

УДК 517.1:531.3

Р.А. Спасский

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИОНАЛА ДВУХ КЛАССИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Рассматриваются аналитические достаточные условия экстремума функционала, не связанные с построением его поля экстремалей. Находится их особый вид для вариационных задач Бернулли и Эйлера.

В вариационном исчислении широко известен геометрический подход в нахождении достаточных условий экстремума функционала [1], связанный с построением его поля экстремалей и выполнением условий Якоби и Вейерштрасса. Аналитический подход, основанный на исследовании второй вариации функционала используется реже, но иногда является более эффективным. Целью статьи является получение сравнительно простых достаточных условий экстремума функционала двух классических вариационных задач.

1. Интегральная оценка приращения функционала на его экстремали

Пусть в функционале

$$\Phi = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (1)$$

переменная y является не только кривой класса C_1 [1], но и его экстремалью, кривой, определяемой уравнением Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (2)$$

Кроме того, предполагается, что для функция $F(x, y, y')$ может быть записано следующее разложение по формуле Тейлора [2]

$$\begin{aligned} F(x, y + \varepsilon z, y' + \varepsilon z') = & F(x, y, y') + \varepsilon \left(\frac{\partial F}{\partial y} z + \frac{\partial F}{\partial y'} z' \right) + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial y} z + \frac{\partial}{\partial y'} z' \right)^2 F(x, y, y') + \frac{\varepsilon^3}{3!} \left(\frac{\partial}{\partial y} z + \frac{\partial}{\partial y'} z' \right)^3 F(x, y + \theta z, y' + \theta z'), \end{aligned}$$

где $0 < \theta < 1$, ε – сколь угодно малая постоянная величина, а переменная $z = z(x)$ удовлетворяет условию

$$z(a) = 0, \quad z(b) = 0. \quad (3)$$

Тогда приращение функционала (1) в окрестности его экстремали с точностью до второй степени малой величины ε запишется в виде

$$\Delta \Phi = \varepsilon \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} z + \frac{\partial F}{\partial y'} z' \right) dx + \frac{\varepsilon^2}{2!} \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y} z + \frac{\partial}{\partial y'} z' \right)^2 F(x, y, y') . \quad (4)$$

Первый интеграл этой формулы с учетом (2), (3) и интегрирования по частям преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} z' dx &= z \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b z d \frac{\partial F}{\partial y'} = - \int_a^b z \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} dx, \\ \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} z + \frac{\partial F}{\partial y'} z' \right) dx &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) z dx = 0 . \end{aligned}$$

Обращаясь к (4), можно утверждать, что при достаточно малом ε

$$\text{sign } \Delta \Phi = \text{sign} \int_a^b \left(F_{yy} z^2 + 2F_{yy'} z z' + F_{y'y'} z'^2 \right) dx . \quad (5)$$

Это и есть интегральная оценка приращения функционала на его экстремали.

При этом квадратичная форма под знаком интеграла (5) должна быть определенно-положительной или определенно-отрицательной. Но для этого согласно критерию Сильвестра [2, с. 482] необходимо и достаточно, чтобы

$$F_{y'y'} > 0, \quad F_{yy} F_{y'y'} - F_{yy'}^2 > 0 \quad \text{или} \quad F_{y'y'} < 0, \quad F_{y'y'} F_{yy} - F_{yy'}^2 > 0 .$$

Таким образом, после выполненных преобразований справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $y(x)$ – экстремаль функционала (1), а все частные производные по y, y' от функции $F(x, y, y')$ до второго порядка включительно непрерывны при любых значениях x этой экстремали. Тогда уравнение Эйлера (2) и критерий Сильвестра

$$F_{y'y'} > 0, \quad F_{y'y'} F_{yy} - F_{yy'}^2 > 0 \quad (6)$$

достаточны для минимума функционала.

Аналогично, уравнение Эйлера и критерий Сильвестра $F_{y'y'} < 0, \quad F_{y'y'} F_{yy} - F_{yy'}^2 > 0$ дают достаточные условия максимума функционала.

