

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
И УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Кафедра «Информационные системы»

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОЦЕССЫ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания
к лабораторным работам по дисциплине
для студентов дневной и заочной форм обучения направлений
09.03.02 – «Информационные системы и технологии»
и 09.03.03 – «Прикладная информатика»

Севастополь
СевГУ
2022

УДК 519.2 (076.5)
ББК 22.171 (22.172)
Т338

Рецензенты:

К.В. Кротов – канд. техн. наук, доцент кафедры «Информационные системы»
О.Р. Ластовенко – канд. к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая математика»

Ответственный за выпуск:

И. П. Шумейко - заведующий кафедрой информационных систем,
канд. физ.-мат. наук, доцент

Составители: И.П. Шумейко, Е.Н. Заикина, А.Ю. Абрамович, В.С. Лушина

Т338 Теория вероятностей, вероятностные процессы и математическая статистика : методические указания к лабораторным работам по дисциплине для студентов дневной и заочной форм обучения направлений 09.03.02 – «Информационные системы и технологии» и 09.03.03 – «Прикладная информатика» / Севастопольский государственный университет, Институт информационных технологий и управления в технических системах, кафедра «Информационные системы»; сост.: И.П. Шумейко, Е.Н. Заикина, А.Ю. Абрамович, В.С. Лушина. – Севастополь: СевГУ, 2022. – 68 с. – Текст: электронный.

Цель лабораторного практикума – обеспечение студентов дидактическим материалом для освоения практических навыков по решению прикладных задач в области теории вероятностей и математической статистики по следующим темам: анализ стохастической устойчивости, исследование сложных случайных событий, оценка числовых характеристик случайных величин, исследование инструментов представления и статистического анализа информации.

УДК 519.2 (076.5)
ББК 22.171 (22.172)

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры информационных систем, протокол № 11 от 14 июня 2022 г.

Методическое пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании Учёного Совета Института информационных технологий и управления в технических системах, протокол № 8 от 16 июня 2022 г.

Изд. № 155/2022. Объем 4,25 п.л. Усл. печ. л. 3,95. Уч.-изд. л. 4,17.

РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

© И.П. Шумейко, Е.Н. Заикина,
А.Ю. Абрамович, В.С. Лушина, сост., 2022
© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВОДНОЕ ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ «ОСВОЕНИЕ ИНТЕРФЕЙСА MATLAB»	5
1 Цель работы	5
2 Краткие теоретические сведения.....	5
3 Порядок выполнения работы	28
4 Содержание отчета	29
5 Контрольные вопросы	29
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1. АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ	31
1.1 Цель работы	31
1.2 Теоретический раздел	31
1.3 Ход работы.....	32
1.4 Содержание отчёта.....	34
1.5 Контрольные вопросы	34
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2. ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ.....	35
2.1 Цель работы	35
2.2 Теоретический раздел	35
2.3 Хода работы	41
2.4 Содержание отчёта.....	43
2.5 Контрольные вопросы	44
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3. ОЦЕНКА ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	45
3.1 Цель работы	45
3.2 Теоретический раздел	45
3.3 Ход работы.....	50
3.4 Содержание отчёта.....	51
3.5 Контрольные вопросы	52

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ИНСТРУМЕНТОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ИНФОРМАЦИИ	54
4.1 Цель работы	54
4.2 Пример решения.....	54
4.3 Ход работы.....	62
4.4 Содержание отчёта.....	64
4.5 Контрольные вопросы	64
ОСНОВНАЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	65
ПРИЛОЖЕНИЕ А Варианты заданий карт Карно	66
ПРИЛОЖЕНИЕ Б Критические точки распределения Стьюдента.....	68

ВВОДНОЕ ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ

«ОСВОЕНИЕ ИНТЕРФЕЙСА MATLAB»

1 Цель работы

Получение общего представления о математическом пакете Matlab –особенностей интерфейса, функциональных основных возможностей, формирования навыков практической работы в среде Matlab, математических вычислений, моделирования, разработки приложений и анализа данных.

2 Краткие теоретические сведения

2.1 Что такое Matlab?

Matlab – это высокопроизводительный язык для технических расчетов, выполняемых на ЭВМ. Он включает в себя вычисления, визуализацию и программирование в удобной среде, где задачи и решения выражаются в форме, близкой к математической.

Система Matlab (сокращение от MATrix LABoratory – МАТричная ЛАБоратория) разработана фирмой The MathWorks, Inc, США, г. Нейтик, шт. Массачусетс). Она распространяется более 10 лет и постоянно совершенствуется. Современные версии Matlab допускают возможность обращения к программам, написанным на языках С и С++.

Наиболее часто Matlab используется для:

- математических вычислений;
- создания алгоритмов;
- моделирования;
- анализа данных, исследования и визуализация;
- научной и инженерной графики.

Система Matlab состоит из пяти основных частей:

1) *язык Matlab*. Это язык матриц и массивов высокого уровня с управлением потоками, функциями, структурами данных, вводом-выводом, обладающий особенностями объектно-ориентированного программирования. Это позволяет программировать как в "небольшом" масштабе для быстрого создания черновых программ, так и в "большом" для создания больших и сложных приложений;

2) *среда Matlab*. Это набор инструментов и приспособлений, с которыми работает пользователь или программист Matlab. Она включает в себя средства для управления переменными в рабочем пространстве Matlab, вводом и выводом данных, а также создания, контроля и отладки м-файлов и приложений Matlab;

3) *управляемая графика*. Это – графическая система Matlab, которая включает в себя команды высокого уровня для визуализации двух- и трехмерных данных, обработки изображений, анимации и иллюстрированной графики. В нее входят также команды низкого уровня, позволяющие полностью редактировать внешний вид графики, так же, как при создании Графического Пользовательского Интерфейса (GUI) для Matlab-приложений;

4) *библиотека математических функций*. Это обширная коллекция эффективных вычислительных алгоритмов, начиная от элементарных функций (сумма, тригонометрические функции, комплексная арифметика) и кончая сложными (обращение матриц, нахождение собственных значений и собственных векторов, функции Бесселя, преобразование Фурье и т.д.);

5) *программный интерфейс*. Это библиотека, которая позволяет писать программы на C и FORTRAN, которые взаимодействуют с Matlab. Она включает средства для вызова программ из Matlab (динамическая связь), вызывая Matlab как вычислительный инструмент и для чтения-записи MAT-файлов;

В системе по умолчанию реализована комплексная арифметика, вычисления производятся с двойной точностью, базовый элемент – массив.

2.2 Интерфейс Matlab

При запуске системы открывается рабочий стол (desktop) системы (рисунок 1).

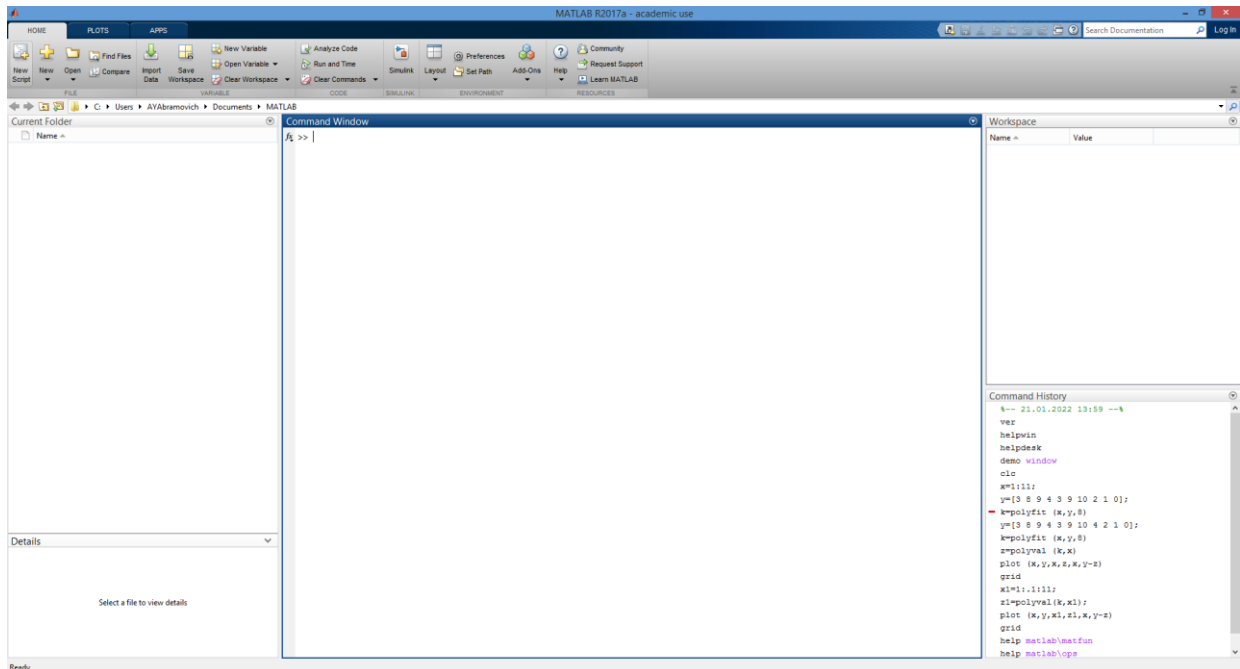


Рисунок 1 – Рабочий стол системы

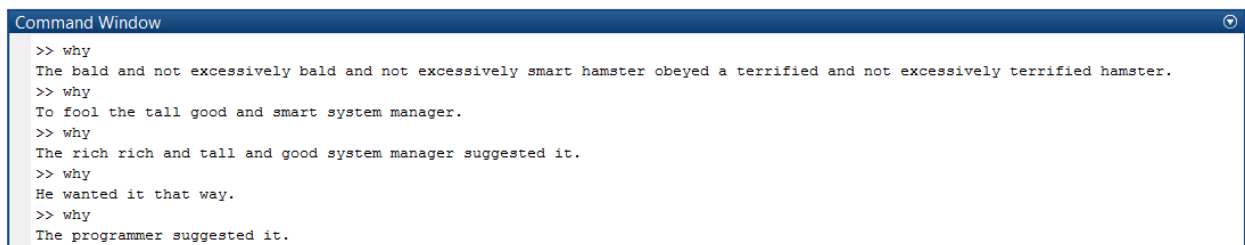
Интерфейс рабочего стола содержит:

- меню, расположенное в верхней части окна – содержит вкладки HOME, PLOTS, APPS;
- *адресную строку* – указатель рабочего каталога, позволяющую выбрать рабочую директорию;
- окно в центре – *Command Window*, которое предназначено для ввода чисел, переменных, выражений и команд, для просмотра результатов вычислений, для отображения текстов выполняемых программ, а также для вывода сообщений об ошибках;
- окно слева – *Current Folder* в котором отображаются файлы текущего каталога и определенные данные описания их свойств;
- окно справа – *Workspace*, представляющие все глобальные переменные, использованные в командах или при выполнении программ;
- окно справа внизу – *Command History*, в котором все команды, выполненные в командной строке.

При интерактивной работе в командном окне все команды и их последовательности помещаются в строку ввода, она начинается символом `>>`. Исполняются

команды после нажатия клавиши *Enter*. А отделяются команды друг от друга *запятой или точкой запятой*. Если использовать разделитель точку с запятой, то результат выполнения команды не отображается.

На рисунке 2, представлены результаты исполнения команды `why` в командном окне.



```

Command Window
>> why
The bald and not excessively bald and not excessively smart hamster obeyed a terrified and not excessively terrified hamster.
>> why
To fool the tall good and smart system manager.
>> why
The rich rich and tall and good system manager suggested it.
>> why
He wanted it that way.
>> why
The programmer suggested it.

```

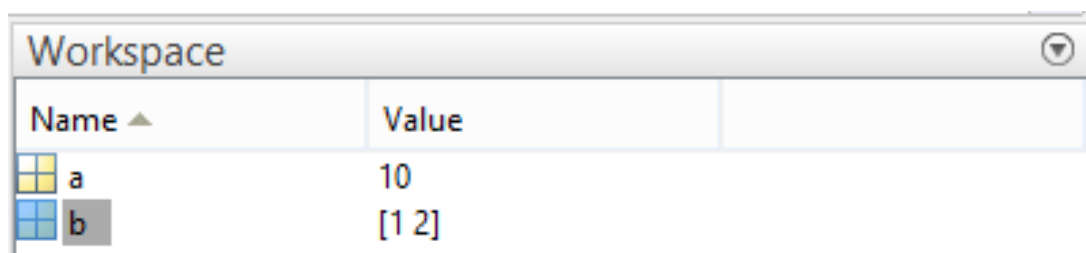
Рисунок 2 – Пример выполнения программы

Выполненные команды помещаются в стек и могут быть извлечены в строку ввода перебором исполненных команд с помощью стрелок $\uparrow\downarrow$ и при необходимости редактируются при повторном исполнении. Строка вывода не доступна для редактирования.

Для очистки рабочего окна используется команда `clc`.

Все переменные среды – *глобальные*. Это может стать причиной ошибок, если какие-то переменные уже ранее были определены и их используют повторно. Поэтому необходимо *внимательно контролировать процесс идентификации и использования переменных*.

Workspace – рабочее пространство; окно, содержащее информацию обо всех переменных, типе, значениях (рисунок 3).



Name	Value
a	10
b	[1 2]

Рисунок 3 – Окно Workspace

Щелчком по пиктограмме переменной активируется редактор переменных (VE), позволяющий изменять их значения в интерактивном режиме. Этот прием работы отображен на рисунке 4.

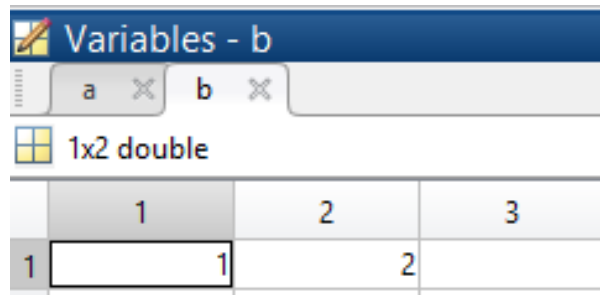


Рисунок 4 – Окно редактора переменных

Для очистки рабочего пространства используется команда `clear`. Для очистки конкретной переменной необходимо указать ее имя `clear <имя переменной>`.

2.3 Справочная система Matlab

Существуют следующие способы получить информацию о функциях системы Matlab в процессе сеанса работы:

- команда `help`;
- команда `doc`;
- меню `Help`;
- обращение к Web-серверу фирмы The MathWorks.

Для обращения к справочной системе необходимо в командном окне набрать одну из команд: `help` (выводит на экран список каталогов, как показано на рисунке 5) или же `doc` (открывает окно документации (рисунок 6)).

Чтобы отобразить справку для функции, метода, класса, тулбокса или переменной, необходимо задать имя функции (метода, класса и т.д.) периодом. Например, на рисунке 7 отображена справка для функции `plot`.

```

Command Window

>> help
HELP topics:

matlab\datafun          - Data analysis and Fourier transforms.
matlab\datatypes        - Data types and structures.
matlab\elfun            - Elementary math functions.
matlab\elmat            - Elementary matrices and matrix manipulation.
matlab\funfun           - Function functions and ODE solvers.
matlab\general          - General purpose commands.
matlab\iofun            - File input and output.
matlab\lang             - Programming language constructs.
matlab\matfun           - Matrix functions - numerical linear algebra.
matlab\ops              - Operators and special characters.
matlab\polyfun          - Interpolation and polynomials.
matlab\randfun          - Random matrices and random streams.
matlab\sparfun          - Sparse matrices.
matlab\specfun          - Specialized math functions.
matlab\strfun           - Character arrays and strings.
matlab\timefun          - Time and dates.
matlab\validators       - (No table of contents file)
matlab\demos            - Examples.
matlab\graph2d          - Two dimensional graphs.
matlab\graph3d          - Three dimensional graphs.

