

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ НАЦИОНАЛЬНОЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ИНИЦИАТИВЫ

Кафедра «Интеллектуальные сети энергоснабжения»

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ

Методические указания

для самостоятельной работы обучающихся
по дисциплине «Прикладная математика
к задачам электроэнергетики»
направления подготовки

13.04.02 – «Электроэнергетика и электротехника»

Севастополь
СевГУ
2022

УДК [517.44:621.3](076.5)

ББК 22.161:31.2я73

О-60

Р е ц е н з е н т ы:

Ю.Е. Обжерин – д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры «Высшая математика»
ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

А.В. Самусенко – канд. техн. наук, доцент кафедры «Интеллектуальные сети
энергоснабжения» ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

Составитель: С.М. Сидоров

О-60 Операционное исчисление в электроэнергетике : методические указания для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Прикладная математика к задачам электроэнергетики» направления подготовки 13.04.02 – «Электроэнергетика и электротехника» / Севастопольский государственный университет, Институт национальной технологической инициативы, кафедра «Интеллектуальные сети энергоснабжения» ; сост.: С. М. Сидоров. – Севастополь : СевГУ, 2022. – 35 с. – Текст : электронный.

Методические указания являются руководством для выполнения самостоятельной работы студентов по теме «Операционное исчисление» дисциплины «Прикладная математика к задачам электроэнергетики». Методические указания предназначены для обучающихся очной, очно-заочной и заочной форм обучения направления подготовки –13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника».

В методических указаниях дан необходимый для выполнения теоретический материал и представлены варианты заданий с решением типовых примеров.

УДК [517.44:621.3](076.5)

ББК 22.161:31.2я73

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании кафедры «Интеллектуальные сети энергоснабжения», протокол № 16 от 25 апреля 2022 г.

Содержание

Введение.....	4
1. Преобразование Лапласа	5
2. Свойства изображений:	5
Схема применения операционного исчисления:	7
3. Отыскание оригинала по заданному изображению.	10
4. Применение операционного исчисления в электротехнике.....	14
5. Примеры решения заданий.....	16
Варианты заданий индивидуальной работы.....	24
Задание 1. По данному изображению найти оригинал.....	24
Задание 2. Методами операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.	24
Задание 3. Использование операционного исчисления для решения задач электротехники.	25
ПРИЛОЖЕНИЯ	29
Пример расчета в MatLab.	29
Таблица 1. – Таблица изображений.....	32
Таблица 2. – Основные теоремы операционного исчисления	33
Историческая справка	34
Контрольные вопросы	34
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	35

Введение

Методы операционного исчисления широко применяются при решении различных практических задач теории электрических цепей, теории автоматического управления, теории сигналов, теоретической механике и др. Математический аппарат операционного исчисления позволяет решать задачи, описываемые системами линейных дифференциальных уравнений, разностными и дифференциально-разностными уравнениями, линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами и некоторыми типами интегральных уравнений.

В связи с этим, большой популярностью у инженеров пользуется операторный метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений и систем. Его универсальность объясняется возможностью получать решение наиболее простыми и эффективными путями.

Данные методические указания являются руководством для выполнения самостоятельной работы студентов по теме «Операционное исчисление» дисциплины «Прикладная математика к задачам электроэнергетики». В них представлен необходимый теоретический материал, разработаны варианты индивидуальных заданий, рассмотрены решения типовых примеров.

Методические указания предназначены для обучающихся очной, очно-заочной и заочной форм обучения по направлению 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника».

1. Преобразование Лапласа

Оригиналом называется любая (в общем случае комплекснозначная) функция $f(t)$ действительного аргумента t , удовлетворяющая следующим условиям:

1. $f(t)$ на любом конечном интервале оси t и может содержать только конечное число точек разрыва I рода,
2. $\forall t < 0 \quad f(t) = 0$,
3. $|f(t)|$ возрастает не быстрее показательной функции, т.е. $\exists$ такие постоянные $M > 0$ и $s_0 \geq 0$, что $\forall t \ (0 \leq t < \infty)$: $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$.

Замечание.

Простейшей функцией оригиналом является единичная функция Хевисайда:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что для любой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей условиям 1. и 3., накладываемым на оригинал, произведение $\varphi(t)\eta(t)$ является оригиналом. Поэтому в дальнейшем под обозначением оригинала $f(t)$ понимается $f(t)\eta(t)$.

Изображением функции $f(t)$ по Лапласу называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = \alpha + i\beta$, определяемая равенством:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (1)$$

Выражение (1) называется преобразованием Лапласа, он равномерно сходится, если функция $f(t)$ удовлетворяет наложенным на оригинал условиям.

Принятые обозначения: $F(p) \doteq f(t)$, $F(p) = L[f(t)]$ и другие.

2. Свойства изображений:

1. Теорема единственности.

Если $F(p) \doteq f(t)$ и $\Phi(p) \doteq \varphi(t)$ и при этом $F(p) \equiv \Phi(p)$, то оригиналы $f(t) \equiv \varphi(t)$ во всех точках, в которых они непрерывны.

Замечание. Различные разрывные функции могут иметь одинаковое изображение.

2. Теорема об аналитичности изображения.

Любое изображение $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > s_0$ является аналитической функцией и:

- а) может быть разложено в степенной ряд.
- б) неограниченное число раз интегрируемо и дифференцируемо в области сходимости ряда.

3. Линейность.

Если $f(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$ и $f(t) \doteq F(p)$, $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $f_2(t) \doteq F_2(p)$, то

$$f(t) \doteq F(p) = \alpha F_1(p) + \beta F_2(p).$$

Несложно заметить, что отыскание изображений большинства функций непосредственно с помощью интеграла Лапласа затруднительно и громоздко. Ниже представлены некоторые теоремы, облегчающие применение математического аппарата теории операционного исчисления на практике.

4. Теорема подобия.

Если $f(t) \doteq F(p)$ и $a > 0$, то

$$f(at) \doteq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

5. Теорема о дифференцировании оригинала.

Пусть $f(t)$ дифференцируема при $t > 0$ и $f'(t) \in D$, а сама $f(t)$ является оригиналом и имеет изображение $F(p)$. Тогда

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0).$$

Следствие. Запишем изображения от производных высших порядков:

$$f''(t) \doteq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - f^{(n-1)}(0),$$

где $f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

6. Теорема о дифференцировании изображения.

Если $f(t) \doteq F(p)$, то $F'(p) \doteq -tf(t)$.

Соответственно, $F^{(n)}(p) \doteq (-t)^n f(t)$.

7. Теорема об интегрировании изображения.

$$\int_p^\infty F(p) dp \doteq \frac{f(t)}{t},$$

при условии, что $\int_p^\infty F(p) dp$ сходится.

8. Теорема об интегрировании оригинала.

Пусть $f(t)$ непрерывна и принадлежит некоторой области D . Если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$\int_0^\tau f(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{p} F(p).$$

9. Теорема смещения.

Если $f(t) \doteq F(p)$ и α – любое действительное или комплексное число, то

$$f(t)e^{-\alpha t} \doteq F(p + \alpha).$$

10. Теорема запаздывания.

$$f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p)$$

для любого положительного τ .

11. **Определение.** Сверткой двух функций $f(t)$ и $g(t)$ (обозначается $f(t) * g(t)$) называется функция равная

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Отметим, что если функции $f(t)$ и $g(t)$ являются оригиналами, то их свертка также является оригиналом.

Свойства операции свертки функций:

- а) коммутативность

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t),$$

- б) ассоциативность

$$(f(t) * g(t)) * s(t) = f(t) * (g(t) * s(t)),$$

- с) линейность

$$(\alpha f(t) + \beta g(t)) * s(t) = \alpha f(t) * s(t) + \beta g(t) * s(t),$$

где α и β – некоторые постоянные.

Теорема о свертке (теорема Бореля).

Свертке оригиналов

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau = \int_0^t f_2(\tau)f_1(t - \tau)d\tau$$

соответствует произведение изображений

$$f_1(t) * f_2(t) \doteq F_1(p)F_2(p).$$

12. Формула Дюамеля.

Если $f_1(t) \doteq F_1(p)$ и $f_2(t) \doteq F_2(p)$, то

$$pF_1(p)F_2(p) \doteq f_1(t)f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau)f_2'(t - \tau)d\tau.$$

Схема применения операционного исчисления:

1. Перевести условие решаемой задачи в изображения (используя преобразование Лапласа, его свойства и основные теоремы).
2. Решить полученную задачу, соответствующую исходной, для изображений.
3. Перевести полученное решение из изображений в оригиналы.
4. Записать решение исходной задачи.

Несмотря на то, что общая схема решения задачи удлиняется, получается значительный выигрыш как в средствах вычисления, так и во времени решения. Это достигается путем использования теорем операционного исчисления, свойств изображений и известных изображений функций (указанных в Таблице 1).

Продemonстрируем это на примерах.

Пример 1. Найдем изображение для функции $f(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$F(p) = L\{e^{\alpha t}\} = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p-\alpha} e^{-(p-\alpha)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-\alpha}.$$

Получаем, что

$$e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p-\alpha}.$$

Отметим, что здесь необходимо потребовать, чтобы $\operatorname{Re}(p-\alpha) > 0$.

