

УДК 62-50:519.2

Е.Л. Первухина, д-р. техн. наук, Т.Л. Степанченко, А.В. Первухин

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ АДАПТИВНОГО ФИЛЬТРА ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Проводится частотный анализ свойств адаптивного дискретного фильтра для случайных последовательностей. Фильтр построен по принципу минимизации информационного расхождения между вероятностными распределениями получаемых оценок и оцениваемых величин.

Фильтрация случайных последовательностей по-прежнему остается одним из актуальных приложений теории управления. В литературе описано большое число методов фильтрации, в последнее время созданы новые адаптивные алгоритмы, реагирующие на реальное изменение эмпирических данных [1, 2, 3]. Однако, несмотря на теоретическую обоснованность построения оптимальных в классическом смысле алгоритмов, получаемые оценки часто расходятся с действительными значениями элементов оцениваемых последовательностей, особенно в условиях априорной неопределенности о помехо-сигнальной обстановке.

В [4] предложен адаптивный алгоритм фильтрации случайных последовательностей при априорно неизвестных ковариациях шумов. В качестве критерия фильтрации используется информационное расхождение между вероятностными распределениями получаемых оценок и оцениваемых величин. Поскольку до появления современных компьютеров теория фильтрации в большей части представляла частотный анализ, нежели временной, представляет интерес частотное исследование свойств нового адаптивного фильтра, прежде всего, для стационарного состояния. При этом вопрос о сравнительных преимуществах и недостатках анализа во временной и частотной областях связан лишь с пониманием разных свойств фильтруемых случайных последовательностей, так как автокорреляционная функция и нормированный спектр являются взаимными трансформантами и математически эквивалентны.

Анализируются частотные свойства указанного адаптивного фильтра случайных последовательностей при априорно неизвестных ковариациях шумов. Полученные результаты сравниваются с классическим подходом Калмана.

Пусть $y(t)$ - последовательность равноотстоящих во времени наблюдений, $s(t)$ - ненаблюдаемый дискретный сигнал, или сообщение, $t = 1, 2, \dots, T$ - дискретное время. В этом случае $(y(t), s(t))$ образуют частично наблюдаемую векторную последовательность. Рассмотрим инвариантную во времени систему

$$\begin{aligned} s(t) &= cx(t); \\ y(t) &= s(t) + hv(t); \end{aligned} \quad (1)$$

$$x(t+1) = ax(t) + b\omega(t+1), \quad (2)$$

когда значения коэффициентов a, b, c, h не меняются со временем. Здесь $\omega(t)$ и $v(t)$ - взаимно независимые последовательности типа белого шума с нулевыми средними: $E\omega(t) = Ev(t) = 0$ и $E[v_t^2] = \sigma_v^2$, $E[\omega_t^2] = \sigma_\omega^2$, $E[\cdot]$ - символ математического ожидания. В самом распространенном случае $\sigma_v^2 = \sigma_\omega^2 = 1$.

Задачу фильтрации, т.е. оценки состояния $x(t)$, рассматривают как задачу нахождения правила (отображения), позволяющего по совокупности из N последовательных наблюдений $y(t)$ однозначно находить оценки для $s(t)$, $x(t)$, которые обозначают $\hat{s}(t/N)$, $\hat{x}(t/N)$. Первый индекс указывает на момент оценивания, второй - на количество используемых наблюдений. При $N = t$ используют упрощенное обозначение $\hat{x}(t)$ вместо $\hat{x}(t/N)$.

Если $x(t)$, $y(t)$ (а следовательно, $\omega(t)$, $v(t)$) - гауссовские последовательности, то справедлива теорема Калмана [1, 3]: оценка состояния системы (1), (2) в момент $t+1$ по наблюдениям $y(t), \dots, y(1)$, минимизирующая квадратичный критерий и задаваемая $x^*(t+1/t) = E[x^*(t+1)/y(t), \dots, y(1)]$, удовлетворяет рекуррентным соотношениям вида

$$x^*(t+1/t) = ax^*(t/t) + k(t)[y(t) - cax^*(t/t)]; \quad (3)$$

$$s^*(t/t-1) = cx^*(t/t-1); \quad x^*(1/0) = Ex_1. \quad (4)$$

Коэффициент $k(t)$ определяют из выражения

$$k(t) = p^*(t/t-1) \cdot c[c^2 p(t-1) + \sigma_v^2]^{-1}, \quad (5)$$

где среднюю квадратичную ошибку

$$p^*(t/t-1) \equiv E\left\{\left[x(t/t-1) - x^*(t/t-1)\right]^2\right\}$$

задают рекуррентным соотношением

$$p^*(t) = p^*(t/t-1) \cdot [1 - k(t)c]^2 + \sigma_v^2 c^2 k^2(t). \quad (6)$$

Выражения (3)-(6) составляют алгоритм оценивания, называемый фильтром Калмана.