```

Рисунок 5 – Выполнение команды help

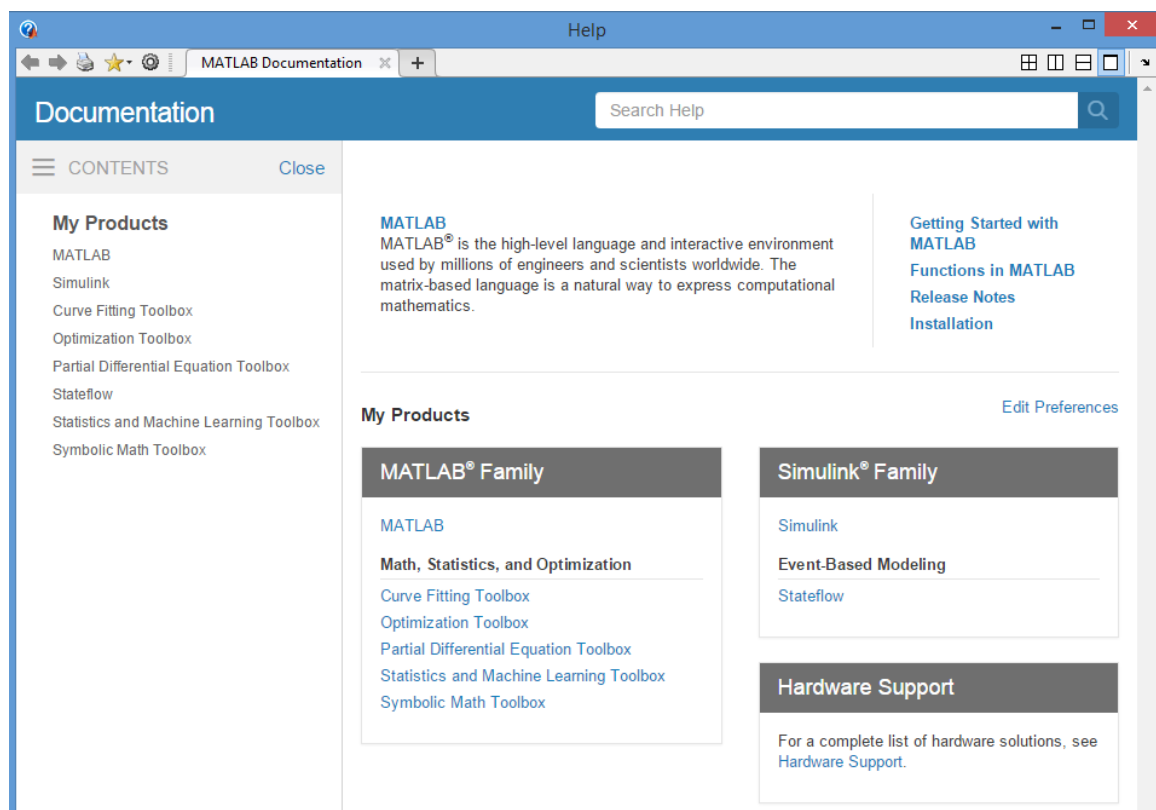


Рисунок 6 – Окно документации

```

Command Window
>> help plot
plot    Linear plot.
plot(X,Y) plots vector Y versus vector X. If X or Y is a matrix,
then the vector is plotted versus the rows or columns of the matrix,
whichever line up. If X is a scalar and Y is a vector, disconnected
line objects are created and plotted as discrete points vertically at
X.

plot(Y) plots the columns of Y versus their index.
If Y is complex, plot(Y) is equivalent to plot(real(Y),imag(Y)).
In all other uses of plot, the imaginary part is ignored.

Various line types, plot symbols and colors may be obtained with
plot(X,Y,S) where S is a character string made from one element
from any or all the following 3 columns:

      b    blue      .    point      -    solid
      g    green     o    circle     :    dotted
      r    red       x    x-mark     -.   dashdot
      c    cyan      +    plus       --   dashed
      m    magenta   *    star       (none) no line
      y    yellow    s    square
      k    black     d    diamond
      w    white     v    triangle (down)
                        ^    triangle (up)
                        <    triangle (left)
                        >    triangle (right)
                        p    pentagram
                        h    hexagram

```

Рисунок 7 – Справочная информация

Аналогично вызывается справка для отдельной функции (метода, класса и т.д.) с использованием команды `doc` (`doc plot`, `doc sum` и пр.).

Как и во многих других приложениях, примеры справки доступны для копирования с последующим выполнением в рабочей среде.

2.4 Переменные и операторы Matlab

Переменная в Matlab – это массив (матрица), вектор или скаляр. Matlab не требует какого-либо описания типа переменной или размерности массива.

Имена переменных, констант и функций могут быть составлены из *любых символов латинского алфавита, кроме специальных и цифр, начинаются с буквы.*

Системные константы:

- $\pi = 3.14159265358979$;
- i = мнимая единица, то же j ;
- Inf = бесконечность, результат деления на 0;
- NaN = неопределенное значение (Not a Number), $0/0$, inf-inf ;

– $\text{eps} = 2^{-52}$ или $2.2204\text{e-}016$ – характеризует точность вычислений с плавающей точкой.

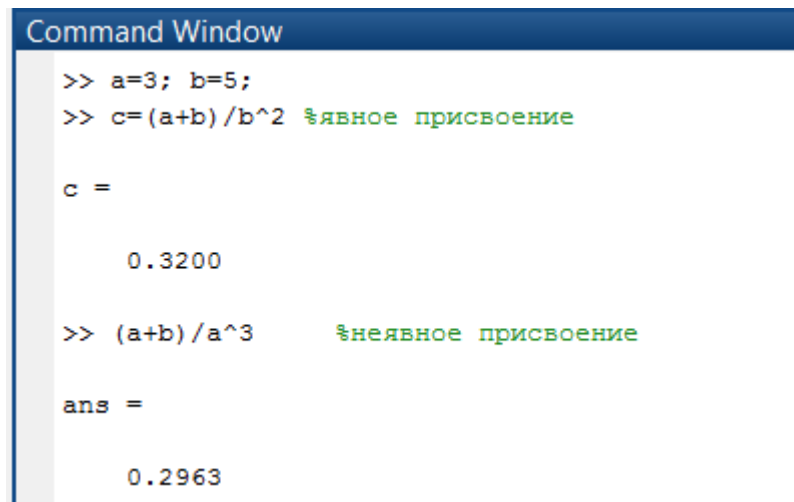
Язык Matlab это язык операторов. Операторы задаются по одному в командной строке для исполнения в интерактивном режиме или в виде списка в m-файле или в script-файле. Важно, что признаком начала командной строки является указатель `>>`, выводимый системой автоматически, при готовности к приему команды. *В тексте программ этот символ не нужен!*

Две формы записи операторов:

- с явным присвоением: *переменная = выражение*;
- с неявным присвоением: *выражение*.

При записи оператора с неявным присвоением, результат вычислений присваивается автоматически внутренней переменной `ans` (`answer`), может быть вызван и использован по этому имени и сохраняется до выполнения следующего оператора с неявным присвоением.

Примеры записи с явным и неявным присвоением отображены на рисунке 8.



```

Command Window
>> a=3; b=5;
>> c=(a+b)/b^2 %явное присвоение

c =

    0.3200

>> (a+b)/a^3 %неявное присвоение

ans =

    0.2963
  
```

Рисунок 8 – Запись операторов

Все встроенные элементарные функции должны записываться в программах малыми буквами!

2.5 Векторы и матрицы

Ввод векторов и матриц.

Основными объектами, с которыми начинает работать пользователь, знакомящийся с Matlab, являются матрицы. Если проверить с помощью команды `size` размер числа 5, или символа 'A', то в результате получится два числа – количество строк и количество столбцов, в данном случае – это две единицы.

Для ввода векторов и матриц используются квадратные скобки []. Для разделения данных в векторах и матрицах в строке служат пробел и запятая, и точка с запятой – в столбце.

Пример 1– Задание векторов

```
>> % Вектор-строка
>> a1=[1 2 3]

a1 =
     1     2     3
>> % Вектор-столбец
>> a3=[1;2;3]

a3 =
     1
     2
     3
```

Пример 2 – Задание матриц

```
>> % Матрица, размера 2x3
>> b1=[1 2 3; 4 5 6]

b1 =
     1     2     3
     4     5     6

>> % Матрица, размера 3x2
>> b2=[1 2; 3 4; 5 6]

b2 =
     1     2
     3     4
     5     6
```

Значения вектора можно задать с помощью следующей конструкции: [начальное значение : шаг : конечное значение] или [начальное значение : : конечное значение] тогда шаг по умолчанию равен единице. Квадратные скобки в этом выражении можно опустить.

Пример 3 – Задание вектора и вычисление вектора

```
>> % Вектор x
>> x=0:0.75:6

x =
    0    0.7500    1.5000    2.2500    3.0000    3.7500    4.5000
5.2500    6.0000

>> % Вычисление вектора y
>> y=cos(x)

y =
    1.0000    0.7317    0.0707   -0.6282   -0.9900   -0.8206   -
0.2108    0.5121    0.9602
```

Помимо этого, значения вектора можно задать функцией:

```
x = linspace(начальное значение, конечное значение),
```

(можно пользоваться при создании линейного массива). При этом вектор x по умолчанию будет содержать сто компонент. Возможен и другой способ вызова функции `linspace` – с тремя входными параметрами, последним из которых является количество компонент вектора.

В таблице 1 приведены функции, позволяющие создать некоторые специальные и часто используемые матрицы.

Таблица 1 – Функции создания специальных матриц

Функция	Описание
<code>ones(n)</code> <code>ones(n,m)</code>	Создание матрицы n -го порядка (или же размера $n \times m$) заполненной единицами
<code>zeros(n)</code> <code>zeros(n,m)</code>	Создание матрицы n -го порядка (или же размера $n \times m$) заполненной нулями. Обычно команду <code>zeros</code> используют для инициализации матриц

Продолжение таблицы 1

Функция	Описание
<code>eye (n)</code> <code>eye (n, m)</code>	Создание матрицы n-го порядка (или же размера n x m) с единицами на главной диагонали и нулях на остальных позициях
<code>magic (n)</code>	Формирует матрицу Альбрехта Дюрера (магический квадрат) – матрица знаменита тем, что суммы элементов в строках, столбцах и диагоналях одинаковы.

Создание матриц, заполненных случайными числами.

Существует несколько функций, позволяющих заполнять матрицы случайными числами:

1) функция `rand(n)` формирует массив размера n x n, элементами которого являются случайные величины, распределенные по равномерному закону в интервале (0, 1);

2) функция `randi([imin, imax], n)` формирует массив n-го порядка с элементами в диапазоне от `imin` до `imax`.

Пример 4 – Использование функции `rand`

```
>> % Матрица 3-го порядка,
>> % заполненная вещественными случайными числами
>> % с равномерным распределением из открытого интервала (0,1)
>> A=rand(3)

A =
    0.8147    0.9134    0.2785
    0.9058    0.6324    0.5469
    0.1270    0.0975    0.9575
>> % Матрица 2x3,
>> A=rand([2 3])

A =
    0.9649    0.9706    0.4854
    0.1576    0.9572    0.8003
```

Пример 5 – Использование функции `randi`

```
>>% Матрица 7-го порядка с элементами в диапазоне от -15 до 3
>> A=randi([-15 3],7)

A =
```

-13	1	-12	-2	0	-10	-9
-7	2	-2	-9	-12	-3	-4
2	-3	-15	3	-6	-3	-11
0	-1	-10	-15	-7	-12	-1
3	-1	-15	-7	-3	-13	-11
-3	-8	-14	-8	-2	-6	-6
-15	-3	0	-1	-1	3	-2

```
>> % Матрица 2x4 с элементами в диапазоне от -3 до 3
```

```
>> B=randi([-3 3],2,4)
```

```
B =
```

-1	2	0	1
-2	-1	-2	-2

Обращение к элементам матрицы.

Для обращения к элементам матрицы используют круглые скобки (). Первый индекс – номер строки, второй – номер столбца. Возможно задавать диапазон строк-столбцов, используя для этого двоеточие :.

Пример 6 – Задание матрицы и обращение к ее элементам

```
>> % Задание матрицы
```

```
>> A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
```

```
A =
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9

```
>> % Изменение 1-го элемента матрицы
```

```
>> A(1,1)=100
```

```
A =
```

100	2	3
4	5	6
7	8	9

```
>> % Изменение 3-й строки матрицы
```

```
>> A(3,:)=50
```

```
A =
```

100	2	3
4	5	6
50	50	50

```
>> % Изменение 2-го столбца матрицы
>> A(:,2)=33
```

```
A =
```

```
100    33    3
   4    33    6
  50    33   50
```

В примере, представленном выше, знак двоеточие обозначает, что в рассмотрение берутся все элементы.

Пример 7 – Изменение фрагмента матрицы

```
>> % Очистка переменной A
>> clear A
>> % Задание квадратной матрицы 3-го порядка из единиц
>> A=ones(3)
```

```
A =
```

```
1    1    1
1    1    1
1    1    1
```

```
>> % Изменение фрагмента матрицы
>> A(1:2,1:2)=55
```

```
A =
```

```
55    55    1
55    55    1
1     1     1
```

В примере 7 значения элементов строк и столбцов с 1 по 2 заменяются на 55.

Удаление элементов матрицы.

Удалить из матрицы можно строку или столбец целиком. Для удаления строки или столбца необходимо присвоить удаляемому элементу пустой массив, используя для этого пустые квадратные скобки [].

Матричные операции.

В Matlab определены матричные операции *по правилам линейной алгебры*: при сложении и вычитании должны совпадать размерности, при умножении и делении число столбцов первого матричного сомножителя и число строк второго должны совпадать.

В таблице 2 приведены часто применяемые матричные функции.

Таблица 2 – Матричные функции

Функция	Описание
sum (A) sum (A, 2)	Сумма всех элементов вектора A. Если A – матрица, то суммирование элементов произойдет по столбцам. Для суммирования по строкам, необходимо указать второй параметр в функции sum, а именно 2
sum (sum (A))	Сумма всех элементов матрицы
prod(A) prod(A, 2) prod(prod(A))	Произведение элементов вектора (матрицы). Аналогично функции sum
diag (A)	Позволяет выделить диагонали матрицы A
size (A)	Возвращающая количество строк и количество столбцов матрицы A
numel (A)	Возвращает общее количество элементов матрицы A
fliplr (A)	Отражение матрицы A
rot90 (A)	Поворот матрицы A

При проведении операций с матрицами нужно помнить приоритет операций: сначала выполняется операция транспонирования, затем возведения в степень, потом умножение и деление, а в последнюю очередь – сложение.

2.6 Графика в Matlab

Система Matlab предоставляет огромное количество графических средств. К ним относятся команды построения простых графиков функций, комбинированные и презентационные графики, элементы анимации и средства проектирования графического пользовательского интерфейса.

Построение графиков функций.

Элементарные графические функции системы Matlab позволяют построить и вывести следующие типы графиков: линейный, логарифмический, полулогарифмический, полярный.

Для каждого графика можно задать заголовок, нанести обозначение осей и масштабную сетку.

Двумерные графики:

- `plot` – график в линейном масштабе;
- `loglog` – график в логарифмическом масштабе;
- `semilogx`, `semilogy` – график в полулогарифмическом масштабе;
- `polar` – график в полярных координатах.

Для построения графика функции $y(x)$ в простейшем случае используют команду `plot`.

Пример 8 – Построение графика с использованием функции `plot`