Пример 2. Найдем изображение для функции $f(t) = \sin(\alpha t)$.

$$\begin{aligned} F(p) &= L\{\sin(\alpha t)\} = \int_0^{\infty} \sin(\alpha t) e^{-pt} dt = \left[\begin{array}{l} u = \sin(\alpha t), \quad du = \alpha \cos(\alpha t) dt \\ dv = \int e^{-pt} dt, \quad v = -\frac{e^{-pt}}{p} \end{array} \right] = \\ &= -\frac{\sin(\alpha t) e^{-pt}}{p} \Big|_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha t) e^{-pt}}{p} dt = \left[\begin{array}{l} u = \cos(\alpha t), \quad du = -\alpha \sin(\alpha t) dt \\ dv = \int e^{-pt} dt, \quad v = -\frac{e^{-pt}}{p} \end{array} \right] = \\ &= \frac{\alpha}{p} \left(-\frac{\cos(\alpha t) e^{-pt}}{p} \Big|_0^{+\infty} - \alpha \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha t) e^{-pt}}{p} dt \right) = \frac{\alpha}{p} \left(\frac{1}{p} - \frac{\alpha}{p} \int_0^{\infty} \sin(\alpha t) e^{-pt} dt \right). \end{aligned}$$

Получаем,

$$\int_0^{\infty} \sin(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{\alpha}{p^2} - \frac{\alpha^2}{p^2} \int_0^{\infty} \sin(\alpha t) e^{-pt} dt,$$

тогда

$$\int_0^{\infty} \sin(\alpha t) e^{-pt} dt + \frac{\alpha^2}{p^2} \int_0^{\infty} \sin(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{\alpha}{p^2}, \quad \int_0^{\infty} \sin(\alpha t) e^{-pt} dt \left(1 + \frac{\alpha^2}{p^2} \right) = \frac{\alpha}{p^2}$$

$$\int_0^{\infty} \sin(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{\alpha}{p^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha^2}{p^2} \right)} = \frac{\alpha}{p^2} \frac{p^2}{(p^2 + \alpha^2)} = \frac{\alpha}{(p^2 + \alpha^2)}.$$

$$\sin(\alpha t) \doteq \frac{\alpha}{(p^2 + \alpha^2)}.$$

Найдем $L\{\sin(\alpha t)\}$ другим способом, используя формулу Эйлера: $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$.

$$\begin{aligned} L\{\sin(\alpha t)\} &= L\left\{ \frac{1}{2i} (e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}) \right\} = \frac{1}{2i} L\{(e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t})\} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i\alpha} - \frac{1}{p+i\alpha} \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \frac{2i\alpha}{p^2 + \alpha^2} = \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}. \end{aligned}$$

Видно, что нахождение изображения «напрямую» через преобразование Лапласа получилось сложнее.

Пример 3. Найдем изображение $f(t) = \sin(5t)$. Зная, что $\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}$ и используя теорему подобия, получим:

$$\sin(5t) \doteq \frac{1}{5} \frac{1}{\left(\frac{p}{5}\right)^2 + 1} = \frac{5}{p^2 + 5^2}.$$

Пример 4. Найдем изображение $f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$. По Таблице 1 определим изображение

$$t^2 e^{-t} \doteq \frac{2}{(p+1)^3}.$$

Теперь, применяя теорему об интегрировании оригинала, получаем:

$$\int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau \doteq \frac{1}{p} \frac{2}{(p+1)^3}.$$

Пример 5. Найдем изображение $f(t) = \cos^2 t$. Несложно заметить, что в Таблице 1 такая функция не представлена. Поэтому воспользуемся теоремой о дифференцировании оригинала.

Пусть $f(t) \doteq F(p)$, тогда $f'(t) \doteq pF(p) - f(0)$.

Вычислим $f'(t) = -2 \cos t \sin t = -\sin(2t) \doteq -\frac{2}{p^2+4}$. $f(0) = 1$.

Следовательно,

$$-\frac{2}{p^2+4} = pF(p) - 1,$$

Выразим $F(p)$.

$$pF(p) = 1 - \frac{2}{p^2+4} = \frac{p^2+2}{p^2+4},$$

тогда

$$F(p) = \frac{p^2+2}{p(p^2+4)} \doteq \cos^2 t.$$

Пример 6. Найдем изображение $f(t) = t^2 \sin t$.

Из таблицы известно, что $\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}$. Тогда, используя теорему о дифференцировании изображения, получаем, что

$$t^2 \sin t \doteq \left(\frac{1}{p^2 + 1} \right)'' = \left(\frac{-2p}{(p^2 + 1)^2} \right)' = \frac{6p^2 - 2}{(p^2 + 1)^3}.$$

Пример 7. Найдем изображение $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}$. Для этого будем использовать теорему об интегрировании изображения.

Получаем

$$\frac{\sin^2 t}{t} \doteq \int_p^{+\infty} L\{\sin^2 t\} dp.$$

Аналогично примеру 3, получаем что $L\{\sin^2 t\} = \frac{2}{p(p^2 + 4)}$. Тогда

$$\frac{\sin^2 t}{t} \doteq \int_p^{+\infty} \frac{2}{p(p^2 + 4)} dp.$$

Вычислим полученный интеграл. Для этого разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби

$$\frac{2}{p(p^2 + 4)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4} \right)$$

и проинтегрируем

$$\begin{aligned} \int_p^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4} \right) dp &= \frac{1}{2} \left(\ln|p| - \frac{1}{2} \ln(p^2 + 4) \right) \Big|_p^{+\infty} = \frac{1}{4} \left(\ln \left(\frac{p^2}{p^2 + 4} \right) \right) \Big|_p^{+\infty} = \\ &= -\frac{1}{4} \ln \left(\frac{p^2}{p^2 + 4} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\sin^2 t}{t} \doteq -\frac{1}{4} \ln \left(\frac{p^2}{p^2 + 4} \right) = \frac{1}{4} \ln \left(1 + \frac{4}{p^2} \right).$$

3. Отыскание оригинала по заданному изображению.

На практике зачастую для нахождения оригинала по известному изображению используется *разложение изображения на простейшие дроби, используя метод неопределенных коэффициентов*.

Если $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ - правильная рациональная дробь, то для нахождения оригинала $f(t)$ необходимо:

- а) Разложить $f(t)$ на сумму простейших дробей, используя метод неопределенных коэффициентов.
- б) Найти оригиналы для каждой простейшей дроби, используя свойства и теоремы преобразования Лапласа.

Приведем оригиналы для простейших дробей [3]:

$$(I) \quad \frac{A}{p+\alpha} \doteq A e^{-\alpha t}.$$

$$(II) \quad \frac{A}{(p+\alpha)^2} \doteq A \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\alpha t}.$$

$$(III) \quad \frac{Ap+B}{\alpha^2+\alpha_1 p+\alpha_2}. \text{ Выделим в знаменателе полный квадрат, разобьем на две дроби и преобразуем к табличному виду:}$$

$$\begin{aligned} \frac{Ap+B}{(p+\alpha)^2+\beta^2} &= \frac{A(p+\alpha)+B-A\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2} = A \frac{(p+\alpha)}{(p+\alpha)^2+\beta^2} + \frac{B-A\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2} \doteq \\ &\doteq A e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + \frac{B-A\alpha}{\beta} A e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \end{aligned}$$

$$\text{где } \alpha = \frac{\alpha_1}{2}, \beta = \sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{4}}.$$

- (IV) У дроби такого типа нет достаточно простого выражения соответствующего ей оригинала, поэтому ее лучше представить в виде суммы дробей (I) и (II) типа с комплексными значениями корней и комплексными коэффициентами разложения.

Если $F(p)$ – неправильная рациональная дробь, то для нее сначала выделяется целая часть.

Если $F(p)$ не является рациональной дробью, то *общий случай отыскания оригинала по его изображению дает формула Римана-Меллина.*

Формула Римана-Меллина. Если $f(t)$ оригинал и $F(p)$ его изображение, то в любой точке непрерывности $f(t)$ справедлива формула обращения Римана-Меллина:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (2)$$

где $Re p = s, s > s_0$.

В точках t_k разрыва функции $f(t)$, правая часть (2) равна:

$$\frac{1}{2} [f(t_k - 0) + f(t_k + 0)].$$

Вычисление оригинала по формуле Римана-Меллина довольно трудоемко, поэтому на практике применяют теоремы разложения и правила преобразования к виду, представленному в Таблице 1, с применением свойств преобразования Лапласа.

Приведем **вторую теорему разложения** [6, 3], которая часто используется для нахождения оригинала по известному изображению.

Если $F(p) = Q(p)/R(p)$ – правильная несократимая рациональная дробь, то оригиналом ее служит функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} [F(p)e^{pt}(p - p_k)^{n_k}], \quad (3)$$

где p_k – полюсы функции $F(p)$ кратности n_k и сумма берется по всем полюсам.

Если все ее полюсы $F(p)$ простые, то формула (3) упрощается и принимает вид:

$$f(t) = \sum_{k=1}^N \frac{Q(p_k)}{R'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (4)$$

Пример 8. Найти оригинал по заданному изображению:

$$F(p) = \frac{p^2 - p + 4}{p^3 - p}.$$

Разложим на простейшие дроби:

$$\begin{aligned} \frac{p^2 - p + 4}{p(p^2 - 1)} &= \frac{p^2 - p + 4}{p(p+1)(p-1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p-1}, \\ \frac{p^2 - p + 4}{p(p^2 - 1)} &= \frac{A(p+1)(p-1) + Bp(p-1) + Cp(p+1)}{p(p+1)(p-1)}. \end{aligned}$$

Найдем значения неопределенных коэффициентов методом частных решений: для этого в обе части равенства числителей подставим значения p , обращающие в ноль знаменатель. Отметим, что так можно делать для множителей знаменателя, соответствующим простейшим дробям I типа.

$$\left. \begin{array}{l} p = 0 \\ p = 1 \\ p = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 = -A \Rightarrow A = -4 \\ 4 = 2C \Rightarrow C = 2 \\ 6 = 2B \Rightarrow B = 3 \end{array} \Rightarrow F(p) = \frac{-4}{p} + \frac{3}{p+1} + \frac{2}{p-1}.$$

Тогда, используя Таблицу 1, получаем

$$f(t) = -4 + 3e^{-t} + 2e^t.$$

Теперь найдем $f(t)$, используя формулу (4).

$$F(p) = \frac{p^2 - p + 4}{p^3 - p} = \frac{p^2 - p + 4}{p(p+1)(p-1)}.$$

Здесь $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = 1$ – простые полюсы.

