

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Цифровое проектирование»

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В СТЕРЖНЯХ

Методические рекомендации
по выполнению расчетно-графических
и контрольных работ

Севастополь
СевГУ
2022

УДК [531/534+621] (076)
ББК 22.21я73
М54

Рецензент:
В.И. Пахалюк - канд. техн. наук, доцент

Составитель: В.В. Леонтьев

М54 Методы построения эпюр внутренних силовых факторов в стержнях: методические рекомендации по выполнению расчетно-графических и контрольных работ / Севастопольский государственный университет, кафедра «Цифровое проектирование», сост. В.В. Леонтьев. – Севастополь: СевГУ, 2022. – 16 с. –Текст : электронный.

Приведены методические рекомендации по построению эпюр внутренних силовых факторов в стержнях при растяжении-сжатии, кручении и изгибе. Рассмотрен порядок и методика решения задач. Приведены примеры выполнения расчетов.

Предназначены для студентов дневной и заочной форм обучения всех направлений подготовки и специальностей.

УДК [531/534+621] (076)
ББК 22.21я73

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Цифровое проектирование», протокол № 8 от 28 апреля 2022 г.

Внутренние силы упругости. Метод сечений

Рассмотрим тело произвольной формы в ненагруженном состоянии. Между его частицами всегда существуют силы взаимодействия, которые стремятся сохранить его как единое целое, то есть препятствуют изменению взаимного расположения частиц. При приложении к телу внешней нагрузки силы взаимодействия между частицами изменяются, появляются дополнительные силы взаимодействия, которые приводят к изменению взаимного расположения частиц тела, то есть к его деформации.

Эти дополнительные силы взаимодействия называются *внутренними силами упругости (ВСУ)* и являются предметом изучения сопротивления материалов.

Анализ характера распределения внутренних сил упругости осуществляется при помощи *метода сечений*. Рассмотрим тело произвольной формы, нагруженное самоуравновешенной системой сил (рис. 1, а). В интересующем нас сечении мысленно рассечем его плоскостью на две части (рис. 1, б).

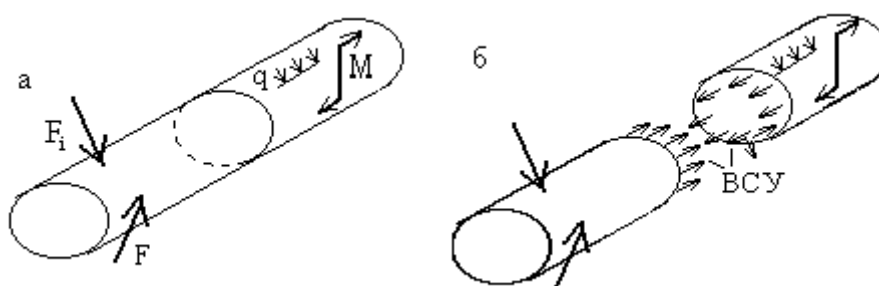


Рис. 1

Внутренние силы упругости определяют взаимодействие между частицами тела, расположенными по разные стороны от мысленно проведенного сечения. В разных сечениях тела возникают разные внутренние силы упругости, но по принципу действия и противодействия они всегда взаимны. Правая отсеченная часть тела действует на левую точно так же, как и левая на правую, а это означает, что равнодействующая внутренних сил может определяться из условий равновесия как левой отсеченной части тела, так и правой.

Из курса теоретической механики известно, что любую произвольную систему сил можно привести к центру тяжести сечения. В результате внутренние силы упругости, действующие в рассматриваемом сечении, приводятся к *главному вектору $\bar{R}$* и *главному моменту $\bar{M}$* . Выберем прямоугольную систему координат $OXYZ$ так, что ось Z будет направлена по нормали к поперечному сечению, а оси X и Y лежат в плоскости сечения. Проектируя главный вектор $\bar{R}$ на каждую из осей, а главный момент $\bar{M}$ на каждую из координатных плоскостей, получим шесть величин - 3 силы и 3 момента, - которые называются *внутренними силовыми факторами* (рис. 2).