```
>> % задание вектора x
>> x = [0:0.005:5];
>> % расчет значений функции
>> y = exp(-x).*sin(10*x);
>> plot (y)
```

После выполнения скрипта из примера 8 на экране возникнет графическое окно (рисунок 9).

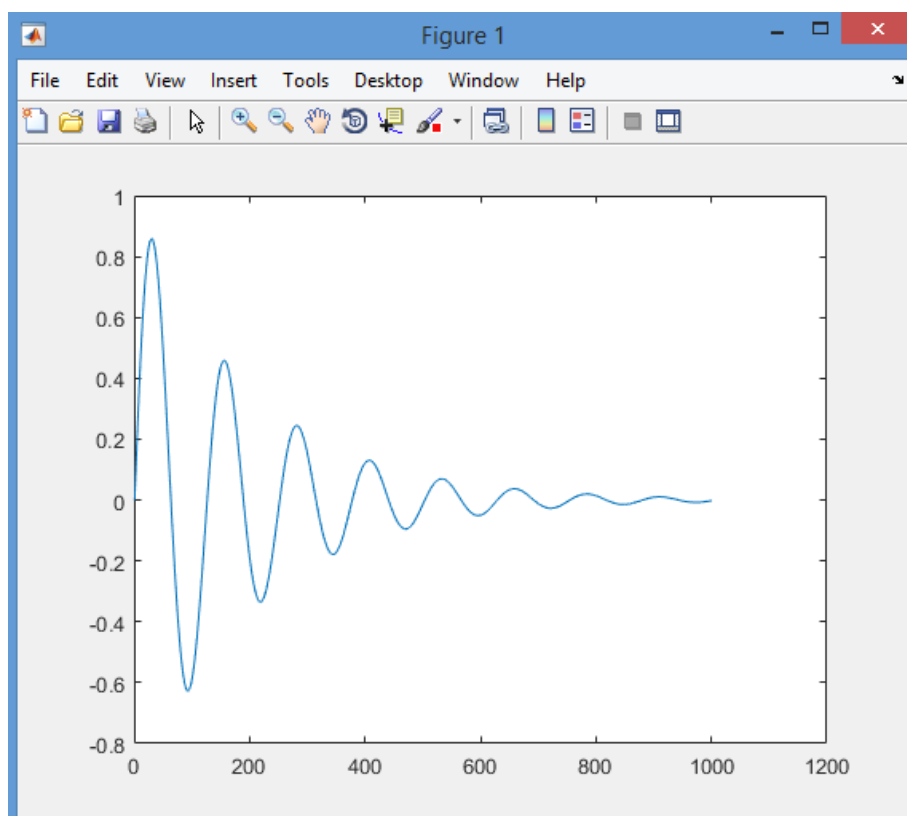


Рисунок 9 – Графическое окно

Выполняя команды меню этого графического окна `File→Save as`, `File→Export Setup`, можно сохранить построенный график в файл Matlab с расширением `fig`, либо экспортировать в графические форматы – `png`, `eps`, `gif`.

Команда `plot(y)` строит график элементов одномерного массива `y` в зависимости от номера элемента.

Команда `plot(x, y)` соответствует построению обычной функции, когда одномерный массив `x` соответствует значениям аргумента, а одномерный массив `y` – значениям функции. График функции из примера 8 представлен на рисунке 10.

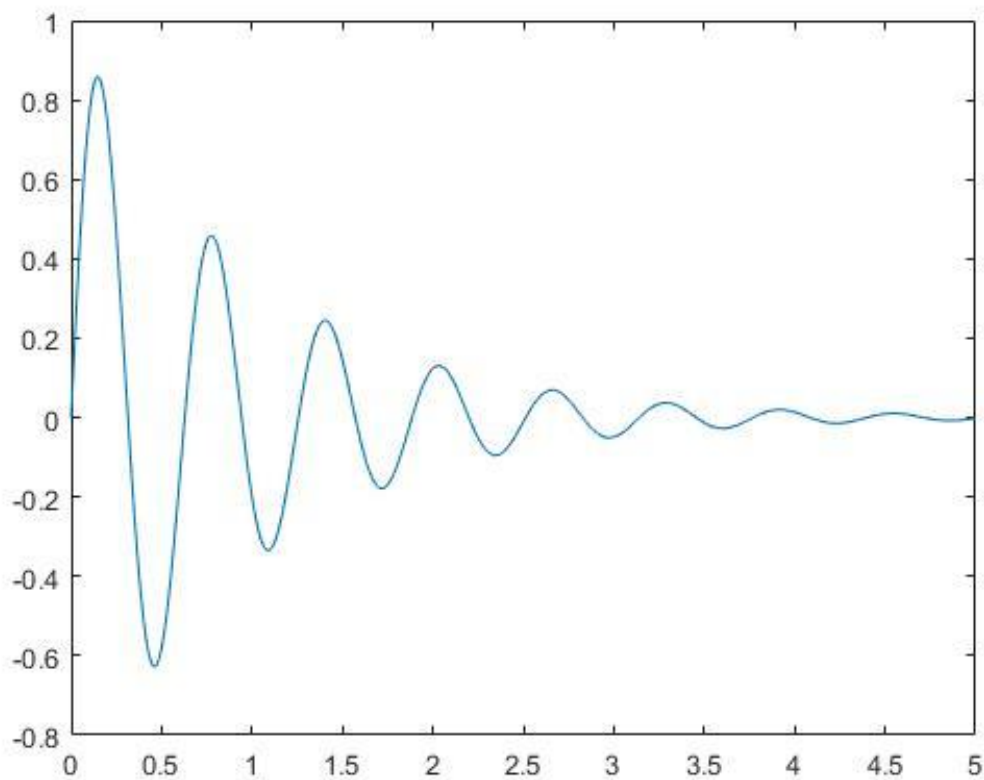


Рисунок 10 – График функции

Несколько графиков в одном графическом окне.

Для того, чтобы построить еще один график в этом же графическом окне, то можно действовать двумя путями – воспользоваться командой `hold on`, либо добавить еще два аргумента в команду `plot`.

Пример 9 – Два графика функции в одних осях с помощью `hold on` и `plot`

```

>> x = [0:0.5:5];
>> y1 = exp(-x).*sin(10*x);
>> y2 = exp(-x).*cos(10*x);
>> % построение первого графика функции
>> plot(x, y1)
>> % продолжать построение в этом же окне
>> hold on
>> % построение второго графика функции
>> plot(x, y2)
>> % построение сразу двух графиков функций
>> plot(x, y1, x, y2)

```

В обоих случаях результат будет одинаковым (рисунок 11).

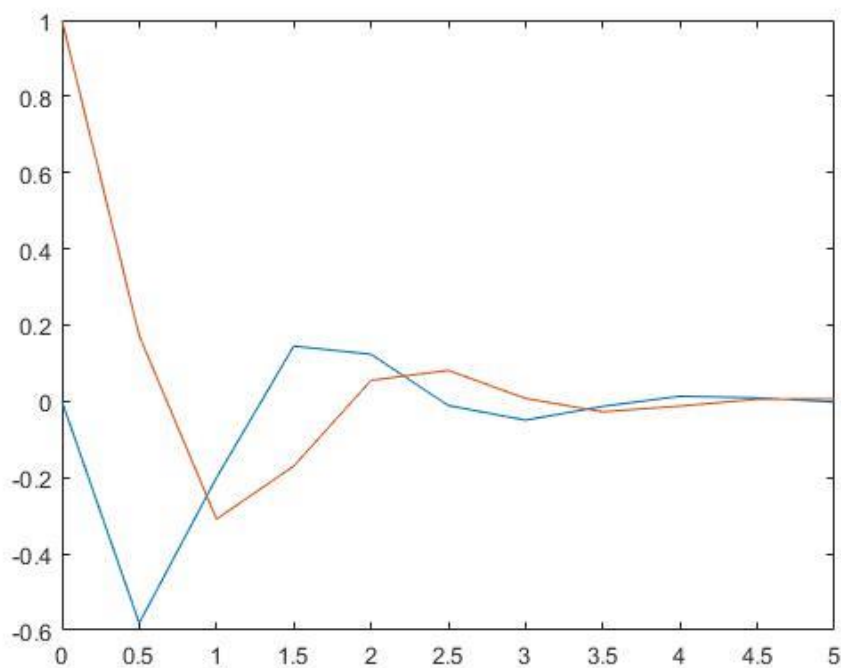


Рисунок 11 – Два графика в одних осях

С помощью функции `delete` производят удаление графика.

Установка параметров графиков.

Команда `plot(x, y, s)` позволяет выделить график функции, указав способ отображения линии, способ отображения точек, цвет линий и точек с помощью строковой переменной `s`.

Некоторые обозначения для типа линий, цветов и маркеров приведены в таблице 3. Больше информации приведено в библиотеке команды `plot`.

Таблица 3 – Обозначение типа линий, цветов и маркеров

Цвет	
Y	Желтый
M	Розовый
C	Голубой
R	Красный
Линия	
-	Сплошная
:	Пунктирная
-.	Штрих-пунктирная
--	Штриховая
Маркер	
.	Точка
x	Крестик
s	Квадрат
d	Ромб
*	Звездочка

Пример 10 – Задание цвета и типа линии для графика

```
>> x = [0:0.5:5];
>> y1 = exp(-x).*sin(10*x);
>> y2 = exp(-x).*cos(10*x);
>> plot(x, y1, 'm--*')
>> plot(x, y2, 'r-.d')
```

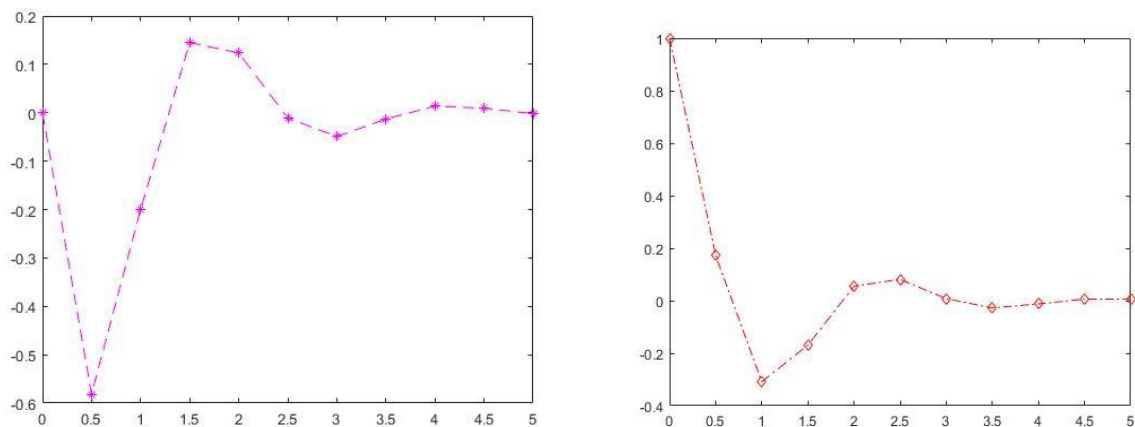


Рисунок 12 – Результат построения графиков: задании типа цвета, линий и маркеров

Поименование осей осуществляется посредством функций `xlabel` и `ylabel`. Важно то, что дополнительные параметры для графических осей устанавливаются, когда оси уже созданы, то есть после команды `plot`.

Команда `grid on` отображает главные линии сетки для текущей системы координат.

Заголовок для графического окна задается с помощью функции `title`, ее параметром является текстовая строка. Если заголовок используется не так часто, то использование легенды – `legend` всегда целесообразно, когда в одних осях отображается более одного графика. Для каждого из графиков в качестве параметров функции `legend` используют текстовую строку, описывающую соответствующий график.

Пример 11 – Использование легенды и подписи осей

```
>> x = [0:0.5:5];
>> y1 = exp(-x).*sin(10*x);
>> y2 = exp(-x).*cos(10*x);
>> % построение графиков двух функций
>> plot(x, y1, 'k-', x, y2, 'k:')
>> % создание легенды
>> legend('y1=exp(-x)*sin(10*x)', 'y2=sin(10*x)')
>> % создание подписей к осям
>> xlabel('x')
>> ylabel('y')
>> % отображение линий сетки
>> grid on
```

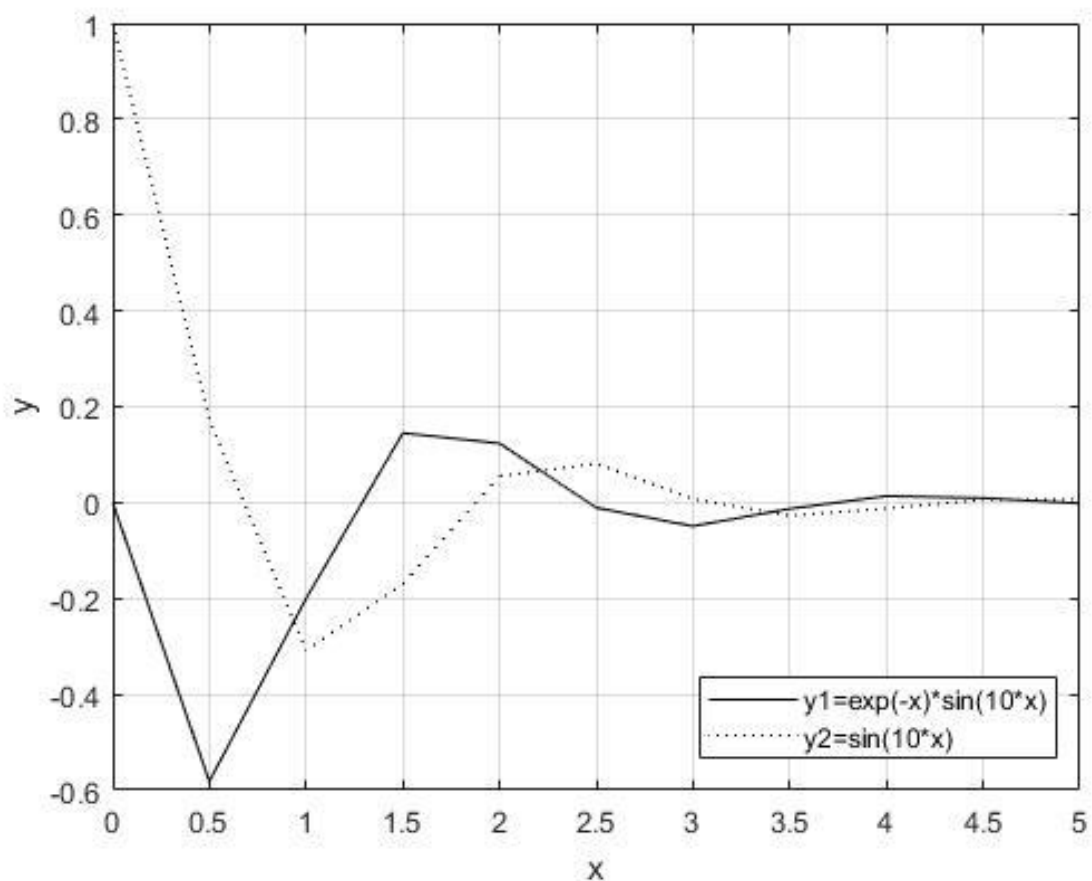


Рисунок 13 – Результат построения графика

Положение легенды можно менять уже после построения графика с помощью перетаскивания.

Создание нескольких графических окон.

Для визуализации графиков функций в одном окне `figure` размещается несколько графических окон. Структура таких окон и выбор активного окна осуществляются процедурой `subplot(m, n, p)`, где **m**, **n**, **p** – 3 цифры, производит разбивку графического окна на несколько подокон, создавая при этом новые объекты; значение **m** указывает, на сколько частей разбивается окно по горизонтали, **n** – по вертикали, а **p** – номер подокна, куда будет выводиться очередной график. Эти же команды могут использоваться для перехода от одного подокна к другому.

Пример 12 – Использование легенды и подписи осей