Найдем вычеты в них, предварительно записав производную знаменателя:

$$R'(p) = 3p^2 - 1.$$

$$p_1 = 0: \frac{Q(p_1)}{R'(p_1)} e^{p_1 \cdot t} = \frac{p^2 - p + 4}{3p^2 - 1} \Big|_{p=0} e^{0 \cdot t} = -4.$$

$$p_2 = -1: \frac{Q(p_2)}{R'(p_2)} e^{p_2 \cdot t} = \frac{p^2 - p + 4}{3p^2 - 1} \Big|_{p=-1} e^{-t} = 3e^{-t}.$$

$$p_3 = 1: \frac{Q(p_3)}{R'(p_3)} e^{p_3 \cdot t} = \frac{p^2 - p + 4}{3p^2 - 1} \Big|_{p=1} e^t = 2e^t.$$

Следовательно, по формуле (4),

$$f(t) = 2e^t + 3e^{-t} - 4.$$

Не сложно увидеть, что ответы, полученные обоими способами, совпадают.

Ответ: $f(t) = 2e^t + 3e^{-t} - 4$.

Пример 9. Найти оригинал по заданному изображению:

$$F(p) = \frac{6p^3 + 4p + 1}{p^4 + p^2}.$$

Решение:

$$F(p) = \frac{6p^3 + 4p + 1}{p^4 + p^2} = \frac{6p^3 + 4p + 1}{p^2(p^2 + 1)} = \frac{6p^3 + 4p + 1}{p^2(p + i)(p - i)}.$$

Приравнивая к нулю знаменатель, получаем:

$p_1 = i, p_2 = -i$ — простые полюсы,

$p_3 = 0$ — полюс второго порядка.

Для простых полюсов, воспользуемся формулой (3), где

$$Q(p) = 6p^3 + 4p + 1, R'(p) = (p^4 + p^2)' = 4p^3 + 2p.$$

$$p_1 = i: \frac{6p^3 + 4p + 1}{p^4 + p^2} \Big|_i e^{it} = \frac{-6i + 4i + 1}{-4i + 2i} e^{it} = \frac{-2i + 1}{-2i} e^{it} = e^{it} - \frac{1}{2i} e^{it}.$$

$$p_1 = i: \frac{6p^3 + 4p + 1}{p^4 + p^2} \Big|_{-i} e^{it} = \frac{6i - 4i + 1}{4i - 2i} = e^{-it} + \frac{1}{2i} e^{-it}.$$

Для $p_3 = 0$ воспользуемся формулой (3), $n_k = 2$:

$$\begin{aligned} p_3 = 0: & \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{6p^3 + 4p + 1}{p^4 + p^2} e^{pt} (p - 0)^2 \right)'_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left(e^{pt} \cdot \frac{6p^3 + 4p + 1}{p^2 + 1} \right)'_p = \\ & = \lim_{p \rightarrow 0} \left[e^{pt} \cdot t \cdot \frac{6p^3 + 4p + 1}{p^2 + 1} + e^{pt} \cdot \frac{(18p^2 + 4)(p^2 + 1) - 2p(6p^3 + 4p + 1)}{(p^2 + 1)^2} \right] = \\ & = \lim_{p \rightarrow 0} \left[te^{pt} \cdot \frac{6p^3 + 4p + 1}{p^2 + 1} + e^{pt} \cdot \frac{6p^4 + 14p^2 - 2p + 4}{(p^2 + 1)^2} \right] = t + 4. \end{aligned}$$

Тогда $f(t) = t + 4 + 2 \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} - \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = 4 + t + 2\cos t - \sin t$.

Ответ: $f(t) = 4 + t + 2\cos t - \sin t$.

4. Применение операционного исчисления в электротехнике.

Известно, что обыкновенными дифференциальными уравнениями и их системами описываются явления, происходящие в линейных цепях со сосредоточенными параметрами r , L и C . Следовательно, для исследования подобных явлений можно использовать операционное исчисление.

Заметим, что законы Ома и Кирхгофа в операторной форме имеют тот же вид, что и при установившихся режимах в цепях постоянного и переменного тока. Поэтому, применяя ОИ для расчета переходных процессов, можно использовать все методы расчета сложных линейных электрических цепей с постоянными параметрами. В сложных и разветвленных электрических цепях (при ненулевых начальных условиях) наиболее часто применяются метод уравнений Кирхгофа, метод контурных токов и метод наложения. При расчете переходных процессов в неразветвленных цепях и в простых разветвленных цепях при нулевых начальных условиях применяется закон Ома в операторной форме.

Первый закон Кирхгофа в операторной форме (алгебраическая сумма операторных токов в любом узле цепи равна нулю):

$$\sum_{k=1}^m I_k(p) = 0. \quad (5)$$

Второй закон Кирхгофа в операторной форме (алгебраическая сумма операторных падений напряжений на всех участках замкнутого контура равна алгебраической сумме операторных ЭДС, включенных в этот контур):

$$\sum_{k=1}^m I_k(p) Z_k(p) = \sum_{k=1}^m E_k(p). \quad (6)$$

Система уравнений, выражающих в операторной форме законы Кирхгофа для всех узлов и контуров цепи, дает систему уравнений в операторной форме.

Чтобы перейти от закона Ома, записанного для мгновенных значений, к его выражению в операторной форме, нужно: умножить все уравнение на e^{-pt} и проинтегрировать от 0 до ∞ . Обозначим $I(p) = L[i(t)]$, $E(p) = L[e(t)]$.

Тогда закон Ома в операторной форме для цепи r , L и C с источником ЭДС имеет вид:

$$I(p) = \frac{E(p) + Li(0) - \frac{u_c(0)}{p}}{r + pL + \frac{1}{pC}}, \quad (7)$$

где $i(0)$ – ток в индуктивности, $u_c(0)$ – напряжение на емкости в момент переключения.

$Z(p) = r + pL + \frac{1}{pC}$ называется операторным сопротивлением, которое при замене оператора p на $j\omega$ соответствует комплексному сопротивлению ветви на цепи синусоидального тока. Величина обратная операторному сопротивлению называется операторной проводимостью.

Отметим, что при нулевых начальных условиях, выражение (7) аналогично закону Ома в комплексной форме. С задачей расчета переходного процесса при нулевых начальных условиях приходится сталкиваться в тех случаях, когда в режиме, предшествующем рассматриваемой коммутации, потоки в индуктивных элементах цепи или заряды ее емкостных элементов не все равны нулю. Расчет переходного процесса в этом случае может быть проведен следующим образом:

- Составляется система дифференциальных уравнений, описывающая протекание процесса при $t > 0$.
- Составляется система уравнений в изображениях, удовлетворяющая начальным условиям задачи (условию непрерывности в момент коммутации потоков в индуктивностях и зарядов емкостей цепи).
- Из составленной системы находятся изображения искомых величин.
- Находятся сами исходные величины (оригиналы).

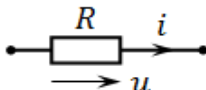
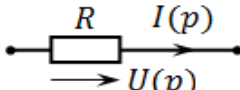
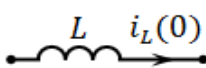
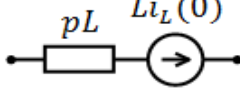
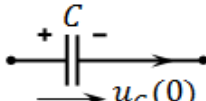
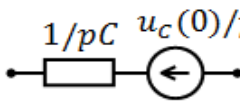
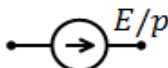
Исходная цепь	Операторная расчётная цепь
	
	
	
	
	

Рисунок 1 – Операторная схема основных элементов цепи

Во всех случаях расчета переходных процессов в электрических цепях операторным методом:

1. Определяются начальные условия.
2. Записывается уравнение или система уравнений для заданной цепи в операторной форме, используя Рис. 1.
3. Находятся изображения искомых токов или напряжений.
4. По полученным изображениям отыскиваются оригиналы, которые являются мгновенными значениями токов или напряжений переходного процесса.

5. Примеры решения заданий

Задание 1. По данному изображению найти оригинал.

Отметим, что для линейных цепей с сосредоточенными параметрами изображения токов и напряжений являются дробно-рациональными функциями комплексной переменной p .

Пример 1. Для изображения $F(p) = \frac{2p^3 + p^2 + 2p + 2}{p^5 + 2p^4 + 2p^3}$ найти оригинал $f(t)$.

Решение:

Очевидно, что $F(p)$ является правильной рациональной дробью, поэтому разложим ее на простейшие дроби [3, 4]:

$$\frac{2p^3 + p^2 + 2p + 2}{p^5 + 2p^4 + 2p^3} = \frac{2p^3 + p^2 + 2p + 2}{p^3 \underbrace{(p^2 + 2p + 2)}_{D < 0}} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p^3} + \frac{Dp + E}{p^2 + 2p + 2},$$

$$2p^3 + p^2 + 2p + 2 = Ap^2(p^2 + 2p + 2) + Bp(p^2 + 2p + 2) + C(p^2 + 2p + 2) + Dp^2 + Ep.$$

Запишем систему для нахождения неопределенных коэффициентов:

$$\begin{cases} p^4 & 0 = A, \\ p^3 & 2 = 2A + B, \quad \Rightarrow B = 2 \\ p^2 & 1 = 2A + 2B + C + D, \Rightarrow D = -4 \\ p & 2 = 2B + 2C + E, \quad \Rightarrow E = -4 \\ p^0 & 2 = 2C. \quad \Rightarrow C = 1 \end{cases}$$

Тогда $F(p) = \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p^3} - 4 \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1}$. Используя Таблицу 1, находим:

$$\frac{2}{p^2} + \frac{1}{p^3} - 4 \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} \doteq 2t + \frac{t^2}{2} - 4e^{-t} \cos t = f(t).$$

Ответ: $f(t) = 2t + \frac{t^2}{2} - 4e^{-t} \cos t$.