Эта теорема используется в задаче Бернулли, а в задаче Эйлера нужно рассмотреть функционал

$$\Psi = \int_a^b G(y, y', u', \lambda) dx, \quad (7)$$

где y, u, λ – независимые функции аргумента x , определяющие согласно уравнениям Эйлера

$$G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} = 0, \quad G_{u'} = \text{const}, \quad G_\lambda = 0 \quad (8)$$

экстремаль функционала (7). При этом первое из этих уравнений ввиду независимости G от x имеет следующий интеграл

$$G_y - y' G_{y'} = C, \quad (9)$$

где C – произвольная постоянная.

В полной аналогии с предшествующими преобразованиями получается

$$\begin{aligned} G(y + \varepsilon z_1, y' + \varepsilon z'_1, u' + \varepsilon z'_2, \lambda + \varepsilon z_3) = & G(y, y', u', \lambda) + \varepsilon H G(y, y', u', \lambda) + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2!} H^2 G(y, y', u', \lambda) + \frac{\varepsilon^3}{3!} H^3 G(y + \theta z_1, y' + \theta z'_1, u' + \theta z'_2, \lambda + \theta z_3). \end{aligned}$$

$$\text{Здесь} \quad 0 < \theta < 1, \quad z_1(a) = z_2(a) = z_3(a) = 0, \quad z_1(b) = z_2(b) = z_3(b) = 0,$$

$$H = \frac{\partial}{\partial y} z_1 + \frac{\partial}{\partial y'} z'_1 + \frac{\partial}{\partial u'} z'_2 + \frac{\partial}{\partial \lambda} z_3.$$

С точностью до второй степени малой величины ε справедливы формулы:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi &= \frac{\varepsilon^2}{2!} \int_a^b H^2 G(y, y', u', \lambda) dx, \\ \text{sign } \Delta \Psi &= \text{sign} \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y} z_1 + \frac{\partial}{\partial y'} z'_1 + \frac{\partial}{\partial u'} z'_2 + \frac{\partial}{\partial \lambda} z_3 \right)^2 G(y, y', u', \lambda) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Интегральную оценку (10) приращения функционала (7) целесообразно преобразовать согласно (8), (9) к более простому виду, учитывая, что равны нулю следующие частные производные: $G_{u'u'}$, $G_{\lambda\lambda}$, $G_{yu'}$, $G_{y\lambda}$, $G_{y'u'}$, $G_{y'\lambda}$, $G_{u'\lambda}$.

Таким образом, получается, что

$$\text{sign } \Delta \Psi = \text{sign} \int_a^b \left(G_{yy} z_1^2 + 2 G_{yy'} z_1 z'_1 + G_{y'y'} z_1'^2 \right) dx. \quad (11)$$

Теорема 2. Пусть $y(x)$, $u(x)$, $\lambda(x)$ – экстремаль функционала (7), а все частные производные от функции $G(y, y', u', \lambda)$ до второго порядка

включительно непрерывны при любых значениях x этой экстремали. Тогда уравнения Эйлера (8) и критерий Сильвестра

$$G_{y'y'} > 0, \quad G_{y'y'}G_{yy} - G_{yy'}^2 > 0 \quad (12)$$

согласно интегральной оценке (11) достаточны для минимума функционала.

Уравнения Эйлера и критерий Сильвестра $G_{y'y'} < 0, G_{y'y'}G_{yy} - G_{yy'}^2 > 0$ дают достаточные условия максимума функционала.

2. Задача о брахистохроне Иоганна Бернулли (1696 г.)

«Среди всех кривых, соединяющих две данные точки А и В, найти ту, по которой тяжелая точка, двигаясь из точки А под влиянием силы тяжести с начальной скоростью, равной нулю, попадает в кратчайший срок в точку В» [1]. Известно, что решение данной задачи сводится к поиску минимума следующего функционала [3]:

$$\Phi = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx. \quad (13)$$

После интегрирования соответствующего уравнения Эйлера получается его интеграл

$$y(1 + y'^2) = \frac{1}{C^2}, \quad (14)$$

где C – произвольная постоянная.

