

УДК 519. 713: 628.543.52

А.И. Бохонский, Н.И. Варминская

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

ПОДАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ МОД КОЛЕБАНИЙ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ ПЕРЕНОСНОМ ДВИЖЕНИИ УПРУГИХ ОБЪЕКТОВ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Приведена общая постановка задачи оптимального управления переносным движением упругих объектов с конечным числом степеней свободы при использовании дополнительного управления подавлением высших мод (форм) колебаний, возникающих в связи с оптимальным переносным движением.

В [1] обосновано и исследовано оптимальное управление переносным движением упругих объектов и исследованы относительные колебания, которые обусловлены переносным оптимальным по быстродействию движением из исходного в конечное состояния абсолютного покоя. Алгоритм поиска управлений переносным движением основан на общем алгоритме решения обратных задач динамики [2], когда по известным геометрическим свойствам движения находятся управления, реализующие это движение. Матрично-векторное описание свободных и вынужденных колебаний систем с конечным числом степеней свободы (без управления) с использованием метода главных координат дано в работах [3–5]. Преимущества такого описания особенно видны из ряда примеров, приведенных в [3].

Как установлено в предыдущих исследованиях [1], выполнение условия отношения собственных частот перемещаемого упругого объекта с конечным числом степеней свободы как целых чисел позволяет устранить колебания объекта к концу движения по всем модам, но такой упругий объект часто бывает трудно спроектировать.

Целью исследований является синтез управлений для подавления высших мод колебаний упругих систем с конечным числом степеней свободы.

Разработка алгоритма подавления высших мод колебаний линейных упругих систем с конечным числом степеней свободы основана на использовании метода главных координат в матрично-векторном изложении [4]. Исходная система дифференциальных уравнений относительного движения упругой системы (например, стержня) с конечным числом степеней свободы в перемещениях с матрично-векторным управлением записывается в виде:

$$\{X_r\} = [\delta] \{ -[m] \{ \ddot{S}_e \} - [m] \{ \ddot{X}_r \} \}, \quad (1)$$

где $\{X_r\}$ – матрица-столбец перемещений сосредоточенных масс (обобщенных координат); $[\delta]$ – симметрическая положительно определенная матри-

ца единичных (удельных) перемещений (единичных податливостей), элементы которой вычисляются с помощью интеграла Мора; $[m]$ – инерционная матрица (матрица сосредоточенных масс); $\{\ddot{S}_e\} = \{U_e\}$ – матрица-столбец управлений на единицу массы (переносное ускорение); $\{\ddot{X}_r\}$ – матрица-столбец ускорений в относительном движении упругой системы.

При разрешении системы (1) относительно стоящих в скобках выражений следует уравнение:

$$[m]\{\ddot{X}_r\} + [c]\{X_r\} = -[m]\{\ddot{S}_e\}. \quad (2)$$

Здесь $[c] = [\delta]^{-1}$ – положительно определенная матрица коэффициентов жесткости, причем $[c][\delta] = E$, где E – единичная матрица. В случае свободных колебаний из (2) при $\{\ddot{S}_e\} = \{0\}$ после подстановки частных решений вида $\{X_r\} = A\{v\} \sin \omega t$ следует матричное алгебраическое уравнение для определения частот и форм колебаний

$$([c] - \omega^2[m])\{v\} = \{0\},$$

где $\{v\}$ – вектор амплитудных коэффициентов (коэффициентов мод колебаний). Частоты, как известно, находятся из определителя $\det([c] - \omega^2[m]) = 0$.

Следующим этапом является непосредственное использование метода главных координат для описания относительного движения упругой системы, т.е.

$$[M]\{\ddot{q}_r\} + [K]\{q_r\} = -[v]^T[m]\{U_e\}, \quad (3)$$

где $[M] = [v]^T[m][v]$ – матрица инерции; $\{\ddot{q}_r\}$, $\{q_r\}$ – матрицы-столбцы ускорений и главных координат; $[K] = [v]^T[c][v]$ – матрица жесткости. После решения уравнения (3) физические обобщенные координаты и их производные через главные определяются следующим образом:

$$\{X_r\} = [v]\{q_r\}, \quad \{\dot{X}_r\} = [v]\{\dot{q}_r\}, \quad \{\ddot{X}_r\} = [v]\{\ddot{q}_r\}.$$

Векторы краевых условий для относительного движения записываются в виде:

$$\{X_r(0)\} = \{0\}, \quad \{\dot{X}_r(0)\} = \{0\}, \quad \{X_r(T)\} = \{0\}, \quad \{\dot{X}_r(T)\} = \{0\}. \quad (4)$$

где T – общее время движения.

