

УДК 536.62.50

Н.П. Воронова, доцент, канд. техн. наук,

Г.К. Добриян,

Г.А. Климович

Белорусский национальный технический университет

Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь, 220013

E-mail: klimovichgalina@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Исследуются численные решения задач нестационарной теплопроводности и диффузии.

Приводятся варианты решения по явной и неявной разностным схемам нелинейных, частично линеаризованных и линейных задач.

В настоящее время приоритетными направлениями научных исследований являются разработки, связанные с энерго- и материало-сберегающими технологиями, математическим моделированием технологических процессов. Исследование теплотехнических процессов, связанных с нагревом, сушкой, термообработкой и др., сопровождается проблемами получения качественных материалов с минимальными затратами в различных нагревательных устройствах.

При решении задач методом математического моделирования объект, подлежащий изучению, заменяется математической моделью.

Если математическая модель построена корректно, то существенные признаки ее и объекта оригинала идентичны со степенью достоверности, достаточной с точки зрения решаемой задачи.

При решении задач методами математического моделирования неизбежны погрешности получаемых результатов. По источнику происхождения таких погрешностей их можно разбить на четыре группы:

- погрешности формализации, возникающие при переходе от объекта оригинала к его физической модели. Обычно оценку таких погрешностей получают при экспериментальных исследованиях;
- погрешности исходных данных, связанные с физическими измерениями объекта оригинала. При измерениях в технических системах погрешность измерения в статических условиях обычно составляет 1...5 %, в динамических 5...20 %;
- погрешности вычислительного алгоритма, связанные с приближенным решением математических соотношений численными методами. Такая погрешность должна быть в 2,5 раза меньше погрешности исходных данных;
- погрешности машинного округления, связанные с тем, что все вычисления выполняются с определенным числом значащих цифр. Эта погрешность зависит от типа компьютера и программы и должна быть в 5...10 раз меньше погрешности вычислительного алгоритма.

Целью данной статьи является разработка теории и техники автоматического управления для объектов с распределенными параметрами. Это обуславливается следующими особенностями [1]:

- 1) состояние объекта описывается функциями нескольких независимых переменных;
- 2) движение объекта описывается дифференциальными уравнениями с частными производными, интегро-дифференциальными уравнениями в частных и полных производных;
- 3) управляющие воздействия на объект могут носить самый разнообразный характер. Они могут описываться функциями одной и многих независимых переменных;
- 4) на управляющие воздействия и функции состояния объекта могут накладываться дополнительные ограничения типа равенств и неравенств;
- 5) техническая реализация управляющих систем связана с большими трудностями и проблемами новой технологии.

При численном решении нелинейных задач нестационарной теплопроводности представляет интерес количественная и качественная оценка влияния приемов учета нелинейностей на погрешность.

Математическое моделирование теплотехнологических процессов основывается на решении краевых задач для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим математическую модель нелинейной задачи вида:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{\lambda(T)} \frac{\partial \lambda(T)}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{a(T)} \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, \quad 0 < x < R, \quad (1)$$

$$T(l, \tau) = \varphi(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0, \quad (2)$$

$$T(l, \tau) = T_0, \quad \tau > \tau_0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$T(x, 0) = \varphi(0). \quad (5)$$

Здесь T – температура; τ – время; λ – коэффициент теплопроводности; $a = \frac{\lambda}{c}$ – коэффициент

температуропроводности.

Частично линеаризируем поставленную задачу, не учитывая второе слагаемое в уравнении (1):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{a(T)} \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0. \quad (6)$$

Задача была бы полностью линеаризованной, если бы $a(T)$ рассматривалось как постоянное значение функции $a(T)$ для T из промежутка от минимальной до максимальной температуры в исследуемой задаче.

Ниже в таблице 1 приведены варианты решенных по явной (я) и неявной (н) разностным схемам нелинейных (НЛ), частично линеаризованных (ЧНЛ) и линейных задач (Л) при $\tau_0 = 20$ с, $T_0 = 1000$ °С, $\varphi(\tau) = 50$ τ.

Таблица 1 – Варианты решений по явной и неявной разностным схемам

Уравнение	Схема	Вид задачи	λ, c_{ν}	a	h , м	$\Delta\tau$, с
(1)	я	НЛ	50 начало	–	0,01	1
(1)	я	НЛ	50 конец	–	0,01	1
(1)	я	НЛ	50	–	0,01	1
(1)	я	НЛ	20	–	0,01	1
(1)	я	НЛ	1 начало	–	0,01	1
(6)	н	ЧНЛ	–	50 начало	0,0025	0,25
(6)	н	ЧНЛ	–	50 конец	0,0025	0,25
(6)	н	ЧНЛ	–	50 середина	0,0025	0,25
(6)	н	ЧНЛ	–	10 середина	0,0025	0,25
(6)	н	Л	–	500	0,0025	0,25
(6)	н	Л	–	среднеинтеграл.	0,0025	0,25
(6)	н	Л	–	750	0,0025	0,25
(6)	я	ЧНЛ	–	50 начало	0,0025	0,25
(6)	я	ЧНЛ	–	50 конец	0,0025	0,25
(6)	я	ЧНЛ	–	50 середина	0,0025	0,25
(6)	я	ЧНЛ	–	10 середина	0,0025	0,25
(6)	я	Л	–	500	0,0025	0,25
(6)	я	Л	–	среднеинтеграл.	0,0025	0,25
(6)	я	Л	–	750	0,0025	0,25

В таблице 1: c_{ν} – удельная объемная теплоемкость; h – интервал пространства; $\Delta\tau$ – интервал времени.