Уравнение Эйлера дает *необходимое условие* экстремума функционала, хотя в задаче о брахистохроне интуитивно предполагается, что оно является и *достаточным условием* экстремума. Но, обращаясь к неравенствам (6) теоремы 1, можно строго логически найти достаточные условия минимума функционала (13). Это получается с использованием (14) следующим образом:

$$F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1 + y'^2}} > 0, \quad F_{yy} = \frac{3}{4\sqrt{2g}} y^{-5/2} \sqrt{1 + y'^2} > 0,$$

$$F_{yy'}^2 = \frac{1}{8g} \frac{y'^2}{1 + y'^2} y^{-3} = \frac{C^2}{8g} yy'^2 y^{-3},$$

$$F_{y'y'}F_{yy} - F_{yy'}^2 = \frac{3}{8g} y^{-3} - \frac{C^2}{8g} yy'^2 y^{-3} = \frac{y^{-3}}{8g} (3 - C^2 yy'^2) = \frac{y^{-3}}{8g} (2 + C^2 y) > 0.$$

В итоге искомой линией является циклоида.

3. Изопериметрическая вариационная задача Леонарда Эйлера (1780 г.)

В последние годы своей жизни Леонард Эйлер решил вариационную задачу, опубликованную лишь в 1822 г. [4, с. 23–24], [3, с. 127–130]. Как он решал данную задачу, к сожалению, мне не известно. Поэтому излагается собственный вариант решения задачи, сформулированной в [4]: найти траекторию движения материальной точки, являющуюся брахистохроной и имеющую заданную длину.

Таким образом, нужно рассмотреть функционал

$$\Phi = \int_0^b F(y, y') dx, \quad (15)$$

где

$$F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}, \quad \int_0^b \sqrt{1 + y'^2} dx = l, \quad (l = \text{const}). \quad (16)$$

После введения новой независимой переменной по формулам

$$u = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad u' = \sqrt{1 + y'^2}$$

задача на *условный экстремум* функционала (15) сводится к задаче на *безусловный экстремум* функционала

$$\Psi = \int_0^b G(y, y', u', \lambda) dx, \quad G = F + \lambda (\sqrt{1 + y'^2} - u'), \quad (17)$$

где λ – множитель Лагранжа, новая независимая переменная. Функционал (17) аналогичен функционалу (7). Уравнение Эйлера $G_{y'} - \frac{d}{dx} G_{y''} = 0$ имеет интеграл $G - y' G_{y'} = C$, ($C = \text{const}$), который после простых преобразований записывается в виде

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2gy}} - \lambda y'^2 \right) = C. \quad (18)$$

При $C \neq 0$ получается сложное дифференциальное уравнение, качественное исследование которого сейчас не представляется возможным. Поэтому рассматривается частный случай (18) при $C = 0$ – уравнение

$$y' = (2g\lambda^2)^{-1/4} y^{-1/4}, \quad (19)$$

которое имеет следующее частное решение

$$x = \frac{4}{5}cy^{5/4}, \quad (20)$$

где $c = \sqrt[4]{2g\lambda^2}$, $\frac{4}{5}ch^{5/4} = b$, λ – постоянный параметр, $B(b, h)$ – точка, через которую проходит линия (20). Важно отметить, что коэффициент c должен зависеть от l – длины искомой брахистохроны. С целью нахождения этой зависимости следует преобразовать формулу (16) с учетом (19), (20) к виду

$$l = c \int_0^b \sqrt{1 + c^{-2}y^{-1/2}} y^{1/4} dy. \quad (21)$$

Известно, что по теореме Чебышева биномный дифференциал $y^m(a + by^n)^p dy$ может быть проинтегрирован в конечном виде, если $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число. В случае (21) оно равно -2 . Поэтому с использова-