```
>> % Задание вектора-параметра t
>> t=0:0.001:8*pi;
>> % Данные и вектора для 1-го окна subplot
>> k=5;
>> x11=(k-1)*(cos(t)+cos((k-1)*t)/(k-1));
>> y11=(k-1)*(sin(t)-sin((k-1)*t)/(k-1));
>> % Данные и вектора для 2-го окна subplot
>> k=5.5;
>> x21=(k-1)*(cos(t)+cos((k-1)*t)/(k-1));
>> y21=(k-1)*(sin(t)-sin((k-1)*t)/(k-1));
>> % Данные и вектора для 3-го окна subplot
>> k=6;
>> x31=(k-1)*(cos(t)+cos((k-1)*t)/(k-1));
>> y31=(k-1)*(sin(t)-sin((k-1)*t)/(k-1));
>> % Данные и вектора для 4-го окна subplot
>> k=3.6;
>> x41=(k-1)*(cos(t)+cos((k-1)*t)/(k-1));
>> y41=(k-1)*(sin(t)-sin((k-1)*t)/(k-1));
>> % Построение графиков в 1-м окне subplot
>> subplot(2,2,1)
>> plot(x11,y11)
>> legend('k=5')
>> % Построение графиков во 2-м окне subplot
>> subplot(2,2,2)
>> plot(x21,y21)
>> legend('k=5.5')
>> % Построение графиков в 3-м окне subplot
>> subplot(2,2,3)
>> plot(x31,y31)
>> legend('k=6')
```

```
>> % Построение графиков в 4-м окне subplot
>> subplot(2,2,4)
>> plot(x41,y41)
>> legend('k=3.6')
```

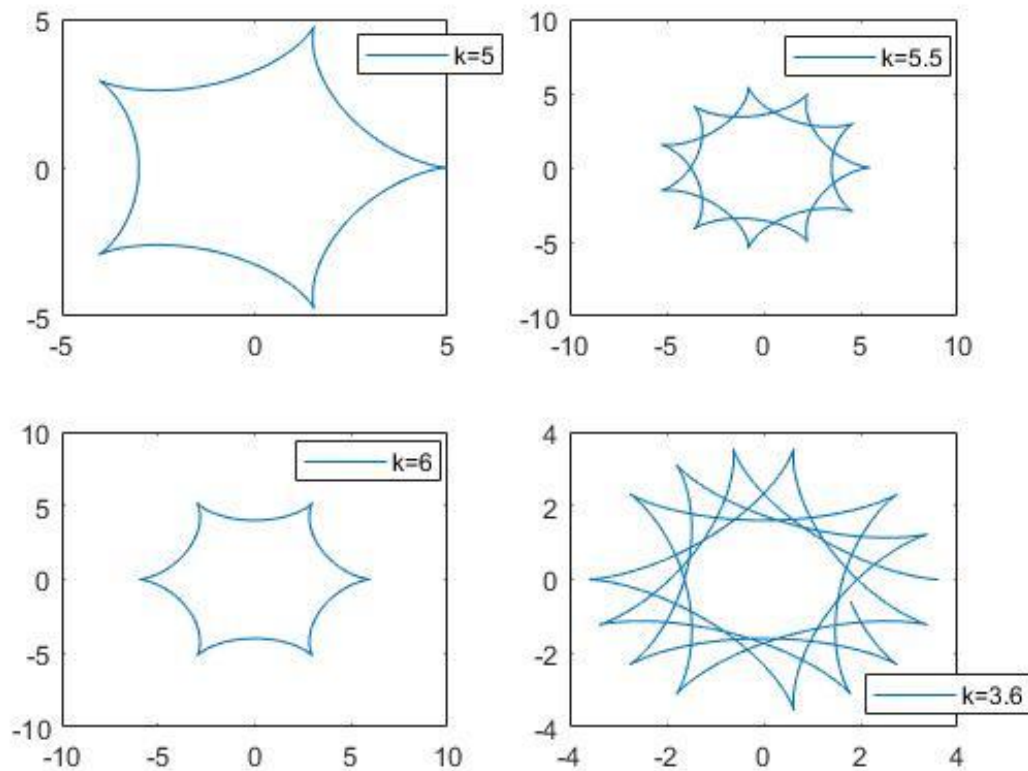


Рисунок 14 – Результат использования процедуры subplot

Для того, чтобы вернуть графическое окно в обычное состояние необходимо использовать процедуру `subplot(1, 1, 1)`, которая удаляет все подокна.

2.7 Создание функций в Matlab

В Matlab для эффективного программирования используются процедуры и функции. Каждая функция записывается в отдельном файле с расширением *.m (m-файл) и ее имя должно совпадать с именем этого файла.

Для создания m-файла необходимо из меню File командного окна выбрать New Script или же New → Script. После чего появляется окно редактора, как показано на рисунке 15.

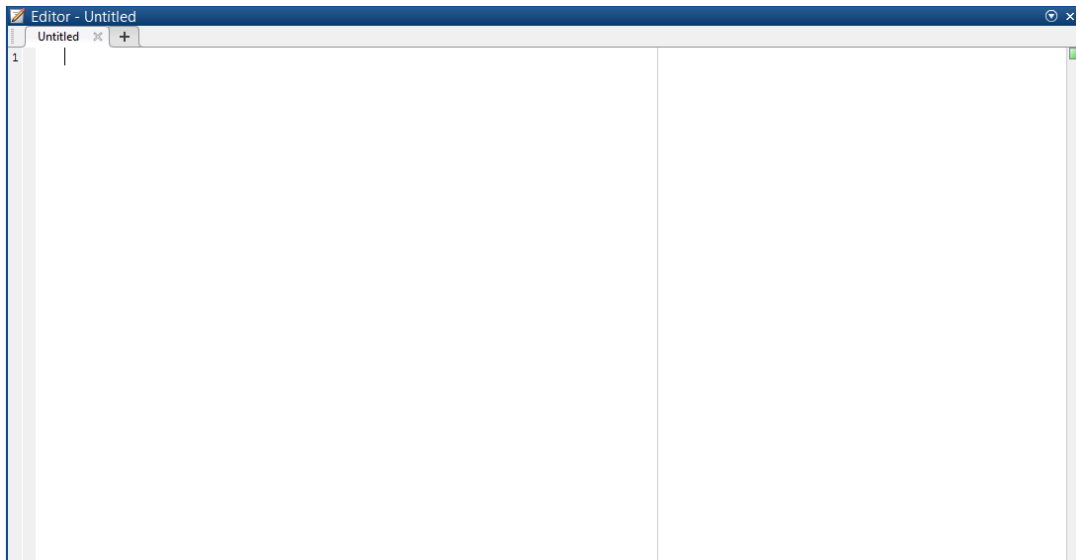


Рисунок 15 – Окно редактора

Для создания функций и процедур используется одинаковый заголовок, но в процедуре может быть один или несколько выходных параметров:

```
function [out1,out2] = myproc(in1,in2,in3),
```

а в функции только один, который вычисляется в последнем исполняемом операторе процедуры:

```
function resfunc = myfun(in1,in2,in3)
resfunc=sin(in1)*in2^in3 % некоторое выражение
```

Во избежание вывода на экран нежелательных промежуточных результатов, необходимо в теле функции все операторы завершать символом «;».

Пример 13 – Создание и вызов процедуры

```
function [x1,x2] = myfun(a,b,c)
%описание процедуры проводится в новом окне редактора
x1 = sin(a);
x2 = (c - b) / (2*a);
>> %вызов процедуры производится в командном окне
>> [r1,r2]=myfun(1,2,3)
r1 =
    0.8415

r2 =
    0.5000
```

Важно! Перед тем как вызывать функцию, необходимо сохранить m-файл (один из способов – используя комбинацию клавиш Ctrl+S). *Имя функции и имя файла должны совпадать!*

Пример 14 – Построение графика функции

```
function y = fun(x)
% Вычисление двух функций
% y(1) = 200 sin(x)/x, y(2) = x^2.
y(:,1) = 200*sin(x)./ x;
y(:,2) = x.^2;
>> %вызов функции
>> fun(0.5)
```

ans =

191.7702 0.2500

