

УДК 621.662:62.192

В.В. Леонтьев, Э.В. Прошкин

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

root@sevgtu.sebastopol.ua

ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ПЛОСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассматривается перспективный вариант подхода к решению задачи контактного взаимодействия проволок в стальном канате с использованием метода граничных элементов.

Во многих отраслях техники возникают задачи исследования напряженно-деформированного состояния конструкций, находящихся в условиях плоского напряженного либо плоского деформированного состояний и представляющих собой систему взаимодействующих тел, жестко не связанных друг с другом. К таким конструкциям относятся, например, многопроволочные витые изделия – стальные канаты.

Если рассматривать поперечное сечение каната под действием сжимающей нагрузки, то сечение каждой отдельной проволоки можно представить как систему конечных элементов. В этом случае, с помощью широко используемого в современной науке метода конечных элементов (МКЭ) легко вычислить напряжения и деформации в любой точке сечения проволоки. Однако попытка анализа по МКЭ напряженно-деформированного состояния всего многопроволочного сечения, особенно при исследовании конструкций многопрядных канатов двойной свивки, приводит к существенным затруднениям, поскольку данный метод предполагает полное выполнение условий совместности деформаций между элементами. Сложность задачи связана с необходимостью учета сил трения и проскальзывания проволок друг относительно друга, т.е. именно с необходимостью решения задачи при отсутствии совместных деформаций в касательном направлении в зоне контакта отдельных проволок.

Для преодоления этих трудностей использован интенсивно развивающийся в последнее время метод граничных элементов, достаточно подробно изложенный в [1, 2]. Здесь участок контакта проволок может быть описан специальным граничным элементом – *элементом разрывов смещений*, показанным на рисунке 1. Предполагается, что вдоль элемента выполняются условия

$$D_s^j = U_s^{-j} - U_s^{+j}, \quad D_n^j = U_n^{-j} - U_n^{+j},$$

где D_s^j – касательная составляющая разрыва смещений в элементе j ; D_n^j – нормальная составляющая разрыва смещений в элемен-

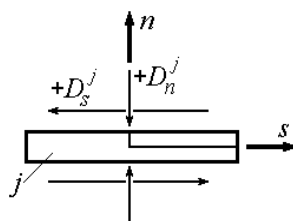
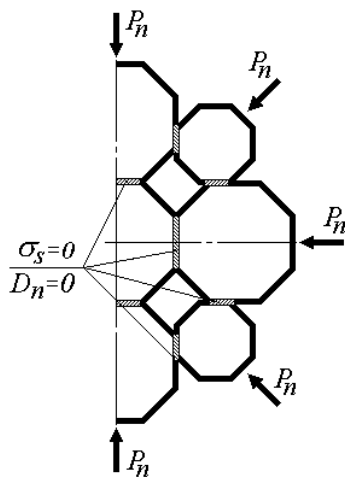


Рисунок 1 – Элемент, учитывающий разрыв смещений

те j ; U_s^j и U_n^j – касательные и нормальные смещения j -го элемента. Индексами “+” и “-” обозначены положительная и отрицательная поверхности элемента по отношению к нормали.

Вдоль рассматриваемого элемента нарушается гипотеза о сплошности тела. Этот факт дает возможность определять свойства контактирующих поверхностей разными функциями с точки зрения напряжений и деформаций. Таким образом, применение граничного элемента разрывов смещений дает возможность учета проскальзывания проволок друг относительно друга, недостижимую при использовании только граничного элемента фиктивных нагрузок [3].



▨ – граничные элементы фиктивных нагрузок

■ – граничные элементы разрывов смещений

Рисунок 2 – Сечение каната, представленное граничными элементами

Важно отметить, что элемент построен так, что разрывов напряжений не возникает. Участки же, не являющиеся контактными, описываются с помощью граничных элементов фиктивных нагрузок. Эти элементы характеризуются величинами напряжений, приложенных в касательном (P_s^j) и нормальном (P_n^j) направлениях [3]. Идеализированное таким образом поперечное сечение каната показано на рисунке 2.

Если предположить, что в нормальном к линии контакта проволок направлении разрывов смещений не возникает, т.е. $D_n^j = 0$, и проскальзывание проволок происходит без трения (напряжения в элементах разрывов смещений равны нулю), то будем иметь следующую систему уравнений, выражающую условия равновесия граничных элементов для определения неизвестных величин D_s^j, P_s^j и P_n^j

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_s^i = \sum_{j=1}^M A_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^M A_{sn}^{ij} P_n^j + \sum_{j=M+1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j, \quad i = 1, \dots, M; \\ \sigma_n^i = \sum_{j=1}^M A_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^M A_{nn}^{ij} P_n^j + \sum_{j=M+1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j, \quad i = 1, \dots, M; \\ 0 = \sum_{j=1}^M A_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^M A_{sn}^{ij} P_n^j + \sum_{j=M+1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j, \quad i = M+1, \dots, N, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $A_{ss}^{ij}, A_{ns}^{ij}, A_{sn}^{ij}, A_{nn}^{ij}$ – коэффициенты влияния для элементов фиктивных нагрузок; B_{ss}^{ij}, B_{ns}^{ij} – коэффициенты влияния для элементов разрывов смещений; σ_s^i, σ_n^i – известные (из режима эксплуатации и характера нагружения) граничные усилия при поперечном обжатии каната; N – общее число граничных элементов; M – количество элементов фиктивных нагрузок; $(N - M)$ – количество элементов разрывов смещений. Выражения для расчета коэффициентов влияния приведены в [1].