Задание 2. Методом операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Пример 2.1. Найдем решение задачи Коши:

$$x'' + 2x' + x = t^2, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

Решение:

Обозначим $x(t) \doteq X(p)$, тогда, используя теорему о дифференцировании оригинала,

$$x'(t) \doteq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$

$$x''(t) \doteq p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - p,$$

$$t^2 \doteq \frac{2!}{p^3} = \frac{2}{p^3}.$$

Запишем уравнение в изображениях:

$$p^2 X(p) - p + 2[pX(p) - 1] + X(p) = \frac{2}{p^3}.$$

Выразим $X(p)$:

$$p^2 X(p) + 2pX(p) + X(p) = \frac{2}{p^3} + p(p^3 + 2(p^3) = \frac{p^4 + 2p^3 + 2}{p^3},$$

$$X(p) = \frac{p^4 + 2p^3 + 2}{p^3(p+1)^2}.$$

а) Для нахождения оригинала разложим правую часть на простейшие дроби:

$$\frac{p^4 + 2p^3 + 2}{p^3(p+1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p^3} + \frac{D}{p+1} + \frac{E}{(p+1)^2},$$

$$p^4 + 2p^3 + 2 = Ap^2(p+1)^2 + C(p+1)^2 + Dp^3(p+1) + Ep^3,$$

$$p^4 + 2p^3 + 2 = A(p^4 + 2p^3 + p^2) + B(p^3 + 2p^2 + p) + C(p^2 + 2p + 1) + D(p^4 + p^3) + Ep^3.$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях многочленов в правой и левой частях равенства, получаем систему уравнений для определения неопределенных коэффициентов.

$$\begin{matrix} p^4 \\ p^3 \\ p^2 \\ p^1 \\ p^0 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{ll} 1 = A + D, & \Rightarrow D = -5 \\ 2 = 2A + B + D + E, & \Rightarrow E = -1 \\ 0 = A + 2B + C, & \Rightarrow A = 6 \\ 0 = B + 2C, & \Rightarrow B = -4 \\ 2 = C. & \Rightarrow C = 2 \end{array} \right.$$

Тогда

$$X(p) = 6\frac{1}{p} - 4\frac{1}{p^2} + 2\frac{1}{p^3} - 5\frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Найдём оригиналы

$$\frac{6}{p} \doteq 6; \quad -4 \cdot \frac{1}{p^2} \doteq -4t; \quad 2 \cdot \frac{1}{p^3} \doteq t^2;$$

$$-5\frac{1}{p+1} \doteq -5e^{-t}; \quad -\frac{1}{(p+1)^2} \doteq -te^{-t},$$

следовательно

$$x(t) = 6 - 4t + t^2 - 5e^{-t} - te^{-t} = t^2 - 4t + 6 - e^{-t}(t + 5).$$

б) Для нахождения оригинала воспользуемся второй теоремой разложения.

$$X(p) = \frac{p^4 + 2p^3 + 2}{p^3(p+1)^2}.$$

Корни знаменателя равны $p_1 = 0$, $p_2 = -1$.

Для $p_1 = 0$ полюса третьего порядка, воспользуемся формулой (3), $n_k = 3$:

$$\begin{aligned} p_2 = 0: & \frac{1}{(3-1)!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{p^4 + 2p^3 + 2}{p^3(p+1)^2} e^{pt} (p-0)^3 \right] = \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^2}{dp^2} \left[e^{pt} \frac{p^4 + 2p^3 + 2}{(p+1)^2} \right] = \\ & = \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} \left[t e^{pt} \frac{p^4 + 2p^3 + 2}{(p+1)^2} + e^{pt} \frac{(4p^3 + 6p^2)(p+1) - 2(p^4 + 2p^3 + 2)}{(p+1)^3} \right] = \\ & = \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} \left[t e^{pt} \frac{p^4 + 2p^3 + 2}{(p+1)^2} + e^{pt} \frac{2p^4 + 6p^3 + 6p^2 - 4}{(p+1)^3} \right] = \\ & = \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 0} \left[t \left[t e^{pt} \frac{p^4 + 2p^3 + 2}{(p+1)^2} + e^{pt} \frac{(4p^3 + 6p^2)(p+1)^2 - 2(p+1)(p^4 + 2p^3 + 2)}{(p+1)^4} \right] \right. \\ & \quad \left. + t e^{pt} \frac{2p^4 + 6p^3 + 6p^2 - 4}{(p+1)^3} + e^{pt} \frac{(8p^3 + 18p^2 + 12p)(p+1)^3 - 3(p+1)^2(2p^4 + 6p^3 + 6p^2 - 4)}{(p+1)^6} \right] = \\ & = \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 0} \left[t \left[t e^{pt} \frac{p^4 + 2p^3 + 2}{(p+1)^2} + e^{pt} \frac{2p^4 + 6p^3 - 6p^2 - 4}{(p+1)^3} \right] + t e^{pt} \frac{2p^4 + 6p^3 + 6p^2 - 4}{(p+1)^3} \right. \\ & \quad \left. + e^{pt} \frac{2p^4 + 8p^3 + 12p^2 + 12p + 12}{(p+1)^4} \right] = \frac{1}{2} [t(2t-8) + 12] = t^2 - 4t + 6. \end{aligned}$$

Для $p_2 = -1$ полюса второго порядка, воспользуемся формулой (3), $n_k = 2$:

$$\begin{aligned} p_2 = -1: & \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \rightarrow -1} \left(\frac{p^4 + 2p^3 + 2}{p^3(p+1)^2} e^{pt} (p+1)^2 \right)'_p = \lim_{p \rightarrow -1} \left(e^{pt} \cdot \frac{p^4 + 2p^3 + 2}{p^3} \right)'_p = \\ & = \lim_{p \rightarrow -1} \left[e^{pt} \cdot t \cdot \frac{p^4 + 2p^3 + 2}{p^3} + e^{pt} \left(\frac{(4p^3 + 6p^2)p^3 - 3p^2(p^4 + 2p^3 + 2)}{p^6} \right) \right] = \\ & = \lim_{p \rightarrow -1} \left[t e^{pt} \cdot \frac{p^4 + 2p^3 + 2}{p^3} + e^{pt} \cdot \frac{p^4 - 6}{p^4} \right] = -t e^{-t} - 5 e^{-t} = -e^{-t}(t+5). \end{aligned}$$

Следовательно, $x(t) = t^2 - 4t + 6 - e^{-t}(t+5)$.

в) Выполним проверку найденного решения:

$$x(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 6 - e^0(0+5) = 1,$$

$$x'(t) = 2t - 4 + e^{-t}(t+5) - e^{-t} = 2t - 4 + e^{-t}(t+4),$$

$$x'(0) = 2 \cdot 0 - 4 + e^{-0}(0+4) = 0.$$

Начальные условия выполняются. Подставим найденное решение в исходное уравнение. Для этого предварительно найдем $x''(t)$:

$$x''(t) = 2 - e^{-t}(t+3),$$

получаем

$$x'' + 2x' + x = 2 - e^{-t}(t + 3) + 2(2t - 4 + e^{-t}(t + 4)) + t^2 - 4t + 6 - e^{-t}(t + 5) = t^2.$$

При подстановке в исходное уравнение получается тождественное равенство, следовательно, найденная функция $x(t)$ является решением.

Ответ: $x(t) = t^2 - 4t + 6 - e^{-t}(t + 5)$.

Пример 2.2. Решить задачу Коши

$$x'' + 4x' + 4x = e^{-2t}(\cos t + \sin t), \quad x(0) = -1, x'(0) = 1.$$

Решение:

Перейдём к изображениям

$$x(t) \doteq X(p),$$

$$x' \doteq pX(p) + 1,$$

$$x'' \doteq p^2X(p) + p - 1,$$

$$\cos t + 2\sin t \doteq \frac{p}{p^2 + 1} + 2\frac{1}{p^2 + 1} = \frac{p + 2}{p^2 + 1}$$

и по теореме смещения

$$e^{-2t}(\cos t + 2\sin t) \doteq \frac{p + 4}{(p + 2)^2 + 1}.$$

Операторное уравнение будет:

$$p^2X(p) + p - 1 + 4pX(p) + 4 + 4X(p) = \frac{p + 4}{(p + 2)^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(p) = -\frac{p^3 + 7p^2 + 16p + 11}{((p + 2)^2 + 1)(p + 2)^2}.$$

Разложим последнюю дробь на простейшие:

$$-\frac{p^3 + 7p^2 + 16p + 11}{((p + 2)^2 + 1)(p + 2)^2} = \frac{Ap + B}{(p + 2)^2 + 1} + \frac{C}{(p + 2)^2} + \frac{D}{p + 2},$$

$$-p^3 - 7p^2 - 16p - 11 = (Ap + B)((p + 2)^2 + 1) + C((p + 2)^2 + 1) + D(p + 2)((p + 2)^2 + 1).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p , находим $A = -1, B = -4, C = 1, D = 0$.

Тогда

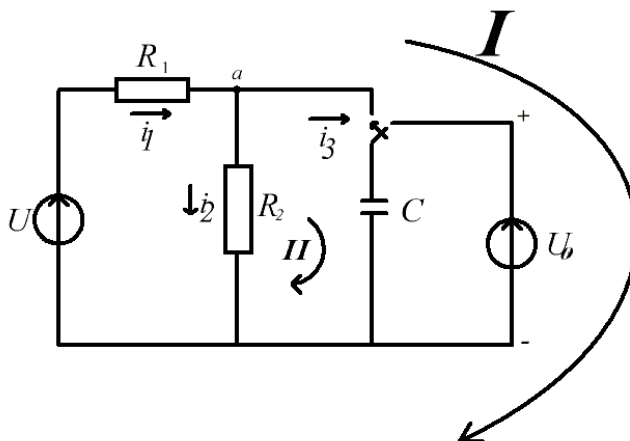
$$X(p) = -\frac{p + 4}{(p + 2)^2 + 1} + \frac{1}{(p + 2)^2}.$$

Перейдем к оригиналу, пользуясь свойством линейности и теоремой смещения:
 $x(t) = e^{-2t}(t - \cos t - 2\sin t)$ – частное решение данного уравнения.