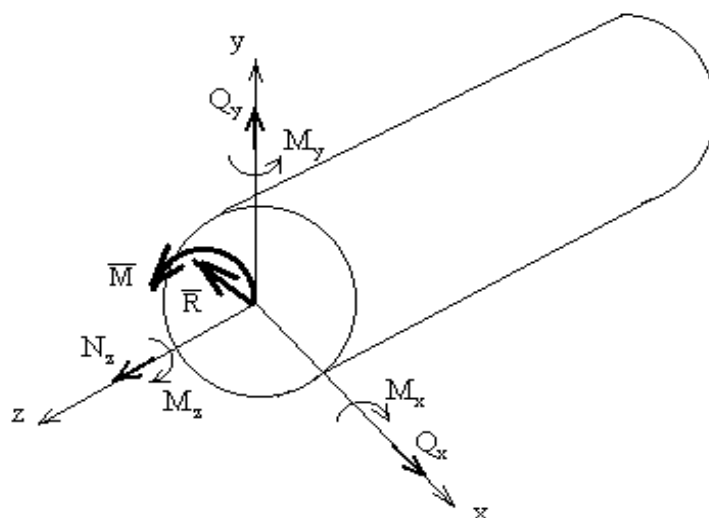


Рис. 2

Полученные таким образом 6 внутренних силовых факторов (ВСФ) имеют строго определенные названия:

N_z - продольная (нормальная) сила;

Q_x, Q_y - поперечная (перерезывающая) сила;

M_x, M_y - изгибающий момент;

M_z - крутящий момент.

Иногда обозначение M_z заменяют на $M_{кр}$, как более точно отвечающее физическому смыслу этой величины.

График, показывающий как меняется внутренний силовой фактор по длине рассматриваемого тела, называется *эпюрой*.

Правильность построения эпюры обеспечивается, в первую очередь, надлежащим выбором *характерных сечений*, то есть тех сечений, в которых величина внутреннего силового фактора обязательно должна быть определена.

К характерным сечениям относятся:

1) сечения, расположенные бесконечно близко по обе стороны от точек приложения сосредоточенных сил и моментов;

2) сечения, расположенные в начале и в конце каждого участка с распределенной нагрузкой;

3) сечения, расположенные бесконечно близко к опорам, а также на свободных концах.

Виды деформации

В зависимости от характера внешней нагрузки и от особенностей нагружаемого тела, в поперечных сечениях могут возникать не все шесть внутренних силовых факторов, а какой-либо один или некоторая их комбинация. В соответствии с этим различают следующие *виды деформации*.

Растяжение (или сжатие) - это вид деформации, при котором во всех поперечных сечениях возникает только продольная сила N_z .

Кручение - это вид деформации, при котором во всех поперечных сечениях возникает только крутящий момент $M_{кр}$.

Чистый изгиб - это вид деформации, при котором во всех поперечных сечениях возникает только изгибающий момент M_x (или M_y). Чаще всего изгибающий момент M_x сопровождается наличием поперечной силы Q_y (или момент M_y сопровождается наличием поперечной силы Q_x). В этом случае имеет место *поперечный изгиб*.

Возможны случаи, когда в поперечных сечениях возникают два и более внутренних силовых фактора одновременно (исключая их комбинации, рассмотренные выше), тогда говорят о *сложном сопротивлении*.

Виды опорных закреплений

С технической точки зрения опорные закрепления конструкций весьма разнообразны. При формировании расчетной схемы все многообразие существующих опорных устройств схематизируется в виде ряда основных типов опор, из которых наиболее часто встречаются: *шарнирно-подвижная опора* (возможные обозначения для нее представлены на рис. 3, а), *шарнирно-неподвижная опора* (рис. 3, б) и *жесткое защемление, или заделка* (рис. 3, в).



Рис. 3

В шарнирно-подвижной опоре возникает одна опорная реакция, перпендикулярная опорной плоскости. Такая опора лишает опорное сечение одной степени свободы, то есть препятствует смещению в направлении опорной плоскости, но допускает перемещение в перпендикулярном направлении и поворот опорного сечения.

В шарнирно-неподвижной опоре возникают вертикальная и горизонтальная реакции. Здесь невозможны перемещения по направлениям опорных стержней, но допускается поворот опорного сечения.

В жесткой заделке возникают вертикальная и горизонтальная реакции и опорный (реактивный) момент. При этом опорное сечение не может смещаться и поворачиваться.

При расчете систем, содержащих жесткую заделку, возникающие опорные реакции можно не определять, выбирая при этом отсеченную часть так, чтобы заделка с неизвестными реакциями в нее не попадала. При расчете систем на шарнирных опорах реакции опор должны быть определены обязательно. Уравнения статики, используемые для этого, зависят от вида

системы (балка, рама и др.) и будут приведены в соответствующих разделах настоящего пособия.

Построение эпюр продольных сил N_z

Продольная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на продольную ось стержня.

Правило знаков для N_z : условимся считать продольную силу в сечении положительной, если внешняя нагрузка, приложенная к рассматриваемой отсеченной части стержня, вызывает растяжение и отрицательной - в противном случае.

Пример 1. Построить эпюру продольных сил для жестко заземленной балки (рис. 4).

Порядок расчета:

1. Намечаем характерные сечения, нумеруя их от свободного конца стержня к заделке.