нием подстановки $z = \sqrt{1 + c^{-2}y^{-1/2}} y^{1/4}$ получается

$$l = 4c \int_{\alpha}^{\beta} z^2(z^2 - c^{-2}) dz = 4c\alpha^3 \left(\frac{v^2}{5} - \frac{1}{3c^2} \right) + \frac{8}{15c^4},$$

где $\alpha = c^{-1}$, $\beta = v$, $v^2 = h^{1/2} + c^{-2}$. В итоге формула (16) записывается в виде следующего уравнения:

$$v^5 - \frac{5}{3c^2}v^3 + \frac{1}{c} \left(\frac{2}{3c^4} - \frac{5}{4}l \right) = 0. \quad (22)$$

Не занимаясь исследованием уравнений пятой степени и обращая внимание на неоднозначность выбора коэффициента c от длины l искомой брахистохроны, целесообразно положить равным нулю свободный член (22). В результате получаются следующие простые формулы:

$$c = \frac{2}{\sqrt[4]{30l}}, \quad b = \frac{2\sqrt{6}}{9}l, \quad h = \frac{5}{6}l. \quad (23)$$

Параметры c , b , h зависят от l . Наконец, в соответствии с неравенствами (12) теоремы 2 о достаточных условиях экстремума, необходимо выполнить следующие преобразования:

$$G_{yy} = \frac{2}{4\sqrt{2g}} y^{-5/2} \sqrt{1 + y'^2}, \quad G_{yy'} = - \frac{1}{2\sqrt{2g} \sqrt{1 + y'^2}} y' y^{-3/2},$$

$$G_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{2gy} y'^2 \sqrt{1 + y'^2}} > 0, \quad G_{yy'} G_{yy} - G_{y'y'}^2 = \frac{1}{8g} \frac{y'^4 + 3y'^2 + 3}{y'^2 (1 + y'^2)} y^{-3} > 0. \quad (24)$$

Рассматривая график функции $u = z^2 - 3z - 3$, в которой $z = y'^2$, можно установить, что для выполнения дифференциального неравенства (24) или

$$y'^4 - 3y'^2 - 3 < 0$$

необходимо и достаточно, чтобы соблюдалось следующее ограничение:

$$y'^2 < \frac{1}{2}(3 + \sqrt{21}). \quad (25)$$

Таким образом, с учетом ограничения (25) получены достаточные условия минимума функционала вариационной задачи Эйлера (рисунок 1).

Искомой траекторией материальной точки является не циклоида, как это было в задаче Иоганна Бернулли, а линия, описываемая степенной функцией $x = \frac{4}{5}cy^{5/4}$ с коэффициентом c , определяемым формулой (23).

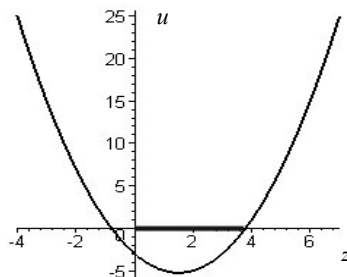


Рисунок 1 – График функции

В перспективе дальнейших исследований следует получить достаточные условия экстремума функционалов, зависящих от многих независимых переменных и их производных. При этом желательно воспользоваться известными алгоритмическими схемами вычисления определителей, вводимых в линейной алгебре и реализуемых в компьютерной алгебре.

В заключение хочу выразить благодарность Л.А. Шмидт за помощь в компьютерном оформлении статьи.

Библиографический список

1. Лаврентьев М.А. Курс вариационного исчисления / М.А.Лаврентьев, Л.А. Люстерник. — М.: Гостехиздат, 1950. — 296 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. / Г.М. Фихтенгольц. — М.: ГИТТЛ, 1947. — 690 с.
3. Спасский Р.А. Классическое вариационное исчисление и вариационные принципы механики / Р.А. Спасский. — Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2004. — 176 с.
4. Тиле Р. Леонард Эйлер / Р. Тиле. — К.: Вища шк., 1983. — 192 с.

Поступила в редакцию 25.12.2005 г.