Дифференциальное уравнение оптимального поступательного переносного движения системы (уравнение управляемого движения системы как абсолютно твердого тела)

$$\frac{d^2 S_e}{dt^2} = U_e,$$

где S_e – перемещение. Краевые условия для переносного движения имеют вид:

$$\begin{aligned} S_e(0) &= 0, & \dot{S}_e(0) &= 0, & \ddot{S}_e(0) &= 0; \\ S_e(T) &= L, & \dot{S}_e(T) &= 0, & \ddot{S}_e(T) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Ранее найдено такое управление $U_e(t)$ переносным движением упругой системы из исходного в конечное состояния абсолютного покоя, при котором выполняются условия (4) и (5) за минимальное время [1]

$$\left(\int_0^T dt = T = \min \right).$$

Время движения T выбиралось из условия $T=2\pi n/\omega_1$, где $n=2, 3, 4, \dots$; ω_1 – частота первого тона транспортируемой упругой системы. В такой постановке задачи предполагалось, что моды колебаний выше первой практически не существенно влияют на поведение перемещаемого объекта и ими можно пренебречь.

Здесь рассматривается новый подход к управлению переносным движением, который основан на подавлении высших мод колебаний (возникающих в связи с переносным движением) за счет использования дополнительных управлений в относительном движении. Эти управления находятся из условий равенства нулю обобщенных сил от переносного управления (для высших мод колебаний) за счет дополнительного компенсирующего управления.

Матрично-векторное алгебраическое уравнение, в котором неизвестными являются дополнительные управления в относительном движении, подавляющие высшие моды колебаний, записываются следующим образом:

$$[v]^T [m] \{U_r\} = [v]^T [m] \{U_e\}. \quad (6)$$

Здесь $\{U_r\}$ – матрица-столбец дополнительных компенсирующих управлений в относительном движении.

Решение уравнения (6) и исследование поведения системы в относительном движении иллюстрируется на примерах.

Пример 1. Переносное движение стержня с тремя степенями свободы (три сосредоточенные массы). Схема движения стержня, испытывающего изгибные деформации, изображена на рисунке 1.

Частоты собственных колебаний такой системы при $m_1=m_2=m_3=m$ [3] равны

$$\omega_1 = 5,963\sqrt{EJ/ml^3}, \quad \omega_2 = 22,045\sqrt{EJ/ml^3}, \quad \omega_3 = 36\sqrt{EJ/ml^3},$$

где EJ – изгибная жесткость стержня (E – модуль упругости первого рода, J – осевой момент инерции поперечного сечения стержня). Матрица коэффициентов мод колебаний записывается как

$$[v] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Дифференциальные уравнения в главных координатах согласно (3) имеют вид:

$$\ddot{q}_{r_1} + \omega_1^2 q_{r_1} = -\frac{2U_e(t)}{3}, \quad \ddot{q}_{r_2} + \omega_2^2 q_{r_2} = 0, \quad \ddot{q}_{r_3} + \omega_3^2 q_{r_3} = -\frac{U_e(t)}{3}.$$

В данном простом примере при переносном движении вторая мода колебаний (при нулевых начальных условиях) отсутствует и возможно появление только третьей моды колебаний. Матрично-векторное уравнение (6) в этом случае является системой алгебраических уравнений вида:

$$U_{r_1} + 2U_{r_2} + U_{r_3} = 0, \quad U_{r_1} - U_{r_3} = 0, \quad U_{r_1} - U_{r_2} + U_{r_3} = U_e/3. \quad (7)$$

Решение системы (7) следующее:

$$U_{r_1} = U_e/3, \quad U_{r_2} = -U_e/3, \quad U_{r_3} = U_e/3. \quad (8)$$

Дополнительные управления (8) подавляют третью моду колебаний, и в системе в относительном движении реализуется только первая мода, ко-

Рисунок 1 – Схема управляемого движения упругой системы с тремя степенями свободы

Рисунок 2 – Схема управляемого движения системы с двумя степенями свободы. Формы колебаний при $t = 0,3$ с: 1 – без дополнительных управлений; 2 – с дополнительными управлениями

торая наблюдается во время движения (при $T > t > 0$). Физические обобщенные координаты через главные обобщенные выражаются таким образом:

$$X_{r_1}(t) = q_{r_1}(t), \quad X_{r_2}(t) = 2q_{r_1}(t), \quad X_{r_3}(t) = q_{r_1}(t).$$

Пример 2. Схема переносного движения упругой системы с двумя степенями свободы изображена на рисунке 2. В этом примере вторая мода колебаний влияет на динамику системы, но она, как и в предыдущем примере, может быть подавлена с помощью дополнительного управления. Система уравнений (6), из которой находятся дополнительные управления для подавления второй моды колебаний, имеет вид:

$$v_{11}m_1U_{r_1} + v_{21}m_2U_{r_2} = 0, \quad v_{12}m_1U_{r_1} + v_{22}m_2U_{r_2} = (v_{12}m_1 + v_{22}m_2)U_e. \quad (9)$$