Для стационарного сигнала $s(t)$ известно представление [1, 2]

$$s(t) = cb \sum_0^{\infty} a^k \eta_{t-k}, \quad (7)$$

где η_{t-k} - стационарный (в широком смысле) процесс. Передаточная функция сигнала в этом случае есть

$$\Psi_s(\lambda) = \frac{cb}{e^{2\pi i\lambda} - a}, \quad -\frac{1}{2} < \lambda < \frac{1}{2}, \quad (8)$$

а его спектральная плотность

$$p_s(\lambda) = \frac{c^2 b^2}{|e^{2\pi i\lambda} - a|} = \frac{c^2 b^2}{1 + a^2 - 2a \cos 2\pi \lambda}. \quad (9)$$

В свою очередь, для стационарного состояния фильтр Калмана (3)-(6) можно привести к виду

$$x^*(t) = (1 - pc^2)ax^*(t-1) + pcy(t); \quad (10)$$

здесь $p = p^*(t/t-1)$.

Тогда соответствующая «передаточная функция» есть

$$\Psi_f(\lambda) = \frac{pc^2}{e^{2\pi i\lambda} - a_f}, \quad (11)$$

где $a_f = (1 - pc^2)a$.

Поскольку на практике существует неопределенность в начальных значениях ковариаций, то никакой фильтр Калмана не может быть оптимальным за исключением стационарного режима, являющегося наиболее важным его приложением [1]. Для преодоления подобных практических трудностей в работе [4] предложен адаптивный дискретный фильтр для случайных последовательностей. Принято, что состояние системы характеризуется распределением с плотностью вероятности $g(x)$, а его оценка - распределением с плотностью вероятности $f(x; y)$. Показано, что информационное расхождение Кульбака в виде разности между неизвестной реальной плотностью вероятности и его оценкой

$$J(g, f) = \int [g(x) - f(x; y)] \ln \frac{g(x)}{f(x; y)} dx \quad (12)$$

может быть использовано как критерий качества фильтрации. В качестве оптимальной с позиций такого критерия принята оценка, параметры распределения которой наиболее близки к параметрам распределения истинного состояния $x(i)$, т.е. оценка $\hat{x}(i+1)$ в момент времени $i+1$ по ре-

зультатам наблюдений до момента времени i определяется из соотношения

$$\hat{x}(i+1) = \xi(k(i), \hat{x}(i), y(i)), \quad (13)$$

где ξ - некоторая функция, $k(i)$ - решение уравнения

$$k = \arg \min J(g; f). \quad (14)$$

В соответствии с критерием (12) и соотношениями (13), (14) уравнения адаптивного фильтра для рассматриваемой здесь системы (1), (2) принимают вид:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t/t-1) &= a\hat{x}(t-1); \\ \hat{x}(t) &= a\hat{x}(t-1) + k(t)[y(t) - ca\hat{x}(t-1)]; \end{aligned} \quad (15)$$

$$k(t) = a^2 \sigma_{\hat{x}}^2(t-1) \cdot [a^2 c^2 \bar{\sigma}_{\hat{x}}^2(t-1) + \sigma_y^2(t)]^{-1}; \quad (16)$$

$$\sigma_{\hat{x}}^2(t) = a^2 \sigma_{\hat{x}}^2 [1 - k(t)c]^2 + k^2(t) \sigma_y^2. \quad (17)$$

Алгоритм отличается от фильтра Калмана (3)-(6) выражениями (16), (17), куда вместо неизвестных дисперсий шумов входят дисперсия $\sigma_{\hat{x}}^2(t)$ оценки состояния $\hat{x}(t)$ и дисперсия $\sigma_y^2(t)$ наблюдаемой случайной последовательности $y(t)$.