2. Определяем продольную силу N_z в каждом характерном сечении. При этом рассматриваем всегда ту отсеченную часть, в которую не попадает жесткая заделка.

$$N_{z,1} = 0;$$

$$N_{z,2} = N_{z,3} = q_1 \cdot 2 = 20 \text{ кН};$$

$$N_{z,4} = N_{z,5} = q_1 \cdot 2 - F_1 = 20 - 40 = -20 \text{ кН}$$

$$N_{z,6} = q_1 \cdot 2 - F_1 + q_2 \cdot 1 = 20 - 40 + 20 = 0$$

$$N_{z,7} = N_{z,8} = N_{z,6} - F_2 = -30 \text{ кН}$$

3. По найденным значениям строим эпюру N_z .

Положительные значения откладываются (в выбранном масштабе) над осью эпюры, отрицательные - под осью.

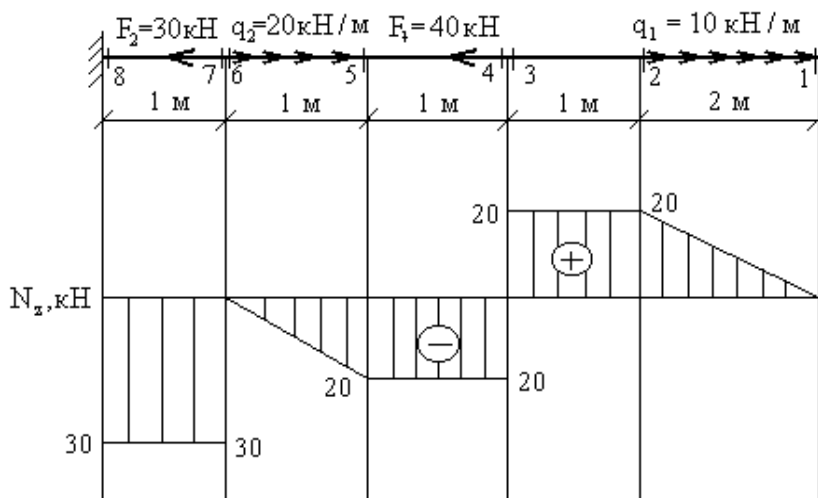


Рис. 4

Построение эпюр крутящих моментов $M_{кр}$

Крутящий момент в сечении численно равен алгебраической сумме внешних моментов, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно продольной оси Z .

Правило знаков для $M_{кр}$: условимся считать крутящий момент в сечении положительным, если при взгляде на сечение со стороны рассматриваемой отсеченной части внешний момент виден направленным против движения часовой стрелки и отрицательным - в противном случае.

Пример 2. Построить эпюру крутящих моментов для жестко заземленного стержня (рис. 5, а).

Порядок расчета.

Следует отметить, что алгоритм и принципы построения эпюры крутящих моментов полностью совпадают с алгоритмом и принципами построения эпюры продольных сил.

1. Намечаем характерные сечения.
2. Определяем крутящий момент в каждом характерном сечении.

$$M_{кр,1} = M_{кр,2} = M_1 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{кр,3} = M_{кр,4} = M_1 - m_1 \cdot 2 = 30 - 40 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{кр,5} = M_1 - m_1 \cdot 2 + m_2 \cdot 2 = 30 - 40 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{кр,6} = M_{кр,7} = M_{кр,5} - M_2 = 10 - 40 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3. По найденным значениям строим эпюру $M_{кр}$ (рис. 5, б).

