + y_2 \cos(y_4))}{\sin(y_6)} \\ y_1 \cdot \cos(y_4) - y_2 \cdot \sin(y_4) \end{bmatrix}$$

$T := 5$

$Z := \text{Rkadapt}(y, 0, T, 5001, F)$

График зависимости угла нутации от времени



Студентам, избравшим приборостроение как специальность, необходимо изучать теорию гироскопов и гироскопические приборы (гироскомпасы, гировертикали, гиротаксометры, гироскопы направления и др.) хотя бы в рамках факультативного курса. При этом анализ численных решений динамических уравнений движения твердого тела с одной неподвижной точкой

позволяет глубже понять природу гироскопических явлений и их практическое использование в гироскопических приборах. В перспективе предпола-

гается с использованием разработанных программ исследовать закономерности поведения гироскопов при изменении в широких пределах их геометрических и физических параметров, а также – начальных условий.

Авторы выражают благодарность Р.А.Спасскому за замечания, высказанные при чтении рукописи.

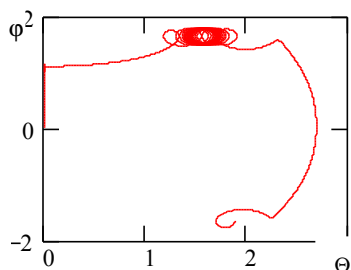


Рисунок 5 – График зависимости угла собственного вращения φ от угла прецессии Θ (для общего случая движения твердого тела)

Библиографический список

1. Спасский Р.А. Классическое вариационное исчисление и вариационные принципы механики: Учеб. пособие / Р.А. Спасский. — Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2004. — 176 с.
2. Каганов В.И. Компьютерные вычисления в средах Excel и Mathcad / В.И. Каганов. — М.: Горячая линия. — Телеком, 2003. — 328 с.
3. Добронравов В.В. Курс теоретической механики: Учебник для машиностроит. спец. вузов / В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин. — М.: Высш. шк., 1983. — 575 с.
4. Петкевич В.В. Теоретическая механика: Учеб. пособие / В.В. Петкевич. — М.: Наука, 1981. — 496 с.

Поступила в редакцию 19.01.2005 г.