Законы изменения $\lambda(T)$ и $a(T)$, показанные на рисунке 1, задавались при решении нелинейных и частично линеаризованных задач.

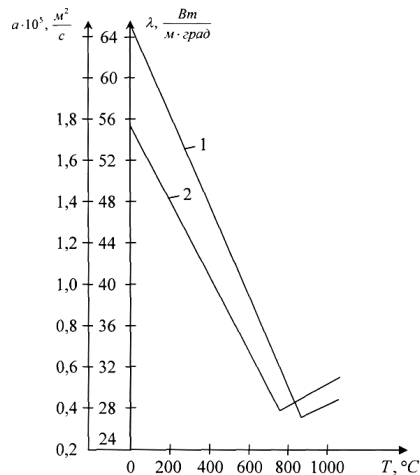


Рисунок 1 – Зависимость температуры от коэффициентов:
1 – теплопроводности $\lambda(T)$; 2 – температуропроводности $a(T)$

Схема учета нелинейностей была всюду безитерационной. Значения λ и a или только a выбирались по началам, серединам или концам интервалов температур. Эти интервалы определялись по температурам в данном узле в предыдущий момент времени. Величина интервала менялась от 50° до 1°. Например, если температура T_i^{k-1} равна 321,3 °С, то λ_i^* и a_i^* выбирались соответственно по 300 °С (начало 50-градусного интервала), по 330 °С (середина двадцатиградусного интервала) и т.п. На рисунках 1 – 4 показано влияние на численные результаты некоторых факторов.

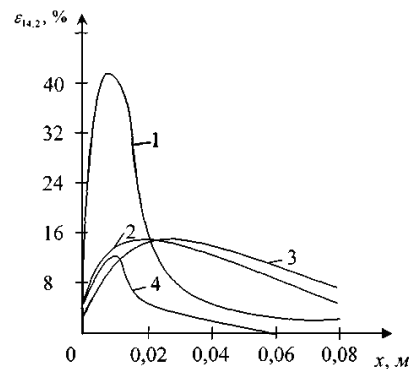


Рисунок 2 – Кривые измерения $\varepsilon_{14,2}$ по длине стержня для различных моментов времени: 1 – $\tau = 40$ с; 2 – $\tau = 120$ с; 3 – $\tau = 20$ с; 4 – $\tau = 240$ с

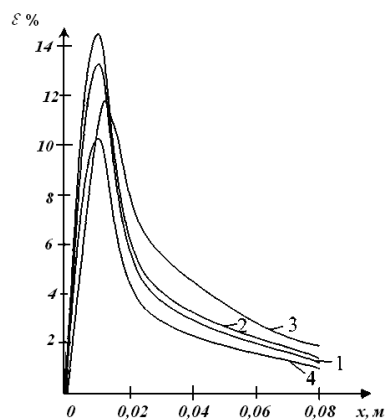


Рисунок 3 – Кривые измерения ε по длине стержня в различные моменты времени при сравнении вариантов 1, 2, 3, 4 с 5-ым:
1 – 4-ый с 5-ым, $\tau = 80$ с; 2 – 3-ый с 5-ым, $\tau = 80$ с;
3 – 1-ый с 5-ым, $\tau = 80$ с; 1 – 2-ый с 5-ым, $\tau = 80$ с

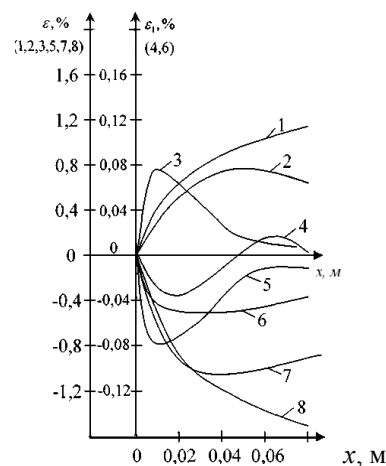


Рисунок 4 – Кривые изменения ε по длине стержня в различные моменты времени при сравнении вариантов 6, 7, 8 с 9-ым:
1 – 7-ой с 9-ым, $\tau = 200$ с; 2 – 7-ой с 9-ым, $\tau = 80$ с; 3 – 7-ой с 9-ым, $\tau = 20$ с;
4 – 8-ой с 9-ым, $\tau = 20$ с; 5 – 6-ой с 9-ым, $\tau = 20$ с; 6 – 8-ой с 9-ым, $\tau = 100$ с;
7 – 6-ой с 9-ым, $\tau = 80$ с; 8 – 6-ой с 9-ым, $\tau = 200$ с

Результаты решений для вариантов 1 – 19 позволяют выявить влияние и других факторов, кроме тех о которых идет речь, исходя из рисунков 1 – 4. Основными факторами являются частичная или полная линеаризация. Затем влияет выбор безитерационной схемы учета нелинейности (величина интервала, начало, середина, конец), выбор самой разностной схемы (явная, неявная), выбор величин интервалов пространства и времени.