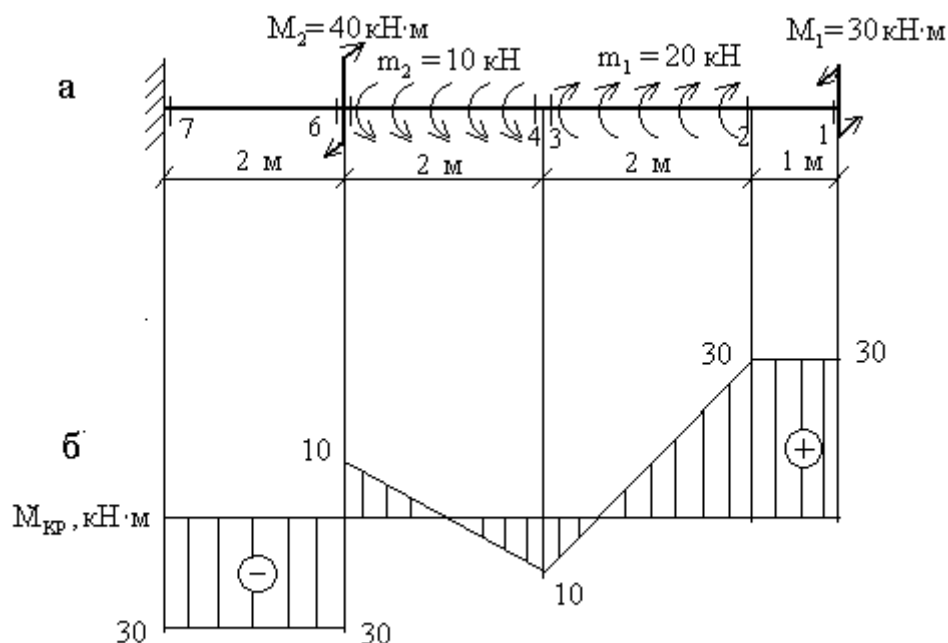


Рис. 5

Правила контроля эпюр N_z и $M_{кр}$

Для эпюр продольных сил и крутящих моментов характерны определенные закономерности, знание которых позволяет оценить правильность выполненных построений.

1. Эпюры N_z и $M_{кр}$ всегда прямолинейные.
2. На участке, где нет распределенной нагрузки, эпюра N_z ($M_{кр}$) - прямая, параллельная оси; а на участке под распределенной нагрузкой - наклонная прямая.
3. Под точкой приложения сосредоточенной силы на эпюре N_z обязательно должен быть скачок на величину этой силы, аналогично под точкой приложения сосредоточенного момента на эпюре $M_{кр}$ будет скачок на величину этого момента.

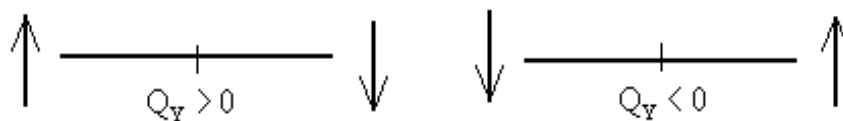
Построение эпюр поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x в балках

Стержень, работающий на изгиб, называется *балкой*. В сечениях балок, нагруженных вертикальными нагрузками, возникают, как правило, два внутренних силовых фактора - поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x .

Поперечная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проекций внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на поперечную (вертикальную) ось.

Правило знаков для Q_y : условимся считать поперечную силу в сечении положительной, если внешняя нагрузка, приложенная к рассматриваемой отсеченной части, стремится повернуть данное сечение по часовой стрелке и отрицательной - в противном случае.

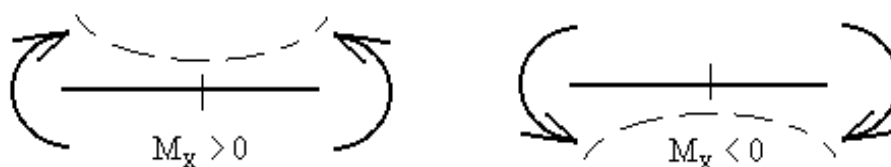
Схематически это правило знаков можно представить в виде



Изгибающий момент M_x в сечении численно равен алгебраической сумме моментов внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно оси x , проходящей через данное сечение.

Правило знаков для M_x : условимся считать изгибающий момент в сечении положительным, если внешняя нагрузка, приложенная к рассматриваемой отсеченной части, приводит к растяжению в данном сечении нижних волокон балки и отрицательной - в противном случае.

Схематически это правило знаков можно представить в виде:



Следует отметить, что при использовании правила знаков для M_x в указанном виде, эпюра M_x всегда оказывается построенной со стороны сжатых волокон балки.

Консольные балки

При построении эпюр Q_y и M_x в консольных, или жестко защемленных, балках нет необходимости (как и в рассмотренных ранее примерах) вычислять опорные реакции, возникающие в жесткой заделке, но выбирать отсеченную часть нужно так, чтобы заделка в нее не попадала.

Пример 3. Построить эпюры Q_y и M_x (рис. 6).