Адаптивный фильтр для стационарного состояния определен соотношением (15). Отсюда соответствующая «передаточная функция»

$$\Psi_f(\lambda) = \frac{cg}{e^{2\pi i \lambda} - a_{af}}, \quad (18)$$

где $a_{af} = (1 - cg)a$; $g = a\sigma_{\hat{x}}^2/b^2$.

В силу устойчивости системы (1), (2) $(1 - cg) < 1$, т.е. $a_{af} < a$. Это означает, что кривая зависимости (18) - «усиление-частота» для адаптивного фильтра, так же, как и для фильтра Калмана (выражение (11)), всегда более пологая, чем для фильтра сигнала.

Для анализа зависимости передаточной функции адаптивного фильтра от введенного в [4] и широко используемого на практике отношения сигнал-шум в виде $\sigma_{\omega}^2/\sigma_y^2$ проведен численный эксперимент на ЭВМ. По наблюдениям в соответствии с выражением (1)

$$y(t) = s(t) + v(t); \quad s(t) = x(t)$$

исследован стационарный процесс авторегрессии первого порядка (2) из [3]

$$x(t+1) = ax(t) + b\omega(t+1)$$

при значениях $a = e^{-1}$, $b = \sqrt{15(1 - e^{-2})}$, $c = h = 1$.

Эксперимент реализован с использованием прикладного программного обеспечения RATS (ESTIMA). Функция ковариации процесса:

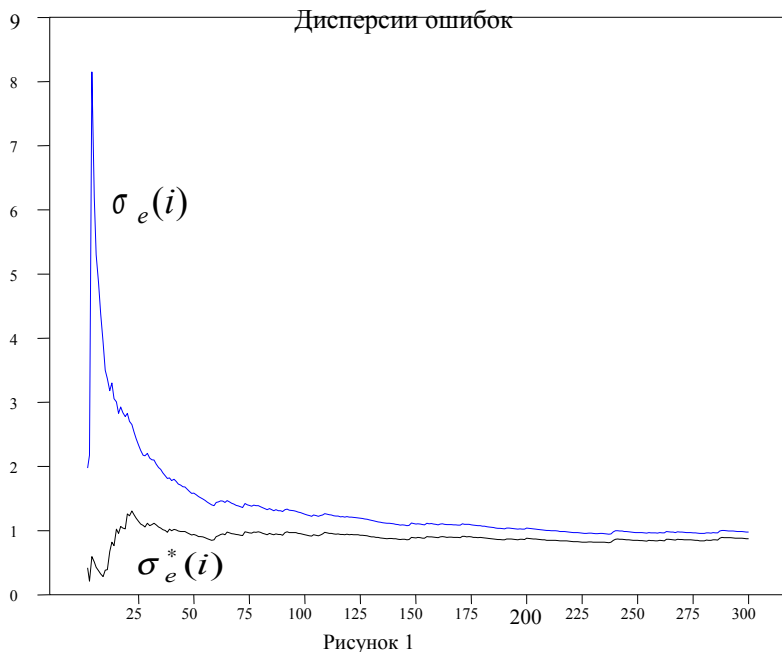
$R(m) = 15e^{-|m|}$; $E[x^2(t)] = 15$, $E[y^2(t)] = 16$. Дисперсии $\sigma_\omega^2, \sigma_v^2$ приняты неизвестными. Подстановка в алгоритм (15)-(17) выборочных дисперсии наблюдений $s_{yt}^2 = \sigma_y^2$ и $s_{\hat{x}t}^2 = \sigma_{\hat{x}}^2$, привела выражения (16), (17) к виду

$$k(t) = \frac{a^2 s_{\hat{x}(t-1)}^2}{a^2 s_{\hat{x}(t-1)}^2 + s_{yt}^2} \quad \text{и}$$

$$s_{\hat{x}t}^2 = a^2 (1 - k(t))^2 s_{\hat{x}(t-1)}^2 + k^2(t) s_{yt}^2.$$

Для полноты анализа система (1), (2) оценивалась с использованием классического алгоритма (3)-(6), при этом дисперсии $\sigma_\omega^2, \sigma_v^2$ считались известными.