Влияние величин h и Δt при решении подобной задачи исследовано [2], данные решений для вариантов 1 – 19 подтверждают это. Известно, что аналитическое решение должно находиться между численными решениями, полученными по явной и неявной схемам. Сравнение вариантов 10 и 17, 11 и 18, 12 и 19 показывает, что разница между ними не превышает 0,2 %, т.е. h и Δt выбраны достаточно малыми. Сравнение этих вариантов между собой говорит о том, что прием учета нелинейности сказывается на ε при сравнении схем.

Кривые величин ε , полученных при сравнении вариантов между собой, показывают, что изменение ε по длине стержня и во времени зависит от всех перечисленных факторов. Знак, величина амплитуды, монотонность кривых ε зависят от конкретных условий задачи, но, пользуясь решениями, такими, как для вариантов 1 – 19, можно установить, какие факторы оказывают наибольшее влияние.

На рисунке 2 показано, к каким ошибкам приводит переход от решения нелинейной задачи (1) – (5) к решению частично линеаризованной задачи (6), (2) – (5). Здесь сравниваются варианты 14 и 2, аналогичные результаты получены при сравнении 13-ого и 1-ого, 15-ого и 3-его вариантов.

Максимальные ошибки лежат между 35 и 42 % и колеблются в зависимости от схемы учета нелинейности (начало, середина, конец интервала). Если $\varepsilon_{(14,2)max} = 41,8$ %, то максимальная ошибка при сравнении решений нелинейной и линейной задач не превышает 12 %.

Таким образом, существует закономерность: правильный выбор постоянных значений a при решении линейной задачи может дать гораздо более точный результат, чем решение частично линеаризованной задачи. Не учет второго слагаемого в уравнении (1) может существенно исказить результаты. На рисунках 3 и 4 показано, как влияет выбор схемы задания нелинейности при безитерационной схеме численного решения уравнений (1) и (6). При сравнении вариантов 1, 2, 3, 4 с 5-ым ошибки получаются гораздо большими, чем при сравнении вариантов 6, 7, 8 с 9-ым.

Учет нелинейности $8(T)$ и $a(T)$ ведут в обоих случаях по началам, серединам и концам интервалов к последствиям существенно влияющим на результат, учет члена $\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2$ приводит к учету влияния схемы расчетов (рисунок 3).

На рисунке 5 показано влияние схемы (явная, неявная) на величину погрешности. Видно, что при достаточно малых h и Δt выбор схемы не приводит к существенному увеличению точности.

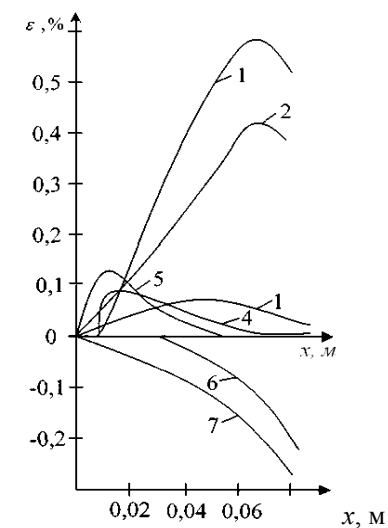


Рисунок 5 – Кривые изменения ε по длине стержня в различные моменты времени при сравнении вариантов 9-ого с 16-ым и 10-ого с 17-ым:
1 – 9-ый с 16-ым, $\tau = 100$ с; 2 – 9-ый с 16-ым, $\tau = 120$ с; 3 – 9-ый с 16-ым, $\tau = 240$ с;
4 – 9-ый с 16-ым, $\tau = 20$ с; 5 – 10-ый с 17-ым, $\tau = 20$ с;
6 – 9-ый с 16-ым, $\tau = 80$ с; 7 – 10-ый с 17-ым, $\tau = 240$ с

При численном решении нелинейных задач особое внимание должно уделяться не столько ответственному выбору h и Δt , сколько схемам учета нелинейности. Более точные результаты может дать решение линейной задачи, чем соответствующее решение частично линеаризованной нелинейной задачи.

В результате исследований установлено, что при математическом моделировании теплотехнологических процессов приоритетными являются численные методы решения. При этом проведен анализ случаев, в которых удобнее применять явную, либо неявную разностные схемы, а также обусловлен выбор шагов сетки.

Дальнейшего исследования требуют математическое моделирование процессов с ограничениями на искомую функцию, а также задачи, содержащие в тепловом процессе источники.

Библиографический список

1. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский. — М.: Наука, 1975. — 232 с.
2. Анисимов А.А. Теплофизика и теплотехника / А.А. Анисимов, Л.А. Коздоба. — К.: Наук. думка, 1970. — 275 с.

Поступила в редакцию 10.04.2007 г.