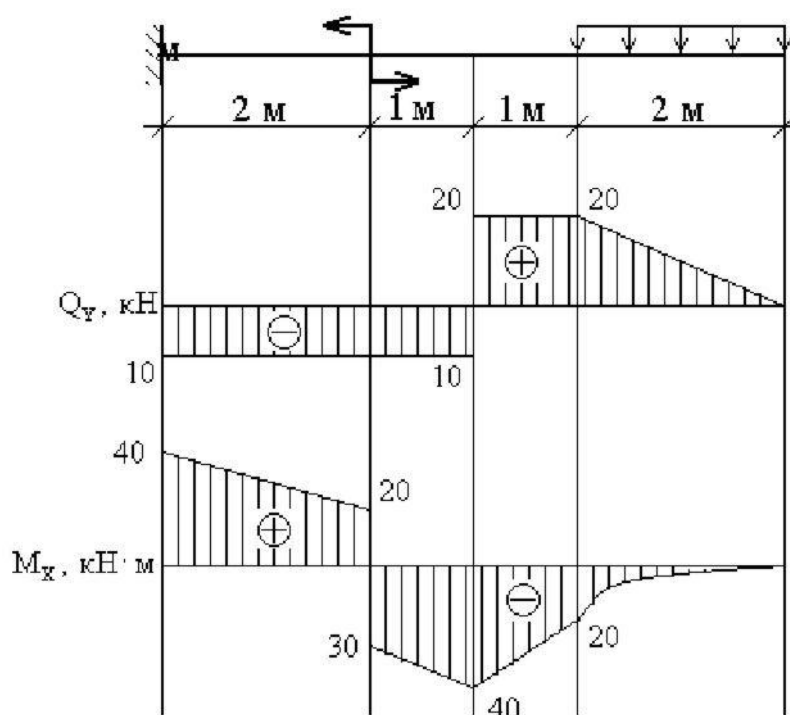


Рис. 6

Порядок расчета.

1. Намечаем характерные сечения.
2. Определяем поперечную силу Q_y в каждом характерном сечении.

$$Q_{y,1} = 0;$$

$$Q_{y,2} = Q_{y,3} = q \cdot 2 = 20 \text{ кН};$$

$$Q_{y,4} = Q_{y,5} = Q_{y,6} = Q_{y,7} = q \cdot 2 - F = 20 - 30 = -10 \text{ кН}$$

По вычисленным значениям строим эпюру Q_y .

3. Определяем изгибающий момент M_x в каждом характерном сечении.

$$M_{x,1} = 0;$$

$$M_{x,2} = -q \cdot 2 \cdot 1 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,3} = M_{x,4} = -q \cdot 2 \cdot 2 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,5} = -q \cdot 2 \cdot 3 + F \cdot 1 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,6} = M_{x,5} + M = -30 + 50 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,7} = -q \cdot 2 \cdot 5 + F \cdot 3 + M = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По вычисленным значениям строим эпюру M_x , причем, на участке под распределенной нагрузкой эпюра будет криволинейной (квадратная парабола). Выпуклость кривой на этом участке всегда обращена навстречу распределенной нагрузке.

Дифференциальные зависимости между q, Q_y, M_x

Указанные зависимости используются при построении эпюр Q_y, M_x , поэтому приведем их здесь без соответствующего вывода, который дается в лекционном курсе.

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{dQ_y}{dz}; \\ Q_y &= \frac{dM_x}{dz}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow q = \frac{d^2 M_x}{dz^2}.$$

Пример 4. Построить эпюры Q_y, M_x (рис. 7).

В данном случае для правильного построения эпюры M_x необходимо использовать приведенные выше дифференциальные зависимости.

Порядок расчета.

1. Намечаем характерные сечения.
2. Определяем поперечные силы в характерных сечениях.

$$Q_{y,1} = F = 30 \text{ кН};$$

$$Q_{y,2} = Q_{y,3} = F - q \cdot 2 = 30 - 40 = -10 \text{ кН}.$$

Строим эпюру Q_y .

Характер эпюры, то есть тот факт, что эпюра Q_y пересекает ось, говорит о том, что в этом сечении момент M_x будет иметь экстремальное значение. Действительно, пересечение эпюры с осью z означает, что в этом сечении $Q_y = \frac{dM_x}{dz} = 0$, а из курса математики известно, что если производная функции равна нулю, то сама функция в данной точке имеет экстремальное значение.

Для определения положения “нулевого” сечения необходимо величину расположенной слева от него ординаты эпюры Q_y разделить на интенсивность распределенной нагрузки q :