Первые два уравнения этой системы выражают напряжения в касательном и нормальном направлениях, возникающие на участках проволок, не контактирующих с соседними. Третье уравнение учитывает напряжения в касательном направлении в зоне контакта проволок.

Решив систему уравнений (1), можно вычислить соответствующие коэффициенты влияния, а также определить напряжения и перемещения как на всех граничных элементах, так и в необходимых внутренних точках проволок.

При необходимости учета трения проволок друг о друга вместо обычного элемента разрывов смещений наиболее удобно использовать так называемый элемент Кулона-Мора [1], для которого выполняется следующее ограничение:

$$|\sigma_s^i| \leq c^i + (-\sigma_n^i) \operatorname{tg} \varphi^i, \quad i = M+1, \dots, N. \quad (2)$$

Здесь c^i и φ^i – соответственно коэффициент сцепления и угол внутреннего трения материала, находящегося между контактирующими поверхностями (например, консистентная смазка). В остальном, этот элемент ведет себя так же, как обычный контактный элемент. Введение элемента Кулона-Мора приводит к необходимости модифицировать последнее уравнение системы (1), соответствующее напряжению σ_s^i на контактных элементах. В результате преобразований, связывающих нормальное и касательное напряжения в зоне контакта проволок, и учитывая, что

$$\begin{aligned}\sigma_s^i &= \sum_{j=1}^M A_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^M A_{sn}^{ij} P_n^j + \sum_{j=M+1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j, \quad i = M+1, \dots, N; \\ \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^M A_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^M A_{nn}^{ij} P_n^j + \sum_{j=M+1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j, \quad i = M+1, \dots, N,\end{aligned}\quad (3)$$

используя (3) приводим выражение (2) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^M A_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^M A_{sn}^{ij} P_n^j + \sum_{j=M+1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j = \\ = c^i + \left[- \left(\sum_{j=1}^M A_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^M A_{nn}^{ij} P_n^j + \sum_{j=M+1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j \right) \right] t g \varphi^i, \quad i = M+1, \dots, N.\end{aligned}\quad (4)$$

Если перенести в левую часть выражения (4) известный свободный член c^i , то получим уравнение, по структуре аналогичное первым двум уравнениям системы (1), удобное для его включения в эту систему:

$$\begin{aligned}c^i &= \sum_{j=1}^M (A_{ss}^{ij} + A_{ns}^{ij} t g \varphi^i) P_s^j + \sum_{j=1}^M (A_{sn}^{ij} + A_{nn}^{ij} t g \varphi^i) P_n^j + \\ &+ \sum_{j=M+1}^N (A_{ss}^{ij} + A_{ns}^{ij} t g \varphi^i) D_s^j, \quad i = M+1, \dots, N.\end{aligned}$$

Рассмотренный подход к решению контактных задач в упругой области реализован в виде программы для ЭВМ. Для ее тестирования были решены задачи о контактном взаимодействии двух тел: тела простой кубической формы и кубического тела с упругой полуплоскостью. При этом анализировались различные виды нагружения. Полученные результаты с точностью до 5...7 % совпадают с известными для некоторых частных случаев точными решениями, а при их отсутствии – соответствуют физическому смыслу рассмотренных процессов.

Таким образом, данный подход к исследованию контактного взаимодействия тел произвольной формы при наличии либо отсутствии смазывающей прослойки позволяет в будущем перейти к решению важной для практического использования задачи о пластическом обжатии стального каната, что и представляет перспективы дальнейших исследований.

Библиографический список

1. Крауч С. Методы граничных элементов в механике твердого тела: Пер. с англ. / С. Крауч, А. Старфилд. — М.: Мир, 1987. — 328 с.
2. Бенерджи П., Методы граничных элементов в прикладных науках: Пер. с англ. / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. — М.: Мир, 1984. — 494 с.
3. Леонтьев В.В. Применение метода граничных элементов к решению плоских задач теории упругости / В.В. Леонтьев // Вестн. СевГТУ: Сб. науч. тр. — Севастополь, 1997. — Вып. 8. — С. 79 – 82.

Поступила в редакцию 22.03.2004 г.