Решение системы (9):

$$U_{r_1} = \frac{v_{21}(v_{12}m_1 + v_{22}m_2)U_e}{m_1(v_{12}v_{21} - v_{11}v_{22})}, \quad U_{r_2} = \frac{v_{11}(v_{12}m_1 + v_{22}m_2)U_e}{m_2(v_{12}v_{21} - v_{11}v_{22})}.$$

Исходные данные: модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $l = 4$ м; $m_1 = 150$ кг; $m_2 = 50$ кг; $L = 0,5$ м; размеры поперечного сечения стержня $b = 0,01$ м и $h = 0,02$ м. Матрица податливости

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \frac{4l^3}{243EJ} & \frac{7l^3}{486EJ} \\ \frac{7l^3}{486EJ} & \frac{4l^3}{243EJ} \end{bmatrix}.$$

Частоты собственных колебаний: $\omega_1 = 2,5746$ с⁻¹; $\omega_2 = 11,7203$ с⁻¹. Дополнительные управления (ускорения) выражаются через ускорение переносного движения: $U_{r_1} = 0,1444U_e$, $U_{r_2} = -1,3944U_e$.

Матрица коэффициентов форм колебаний имеет вид:

$$[v] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,3107 & -1,072 \end{bmatrix}.$$

Физические обобщенные координаты через главные вычисляются таким образом:

$$X_1(t) = v_{11}q_1(t) + v_{21}q_2(t), \quad X_2(t) = v_{12}q_1(t) + v_{22}q_2(t).$$

Дифференциальные уравнения в главных координатах без учета дополнительного управления принимают вид:

$$\ddot{q}_1 + k_1^2 q_1 = -\frac{(m_1v_{11} + m_2v_{21})U_e}{m_1v_{11}^2 + m_2v_{21}^2}, \quad \ddot{q}_2 + k_2^2 q_2 = -\frac{(m_1v_{12} + m_2v_{22})U_e}{m_1v_{12}^2 + m_2v_{22}^2}. \quad (10)$$

С учетом дополнительных компенсирующих управлений следует $q_2(t) = 0$, т.е. используется только первое уравнение системы (10); следовательно $X_1(t) = X_2(t) = q_1(t)$. График главной координаты $q_2(t)$ и физическое координаты $X_1(t)$ (в отсутствии дополнительного управления) изображен на

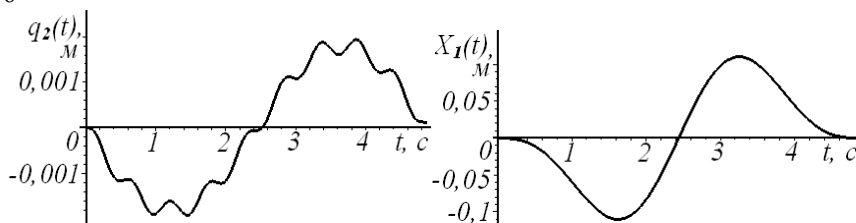


Рисунок 3 – Графики главной координаты $q_2(t)$ и координаты $X_1(t)$

рисунке 3. Формы колебаний без учета и с учетом дополнительных управлений при $t=0,3$ с изображены на рисунке 2. С использованием дополнительного компенсирующего управления остается только первая симметричная форма колебаний, т.е. обе массы движутся одинаково.

Выводы

1. Подавление высших мод колебаний с использованием дополнительных управлений в относительном движении в связи с необходимостью энергетических затрат имеет смысл только в случае существенного влияния этих форм на динамику упругой системы.
2. Применение дополнительных компенсирующих управлений в относительном движении обеспечивает полную управляемость упругой системы с подавлением высших мод колебаний.

Рассмотренный подход в перспективе может быть распространен на системы с распределенными массами и на манипуляторы с упругими сочленениями жестких звеньев, что и составляет предмет дальнейших исследований.

Библиографический список

1. Бохонский А.И. Оптимальное переносное движение упругих систем / А.И. Бохонский // Вестн. СевГТУ. Сер. Механика, энергетика, экология: Сб. науч. тр. — Севастополь, 2002. — Вып. 38. — С. 33 – 38.
2. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: Нелинейные модели / П.Д. Крутько. — М.: Наука, 1988. — 326 с.
3. Василенко Н.В. Теория колебаний / Н.В. Василенко. — К.: Высш. шк., 1992. — 430 с.
4. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. — М.: Высш. шк., 1972. — 416 с.
5. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер. — М.: Машиностроение, 1985. — 472 с.

Поступила в редакцию 30.11.2005 г.