Результаты эксперимента отражены в таблице 1. При низком уровне шума или сильном сигнале исследуемый адаптивный фильтр, что очевидно, пропускает без ослабления все частоты. В пороговом случае, при высоком уровне шума, передаточная функция фильтра «отфильтровывает» шум настолько, насколько способна, и ее частотная кривая усиления приближается к соответствующей кривой передаточной функции сигнала.



На рисунке 1 изображены графики зависимостей дисперсии ошибок оценивания сигнала адаптивным фильтром σ_e и фильтром Калмана σ_e^* от

числа наблюдений. В силу априорной неопределенности о вероятностных характеристиках шумов σ_e сначала принимает достаточно большие значения, но затем резко убывает и в пределе стремится к значениям σ_e^* .

Таблица 1 – Результаты численного эксперимента

N	Оцениваемая последовательность		Отношение сигнал-шум	Ср. коэф-та. усиления	Среднее полученной оценки	Стандартная ошибка оценивания	Среднее апостериорной дисперсии ошибки оценивания
	среднее	ср. квадр. откл-е					
Результаты оценивания фильтром Калмана							
1	0.1626	3.6707	12.96	0.9278	0.2058	3.5632	0.9393
2	-0.195	3.7889	12.02	0.9278	-0.1435	3.6346	0.9590
3	0.0453	1.5087	2.25	0.9278	0.0187	1.6605	0.9053
4	0.0342	3.2515	10.25	0.9278	0.0634	3.1239	0.8609
5	0.1302	2.6808	7.00	0.9278	0.1291	2.6077	0.8148
6	0.0350	1.0308	1.00	0.9278	0.0968	1.3604	0.8736
7	-0.016	0.9094	0.75	0.9278	-0.0493	1.1558	0.8327
8	0.1905	5.0663	22.00	0.9278	0.2096	4.8269	0.9968
9	-0.220	6.9442	42.00	0.9278	-0.2182	6.4644	1.0214
10	-0.127	2.3290	4.5	0.9278	-0.0270	2.3435	0.9238
11	-0.040	1.8896	3.2	0.9278	0.0210	1.9815	0.7832
Результаты оценивания адаптивным фильтром							
1	0.1626	3.6707	12.96	0.9167	0.2159	3.5063	1.7697
2	-0.195	3.7889	12.02	0.9167	0.2159	3.5063	1.6809
3	0.0453	1.5087	2.25	0.0027	0.0031	0.0437	2.3415
4	0.0342	3.2515	10.25	0.0022	-	0.0387	11.227
5	0.1302	2.6808	7.00	0.0022	0.0025	0.0398	6.5974
6	0.0350	1.0308	1.00	0.0003	0.0009	0.0106	1.1109
7	-0.0163	0.9094	0.75	0.0016	-0.001	0.0128	0.7782
8	0.1905	5.0663	22.00	0.9563	0.2404	4.9945	1.9158
9	-0.2204	6.9442	42.00	0.9666	-	6.7996	1.0354
10	-0.1276	2.3290	4.5	0.0014	-	0.0291	6.1538
11	-0.0406	1.8896	3.2	0.0011	-	0.0231	3.3761

Таким образом, адаптивной алгоритмически фильтр для стационарного состояния имеет частотные свойства, аналогичные фильтру Калмана. Алгоритм прост в вычислительном отношении, имеет высокую скорость сходимости, поэтому при априорно неизвестных ковариациях шумов он

предпочтителен для анализа случайных последовательностей, особенно в случаях, когда указанное отношение сигнал-шум принимает значения > 10 .

Библиографический список

1. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана / А.В. Балакришнан. — М.: Мир, 1988. — 168 с.
2. Шильман С.В. Адаптивная фильтрация временных рядов / С.В. Шильман. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. у-та, 1995. — 180 с.
3. Harvey A. C. Forecasting, structural time series models and Kalman filter / A. C. Harvey. — Cambridge; New York; Port Chester; Melbourne; Sidney: Cambridge University Press, 1996. — 554 с.
4. Первухина Е.Л. Использование информационной меры в процедурах оценки дискретных стохастических систем при неизвестных ковариациях шумов/ Е.Л. Первухина// Известия РАЕН, сер.МММИУ.— 1999. — Т3. — №3. — С.100 – 106.

Поступила в редакцию 25.02.2005 г.