$$z_0 = \frac{Q_{y,\text{лев}}}{q} = \frac{30}{20} = 1,5 \text{ м}$$

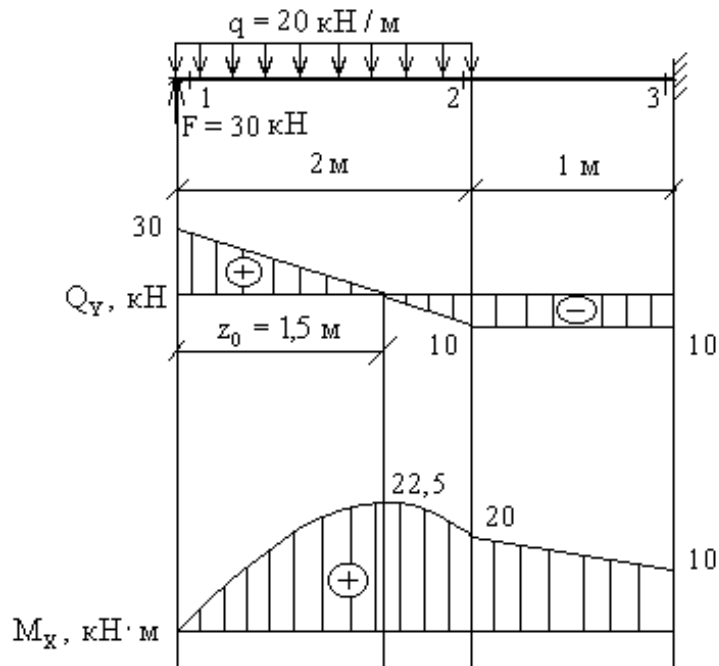


Рис. 7

Определяем изгибающие моменты в характерных сечениях.

$$M_{x,1} = 0;$$

$$M_{x,2} = F \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 60 - 40 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,3} = F \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 = 90 - 80 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

3. Вычисляем экстремальное значение изгибающего момента в сечении, где $Q_y = 0$: $M_{x,\text{экстр}} \big|_{Q_y=0} = F \cdot 1,5 - q \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Строим эпюру M_x .

Балки на двух опорах

В отличие от консольных балок, при расчете балок на двух шарнирных опорах необходимо сначала определить опорные реакции из уравнений статики, так как и в левую, и в правую отсеченные части для любого сечения, расположенного между опорами, попадает соответствующая реакция.

Для плоской системы число уравнений статики в общем случае равно трем. Если балка загружена только вертикальными нагрузками, то горизонтальная реакция шарнирно-неподвижной опоры равна нулю, и одно из

уравнений равновесия ($\sum F_{ix} = 0$) обращается в тождество. Таким образом, для определения реакций в опорах шарнирной балки используются два уравнения статики:

$$1) \sum M_A = 0;$$

$$2) \sum M_B = 0.$$

Условие $\sum F_{iy} = 0$ используется для проверки вычисленных значений опорных реакций.

Пример 5. Построить эпюры Q_y, M_x для балки с шарнирным опиранием (рис. 8).

Порядок расчета.

1. Вычисляем реакции опор.

$$\sum M_A = 0: R_B \cdot 5 - M - F \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 = 0; \quad R_B = 30 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: R_A \cdot 5 + M - F \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 4 = 0; \quad R_A = 40 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum F_{iy} = 0: R_A - q \cdot 2 - F + R_B = 40 - 20 \cdot 2 - 30 + 30 = 0$$

2. Намечаем характерные сечения.

В отличие от консольных балок здесь известны обе опорные реакции, поэтому для любого сечения можно рассматривать как левую, так и правую отсеченную часть.

3. Определяем поперечные силы в характерных сечениях.

$$Q_{y,1} = R_A = 40 \text{ кН};$$

$$Q_{y,2} = Q_{y,3} = R_A - q \cdot 2 = 40 - 40 = 0;$$

$$Q_{y,4} = Q_{y,5} = Q_{y,6} = Q_{y,7} = -R_B = -30 \text{ кН}.$$

Строим эпюру Q_y .

4. Определяем изгибающие моменты в характерных сечениях.

$$M_{x,1} = 0;$$

$$M_{x,2} = R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 80 - 40 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,3} = M_{x,4} = R_A \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 = 120 - 80 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,5} = R_B \cdot 1 - M = 30 - 20 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,6} = R_B \cdot 1 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,7} = 0.$$