```
>> fplot(@fun, [-20 20])
```

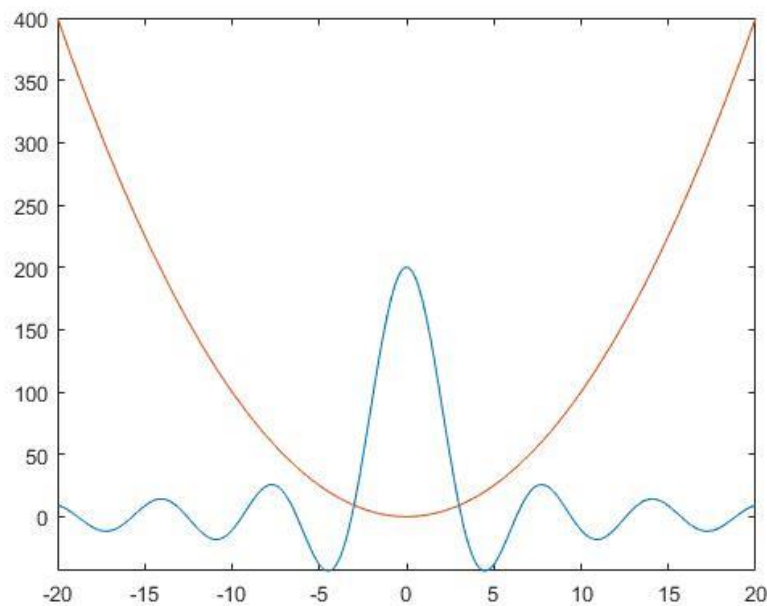


Рисунок 16 – Результат построения

Использованная в примере функция `fplot`, которая позволяет строить функцию, заданную в символьном виде, в интервале изменения аргумента x от **xmin** до **xmax** без фиксированного шага изменения x . Одним из входных параметров `fplot` является функция, перед которой необходимо указывать указатель «@».

В написании функций могут использоваться операторы управления вычислительным процессом: операторы условного перехода и операторы организации циклических процессов.

Все операторы цикла и условного перехода построены в Matlab в виде составного оператора, который начинается одним из служебных слов **if**, **while**, **switch** или **for** и заканчивается служебным словом **end**.

3 Порядок выполнения работы

1. Проработать необходимый теоретический материал, опираясь на сведения и указания, представленные в предыдущем пункте. Все разработанные примеры разобрать на практике, проведя аналогичные операции в среде Matlab (для графиков изменить оформление).

2. Изучить документацию по следующим библиотекам Matlab: **ops**, **relop**, **slash**, **elfun**, **specfun**, **plot**. В отчете привести краткое описание каждой из них.

3. Выполнить задание согласно варианту.

3.1 Вычислить значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ с шагом h .

Таблица 4 – Варианты заданий

Вариант	$f(x)$	a	b	h
1	$\frac{x^2}{1 + 0,25\sqrt{x}}$	0.7	7.5	0.45
2	$\frac{x^3 - 0,3x}{\sqrt{1 + 2x}}$	2.06	8.1	1.2
3	$\frac{2e^{-x}}{2\pi + x^3}$	0	1.5	0.15
4	$\frac{\cos \pi x^2}{\sqrt{1 - 3x}}$	-1	0	0.1
5	$\frac{e^{\frac{x}{2}}}{1 + x^2}$	1.4	5	0.5
6	$e^{-2x} + x^4 + 1$	3.2	6.6	0.7

Продолжение таблицы 4.

Вариант	$f(x)$	a	b	h
7	$(e + x)\sin(\pi\sqrt{x-1})$	0.25	2.25	0.2
8	$x^3 - 3x + \frac{x^3 - 0,3x}{\sqrt{1+2x}}$	0	4.5	0.5
9	$\sin(x) + \frac{2e^{-2x}}{3\pi + x^3}$	0	1.6	0.25
10	$\frac{\sin\pi x^4}{\sqrt{1-14x}}$	-1	0	0.1

Важно! Если в процессе вычислений требуется поэлементно умножить, разделить или возвести в степень элементы вектора или матрицы, то для этого используются операторы:

- `.*` – поэлементное умножение;
- `./` и `.\` – поэлементные деления;
- `.^` – поэлементное возведение в степень.

3.2 Построить график функции: настроить его оформление, добавить подпись осей и название графика.

4. Оформить отчет.

4 Содержание отчета

Цель работы; разобранные примеры из пункта 2; краткое описание изученных библиотек Matlab; решенное задание по варианту; выводы по работе.

5 Контрольные вопросы

1. Что такое Matlab?
2. Каким образом можно получить справку о той или иной команде?
3. Как вводятся матрицы и векторы в языке Matlab? Какими функциями можно формировать специальные матрицы и векторы в языке Matlab?
4. Какие функции Matlab осуществляют вывод графиков на экран?

5. Какими функциями обеспечивается снабжение графика координатными линиями и надписями?
6. Можно ли построить несколько графиков в одной системе координат и в одном графическом окне?
7. Как построить несколько отдельных графиков в одном графическом окне в разных графических полях?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

1.1 Цель работы

Изучить методы получения последовательностей случайных событий программным путем на основе системы Matlab; научиться разрабатывать m-функции для статистических исследований, в частности, для подсчета текущей частоты случайных событий; рассчитать текущую частоту случайных событий, реализованных в проводимом эксперименте; убедиться, что случайные события, произошедшие в данном случайном эксперименте, обладают свойством стохастической устойчивости и оценить вероятность этих событий.

1.2 Теоретический раздел

На практике приходится часто сталкиваться с опытами (испытаниями, наблюдениями, процессами), дающими различные результаты в зависимости от обстоятельств, которых мы не знаем или не можем учесть. Например, нельзя предсказать заранее, сколько выпускников средней школы подадут заявления в СевГУ, сколько дождливых дней будет в следующем году и т.д. Применение математики к изучению явлений такого рода опирается на то, что во многих случаях при многократном повторении одного и того же опыта в одних и тех же условиях *частота* появления рассматриваемого *результата остается* все время примерно *одинаковой*, близкой к некоторому постоянному числу P .

Рассмотрим эксперимент с пространством событий $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$, который можно повторять многократно в одних и тех же условиях. Допустим, что проведено N испытаний, при которых интересующее нас событие $z_i \in Z$ произошло N_i раз. Относительное число случаев, при которых данное событие имело место, т.е. величина:

$$q_i = q(z_i) = \frac{N_i}{N}, \quad (1.1)$$

называется *частотой* события z_i .

При небольшом числе экспериментов частота оказывается в значительной мере случайной. Однако, практика показывает, что при увеличении числа экспериментов частота отдельных событий теряет свой случайный характер и имеет тенденцию приближаться с незначительными колебаниями к некоторому среднему *неслучайному* значению, которое и может рассматриваться как *вероятность* $P(z_i)$ данного события z_i . Именно эта тенденция и является **признаком стохастической устойчивости** данного случайного явления, и только стохастически устойчивые явления могут изучаться с помощью теории вероятностей. Вообще при увеличении числа опытов частота приближается к вероятности в том смысле, что вероятность сколько-нибудь значительных отклонений частоты от вероятности становится пренебрежимо малой. Такая сходимостъ называется *сходимостью по вероятности*.

1.3 Ход работы

1. Создать матрицу $A(a_{ij})$, элементами a_{ij} которой являются случайные равномерно распределенные числа, лежащие в диапазоне от 0 до 1. Число строк матрицы $m=5$, число столбцов $n=1000$ (рекомендуется функция *rand*).

2. Проверить наличие элементов в матрице A , выведя на экран ее первые 10 столбцов.

3. Будем считать событием z_{kj} попадание числа a_{kj} в промежуток $a_{k \min} \leq a_{kj} < a_{k \max}$. Границы этих промежутков для разных вариантов приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Варианты заданий

вариант	$a_{1\min}$	$a_{1\max}$	$a_{2\min}$	$a_{2\max}$	$a_{3\min}$	$a_{3\max}$	$a_{4\min}$	$a_{4\max}$	$a_{5\min}$	$a_{5\max}$
1	0.0	0.45	0.0	0.45	0.0	0.45	0.02	0.20	0.00	0.93
2	0.25	0.63	0.25	0.63	0.25	0.63	0.12	0.15	0.02	0.92
3	0.3	0.72	0.3	0.72	0.3	0.72	0.10	0.20	0.04	0.94
4	0.5	0.87	0.5	0.87	0.5	0.87	0.18	0.25	0.06	0.96
5	0.45	0.95	0.45	0.95	0.45	0.95	0.22	0.30	0.08	0.98
6	0.35	1.0	0.35	1.0	0.35	1.0	0.33	0.35	0.10	1.00
7	0.25	0.53	0.25	0.53	0.25	0.53	0.34	0.40	0.01	0.91
8	0.45	0.66	0.45	0.66	0.45	0.66	0.49	0.50	0.03	0.93
9	0.15	0.67	0.15	0.67	0.15	0.67	0.53	0.60	0.05	0.95
10	0.25	0.88	0.25	0.88	0.25	0.88	0.68	0.70	0.07	0.97
11	0.4	0.97	0.4	0.97	0.4	0.97	0.72	0.80	0.09	0.99
12	0.42	0.99	0.42	0.99	0.42	0.99	0.93	1.00	0.02	0.93
13	0.02	0.4	0.02	0.4	0.02	0.4	0.08	0.23	0.05	0.95
14	0.2	0.6	0.2	0.6	0.2	0.6	0.11	0.19	0.06	0.78
15	0.12	0.42	0.12	0.42	0.12	0.42	0.17	0.26	0.15	0.88
16	0.23	0.67	0.23	0.67	0.23	0.67	0.17	0.23	0.45	0.98
17	0.11	0.56	0.11	0.56	0.11	0.56	0.56	0.89	0.23	0.67
18	0.12	1.0	0.12	1.0	0.12	1.0	0.56	0.65	0.1	1.00
19	0.0	0.35	0.0	0.35	0.0	0.35	0.32	0.70	0.00	0.93
20	0.21	0.63	0.21	0.63	0.21	0.63	0.11	0.15	0.34	0.92

Создать m-функцию $y = \logzn(am, aM, x)$, которая возвращает единицу, если выполняется условие $am \leq x < aM$, и возвращает 0, если это условие не выполнено. Сохранить эту функцию в m-файле.

4. С помощью функции $\logzn$ из матрицы $A(a_{ij})$ получить матрицу $B(b_{ij})$, элементы которой равны 1, если событие z_{kj} произошло, и равны 0, если не произошло. Для этого написать и сохранить соответствующую m-функцию.

5. Написать M-функцию $y = freqp(v, m)$, определяемую формулой (1.1), где v – вектор размера m , состоящий из нулей и единиц. Сохранить ее в m-файле.

6. Рассчитать зависимости $q_k(N)$ частот событий от числа испытаний для $1 \leq N \leq 1000$ и всех пяти k и изобразить их графически в линейном и полулогарифмическом (по оси x) масштабах. Найти аналитически вероятности событий

P_k , учитывая тип распределения получаемого с помощью функции *rand*.

7. Сделать выводы. Оформить отчет.

1.4 Содержание отчёта

Цель работы; краткое теоретическое введение; аналитический расчёт вероятности случайных событий; практический расчёт оценки вероятности (частоты) случайных событий; программа на языке MATLAB для расчёта частоты случайных событий; выводы по работе.

1.5 Контрольные вопросы

1. Что такое случайное событие?
2. Что такое случайный исход эксперимента?
3. Что такое стохастическая устойчивость?
4. Как в системе MATLAB создать матрицу со случайными равномерно распределёнными числами?
5. Что такое m-сценарий? Что такое m-функция?
7. Что такое частота случайного события?
8. Какова связь между частотой случайного события и его вероятностью?
9. Какова зависимость частоты случайного события от числа испытаний?
10. Как построить график функции с помощью системы Matlab?
11. Какой тип распределения даёт функция *rand*? Нарисовать график этой функции.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

2.1 Цель работы

Освоить программное моделирование случайных событий, реализуемых комбинационными схемами; выполнить теоретический расчет вероятностей срабатывания комбинационных схем и найти оценки этих вероятностей экспериментальным путем; сравнить теоретические и экспериментальные результаты; оценить применимость теорем сложения и умножения вероятностей и формулы полной вероятности для вычисления вероятностей сложных событий на примере работы комбинационных схем.

2.2 Теоретический раздел

Элементарные (не разложимые на более простые части) случайные события, реализуемые в некотором эксперименте, называются *исходами* этого эксперимента. Полная совокупность исходов $z_1, z_2, \dots, z_m$ (*пространство исходов*) обозначается как

$$Z = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}. \quad (2.1)$$

При осуществлении каждого эксперимента обязательно имеет место некоторый из исходов $z_i \in Z$ и не может быть такого эксперимента, результатом которого могли бы быть два или более исходов. Иными словами, исходы представляют собой *полную группу несовместных событий*.

На практике обычно наибольший интерес представляют не сами исходы, а некоторые их совокупности (комбинации), которые являются подмножествами множества Z . Любое подмножество A множества Z называется *событием* A :

$$A \subseteq Z. \quad (2.2)$$

Когда говорят, что *происходит* или *осуществляется* событие A , то подразумевается, что в A содержится некоторая совокупность элементарных событий (т.е. исходов) z_i .

Для любых событий A и B , принадлежащих пространству исходов эксперимента Z , имеют место **следующие определения**.

1. *Объединением (суммой) $A \cup B$ событий A и B называется событие, состоящее в осуществлении хотя бы одного из событий A и B .*

2. *Совмещением (произведением) $A \cap B$ событий A и B называется событие, состоящее в осуществлении как A , так и B . События A и B называются *несовместными*, если осуществление одного из них исключает возможность осуществления другого, т.е. если $A \cap B = \emptyset$.*

3. *Дополнением $\bar{A}$ события A называется событие, состоящее в неосуществлении события A . Событие $\bar{A}$ называется также *противоположным* событию A . Осуществление хотя бы одного из событий пространства Z является *достоверным* событием. Поэтому здесь множество Z играет роль универсального множества.*

Поскольку не произойти хотя бы одно какое-либо событие из пространства Z не может, то *неосуществление* хотя бы одного события является *невозможным* событием, т.е. это событие представляет собой пустое множество $\emptyset$.

Под *вероятностью* $P(z_i)$ исхода z_i понимают численную меру, которая характеризует объективную возможность данного исхода эксперимента. Если некоторый исход z_n *невозможен* (т.е. является невозможным событием), то ему приписывается вероятность $P(z_n)=0$. Если же некоторому исходу $z_o \in Z$ приписан вес $P(z_o)=1$, то данный исход представляет собой *достоверное* событие. Все остальные исходы имеют вероятности $P(z_i)$, значения которых лежат между этими предельными:

$$0 = P(z_n) \leq P(z_i) \leq P(z_o) = 1. \quad (2.3)$$

Если $\bar{A}$ – событие, противоположное событию A , то $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Для вычисления вероятностей различных событий используется ряд теорем.

Наиболее часто **применяемые теоремы**.

1. Если события A и B *несовместны*, т.е. $A \cap B = \emptyset$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (2.4)$$

2. Для *произвольных* (а не только несовместных) случайных имеет место соотношение событий A и B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad (2.5)$$

которое носит название *теоремы сложения вероятностей*. Формула (2.4) – ее частный случай для несовместных событий.

3. Для произвольных случайных событий A и B имеет место *теорема умножения вероятностей*:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A), \quad (2.6)$$

где $P(A)$ – *безусловная вероятность* события A ;

$P(B/A)$ – *условная вероятность* события B , вычисленная при условии, что событие A имело место.

Если события A и B *независимы*, то

$$P(B/A) = P(B), \quad (2.7)$$

и формула (2.6) принимает вид:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (2.8)$$

4. Пусть $A \subseteq Z$ – случайное событие в пространстве Z , а система множеств $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ – некоторое *разбиение* этого пространства. Как известно, разбиение удовлетворяет условиям:

$$Z = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n, S_i \cap S_k \neq \emptyset \text{ при } i \neq k \quad (2.9)$$

