

УДК 512.8:62-50

Р.А. Спасский

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

КРИТЕРИЙ ЭЙЛЕРА АПЕРИОДИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Приводится доказательство теоремы Эйлера – Лобачевского о вещественных корнях алгебраического уравнения с использованием теоремы Ролля. Установлена связь этой теоремы с необходимыми условиями аperiodической устойчивости линейной системы регулирования.

В 1765 г. в «Комментариях Петербургской Академии наук» появилась работа Леонарда Эйлера [1], которая посвящена исследованию корней алгебраического уравнения. В 1950 г. в [2] дается ссылка на работу Эйлера и приводится без вывода ее основной результат, из которого могут быть получены условия аperiodической устойчивости системы регулирования в форме *критерия Эйлера*.

К сожалению, не удалось ознакомиться с выводом этого критерия по первоисточнику [1] и многим другим книгам теории автоматического регулирования и устойчивости движения. Однако, в Полном собрании сочинений Н.И. Лобачевского [3] есть теорема, непосредственно связанная с выводом критерия Эйлера.

1. Критерий вещественных корней алгебраического уравнения

Математическую теорему о вещественных корнях алгебраического уравнения, доказанную Эйлером, и, по-видимому, независимо от него Лобачевским, предлагаю назвать именами их авторов. Приводимое ниже доказательство методически отличается от хода рассуждений Н.И. Лобачевского.

Теорема Эйлера – Лобачевского. Пусть в алгебраическом уравнении

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (1)$$

все корни вещественные. Тогда необходимо, чтобы для любых трех смежных коэффициентов a_{m-1}, a_m, a_{m+1} выполнялись неравенства

$$a_m^2 \geq \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(1 + \frac{1}{n-m}\right) a_{m-1} a_{m+1}. \quad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего вводятся три многочлена $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$

$$L_1(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{m-2}x^{n-m+2},$$

$$L_2(x) = a_{m-1}x^{n-m+1} + a_mx^{n-m} + a_{m+1}x^{n-m-1},$$

$$L_3(x) = a_{m+2}x^{n-m-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

с параметром m ($m=1, \dots, n-1$), дающие левую часть уравнения (1). Здесь многочлен $L_3(x)$ имеет самые наименьшие степени переменной x .

Пусть $r = n - m - 1$. Тогда в результате r -кратного дифференцирования левой части уравнения (1) получаются производные

$$L_1^{(r)} = a_0 n(n-1) \dots (m+2)x^{m+1} + \dots + a_{m-2}(n-m+2)(n-m+1) \dots 4x^3,$$

$$L_2^{(r)} = a_{m-1}(n-m+1) \dots 3x^2 + a_m(n-m) \dots 2x + a_{m+1}(n-m-1) \dots 1.$$

Многочлен $L_3^{(r)}$ станет тождественно равным нулю.

Важным моментом доказательства теоремы Эйлера-Лобачевского является использование известной теоремы Ролля [4]. С учетом вещественности корней уравнения (1) новое уравнение

$$L_1^{(r)}(x) + L_2^{(r)}(x) = 0 \quad (3)$$

будет иметь лишь вещественные корни. Теперь после замены в (3) переменной x на $\frac{1}{x}$ и умножения левой части этого уравнения на x^{m+1} появляются многочлены

$$M_1(x) = x^{m+1} L_1^{(r)}(1/x), \quad M_2(x) = x^{m+1} L_2^{(r)}(1/x). \quad (4)$$

Данные многочлены можно записать в виде:

$$M_1(x) = a_0 n(n-1) \dots (m+2) + \dots + a_{m-2}(n-m+2)(n-m+1) \dots 4x^{m-2},$$

$$M_2(x) = a_{m-1}(n-m+1) \dots 3x^{m-1} + a_m(n-m) \dots 2x^m + a_{m+1}(n-m-1) \dots 1x^{m+1}.$$

После обращения к формулам (3), (4) становится очевидным, что алгебраическое уравнение

$$M_1(x) + M_2(x) = 0 \quad (5)$$

имеет лишь вещественные корни.

Наконец, в результате $m-1$ кратного дифференцирования левой части (5) многочлен $M_1^{(m-1)}(x)$ тождественно равен нулю, а квадратное уравнение $M_2^{(m-1)}(x) = 0$, записываемое в виде

$$a_{m-1} \frac{(n-m+1)!(m-1)!}{2} + a_m(n-m)!m!x + a_{m+1} \frac{(n-m-1)!(m+1)!}{2} x^2 = 0, \quad (6)$$

вновь по теореме Ролля имеет лишь вещественные корни.

После преобразований уравнение (6) может быть представлено в виде:

$$a_{m+1}x^2 + \frac{2(n-m)}{m+1}a_mx + \frac{(n-m+1)(n-m)}{m(m+1)}a_{m-1} = 0.$$

При этом его дискриминант

$$D = \frac{(n-m)^2}{(m+1)^2}a_m^2 - \frac{(n-m+1)(n-m)}{m(m+1)}a_{m-1}a_{m+1}$$

должен быть неотрицательным. В итоге получаются неравенства (2) как необходимые условия вещественности корней алгебраического уравнения (1).