Ответ: $x(t) = e^{-2t}(t - \cos t - 2\sin t)$.

Задание 3. Использование операционного исчисления для решения задач электротехники.

Пример 3.1. Найти переходные значения токов при переключении рубильника для заданной цепи операторным методом.



Решение:

Запишем систему операторных уравнений, составленных по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_1(p) = I_2(p) + I_3(p), & (1) \\ R_1 I_1(p) + \frac{1}{pC} I_3(p) = \frac{U}{p} - \frac{U_0}{p}, & (2) \\ -R_2 I_2(p) + \frac{1}{pC} I_3(p) = -\frac{U_0}{p}. & (3) \end{cases}$$

Из (2):

$$I_1(p) = \frac{1}{R_1} \left[\frac{U}{p} - \frac{U_0}{p} - \frac{1}{pC} I_3(p) \right].$$

Из (3):

$$I_2(p) = \frac{1}{R_2} \left[\frac{U_0}{p} - \frac{1}{pC} I_3(p) \right].$$

Подставим в (1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} \left[\frac{U - U_0}{p} - \frac{1}{pC} I_3(p) \right] &= \frac{1}{R_2} \left[\frac{U_0}{p} - \frac{1}{pC} I_3(p) \right] + I_3(p), \\ \frac{U - U_0}{p \cdot R_1} - \frac{1}{R_1 C p} I_3(p) &= \frac{U_0}{R_2 \cdot p} + \frac{1}{R_2 \cdot p \cdot C} I_3(p) + I_3(p), \\ I_3(p) \left[1 + \frac{1}{R_2 \cdot p \cdot C} + \frac{1}{R_1 \cdot p \cdot C} \right] &= \frac{U - U_0}{R_1 \cdot p} - \frac{U_0}{R_2 \cdot p}, \end{aligned}$$

$$I_3(p) = \frac{\frac{1}{p} \left(\frac{U - U_0}{R_1} - \frac{U_0}{R_2} \right)}{1 + \frac{1}{R_2 Cp} + \frac{1}{R_1 Cp}} = C \frac{(U - U_0)R_2 - U_0 R_1}{R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2}.$$

Зная $I_3(p)$, находим $I_1(p)$ и $I_2(p)$:

$$I_1(p) = \frac{1}{R_1} \left[\frac{U}{p} - \frac{U_0}{p} - \frac{1}{pC} C \frac{(U - U_0)R_2 - U_0 R_1}{R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2} \right] = \frac{(U - U_0)R_2 Cp - U}{p(R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2)}.$$

$$I_2(p) = \frac{1}{R_2} \left[\frac{U_0}{p} - \frac{1}{p} \frac{(U - U_0)R_2 - U_0 R_1}{R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2} \right].$$

Чтобы найти оригиналы, преобразуем полученные выражения в виду, удобному для пользования Таблицей 1:

$$I_3(p) = C \frac{(U - U_0)R_2 - U_0 R_1}{R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2} = \frac{(U - U_0)R_2 - U_0 R_1}{R_1 R_2} \frac{1}{p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}}.$$

Следовательно,

$$i_3(t) = \frac{(U - U_0)R_2 - U_0 R_1}{R_1 R_2} e^{-\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}\right)t}.$$

Соответственно,

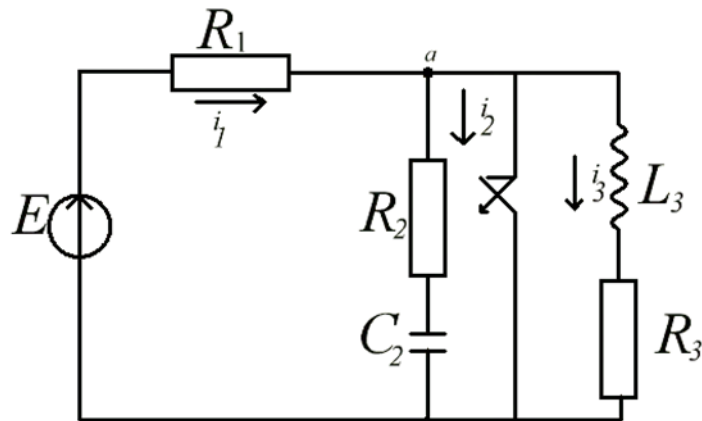
$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{(U - U_0)R_2 Cp - U}{p(R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2)} = \frac{(U - U_0)R_2 C}{R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2} - \frac{U}{p(R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2)} = \\ &= \frac{(U - U_0)}{R_1} \frac{1}{p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}} - \frac{U}{R_1 + R_2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}} \right), \end{aligned}$$

$$i_1(t) = \frac{(U - U_0)}{R_1} e^{-\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}\right)t} - \frac{U}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}\right)t} \right).$$

$$\begin{aligned} I_2(p) &= \frac{1}{R_2} \left[\frac{U_0}{p} - \frac{1}{p} \frac{(U - U_0)R_2 - U_0 R_1}{R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2} \right] = \frac{U_0}{R_2} \frac{1}{p} - \frac{(U - U_0)R_2 - U_0 R_1}{R_1 R_2^2 C} \frac{1}{p \left(p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \right)} = \\ &= \frac{U_0}{R_2} \frac{1}{p} - \frac{(U - U_0)R_2 - U_0 R_1}{R_2(R_1 + R_2)} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \frac{U_0}{R_2} - \frac{(U - U_0)R_2 - U_0 R_1}{R_2(R_1 + R_2)} + \frac{(U - U_0)R_2 - U_0 R_1}{R_2(R_1 + R_2)} e^{-\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}\right)t} = \\ &= \frac{2U_0}{R_2} - \frac{U}{R_1 + R_2} + \frac{(U - U_0)R_2 - U_0 R_1}{R_2(R_1 + R_2)} e^{-\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}\right)t}. \end{aligned}$$

Пример 3.2. Найти переходные значения токов при переключении рубильника для заданной цепи операторным методом.



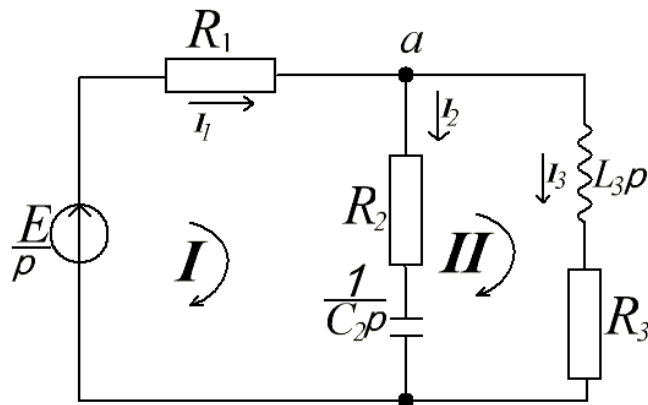
Начальные условия:

$$i_3(0) = i_3(0_-) = i_3(0_+) = 0,$$

$$u_{C2}(0) = u_{C2}(0_-) = u_{C2}(0_+) = 0.$$

Решение:

Составим операторную схему замещения:



И по ней запишем систему операторных уравнений для узла a , контуров I и II:

$$\begin{cases} I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) = 0, & (1) \\ I_1(p)R_1 + I_2(p)\left(R_2 + \frac{1}{C_2 p}\right) = \frac{E}{p}, & (2) \\ I_2(p)\left(R_2 + \frac{1}{C_2 p}\right) - I_3(p)(R_3 + L_3 p) = 0. & (3) \end{cases}$$

Из (2) выразим

$$I_1(p) = \frac{1}{R_1} \left[\frac{E}{p} - I_2(p) \left(R_2 + \frac{1}{C_2 p} \right) \right],$$

из (3) выразим

$$I_3(p) = \frac{I_2(p) \left(R_2 + \frac{1}{C_2 p} \right)}{R_3 + L_3 p}$$

и подставим $I_1(p)$ и $I_3(p)$ в (1):

$$\frac{E}{R_1 p} - \frac{I_2(p)}{R_1} \left(R_2 + \frac{1}{C_2 p} \right) - I_2(p) - \frac{I_2(p) \left(R_2 + \frac{1}{C_2 p} \right)}{R_3 + L_3 p} = 0.$$

Решая полученное уравнение, найдем изображение $I_2(p)$:

$$I_2(p) \left[1 + \frac{1}{R_1} \left(R_2 + \frac{1}{C_2 p} \right) + \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 p}}{R_3 + L_3 p} \right] = \frac{E}{R_1 p},$$

$$I_2(p) = \frac{\frac{E}{R_1 p}}{1 + \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 p}}{R_1} + \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 p}}{R_3 + L_3 p}}.$$

После преобразования выражение для $I_2(p)$ примет вид:

$$I_2(p) = \frac{E C_2 (R_3 + L_3 p)}{p^2 L_3 C_2 (R_1 + R_2) + p [C_2 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) + L_3] + R_1 + R_3}.$$

Зная $I_2(p)$ находим $I_1(p)$ и $I_3(p)$, и их оригиналы

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{E}{R_1 p} \left[1 - \frac{(R_3 + L_3 p)(R_2 C_2 p + 1)}{p^2 L_3 C_2 (R_1 + R_2) + p [C_2 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) + L_3] + R_1 + R_3} \right] = \\ &= E \left[\frac{p^2 L_3 C_2 + p C_2 (R_2 + R_3) + 1}{p (p^2 L_3 C_2 (R_1 + R_2) + p [C_2 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) + L_3] + R_1 + R_3)} \right]. \end{aligned}$$

$$I_3(p) = \frac{E (R_2 C_2 p + 1)}{p (p^2 L_3 C_2 (R_1 + R_2) + p [C_2 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) + L_3] + R_1 + R_3)}.$$

Оригиналы токов находятся используя MatLab или аналогично примеру 3.1.