Входящие в него события S_i называются *гипотезами*.

Формула полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A/S_i)P(S_i) \quad (2.10)$$

позволяет вычислить вероятность $P(A)$ события A , если известны безусловные вероятности $P(S_i)$ всех гипотез S_i и условные вероятности $P(A/S_i)$ осуществления события A при реализации каждой из этих гипотез.

В настоящей работе будет моделироваться работа комбинационных схем со случайным нажатием трех кнопок A, B, C . Комбинационные схемы имеют в своем составе кнопки (которые могут быть нажаты или не нажаты), контакты, связанные с кнопками (которые могут быть разомкнуты или замкнуты), источник питания, провода и лампочку (которая может гореть или не гореть). Такими схемами можно моделировать многие электрические и электронные цепи, сети передачи информации, вычислительные алгоритмы.

На рисунке 2.1 приведена модель комбинационной схемы, на которой блок G содержит различное число нормально разомкнутых и нормально замкнутых контактов, последовательно либо параллельно соединенных между собой проводами и переключаемых кнопками A, B и C .

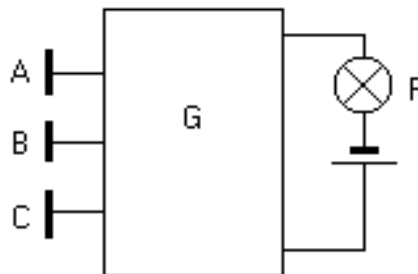


Рисунок 2.1 – Модель комбинационной схемы

Лампочка F горит в зависимости от того, какова схема блока G и в каком состоянии находятся кнопки A, B, C . Если эти кнопки нажимаются случайным образом, то случайным является и загорание лампочки F . Задача состоит в том, чтобы при заданной схеме блока G и заданных вероятностях $P(A)$, $P(B)$ и $P(C)$

нажатия кнопок A , B и C определить вероятность $P(F)$ горения лампочки F .

Решить эту задачу можно тремя способами:

- 1) аналитически, используя теоремы сложения и умножения вероятностей;
- 2) аналитически, используя формулу полной вероятности;
- 3) программно, создав генератор элементарных случайных событий, «нажимающий» кнопки A , B и C с заданными вероятностями.

В соответствии со схемой блока G и алгеброй логики эти события должны быть преобразованы в сложное событие F . Иными словами, в каждом отдельном эксперименте кнопки A , B , C нажимаются случайным образом, и при этом необходимо определить состояние лампочки F . Проведя массовую серию таких испытаний, можно определить частоту события F . При большом числе испытаний она практически равна $P(F)$. События здесь носят бинарный характер: кнопки, контакты и лампочки имеют всего по два возможных состояния. Поэтому алгебра множеств здесь может быть заменена алгеброй логики. Иными словами, здесь в вышеуказанных формулах для получения составного события можно заменить операцию $\cup$ на $\vee$, операцию $\cap$ – на $\wedge$, операцию дополнения – на операцию отрицания.

Для программного создания случайных событий используется генератор случайных чисел с равномерным распределением вероятностей в диапазоне от 0 до 1 (рисунок 2.2). В системе MATLAB можно создать имеющую размер $m \times n$ матрицу L таких случайных чисел с помощью функции $rand(m, n)$.

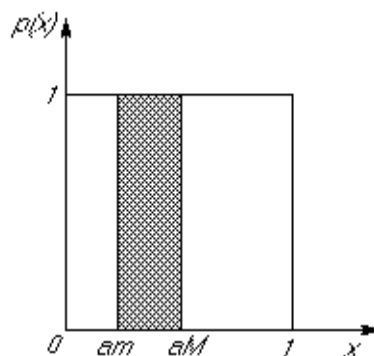


Рисунок 2.2 – Плотность вероятности равномерно распределённых случайных чисел

В рассматриваемой работе будем считать, что эта матрица имеет 4 строки и 1000 столбцов.

Первая строка матрицы L будет положена в основу организации случайных «нажатий» кнопки A . Она может быть получена из матрицы L путем применения оператора двоеточия: $A = L(1,:)$.

В задании на лабораторную работу указаны границы am и aM полуинтервала $[am, aM)$. Если элемент матрицы A оказывается внутри этого полуинтервала, необходимо заменить его числом 1, если же вне – числом 0. Таким образом, матрица-строка A преобразуется в матрицу-строку из случайно расположенных единиц и нулей, причем вероятность появления единиц определяется полуинтервалом $[am, aM)$. Будем считать, что единицы соответствуют «нажатию» кнопки A .

Аналогичным образом создаем матрицы $B = L(2,:)$ и $C = L(3,:)$, которые преобразуем в «1-0»-матрицы B и C в соответствии с полуинтервалами $[bm, bM)$ и $[cm, cM)$. Они моделируют нажатия кнопок B и C .

По заданной карте Карно необходимо найти минимальную ДНФ соответствующей ей комбинационной схемы. По ней надо аналитически рассчитать и на основе разработанной программы путем численного эксперимента оценить вероятность $P(F)$ загорания лампочки F . Сравнить результаты.

В следующей части работы необходимо создать три «1-0»-матрицы-строки $A1$, $B1$ и $C1$, применяя указанную выше методику и те же полуинтервалы $[am, aM)$, $[bm, bM)$ и $[cm, cM)$, однако, из единственной, четвертой строки матрицы L , и применить их к той же комбинационной схеме. Сравнить результаты первой и второй части работы. Объяснить эти результаты. Дать их аналитическое подтверждение.

Сопоставление практических и экспериментальных данных позволяет оценить степень применимости законов и тождеств алгебры множеств, алгебры ло-

гики и теории вероятностей для расчета работы комбинационных схем при случайных воздействиях.

2.3 Хода работы

2.3.1 Аналитическая часть

1. Получить у преподавателя вариант интервалов случайных величин (таблица 2.1) и вариант карты Карно (приложение А).

Таблица 2.1 – Варианты задания интервалов случайных чисел

№ вар.	am	aM	bm	bM	cm	cM
1.	0	0.3	0.1	0.5	0.2	0.7
2.	0.3	0.8	0.6	0.9	0.7	1.0
3.	0.4	0.9	0.2	0.6	0.5	0.8
4.	0.2	0.7	0	0.3	0.1	0.5
5.	0.6	0.9	0.7	1.0	0.3	0.8
6.	0.1	0.4	0.3	0.7	0.5	1.0
7.	0	0.3	0.2	0.7	0.1	0.5
8.	0.5	0.7	0.2	0.6	0.6	0.9
9.	0.7	1.0	0.3	0.8	0.5	0.9
10.	0.3	0.8	0.5	0.9	0.7	1.0
11.	0	0.2	0.1	0.8	0.4	1.0
12.	0.3	0.7	0.3	0.4	0.5	0.9
13.	0.4	1.0	0	0.2	0.1	0.8
14.	0.1	0.8	0.4	1.0	0	0.2
15.	0.5	0.9	0.3	0.7	0.3	0.4
16.	0.7	1.0	0.2	0.5	0.4	0.8
17.	0.7	1.0	0.4	0.8	0.3	0.5
18.	0.3	0.5	0.7	1.0	0.4	0.9
19.	0.4	0.8	0.3	0.5	0.7	1.0
20.	0.2	0.6	0.4	0.8	0.7	0.9

2. Согласно полученным вариантам вычислить теоретические значения вероятностей нажатия кнопок $P(A)$, $P(B)$ и $P(C)$, $P(A1)$, $P(B1)$ и $P(C1)$.

3. Вычислить следующие условные теоретические вероятности:
 $P(A/B)$, $P(A/C)$, $P(B/A)$, $P(B/C)$, $P(C/A)$, $P(C/B)$,
 $P(A/B1)$, $P(A/C1)$, $P(B/A1)$, $P(B/C1)$, $P(C/A1)$, $P(C/B1)$.

4. В соответствии с заданным вариантом схемы найти минимальную ДНФ, связывающую горение лампочки с нажатием кнопок.

5. Аналитически определить вероятность горения лампочки для событий A , B и C :

- а) применяя теоремы сложения и умножения вероятностей;
- б) применяя формулу полной вероятности.

6. Выполнить пункт 5 для событий $A1$, $B1$ и $C1$.

2.3.2 Практическая часть

1. Написать в системе Matlab функцию вычисления матрицы L из 4 строк и 1000 столбцов таким образом, чтобы она сохранилась в памяти компьютера, но не выводилась на печать.

2. Написать в системе Matlab m-функцию преобразования элементов матрицы L в «1-0» – матрицы-строки A, B, C , соответствующие заданным интервалам $[am, aM)$, $[bm, bM)$ и $[cm, cM)$ таким образом, чтобы элементы матрицы L , лежащие внутри этих интервалов, преобразовывались в 1, а вне интервалов – в 0.

3. Аналогично требованиям пункта 2 написать m-функцию получения «1-0» – матриц-строк $A1, B1, C1$.

4. В соответствии с полученным вариантом комбинационной схемы написать в системе Matlab формулу преобразования элементарных событий A, B и C в составное событие F . Считать событие A совпадающим с высказыванием x , событие B – с высказыванием y , а событие C совпадающим с высказыванием z .

5. Написать в системе Matlab m-функцию для расчета частоты события F .

Предупреждение: выбирая название для М-функции, предварительно убедитесь, что оно отсутствует среди названий стандартных функций MATLAB, в противном случае при обращении MATLAB будет вызывать не вашу функцию, а стандартную.

6. Вызвать функцию вычисления матрицы L (см. п.1). Вычислить эту матрицу без вывода на печать. Для контроля правильности вычисления вывести на печать ее первые 10 столбцов.

7. Вызвать функцию получения «1-0» – матрицы-строки A и вычислить ее без вывода на печать. Для контроля вывести на печать ее первые 10 элементов.
8. Выполнить п.7 для строки B .
9. Выполнить п.7 для строки C .
10. Воспользовавшись функцией п.3, вычислить без вывода на печать «1-0»-матрицы – строки $A1$, $B1$, $C1$ и проконтролировать их первые 10 элементов.
11. Применяя формулу п. 4 и считая, что на вход системы поступают события A , B и C , рассчитать элементы «1-0»- матрицы-строки F , состоящей из единиц, соответствующих горению лампочки, и нулей, когда она не горит. Проверить первые 10 элементов этой матрицы.
12. Подсчитать частоту события F , применяя формулу, полученную в п.5.
13. Сравнить найденную экспериментально частоту с теоретическим результатом.
14. Выполнить п.11, считая, что на вход схемы поступают события $A1$, $B1$ и $C1$ и обозначая выходную «1-0»-матрицу-строку как $F1$.
15. Подсчитать частоту события $F1$, используя формулу п.5.
16. Сравнить найденную частоту с теоретическим результатом.
17. Сопоставить результаты п.13 и п.16. Дать развернутые выводы о возможности применения законов и тождеств теории множеств, алгебры логики и теории вероятностей для оценки работы комбинационных схем.
18. Оформить отчет.

2.4 Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Подробный аналитический расчёт вероятности горения лампочки по формулам сложения-умножения, как для зависимых, так и для независимых событий.
3. Подробный аналитический расчёт вероятности горения лампочки по формуле полной вероятности, как для зависимых, так и для независимых событий.

4. Программа на языке Matlab для практического расчёта частоты загорания лампочки, как для зависимых, так и для независимых событий.

5. Выводы по работе в развёрнутом виде о возможности применения законов и тождеств теории множеств, алгебры логики и теории вероятностей для оценки работы комбинационных схем.

2.5 Контрольные вопросы

1. Что такое случайный исход и случайное событие?
2. Что такое вероятность случайного события?
3. Свойства вероятности случайного события.
4. Основные теоремы о вероятностях случайных событий.
5. Что такое безусловная и условная вероятности?
6. Объяснить смысл формулы полной вероятности.
7. Что такое равномерный закон распределения случайной непрерывной величины?
8. Каким образом в системе MATLAB можно получить массив равномерно распределенных случайных чисел? Каковы параметры этого распределения?
9. В работе задано $P(A1) = P(A)$, $P(B1) = P(B)$, $P(C1) = P(C)$ для одной и той же комбинационной схемы. Чем объяснить, что вероятность $P(F1)$ равна (или не равна) вероятности $P(F)$? Какие свойства случайных событий играют здесь принципиальную роль?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ОЦЕНКА ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

3.1 Цель работы

Изучить методы нахождения числовых характеристик случайных величин (с.в.); произвести экспериментальные исследования зависимости точности оценок числовых характеристик от объема выборки случайной величины.

3.2 Теоретический раздел

Неслучайные параметры, выражающие в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения *случайной величины*, называются ее *числовыми характеристиками*. Эти числовые характеристики находятся, как правило, путем осреднения по всему числу испытаний некоторых неслучайных функций исследуемой с.в.

Допустим, что с.в. ξ в j -м испытании приняла конкретное значение x_j^* и полное число этих испытаний есть N . Тогда среднее арифметическое величины ξ , обозначаемое как $\tilde{M}_1$, есть

$$\tilde{M}_1 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j^* . \quad (3.1)$$

Эта величина случайна, однако при $N \rightarrow \infty$ она в силу статистической устойчивости стремится к некоторому пределу, носящему название *математического ожидания* (МО) величины ξ . Оно обозначается как M_1 . Для дискретной с.в. оно выражается формулой (3.2):

$$M_1 = M[\xi] = \sum_{i=1}^n x_i P_i , \quad (3.2)$$

а для непрерывной – формулой (3.3):

$$M_1 = M[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx. \quad (3.3)$$

В формуле (3.2) n величин x_i представляют собой полную совокупность значений, которые может принимать дискретная с.в. ξ , а P_i – вероятности этих значений. В формуле (3.3) $p(x)$ есть плотность вероятности непрерывной с.в. ξ .

Строго говоря, $\tilde{M}_1$ не совпадает с M_1 , и это совпадение достигается только при $N \rightarrow \infty$. Следовательно, точное значение МО может быть найдено по формулам (3.2) и (3.3) при точном знании P_i или $p(x)$, которые не всегда известны. В то же время экспериментально-расчетным путем по формуле (3.1) может быть найдено только его приближенное значение $\tilde{M}_1$, которое в связи с этим называется *оценкой математического ожидания*.

Итак, в силу данных выше определений M_1 является числовой характеристикой с.в., а $\tilde{M}_1$ – ее приближенной оценкой. Величина M_1 определяет некоторую среднюю величину ξ , вокруг которого группируются ее все возможные значения.

Другие числовые характеристики с.в. ξ находятся путем осреднения некоторых детерминированных функций случайного аргумента $\varphi(\xi)$. Если число испытаний, конечно, то по аналогии с формулой (3.1) получим оценки таких характеристик в виде

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varphi(x_j^*). \quad (3.4)$$

При $N \rightarrow \infty$ они переходят в МО этих функций:

$$M[\varphi(\xi)] = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) P_i \quad (3.5)$$

для дискретной с.в. ξ и

$$M[\varphi(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) p(x) dx \quad (3.6)$$

для непрерывной.

На практике наибольшую применимость имеют **центральные моменты** различных порядков, обозначаемые как μ_k . Для них $\varphi(\xi) = (\xi - M_1)^k$, где порядок k – целые неотрицательные числа. Величина $(\xi - M_1)$, получаемая из каждого значения *исходной* с.в. ξ вычитанием ее МО, называется *центрированной*, а сама процедура этого вычитания – *центрированием*. Итак, имеем оценку момента k -го порядка