Замечание. Коэффициенты кубического уравнения $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ определяются формулами Виета

$$a_1 = -(x_1 + x_2 + x_3), \quad a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad a_3 = -x_1x_2x_3,$$

где x_1, x_2, x_3 – корни уравнения.

После преобразования неравенств (2) выполняются зависимости

$$2(a_1^2 - 3a_2) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 \geq 0,$$

$$2(a_2^2 - 3a_1a_3) = x_1^2(x_2 - x_3)^2 + x_2^2(x_1 - x_3)^2 + x_3^2(x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Таким образом, справедливы условия (2). Но эти условия не являются достаточными для того, чтобы корни были вещественными. В подтверждение сказанного рассмотрим корни $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1 - i$, $x_3 = -1$, которым соответствуют такие же неравенства (2): $a_1^2 - 3a_2 = 2 > 0$, $a_2^2 - 3a_1a_3 = 2 > 0$.

2. Критерий Эйлера аperiodической устойчивости системы

Пусть некоторая система автоматического регулирования имеет характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (a_0 = 1), \quad (7)$$

и все его корни являются отрицательными.

Теорема Эйлера. Для аperiodической устойчивости линейной системы автоматического регулирования необходимо, чтобы для любых трех смежных коэффициентов a_{m-1}, a_m, a_{m+1} уравнения (7) выполнялись неравенства

$$a_m^2 \geq \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(1 + \frac{1}{n-m}\right) a_{m-1}a_{m+1}. \quad (8)$$

Условия (8) совпадают с условиями (2) теоремы Эйлера–Лобачевского.

Теорема Эйлера является следствием теоремы Эйлера – Лобачевского в предположении, что все корни уравнения (1) являются отрицательными.

Замечание. Представляет определенный интерес сравнение критерия Эйлера с критерием Вышнеградского [2]

$$4(a_2^3 + a_3a_1^3) - a_1^2a_2^2 - 18a_1a_2a_3 + 27a_3^2 \leq 0, \quad (9)$$

вводимым для характеристического уравнения третьей степени. При переходе к параметрам Вышнеградского x, y по формулам

$$a_1 = x^3\sqrt{a_3}, \quad a_2 = y^3\sqrt{a_3^2} \quad (10)$$

неравенство (9) запишется в системе координат Oxy в виде

$$4(x^3 + y^3) - x^2y^2 - 18xy + 27 \leq 0. \quad (11)$$

Кроме того, условия $a_1^2 \geq 3a_2$, $a_2^2 \geq 3a_1a_3$ критерия Эйлера с учетом формул (10) можно представить в следующем виде:

$$x^2 \geq 3y, \quad y^2 \geq 3x. \quad (12)$$

Граница области (11) представляет собой кривую, состоящую из двух ветвей, выходящих из точки $A(3,3)$ и симметричных относительно биссектрисы $y=x$. Эта биссектриса для них является общей касательной. Кривые $x^2-3y=0$, $y^2-3x=0$ также проходят через точку $A(3,3)$ и симметричны относительно биссектрисы $y=x$. Угол между касательными к ним в точке $A(3,3)$ равен 53° (рисунок 1).

Области Эйлера соответствует часть плоскости Oxy между B , A , C , а области Вышнеградского – другая часть плоскости между B' , A , C' .

В перспективе исследований предполагается рассмотреть вопрос о связи аperiodической устойчивости с задачами синтеза регулируемых систем, инвариантных относительно действующих на них внешних возмущений. В заключение благодарности А.И. за ряд замечаний по

Библиографический

1. Эйлер Л. Комментарий к трагедии «Борис Годунов» / Л. Эйлер. — СПб.: Изд-во Академии наук, 1765. — Т. XIII.

2. Блох З.Ш. Регулирование систем / З.Ш. Блох. — ГИТТЛ, 1950. — 360 с.

3. Лобачевский Н.И. Решение всякого алгебраического уравнения / Н.И. Лобачевский // Полн. собр. соч. — Т. IV. — М.;Л.: ГИТТЛ, 1948. — С. 283–356.

4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. / Г.М. Фихтенгольц. — М.;Л.: ГИТТЛ, 1947. — 690 с.

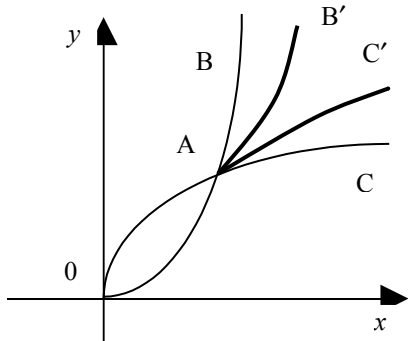


Рисунок 1 – Области Эйлера и Вышнеградского

выражаю
Бохонскому
тексту ста-

список

рии Петер-
ской Акаде-
наук / Л. Эй-
— СПб.: Изд-
Академии
1765. — Т.

вание
шин / З.Ш.
—М.;Л.:

Поступила в редакцию 18.07.2005 г.