Напряжение на конденсаторе находится следующим образом:

$$u_{C_2(p)} = I_2(p) \frac{1}{C_2 p}.$$

Варианты заданий индивидуальной работы

Задание 1. По данному изображению найти оригинал.

№	Условие задачи	Ответ
1	$F(p) = \frac{3p^2 - 2p + 5}{p^3 - 2p^2 + 5p}$	$f(t) = 1 + e^t(\cos(2t) + \sin(2t))$
2	$F(p) = \frac{p^3 + 3p + 4}{p(p-1)(p-2)}$	$f(t) = -8e^t + 7e^{2t} + 2$
3	$F(p) = \frac{4p^2 - 6p + 4}{p(p-2)^2}$	$f(t) = 1 + e^{2t}(4t + 3)$
4	$F(p) = \frac{p^2 - 2p - 1}{p^3 - 3p^2 + 3p - 1}$	$f(t) = e^t(1 - t^2)$
5	$F(p) = \frac{4p + 5}{(p-2)(p^2 + 4p + 5)}$	$f(t) = \frac{13}{17}e^{2t} - \frac{1}{17}e^{-2t}(13\cos t - 16\sin t)$
6	$F(p) = \frac{3p - 2}{(p-1)(p^2 - 6p + 10)}$	$f(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{e^{3t}}{5}(\cos t - 17\sin t)$
7	$F(p) = \frac{2p + 3}{p^3 + 4p^2 + 5p}$	$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}e^{-2t}(3\cos t - 4\sin t)$
8	$F(p) = \frac{p + 2}{(p+1)(p-2)(p^2 + 4)}$	$f(t) = -\frac{e^{-t}}{15} + \frac{e^{2t}}{6} + \frac{1}{10}(-2\sin 2t - \cos 2t)$
9	$F(p) = \frac{p + 3}{p(p^2 - 4p + 3)}$	$f(t) = 1 - 2e^t + e^{3t}$
10	$F(p) = \frac{4 - p + p^2}{p^3 - p^2}$	$f(t) = 4e^t - 4t - 3$

Задание 2. Методами операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Решить задачу Коши, используя разложение изображения на простейшие дроби и вторую теорему разложения. Выполнить проверку решения.

№	Условие задачи	Ответ
1	$x'' + 2x' + 2x = te^{-t},$ $x(0) = 0, x'(0) = 0$	$x(t) = e^{-t}(t - \sin t)$
2	$x'' - 2x' = e^t(t - 3),$ $x(0) = 0, x'(0) = 0.$	$x(t) = e^t(3 - t) - e^{2t} - 2$
3	$x'' - 12x' + 36x = -2e^{-t},$ $x(0)=0, x'(0) = 2$	$x(t) = \frac{2}{49}e^{6t}(1 + 42t) - \frac{2}{49}e^{-t}$
4	$x'' - x = 2\cos t,$	$x(t) = e^t - \cos t$

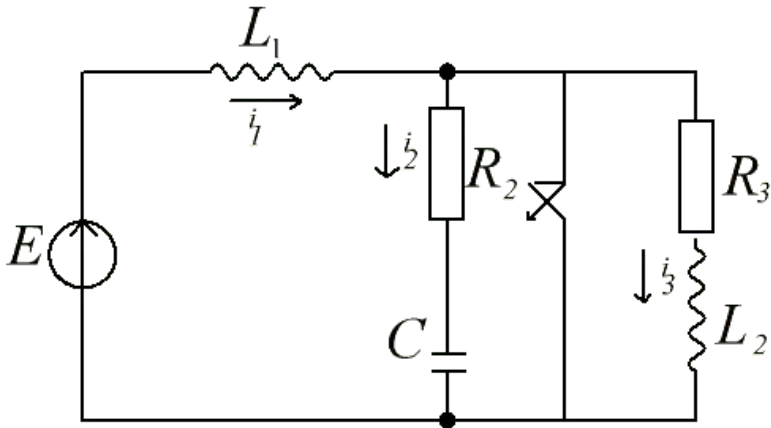
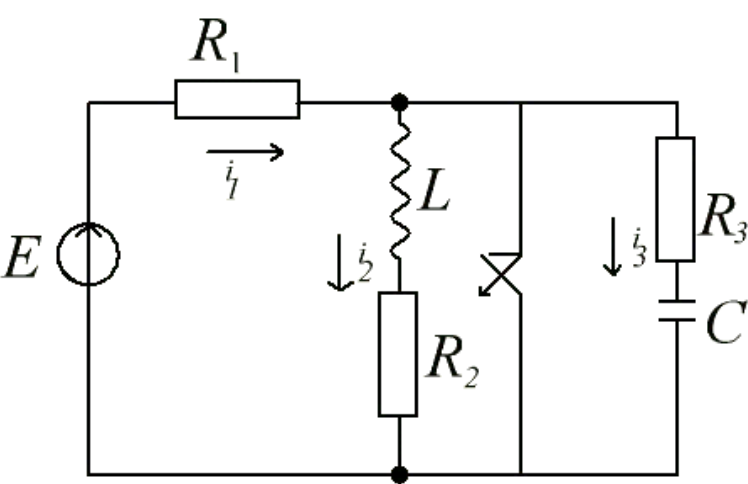
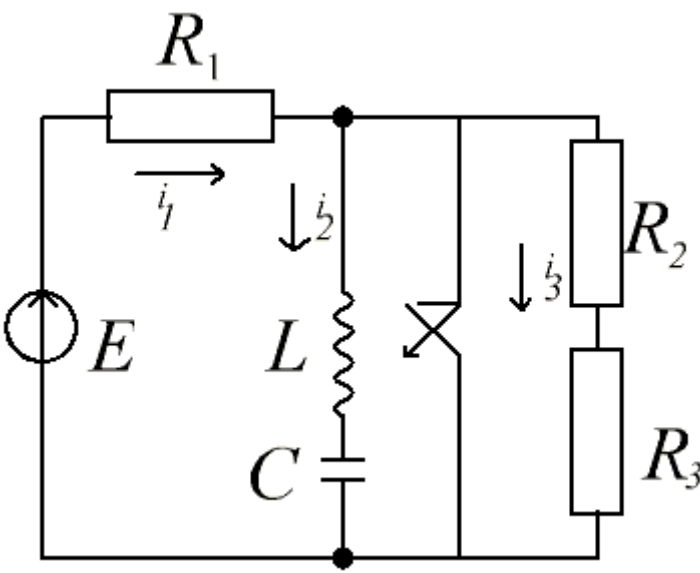
	$x(0) = 0, x'(0) = 1$	
5	$x'' + x' = t^2 + 2t,$ $x(0) = 0, x'(0) = -2.$	$x(t) = 2e^{-t} + \frac{t^3}{3} - 2$
6	$x'' - x = \sin t,$ $x(0) = -1, x'(0) = 0$	$x(t) = -\frac{1}{4}e^t - \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t$
7	$x'' + 2x' + x = t + 2,$ $x(0) = 0, x'(0) = 2$	$x(t) = te^{-t} + t$
8	$x'' + x = \cos t,$ $x(0) = -1, x'(0) = 1$	$x(t) = (\frac{1}{2}t + 1)\sin t - \cos t$
9	$x'' - 3x' + 2x = e^{5t},$ $x(0) = 1, x'(0) = 2.$	$x(t) = \frac{7}{4}e^{5t} + \frac{5}{4}e^t - 2e^{2t}$
10	$x'' + x' - 2x = -2(t + 1),$ $x(0) = 1, x'(0) = 1$	$x(t) = t - \frac{e^t}{3} - \frac{e^{-t}}{6} + \frac{3}{2}$

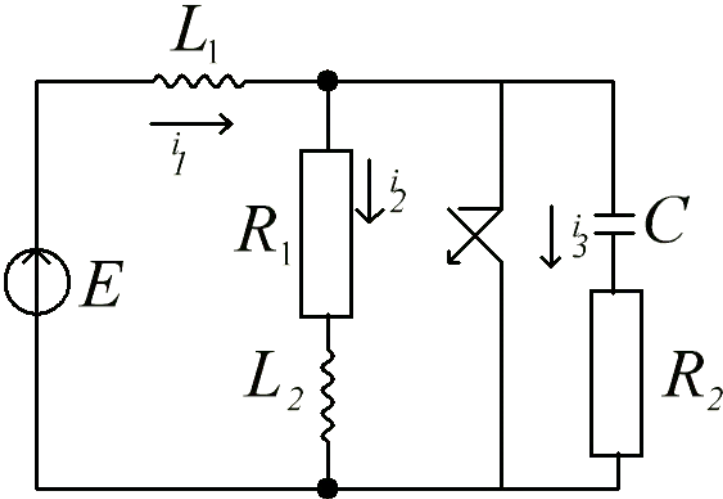
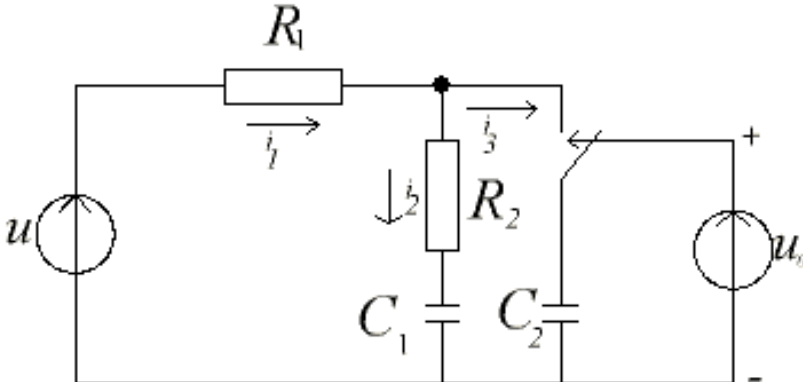
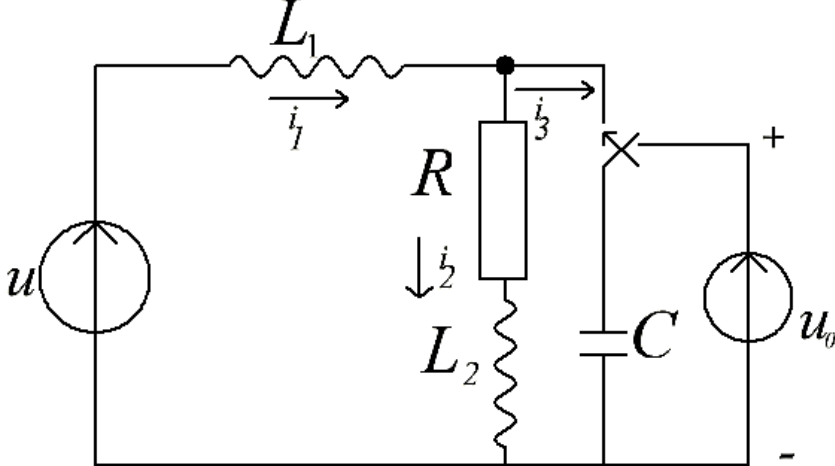
Задание 3. Использование операционного исчисления для решения задач электротехники.