$$\tilde{\mu}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_j^* - M_1)^k. \quad (3.7)$$

При $N \rightarrow \infty$ отсюда получим

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - M_1)^k P_i \quad (3.8)$$

для дискретной с.в. и

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_1)^k p(x) dx \quad (3.9)$$

для непрерывной с.в.

Физическая размерность μ_k и $\tilde{\mu}_k$ есть

$$[\mu_k] = [\tilde{\mu}_k] = [\xi]^k. \quad (3.10)$$

Центральный момент *второго* порядка

$$\sigma^2 = \mu_2, \quad (3.11)$$

называется *дисперсией* с.в. ξ , а квадратный корень из нее σ – *среднеквадратическим отклонением* с.в. ξ . Величина

$$\tilde{\sigma}^2 = \tilde{\mu}_2 \quad (3.12)$$

есть *оценка* этой дисперсии, а $\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{\sigma}^2}$ – оценка среднеквадратического значения с.в. ξ . Величина σ характеризует полуширину распределения вероятности или плотности распределения вероятности.

Нетрудно показать, что центральный момент третьего порядка μ_3 равен нулю, если распределение симметрично относительно своего МО, и отличен от

нуля в противном случае. Однако применять его непосредственно для оценки степени асимметрии распределения неудобно, так как он имеет размерность $[\xi]^3$. Для этого применяют *безразмерную* величину

$$\gamma_1 = \mu_3 / \sigma^3, \quad (3.13)$$

называемую *коэффициентом асимметрии* величины ξ . Этот коэффициент характеризует *скошенность* распределения или плотности распределения вероятности. Одновершинное распределение с $\gamma_1 < 0$ имеет левостороннюю (отрицательную) асимметрию, т.е. распределение имеет слева «хвост». Если $\gamma_1 > 0$, оно имеет «хвост» справа. Для симметричного распределения $\gamma_1 = 0$.

Безразмерная величина

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3, \quad (3.14)$$

называется *коэффициентом эксцесса* распределения и характеризует степень его *островершинности* в сравнении с нормальным (гауссовским) распределением. Для нормального распределения эта величина равна нулю. Для более островершинного распределения $\gamma_2 > 0$. Для менее островершинного $\gamma_2 < 0$. При этом сравнении необходимо считать, что у всех рассматриваемых распределений величина σ^2 одинакова.

Статистический пакет *Statistics & Machine Learning Toolbox* системы MATLAB поддерживает 20 видов распределений вероятности: 14 непрерывных и 6 дискретных (таблица 2.1).

В этой таблице: A, B, MU, NU, NU1, NU2, V1, V2, DELTA, LAMBDA, NN, M, K, P, RR – параметры, описывающие распределения; R – матрица размером $m \times n$, состоящая из случайных величин ξ , имеющих указанное распределение; M – математическое ожидание $M[\xi]$ и V – дисперсия с.в. ξ . Команда из столбца IV дает возможность вычислить теоретическое значение МО $M_1 = M[\xi]$, обозначаемое здесь как M, и теоретическую дисперсию σ^2 , обозначаемую как V.

Входящий в MATLAB пакет Statistics Toolbox имеет в своем составе демонстрационные программы, создающие интерактивную среду для генерации случайных чисел, изучения их различных распределений вероятностей и других целей.

Таблица 3.1 – Распределение вероятностей, команды генерации случайных величин и команды вычисления их числовых характеристик

№	Вид распределения	Команда генерации случайной величины	Команда вычисления M_1 и σ^2
Непрерывные распределения			
1	Бета	R=betarnd(A,B,m,n)	[M,V]=betastat(a,b)
2	Экспоненциальное	R=exprnd(MU,m,n)	[M,V]=expstat(MU)
3	Гамма	R=gamrnd(A,B,m,n)	[M,N]=gamstat(A,B)
4	Логнормальное	R=lognrnd(MU,SIGMA,m,n)	[M,V]=lognstat(MU,SIGMA)
5	Нормальное (гауссовское)	R=normrnd(MU,SIGMA,m,n)	[M,V]=normstat(MU,SIGMA)
6	Релея	R=raylrnd(B,m,n)	[M,V]=raylstat(B)
7	Равномерное	R=unifrnd(A,B,m,n)	[M,V]=unifstat(A,B)
8	Вейбулла	R=weibrnd(A,B,m,n)	[M,V]=weibstat(A,B)
9	Хи-квадрат	R=chi2rnd(NU,m,n)	[M,V]=chi2stat(NU)
10	Нецентральное хи-квадрат	R=ncx2rnd(NU,DELTA,m,n)	[M,V]=ncx2stat(NU,DELTA)
11	Фишера-Снекора (F-распредел.)	R=frnd(V1,V2,m,n)	[M,V]=fstat(V1,V2)
12	Нецентральное F-распределение	R=ncfrnd(NU1,NU2,DELTA,m,n)	[M,V]=ncfstat(NU1,NU2,DELTA)
13	Стьюдента (t-распределение)	R=trnd(NU,m,n)	[M,V]=tstat(NU)
14	Нецентральное t-распределение	R=nctrnd(NU,DELTA,m,n)	[M,V]=nct(NU,DELTA)
Дискретные распределения			
1	Биномиальное	R=binornd(NN,P,m,n)	[M,V]=binostat(NN,P)
2	Равновероятное	R=unidrnd(NN,m,n)	[M,V]=unidstat(NN)
3	Геометрическое	R=geornd(P,m,n)	[M,V]=geostat(P)
4	Гипергеометрическое	R=hygernd(M,K,NN,m,n)	[M,V]=hygestat(M,K,NN)
5	Отрицательное биномиальное	R=nbirnd(RR,P,m,n)	[M,V]=nbinrnd(RR,P)
6	Пуассона	R=poissrnd(LAMBDA,m,n)	[M,V]=poisstat(LAMBDA)

Так, оператор **disttool**, введенный в командном окне MATLAB, открывает окно, в котором изображены кривые теоретических зависимостей любого из име-

ющихся в MATLAB распределений. Последние могут быть выбраны в выпадающем меню в середине верхней части этого окна. Если вверху в правой части окна выбрать *pdf* (probability density function), на графике будет изображена кривая *плотности* вероятности $p(x)$ рассматриваемой *непрерывной* с.в. или набор *значений* вероятности P_i *дискретной* с.в. Если же выбрать *cdf* (cumulative distribution function), то отобразится *интегральная функция распределения* $F(x)$ данной с.в.

Если в командном окне ввести оператор **randtool**, то откроется окно, в котором в виде гистограммы будет продемонстрировано эмпирическое распределение данной случайной величины при заданном (вверху справа) числе ее отсчетов.

3.3 Ход работы

1. Получить у преподавателя вариант задания (таблица 3.2). Во всех заданиях положить $m = 1$ и считать n текущим, изменяющимся от 1 до 1000.

Таблица 3.2 – Варианты заданий

Вид распределения	Вариант	Параметры распределения
Нормальное	1.	MU=4, SIGMA=2
Рэля	2.	B=3
	3.	B=0,7
Равномерное непрерывное	4.	A=0, B=2
Вейбулла	5.	A=0,4, B=3
Хи-квадрат	6.	NU=3
Нецентральное хи-квалрат	7.	NU= 3, DELTA=4
F-распределение	8.	V1= 8, V2=10
Нецентральное F-распределение	9.	NU1=20, NU2=100, DELTA=6
Стьюдента	10.	NU=4
Нецентральное t-распределение	11.	NU=8, DELTA=1,5
Биномиальное	12.	NT=7, P= 0,8
Равновероятное дискретное	13.	NN=120
Геометрическое	14.	P=0,0006

Продолжение таблицы 3.2.

Вид распределения	Вариант	Параметры распределения
Гипергеометрическое	15.	M= 1000, K= 40, NN=30

Отрицательное биномиальное	16.	RR= 3, P=0,01
Пуассона	17.	LAMBDA=2
Бета	18.	A= 2, B= 4
Экспоненциальное	19.	MU= 2
Гамма	20.	A=4, B=8
Логнормальное	21.	MU= 0,7, SIGMA= 0,25

2. Написать в системе MATLAB коды для вычисления оценок моментов

$\tilde{M}_1, \tilde{\mu}_1, \sigma^2 = \tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_3, \tilde{\mu}_4$, оценки коэффициента асимметрии

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{\tilde{\mu}_3}{\sqrt{\tilde{\mu}_2^3}} \quad (3.15)$$

и оценки коэффициента эксцесса

$$\tilde{\gamma}_2 = \frac{\tilde{\mu}_4}{\tilde{\mu}_2^2} - 3. \quad (3.16)$$

3. С помощью этих кодов рассчитать зависимости указанных оценок от числа испытаний N – для $1 \leq N \leq 1000$ и изобразить их графически в линейном и полулогарифмическом (по оси x) масштабах. Для графиков добавить обозначения переменных по осям.

4. Найти теоретические значения M_1, σ^2 и сравнить их с экспериментальными.

5. Применив, оператор **disttool**, установить вид теоретических кривых, характеризующих закон распределения данного варианта случайной величины. Распечатать соответствующие графики.

6. Применив оператор **randtool**, проследить, как меняются эмпирические распределения данной с.в. при последовательном выборе ее числа отсчетов $N=100, 200, 500, 1000$. Распечатать соответствующие графики.

7. Дать *письменное* объяснение всем наблюдаемым зависимостям.

8. Оформить отчет.

3.4 Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Краткое теоретическое введение.
3. Теоретический расчёт математического ожидания и дисперсии для заданного типа распределения.
4. Графики теоретических кривых, характеризующих закон распределения указанного варианта случайной величины (интегральная функция распределения, функция плотности вероятности).
5. Графики эмпирических распределений указанного варианта случайной величины.
6. Программа на языке MATLAB для практического расчёта числовых характеристик случайной величины.
7. Выводы по работе в развернутом виде, сравнительная характеристика полученных теоретических значений с практическими, дать письменное объяснение всем наблюдаемым зависимостям.

3.5 Контрольные вопросы

1. Что такое числовые характеристики случайных величин?
2. Геометрический смысл математического ожидания.
3. Геометрический смысл дисперсии.
4. Геометрический смысл среднеквадратического отклонения.
5. Геометрический смысл коэффициента асимметрии.
6. Геометрический смысл коэффициента эксцесса.
7. Что такое случайная величина?
8. Каким образом зависят от числа отсчетов случайной величины оценки числовых характеристик?
9. В чем отличие числовых характеристик с.в. от их оценок?
10. Что такое гистограмма?

11. Чем отличаются гистограммы непрерывных и дискретных случайных величин?
12. Какие особенности гистограмм характеризуют найденные числовые характеристики?
13. Что такое начальный момент распределения?
14. Что такое центральный момент распределения?
15. Какой цели служат начальные и центральные моменты распределения?
16. В чем сходство и различие в статистическом описании дискретных и случайных непрерывных величин?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНСТРУМЕНТОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ИНФОРМАЦИИ

4.1 Цель работы

Представить исходную информацию в виде функциональной (или корреляционной) таблицы $y = f(x)$; изучить взаимосвязи эколого-экономических явлений, построить математическую модель эколого-экономической корреляции и исследовать приложения модели; привести статистическую оценку генеральной средней.

4.2 Пример решения

В качестве примера можно рассмотреть инструменты представления и анализа эколого-экономической информации. В регионе $N = 1000$ предприятий общественного питания (столовые, рестораны, бары и т.п.). Санитарная эпидемиологическая станция (СЭС) в течение месяца выборочно проверила санитарное состояние 30 из этих предприятий ($n = 30$) и подвергла их экологическому штрафу (штрафу Пигу) в размере y_i , тыс. руб. Ежемесячный экономический оборот этих предприятий – x_i , млн руб. (таблица 4.1).

Таблица 4.1 – Исходная эколого-экономическая информация

x_i	8	4	3	12	13	10	12	18	21	7	8	9	15	16	17
y_i	240	100	90	430	500	400	400	640	720	200	250	350	620	600	640
x_i	3	7	13	12	15	19	21	20	13	18	8	9	13	12	23
y_i	100	240	550	470	660	720	780	720	540	660	270	350	480	470	800

Необходимо: представить исходную эколого-экономическую информацию в виде функциональной (или корреляционной) таблицы $y = f(x)$; сделать прогнозные оценки для предприятий с более большим месячным экономическим оборотом, сравнивая с исходными данными.

4.2.1 Решение. Представление исходной эколого-экономической информации в виде корреляционной таблицы $y = f(x)$. Метод группировок

Примем случайные величины x_i в качестве *аргумента*, а случайные величины y_i – в качестве *функции* y_i . Проранжируем по аргументу x_i исходные данные таблицы 4.1, записав их в порядке возрастания от $x_{min} = 3$ до $x_{max} = 23$ млн. руб.

Таблица 4.2 – Исходные данные, проранжированные по аргументу x

x_i	3	3	4	7	7	8	8	8	9	9	10	12	12	12	12
y_i	90	100	100	200	240	250	250	270	350	380	400	430	400	470	490
x_i	13	13	13	13	15	15	16	17	18	18	19	20	21	21	23
y_i	500	550	540	480	620	660	600	640	640	660	720	720	720	780	800

Количество интервалов m в настоящее время ориентировочно принято определять по эмпирической формуле Стерджесса:

$$m = l + 3,32lg(n). \quad (4.1)$$

В рассматриваемом случае $n = 30$, $lg(n) = 1,477$, $m = 5,9$. Для удобства счета принимается $m = 5$. Вычислим длину интервала l_x :

$$l_x = \frac{x_{max} - x_{min}}{m}. \quad (4.2)$$

В данном случае размах выборки $R = x_{max} - x_{min} = 20$, $l_x = 4$. Поэтому границы интервалов будут такими:

- 1) первый интервал: 3...7; частота – 5;
- 2) второй интервал: 7...11; частота – 6;
- 3) третий интервал: 11...15; частота – 10;
- 4) четвёртый интервал: 15...19; частота – 5;
- 5) пятый интервал: 19...23; частота – 4.

Здесь же записаны *абсолютные частоты* f_j – количество предприятий, попадающих в исследуемый интервал. Индекс j меняется в пределах $1...m$. Очевидно, что итоговая сумма всех частот будет равна $n = 30$.

В таблице 4.2 для удобства анализа последние элементы каждого интервала выделены жирным шрифтом.

Вычислим средние значения аргумента x и функции y для каждого из пяти

интервалов. Процедуру осреднения обозначим надстрочной чертой. Итак,

$$\bar{x}_1 = (3 + 3 + 4 + 7 + 7) / 5 = 4,8 \text{ млн. руб.}$$

$$\bar{y}_1 = (90 + 100 + 100 + 200 + 240) / 5 = 730 / 5 = 146 \text{ тыс. руб.}$$

Аналогичные вычисления осуществляем для четырёх других интервалов

$$\bar{x}_2 = (8 + 8 + 8 + 9 + 9 + 10) / 6 = 52 / 6 = 8,7$$

$$\bar{y}_2 = (240 + 250 + 270 + 350 + 380 + 400) / 6 = 1180 / 6 = 197.$$

Учитывая приближённый характер исходных данных таблице 4.2, все вычисления будем осуществлять до одной значащей цифры после запятой:

$$\bar{x}_3 = (12 + 12 + 12 + 12 + 13 + 13 + 13 + 15 + 15) / 10 = 117 / 10 = 11,7$$

$$\bar{y}_3 = (430 + 400 + 470 + 490 + 500 + 550 + 540 + 480 + 620 + 660) / 10 = 6140 / 10 = 614$$

$$\bar{x}_4 = (16 + 17 + 18 + 18 + 19) / 5 = 88 / 5 = 17,6$$

$$\bar{y}_4 = (600 + 640 + 640 + 660 + 720) / 5 = 3260 / 5 = 652$$

$$\bar{x}_5 = (20 + 21 + 21 + 23) / 4 = 85 / 4 = 21,3$$

$$\bar{y}_5 = (720 + 720 + 780 + 800) / 4 = 755$$

Для расчета процентного «штрафа Пигу» (ШП), необходимо воспользоваться формулой 4.3:

$$\overline{\text{ШП}}_j = \frac{\bar{y}_j}{\bar{x}_j} 100 \%. \quad (4.3)$$

Учитывая полученные результаты, строим итоговую таблицу 4.3 метода группировок.