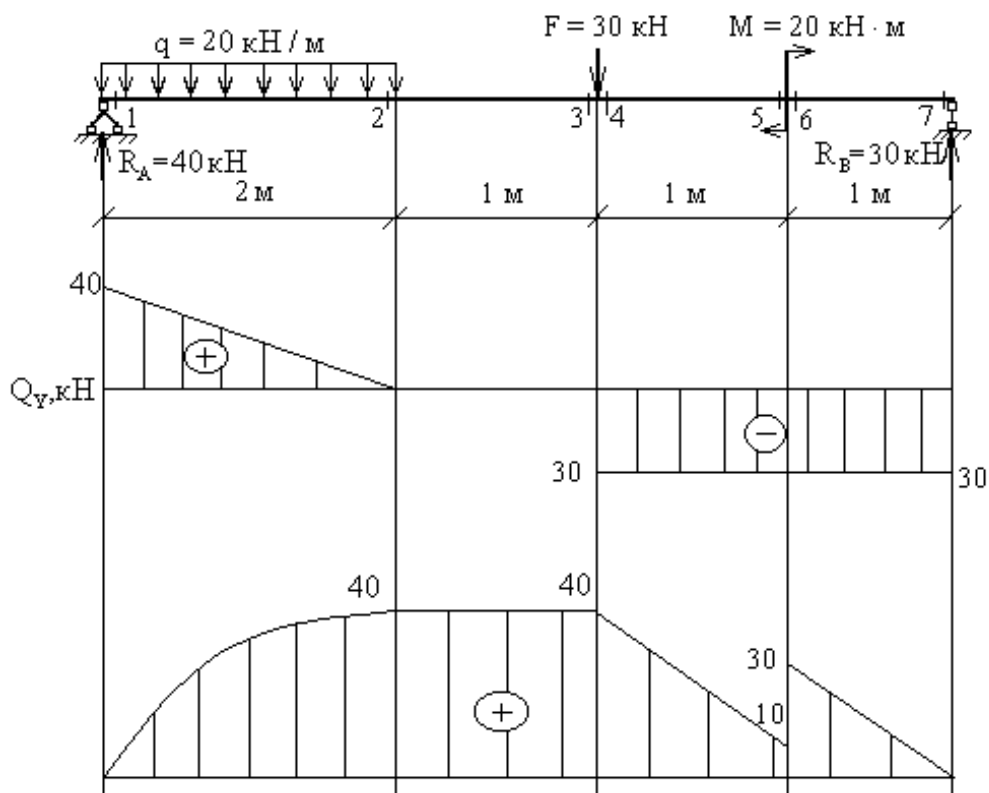


Рис. 8

Строим эпюру M_x .

Пример 6. Построить эпюры Q_y и M_x для балки на двух опорах с консолью (рис. 9, а).

Порядок расчета.

1. Вычисляем опорные реакции.

$$\begin{aligned} \sum M_{Ai} = 0: \quad M + F \cdot 1 + q \cdot 3 \cdot 3,5 - R_B \cdot 4 &= 0; \quad R_B = 40 \text{ кН} \\ \sum M_{Bi} = 0: \quad M - F \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 0,5 + R_A \cdot 4 &= 0; \quad R_A = 30 \text{ кН} \end{aligned}$$

Во втором уравнении равновесия (впрочем, как и в первом) момент от распределенной нагрузки q вычислен без разбиения ее на две части - слева и справа от опоры В, то есть определена равнодействующая нагрузки q - $q \cdot 3$, ее положение (в середине участка с распределенной нагрузкой), что позволяет определить плечо равнодействующей относительно опоры В и направление создаваемого ею момента. В то же время можно было в уравнении равновесия учитывать отдельно части нагрузки q , приложенные слева и справа от опоры В; при этом второе уравнение равновесия имеет вид:

$$\sum M_{Bi} = 0: M - F \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 + q \cdot 1 \cdot 0,5 + R_A \cdot 4 = 0$$

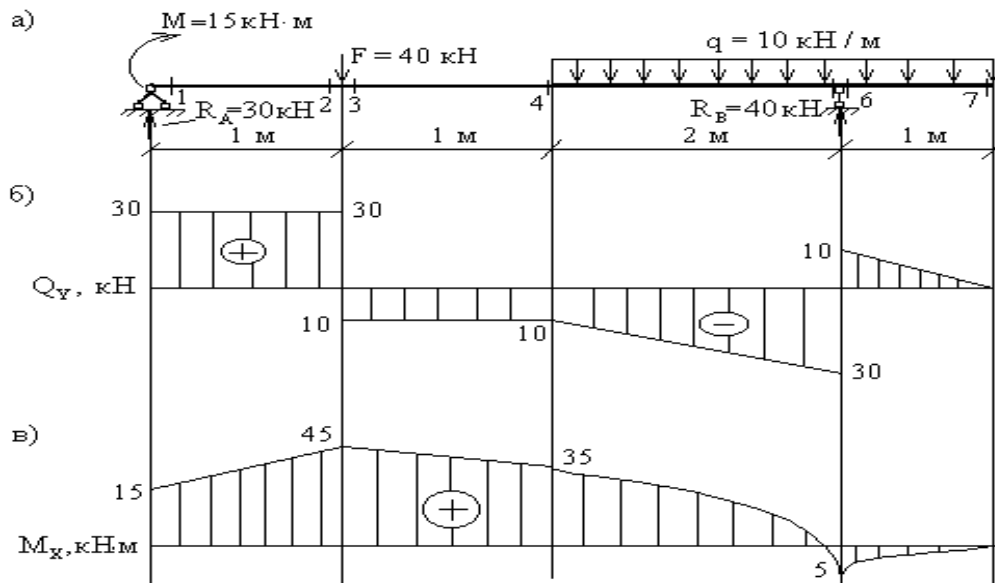


Рис. 9

Вычисленное из этого уравнения значение реакции R_A , разумеется, совпадает с полученным ранее.