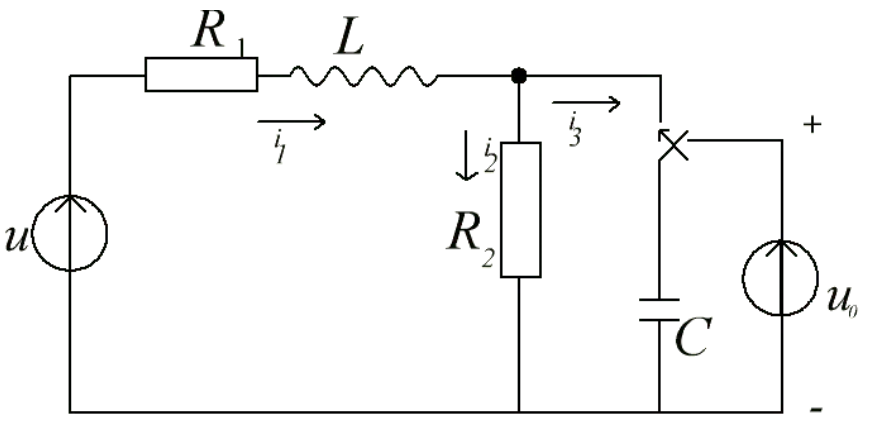
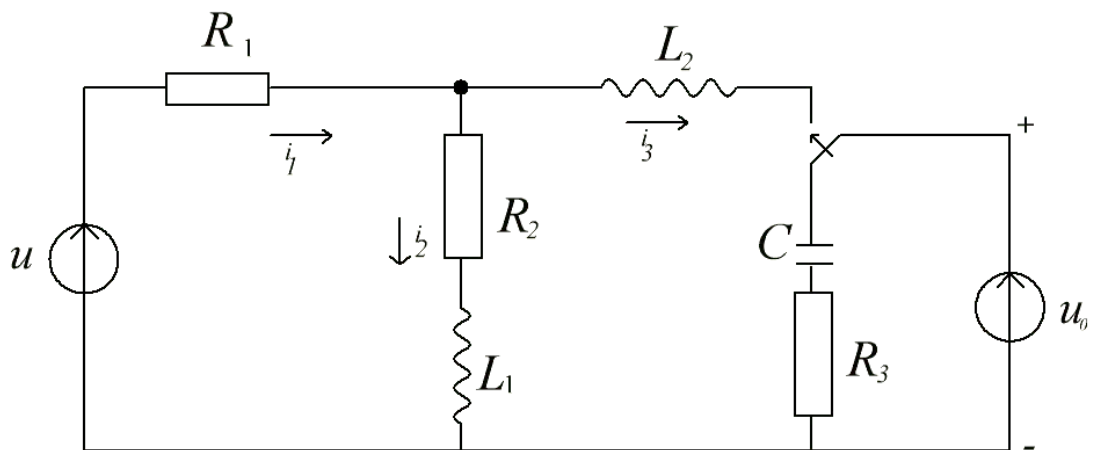
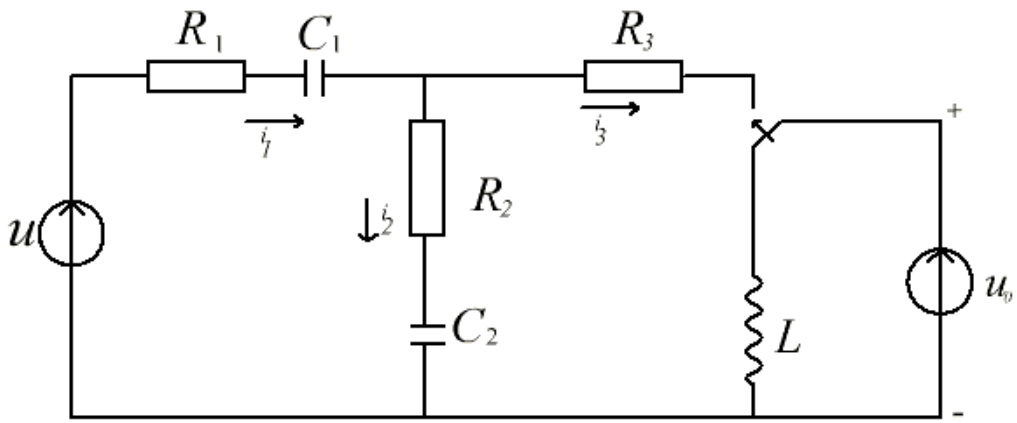
При переключении рубильника для заданной схемы цепи операторным методом:

- составить эквивалентную схему для изображений,
- найти:
 - переходные значения токов,
 - построить их графики.

№	Схема	Известные значения величин
1		$E=200 \text{ В},$ $L=0,25 \text{ Гн},$ $R_1=80 \text{ Ом},$ $R_2=30 \text{ Ом},$ $C=150 \text{ мкФ}.$

2		$E=150 \text{ В},$ $L_1=0,5 \text{ Гн},$ $R_2=100 \text{ Ом},$ $R_3=80 \text{ Ом},$ $L_2=0,4 \text{ Гн},$ $C=80 \text{ мкФ}.$
3		$E=130 \text{ В},$ $R_1=100 \text{ Ом},$ $R_2=50 \text{ Ом},$ $R_3=80 \text{ Ом},$ $L=0,5 \text{ Гн},$ $C=80 \text{ мкФ}.$
4		$E=170 \text{ В},$ $R_1=100 \text{ Ом},$ $R_2=50 \text{ Ом},$ $R_3=75 \text{ Ом},$ $L=0,4 \text{ Гн},$ $C=100 \text{ мкФ}.$

5		$E=150,$ $R_1=70 \text{ Ом},$ $R_2=100 \text{ Ом},$ $L_1=0,3 \text{ Гн},$ $L_2=0,25 \text{ Гн},$ $C=60 \text{ мкФ}$
6		$U=300 \text{ В},$ $U_0=100 \text{ В},$ $R_1=100 \text{ Ом},$ $R_2=80 \text{ Ом},$ $C_1=100 \text{ мкФ},$ $C_2=100 \text{ мкФ}.$
7		$U=250 \text{ В},$ $U_0=100 \text{ В},$ $L_1=0,75 \text{ Гн},$ $L_2=0,5 \text{ Гн},$ $R=100 \text{ Ом},$ $C=100 \text{ мкФ}$

8		$U=200 \text{ В},$ $U_0=50 \text{ В},$ $R_1=100 \text{ Ом},$ $R_2=80 \text{ Ом},$ $L=0,5 \text{ Гн},$ $C=200 \text{ мкФ}.$
9		$U=250 \text{ В}, U_0=75 \text{ В}, R_1=150 \text{ Ом}, R_2=100 \text{ Ом}, R_3=50 \text{ Ом},$ $L_1=0,3 \text{ Гн}, L_2=0,5 \text{ Гн},$ $C=150 \text{ мкФ}.$
10		$U=250 \text{ В}, U_0=100 \text{ В}, R_1=200 \text{ Ом}, R_2=100 \text{ Ом}, R_3=150 \text{ Ом},$ $L=0,25 \text{ Гн}, C_1=100 \text{ мкФ},$ $C_2=80 \text{ мкФ}.$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Пример расчета в MatLab.