Проверка:

$$\sum F_{yi} = 0: R_A - F - q \cdot 3 + R_B = 30 - 40 - 30 + 40 = 0$$

2. Намечаем характерные сечения.

3. Вычисляем поперечную силу и изгибающий момент в характерных сечениях.

Из рассмотрения левой отсеченной части:

$$Q_{y,1} = Q_{y,2} = R_A = 30 \text{ кН};$$

$$Q_{y,3} = Q_{y,4} = R_A - F = 30 - 40 = -10 \text{ кН};$$

$$M_{x,1} = M = 15 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,2} = M_{x,3} = M + R_A \cdot 1 = 15 + 30 = 45 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,4} = M + R_A \cdot 2 - F \cdot 1 = 15 + 60 - 40 = 35 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для сечений 5-7 удобнее рассматривать правую отсеченную часть:

$$Q_{y,5} = q \cdot 1 - R_B = 10 - 40 = -30 \text{ кН};$$

$$Q_{y,6} = q \cdot 1 = 10 \text{ кН};$$

$$Q_{y,7} = 0;$$

$$M_{x,5} = M_{x,6} = -q \cdot 1 \cdot 0,5 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,7} = 0.$$

По вычисленным значениям строим эпюры Q_y и M_x (рис. 9, б, в).

Правила контроля эпюр Q_y и M_x

Дифференциальные зависимости между q, Q_y, M_x определяют ряд закономерностей, которым подчиняются эпюры Q_y и M_x .

1. Эпюра Q_y является прямолинейной на всех участках; эпюра M_x - криволинейная (квадратная парабола) на участке под равномерно распределенной нагрузкой, причем, выпуклость кривой всегда обращена навстречу нагрузке q , и прямолинейная на всех остальных участках.

2. Под точкой приложения сосредоточенной силы (реакции) на эпюре Q_y обязательно должен быть скачок на величину этой силы (реакции). Аналогично, под точкой приложения сосредоточенного момента на эпюре M_x обязателен скачок на величину момента.

3. Если на участке под распределенной нагрузкой эпюра Q_y пересекает ось ($Q_y = 0$), то эпюра M_x в этом сечении имеет экстремум.

4. На участках с поперечной силой одного знака эпюра M_x имеет одинаковую монотонность. Так, при $Q_y > 0$ эпюра M_x возрастает слева направо; при $Q_y < 0$ - убывает.

5. Порядок линии на эпюре Q_y всегда на единицу меньше, чем на эпюре M_x . Например, если эпюра M_x - квадратная парабола, то эпюра Q_y на этом участке - наклонная прямая; если эпюра M_x - наклонная прямая, то эпюра Q_y на этом участке - прямая, параллельная оси; если $M_x = \text{const}$ (прямая, параллельная оси), то на этом участке $Q_y = 0$.

Другие подходы к построению эпюр внутренних силовых факторов

Помимо описанного выше, можно выделить еще два подхода к построению эпюр. В первом случае намечают не характерные сечения, а характерные точки, в качестве которых выделяют точки приложения сосредоточенных сил и моментов, а также точки начала и конца участков с распределенными нагрузками. Затем определяют величину внутреннего силового фактора слева и справа (бесконечно близко) от характерной точки.

Другой возможный подход состоит в том, что балка разбивается на участки (с распределенными нагрузками и между точками приложения сил и моментов). Для каждого участка записывается выражение внутреннего силового фактора в

общем виде как функции координаты z . Затем вычисляются значения на концах каждого участка.

Очевидно, что при обоих подходах в конечном счете все сводится к вычислению внутренних силовых факторов *в характерных сечениях*, то есть соответствует описанному выше способу, но требует дополнительной, как правило неоправданной, работы.

Правда, следует отметить, что запись общих выражений как функций от z удобна при программировании построения эпюр при помощи вычислительной техники.

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Кузьмин, Л.Ю. Сопротивление материалов [Электронный ресурс] / Л.Ю. Кузьмин, В.Н. Сергиенко, В.К. Ломунов. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 228 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/90004>. — Загл. с экрана.
2. Сопротивление материалов [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / И. Н. Миролюбов [и др.]. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2014. — 512 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/39150>. — Загл. с экрана.

Дополнительная:

1. Бугаенко, Г. А. Механика : учебник для вузов / Г. А. Бугаенко, В. В. Маланин, В. И. Яковлев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 368 с. — (Серия : Авторский учебник). — ISBN 978-5-534-02640-5. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://biblio-online.ru/bcode/444088>
2. Сборник задач по сопротивлению материалов [Электронный ресурс] / Н. М. Беляев [и др.] ; под ред. Л. К. Паршина. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2017. — 432 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/91908>. — Загл. с экрана.

В авторской редакции