1. Пример 3.1.

```
>> syms p

% задаем числовые значения начальных параметров
U = 200;
U0 = 30;
R1 = 80;
R2 = 160;
C = 50e-3;

% записываем изображение токов
>> I3(p) = C * ( (U-U0)*R2-U0*R1) / (R1*R2*C*p+R1+R2)
      I3(p) = 1240/(640*p + 240)
>> I1(p) = (R2*C*p*(U-U0)-U) / (p*(R1*R2*C*p+R1+R2))
      I1(p) = (1360*p - 200)/(p*(640*p + 240))
>> I2(p) = (1/(p*R2)) * (U0-(R2*(U-U0)-U0*R1)/(R1*R2*C*p+R1+R2))
      I2(p) = -(24800/(640*p + 240) - 30)/(160*p)

% находим оригиналы токов, используя обратное преобразование Лапласа
>> ilaplace(I1(p))
      ans = (71*exp(-(3*t)/8))/24 - 5/6
>> ilaplace(I2(p))
      ans = (31*exp(-(3*t)/8))/48 - 11/24
>> ilaplace(I3(p))
      ans = (31*exp(-(3*t)/8))/16
>> syms t;
i1(t) = (75*exp(-(175*t)/3))/28 - 10/7
i1(t) = (75*exp(-(175*t)/3))/28 - 10/7
>> i2(t) = 40/21 - (5*exp(-(175*t)/3))/21
i2(t) = 40/21 - (5*exp(-(175*t)/3))/21
>> i3(t) = (31*exp(-(3*t)/8))/16
i3(t) = (31*exp(-(3*t)/8))/16

% задаем интервал времени и шаг
>> t=[0:0.001:0.02];

% рисуем графики токов
```

```

figure;
plot(t,i1(t));
grid on
figure;
plot(t,i2(t));
grid on
figure;
plot(t,i3(t));
grid on

```

2. Пример 3.2.

```

>> syms p
>> C2 = 50e-4;
>> R1 = 150;
>> R2 = 120;
>> R3 = 80;
>> L3 = 0.5;
>> E = 300;
>> I2(p) =
(E*C2*(R3+L3*p))/(p^2*L3*C2*(R1+R2)+p*(C2*(R1*R2+R1*R3+R2*R3)+L3
)+R1+R3)
      I2(p) = ((3*p)/4 + 120)/((27*p^2)/40 + (397*p)/2 + 230)
>> I1(p) =
(E*(p^2*L3*C2+p*C2*(R2+R3)+1))/(p*(p^2*L3*C2*(R1+R2)+p*(C2*(R1*R
2+R1*R3+R2*R3)+L3)+R1+R3))
      I1(p) = ((3*p^2)/4 + 300*p + 300)/(p*((27*p^2)/40 +
(397*p)/2 + 230))
>> I3(p) =
(E*(R2*C2*p+1))/(p*(p^2*L3*C2*(R1+R2)+p*(C2*(R1*R2+R1*R3+R2*R3)+
L3)+R1+R3))
      I3(p) = (180*p + 300)/(p*((27*p^2)/40 + (397*p)/2 + 230))
>> ilaplace(I1(p))
ans = 30/23 - (40*exp(-(3970*t)/27)*(cosh((50*6205^(1/2)*t)/27)
- (499*6205^(1/2)*sinh((50*6205^(1/2)*t)/27))/12410))/207
>> ilaplace(I2(p))
ans = (10*exp(-(3970*t)/27)*(cosh((50*6205^(1/2)*t)/27) +
(7*6205^(1/2)*sinh((50*6205^(1/2)*t)/27))/6205))/9
>> ilaplace(I3(p))

```

```

ans = 30/23 - (30*exp(-(3970*t)/27)*(cosh((50*6205^(1/2)*t)/27)
- (31*6205^(1/2)*sinh((50*6205^(1/2)*t)/27))/6205))/23
>> syms t;
>> i1(t) = 30/23 - (40*exp(-
(3970*t)/27)*(cosh((50*6205^(1/2)*t)/27) -
(499*6205^(1/2)*sinh((50*6205^(1/2)*t)/27))/12410))/207
i1(t) = 30/23 - (40*exp(-
(3970*t)/27)*(cosh((1082631683005927*t)/7421703487488) -
(1080466419639915*sinh((1082631683005927*t)/7421703487488))/3411
23482517504))/207
>> i2(t) = (10*exp(-(3970*t)/27)*(cosh((50*6205^(1/2)*t)/27) +
(7*6205^(1/2)*sinh((50*6205^(1/2)*t)/27))/6205))/9
i2(t) = (10*exp(-
(3970*t)/27)*(cosh((1082631683005927*t)/7421703487488) +
(4850189939866553*sinh((1082631683005927*t)/7421703487488))/5457
9757202800640))/9
>> i3(t) = 30/23 - (30*exp(-
(3970*t)/27)*(cosh((50*6205^(1/2)*t)/27) -
(31*6205^(1/2)*sinh((50*6205^(1/2)*t)/27))/6205))/23
i3(t) = 30/23 - (30*exp(-
(3970*t)/27)*(cosh((1082631683005927*t)/7421703487488) -
(2684926573854699*sinh((1082631683005927*t)/7421703487488))/6822
469650350080))/23
>> t=[0:0.001:0.1];
figure;
plot(t,i1(t));
grid on
figure;
plot(t,i2(t));
grid on
>> figure;
plot(t,i3(t));
grid on

```

В таблице 1 представлены изображения некоторых функций-оригиналов.

Таблица 1. – Таблица изображений

№	Оригинал $f(t), t \geq 0$	Изображение $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$
1.	$1 = \eta(t)$	$\frac{1}{p}$
2.	t	$\frac{1}{p^2}$
3.	$t^n, n \in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4.	$e^{-\omega t}$	$\frac{1}{p + \omega}$
5.	$t^n e^{-\alpha t}, n \in N$	$\frac{n!}{(p + \alpha)^{n+1}}$
6.	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
7.	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
8.	$\text{sh}(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
9.	$\text{ch}(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
10.	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
11.	$e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
12.	$e^{-\alpha t} \text{sh}(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 - \omega^2}$
13.	$e^{-\alpha t} \text{ch}(\omega t)$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 - \omega^2}$
14.	$t \sin(\omega t)$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
15.	$t \cos(\omega t)$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$

В таблице 2 представлены основные теоремы и свойства операционного исчисления.

Таблица 2. – Основные теоремы операционного исчисления

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	Теорема линейности $\alpha f_1 + \beta f_2(t), \alpha, \beta = \text{const}$	$\alpha F_1(p) + \beta F_2(p)$
2	$Cf(t), C = \text{const}$	$C \cdot F(p)$
3	Теорема подобия $f(at) (\alpha > 0)$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
4	Дифференцирование оригинала $e^{-at}f(t)$	$F(p+\alpha)$
	$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
	$f''(t)$	$p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$
	$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
5	Интегрирование оригинала $\int_0^t f(\tau)d\tau$, если $f(\tau)$ -оригинал.	$\frac{F(p)}{p}$
6	Дифференцирование изображения $t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$
7	Интегрирование изображения $\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(z)dz$, если $\int_p^\infty F(z)dz$ сходится
8	Теорема запаздывания $f(t - \tau) (\tau > 0)$	$e^{-p\tau} F(p)$
9	Теорема умножения $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau)d\tau$	$F_1(p)F_2(p)$
10	Формула Дюамеля $f_1(t)f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau)f_2'(t - \tau)d\tau$	$pF_1(p)F_2(p)$
11	Изображение периодической функции $f(t)$, если $f(t + T) = f(t), T > 0$	$\frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

Историческая справка

Пьер Симон Лаплас (1749-1827) французский математик, физик, астроном. Лаплас – автор фундаментальных работ по математике и математической физике. Одна из его основных работ «Аналитическая теория вероятностей» содержит в себе некоторые вопросы теории игр, теорему Бернулли и ее связь с интегралом нормального распределения, теорию наименьших квадратов. В этой работе вводится «преобразование Лапласа», которое в дальнейшем станет основой операционного исчисления. Научное наследие Лапласа относится к области небесной механики, математики и математической физики, фундаментальными являются работы Лапласа по дифференциальным уравнениям, в частности по интегрированию методом «каскадов» уравнений с частными производными. В алгебре Лапласу принадлежит важная теорема о представлении определителей суммой произведений дополнительных миноров. Для разработки созданной им математической теории вероятностей Лаплас ввёл так называемые производящие функции и широко применял преобразование, носящее его имя (преобразование Лапласа).

Оливер Хевисайд (1850-1925) английский физик и математик. Хевисайд придумал так называемое символическое исчисление для расчёта электрических цепей. Оно не имело никакого математического обоснования, но обычно приводило к правильным результатам. Именно он разработал теорию линий электропередач, из которой самой известной частью являются телеграфные уравнения; предложил использовать для передачи радиоволн ионосферу. Хевисайд ввёл многие из терминов, использующихся самым активным образом в мире современной науки: например, именно ему принадлежат такие слова, как индуктивность, проводимость, импеданс. Для математики он: разработал теорию векторного анализа, придумал операционное исчисление, позволившее свести решение дифференциальных уравнений с помощью сравнительно несложных преобразований к обычным алгебраическим, применил свой собственный метод для расчёта электрических цепей.

Контрольные вопросы

1. Суть метода операционного исчисления.
2. Определение оригинала.
3. Определение изображения.
4. Основные теоремы операционного исчисления.
5. Отыскание оригинала методом разложения на простейшие дроби.
6. Формула Римана-Меллина отыскания оригинал по его изображению.
7. Решение линейных дифференциальных уравнений операционным методом.
8. Операторная схема основных элементов электрической цепи.
9. Законы Кирхгофа в операторной форме.
10. Закон Ома в операторной форме.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей. Учебник для вузов. Изд.4-е, переработанное. – М., «Энергия», 1975. – 752 с.
2. Высшая математика. Специальные главы: Пособие для студентов вузов / П.И. Чинаев, Н.А. Минин, А.Ю. Перевозников, А.А. Черенков. Под ред. П.И. Чинаева. – 2-е изд. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1981. – 368 с.
3. Плескунов М.А. Операционное исчисление: учебное пособие. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 143 с.
4. Никольский С.М. Курс математического анализа: Учебник для вузов. – 5-е изд., перераб. – М.: Физико-математическая литература, 2000. – 592 с.
5. Крайнов А.Ю., Рыжих Ю.Н. Операционное исчисление. Примеры и задачи: Учебно-методическое пособие. – Томск: Том. ун-т, 2007. – 104 с.
6. Краснов М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: учебное пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М.: Наука, 1981. – 304 с.
7. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие для вузов: в 2 т. – М.: Интеграл-Пресс, 2009. – Т. 2. – 544 с.

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ

*Методические указания
для самостоятельной работы обучающихся*

Составитель: Сидоров Станислав Михайлович

В авторской редакции

Изд. № 118/2022. Объем 2,25 п.л. Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 2,205.
РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»