Таблица 4.3 – Корреляционная зависимость экологических штрафов y от ежемесячного экономического оборота x для 30 предприятий общественного питания

Интервалы по x	$\bar{x}_j$, млн. руб.	$\bar{y}_j$, тыс. руб.	ШП, %	f_j
3...7	4,8	146	3,0	5
7...11	8,7	197	2,3	6
11...15	11,7	514	4,4	10
15...19	17,6	652	3,7	5
19...23	21,3	755	3,5	4

Анализируя таблицу, можно сделать следующие выводы:

1) с ростом экономического оборота x монотонно увеличивается экологический штраф y (рисунок 4.1).

2) в то же время налог Пигу изменяется немонотонно (рисунок 4.2).

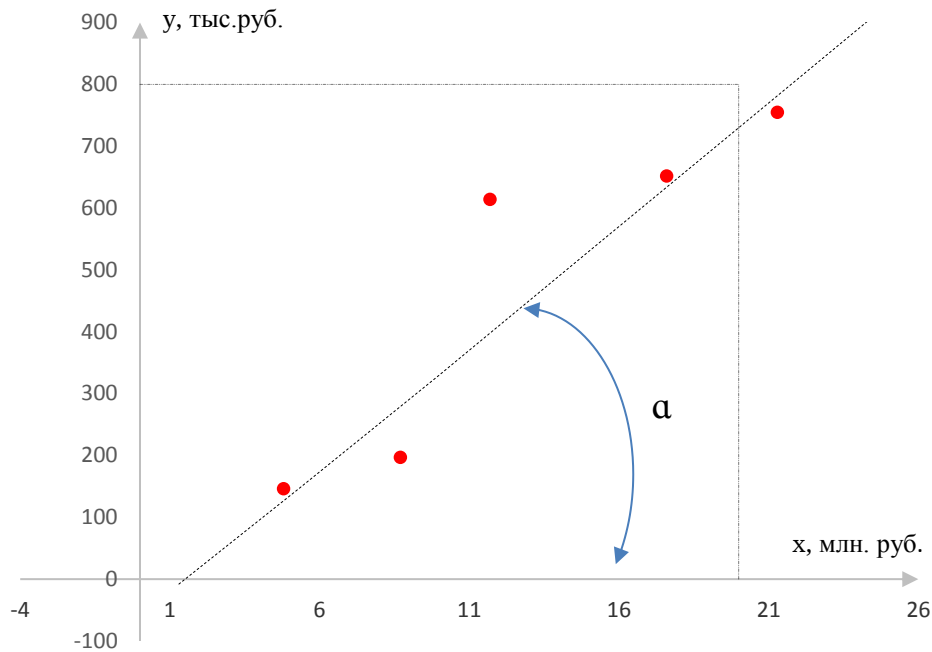


Рисунок 4.1 – Связь между экологическим штрафом и ежемесячным оборотом 30 пищевых предприятий

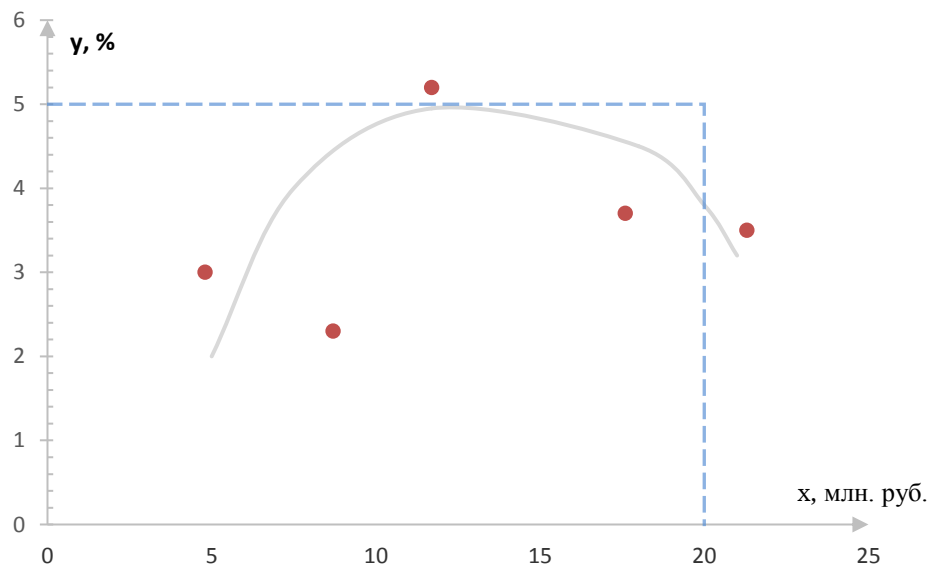


Рисунок 4.2 – Связь между зелёным «штрафом» (или налогом Пигу) и ежемесячным оборотом 30 пищевых предприятий

В заключение, используя процедуру нахождения средней арифметической взвешенной величины, найдём средние значения аргумента и функции:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_j f_j}{n} = \frac{4,8 \cdot 5 + 8,7 \cdot 6 + 11,7 \cdot 10 + 17,6 \cdot 5 + 21,3 \cdot 4}{30} = 366,4 / 30 = 12,2 \text{ млн. руб.}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_j f_j}{n} = \frac{146 \cdot 5 + 19 \cdot 6 + 614 \cdot 10 + 652 \cdot 5 + 755 \cdot 4}{30} = 13732 / 30 = 444,4 \text{ тыс. руб.}$$

Средний налог Пигу находим по формуле:

$$\overline{\text{ПП}} = 100 \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = 100 \frac{444400}{12200000} = 3,6\%$$

Таким образом, средний экономический налог для 30 предприятий общественного питания составил 3,6%.

4.2.2 Математическая модель эколого-экономической корреляции

Выясним взаимосвязь между аргументом x и функцией y (корреляционное поле на рисунке 4.1). Термин «корреляция» в переводе с латинского языка обозначает «якобы связь». Из рисунка 4.1 видно, что исследуемое «корреляционное поле» можно «выровнять» прямолинейной зависимостью (штриховая линия):

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 x. \quad (4.4)$$

Здесь a_0 и a_1 – коэффициенты прямой линии; $\tilde{y}$ – теоретическое значение экологического штрафа.

Проще всего коэффициенты a_0 и a_1 находить по методу наименьших квадратов (МНК). Формулы Гаусса для прямой линии в виде 4.5:

$$a_1 = s_{xy} / \sigma_x^2; \quad a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}, \quad (4.5)$$

где s_{xy} – ковариация, учитывающая взаимовлияние функции и аргумента.

$$s_{xy} = \frac{\sum (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y}) f_j}{n} =$$

$$= \left[\begin{aligned} &(4,8 - 12,2)(146 - 457,7) \cdot 5 + (8,7 - 12,2)(197 - 457,7) \cdot 6 + \\ &+ (11,7 - 12,2)(614 - 457,7) \cdot 10 + (17,6 - 12,2) \cdot (652 - 457,7) \cdot 5 + \\ &+ (21,3 - 12,2)(755 - 457,7) \cdot 4 \end{aligned} \right] / 30 = 1093$$

Величина D_x называется «дисперсией по x » – она характеризует рассеивание случайной величины x вокруг своего среднего значения $\bar{x}$. Итак,

$$D_x = \frac{\sum (x_j - \bar{x})^2 f_j}{n} =$$

$$= \left[\frac{(4,8 - 12,2)^2 \cdot 5 + (8,7 - 12,2)^2 \cdot 6 + (11,7 - 12,2)^2 \cdot 10 + (17,6 - 12,2)^2 \cdot 5 +}{+ (21,3 - 12,2)^2 \cdot 4} \right] /$$

$$/ 30 = 826,8 / 30 = 27,6$$

Итого, искомые коэффициенты прямой линии таковы:

$$a_1 = 1093/27,6 = 39,6; a_0 = 444,4 - 39,6 \times 12,2 = -40,1$$

На рисунке 4.1 проиллюстрирован геометрический смысл a_0 и $a_1 = tg\alpha$.

Найденная функциональная зависимость:

$$\tilde{y} = -40,1 + 39,6x \quad (4.6)$$

Ее иногда называют:

- 1) прямолинейной простой регрессией y на x ;
- 2) математической моделью эколого-экономической взаимосвязи;
- 3) прямолинейным трендом как устойчивой закономерностью рассматриваемого эколого-экономического процесса.

МНК Гаусса пригоден также для нахождения коэффициентов многих других (*но не всех!*) теоретических закономерностей. Например, на рисунке 4.2 штриховыми линиями показан криволинейный тренд, который можно записать как квадратичную параболу.

Часто возникает принципиальный вопрос о том, возможно ли исследуемые точки «сгладить» прямой линией? С этой целью обычно вычисляют коэффициент корреляции Пирсона:

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (4.7)$$

Сначала вычисляется дисперсию по функции y :

$$D_y = \frac{\sum (y_j - \bar{y})^2 f_j}{n} = \left[\frac{(146 - 444,4)^2 \cdot 5 + (197 - 444,4)^2 \cdot 6 + (514 - 444,4)^2 \cdot 10 +}{+ (652 - 444,4)^2 \cdot 4} \right] / 30 =$$

$$= 1462273 / 30 = 48742$$

Квадратичные корни из дисперсий обычно называют «среднеквадратичными отклонениями» (или, американский термин, «среднеквадратичными стандартами»):

$$\sigma_y = \sqrt{48742} = 220,7; \quad \sigma_x = \sqrt{27,6} = 5,3.$$

Подставляя в формулу 4.8, окончательно получим значение для коэффициента корреляции:

$$r_{xy} = \frac{1093}{220,7 \cdot 5,3} = 0,94$$

Такое значение коэффициента корреляции Пирсона обычно свидетельствует о достаточно сильной корреляции. Если бы $r_{xy} = 1$ (или -1), то точки лежали бы строго на прямой линии (восходящей или нисходящей), а соответствующая связь была бы функциональной. Если бы $r_{xy} = 0$, то это бы свидетельствовало об отсутствии какой-либо связи между аргументом x и функцией y .

Полученное уравнение прямой линии (формула 4.6) позволяет, во-первых, осуществлять точечный прогноз величины y . Обычно упреждение прогноза не превышает $0,3R$, где $R = 20$ – размах значений аргумента. Например, при $x=29$ прогнозное значение $y = 1108$ тыс. руб.

Во-вторых, можно говорить о так называемой средней «эластичности» модели:

$$\bar{\varepsilon} = a_1 \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = 39,6 \frac{12,2}{444,4} = 1,1 \quad (4.8)$$

Её смысл таков: если аргумент x увеличить на 1%, то функция y в среднем изменится на 1,1%.

4.2.3 Выборочный метод. Статистическая оценка генеральной средней

Ранее речь шла о так называемой «выборке» предприятий общественного питания, x число $n = 30$. Но в рассматриваемом регионе таких предприятий $N = 1000$. Естественно, возникает вопрос о возможности переноса полученных результатов на «генеральную совокупность», т.е. на регион. Существуют формулы Чебышева П.Л. и Ляпунова А.М., позволяющие определить интервалы изменения аргумента X и функции Y для «генерального» случая $N = 1000$ для требуемого уровня риска p :

$$\bar{x} - t_p \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq X \leq \bar{x} + t_p \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad (4.9)$$

$$\bar{y} - t_p \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq Y \leq \bar{y} + t_p \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Теорию «малых выборок» ($n < 50$) разработал английский математик Стьюдент. Если принять риск $p = 5\%$, тогда $t_p = 2$ (по таблице критических точек распределения Стьюдента, представленной в приложении А в таблице А.1). Подставляя уже известные значения величин, фигурирующие в этих формулах, получаем:

$$10,3 \leq X \leq 14,1; \quad 365 \leq Y \leq 524$$

Здесь Y – средний экологический штраф (штраф Пигу) для рассматриваемого региона, тыс. руб.; X – средний ежемесячный экономический оборот предприятий региона, млн. руб.

Пользуясь формулой 4.3, вычислим пределы изменения экологического штрафа Пигу:

$$3,5 \leq \overline{ПП} \leq 3,7\%.$$

Общие выводы:

- с ростом экономического оборота x монотонно увеличивается экологический штраф y (рисунок 4.1);
- в то же время налог Пигу изменяется немонотонно (рисунок 4.2);
- средний экономический налог для 30 предприятий общественного питания составил 3,6 %;
- «корреляционное поле» на рисунке 4.1 можно «сгладить» прямолинейной зависимостью (4.7), используя теорию Гаусса;
- если аргумент x увеличить на 1 %, то функция y в среднем изменится на 1,1 %;
- значение коэффициента корреляции, равное 0,94, свидетельствует о достаточно сильной корреляции;
- средний экологический штраф (штраф Пигу) для рассматриваемого региона на уровне риска 5 % меняется в пределах 3,5...3,7;
- прогнозное значение «зелёного штрафа» при $x=29$ равно 1108 тыс. руб.

4.3 Ход работы

1. Получить у преподавателя вариант задания (таблицы 4.4 – 4.18).

Таблица 4.4 – Вариант 1

x_i	7	4	1	12	13	10	12	18	21	7	8	9	15	16	17
y_i	240	100	90	430	500	400	400	640	720	250	250	350	620	600	640
x_i	2	7	13	12	15	19	21	20	13	18	8	9	13	12	21
y_i	90	240	550	470	660	720	780	720	540	660	270	350	480	470	800

Таблица 4.5 – Вариант 2

x_i	7	4	4	12	13	10	12	18	21	7	8	9	15	16	17
y_i	240	100	90	430	500	400	400	640	720	250	250	350	620	600	640
x_i	5	7	13	12	15	19	21	20	13	18	8	9	13	12	24
y_i	90	240	550	470	660	720	780	720	540	660	270	350	480	470	800

Таблица 4.6 – Вариант 3

x_i	6	4	5	12	13	10	12	18	21	7	8	9	15	16	17
y_i	240	100	90	430	500	400	400	640	720	250	250	350	620	600	640
x_i	4	7	13	12	15	19	21	20	13	18	8	9	13	12	24
y_i	90	240	550	470	660	720	780	720	540	660	270	350	480	470	800

Таблица 4.7 – Вариант 4

x_i	5	6	5	12	13	10	12	18	21	7	8	9	15	16	17
y_i	240	290	250	430	500	400	400	640	720	250	250	350	620	600	640
x_i	5	7	13	12	15	19	21	20	13	18	8	9	13	12	25
y_i	300	240	550	470	660	720	780	720	540	660	270	350	480	470	800

Таблица 4.8 – Вариант 5

x_i	8	4	3	12	13	10	12	18	21	7	8	9	15	16	17
y_i	240	100	90	430	500	400	400	640	720	250	250	350	620	600	640
x_i	2	7	13	12	15	19	21	20	13	18	8	9	13	12	22
y_i	90	240	550	470	660	720	780	720	540	660	270	350	480	470	800

Таблица 4.9 – Вариант 6

x_i	6	4	3	12	13	10	12	18	21	7	8	9	15	16	17
y_i	240	100	90	430	500	400	400	640	720	250	250	350	620	600	640
x_i	2	7	13	12	15	19	21	20	13	18	8	9	13	12	22
y_i	90	240	550	470	660	720	780	720	540	660	270	350	480	470	800

Таблица 4.10 – Вариант 7

x_i	7	4	3	12	13	10	12	18	21	10	8	9	15	16	17
y_i	240	100	90	430	500	400	400	640	720	450	250	350	620	600	640
x_i	2	7	13	12	15	19	21	20	13	18	8	9	13	12	22
y_i	90	240	550	470	660	720	780	720	540	660	270	350	480	470	800

Таблица 4.11 – Вариант 8

x_i	8	7	5	12	13	10	12	18	21	7	8	9	15	16	17
y_i	240	200	120	430	500	400	400	640	720	250	250	350	620	600	640
x_i	5	7	13	12	15	19	21	20	13	18	8	9	13	12	25
y_i	140	240	550	470	660	720	780	720	540	660	270	350	480	470	800

Таблица 4.12 – Вариант 9

x_i	8	7	8	12	13	10	12	18	21	7	8	9	15	16	17
y_i	240	200	280	430	500	400	400	640	720	250	250	350	620	600	640
x_i	8	7	13	12	15	19	21	20	13	18	8	9	13	12	27
y_i	290	240	550	470	660	720	780	720	540	660	270	350	480	470	800

Таблица 4.13 – Вариант 10

x_i	10	7	4	15	16	13	15	21	24	10	11	12	18	19	20
y_i	250	110	100	440	510	410	410	650	730	260	260	360	630	610	650
x_i	5	10	16	15	18	22	24	23	16	21	11	12	16	15	24
y_i	100	250	560	480	670	730	790	730	550	670	280	360	490	480	810

Таблица 4.14 – Вариант 11

x_i	10	7	7	15	16	13	15	21	24	10	11	12	18	19	20
y_i	250	110	100	440	510	410	410	650	730	260	260	360	630	610	650
x_i	8	10	16	15	18	22	24	23	16	21	11	12	16	15	27
y_i	100	250	560	480	670	730	790	730	550	670	280	360	490	480	810

Таблица 4.15 – Вариант 12

x_i	9	7	8	15	16	13	15	21	24	10	11	12	18	19	20
y_i	260	120	110	450	520	420	420	660	740	270	270	370	640	620	660
x_i	7	10	16	15	18	22	24	23	16	21	11	12	16	15	27
y_i	110	260	570	490	680	740	800	740	560	680	290	370	500	490	820

Таблица 4.16 – Вариант 13

x_i	7	8	7	14	15	12	14	20	23	9	10	11	17	18	19
y_i	260	310	270	450	520	420	420	660	740	270	270	370	640	620	660
x_i	7	9	15	14	17	21	23	22	15	20	10	11	15	14	27
y_i	320	260	570	490	680	740	800	740	560	680	290	370	500	490	820

Таблица 4.17 – Вариант 14

x_i	10	6	5	14	15	12	14	20	23	9	10	11	17	18	19
y_i	260	120	110	450	520	420	420	660	740	270	270	370	640	620	660
x_i	4	9	15	14	17	21	23	22	15	20	10	11	15	14	24
y_i	110	260	570	490	680	740	800	740	560	680	290	370	500	490	820

Таблица 4.18 – Вариант 15

x_i	8	6	5	14	15	12	14	20	23	9	10	11	17	18	19
y_i	270	130	120	460	530	430	430	670	750	280	280	380	650	630	670
x_i	4	9	15	14	17	21	23	22	15	20	10	11	15	14	24
y_i	120	270	580	500	690	750	810	750	570	690	300	380	510	500	830

2. Представит исходную эколого-экономическую информацию в виде корреляционной таблицы $y = f(x)$, используя метод группировок.
3. Построить математическую модель эколого-экономической корреляции.
4. Провести статистический анализ генеральной средней.
5. Сделать общий вывод по проделанной работе.

4.4 Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Краткое теоретическое введение.
3. Представление исходной эколого-экономической информации в виде корреляционной таблицы $y = f(x)$. Метод группировок.
4. Математическая модель эколого-экономической корреляции.
5. Статистическая оценка генеральной средней.
6. Выводы по работе в развернутом виде.

4.5 Контрольные вопросы

1. Статистическая и корреляционная зависимость. Что такое корреляционная связь?
 2. Корреляционная таблица. Расчет средних по данным корреляционной таблицы.
 3. Что такое корреляционная функция и в чём её отличие от ковариационной функции?
 4. Ковариация. Свойства ковариации.
 5. В чём смысл коэффициента корреляции? Свойства корреляции?
- Что характеризует средняя «эластичности» модели?

ОСНОВНАЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Калинина, В. Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для академического бакалавриата / В. Н. Калинина. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2015. – 472 с. – (Серия : Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-9916-5520-0. – Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/book/356F1698-E1E1-41E7-84B8-653045387D71>

2. Павлов, С. В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие / С.В. Павлов. - Москва : ИЦ РИОР: ИНФРА-М, 2019. – 186 с. (Карманное учебное пособие). ISBN 978-5-369-00679-5. – Текст: электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/217167>

3. Практикум и индивидуальные задания по курсу теории вероятностей (типовые расчеты): учебное пособие / В. А. Болотюк, Л. А. Болотюк, А. Г. Гринь, И. П. Гринь. – Санкт-Петербург : Лань, 2010. — 288 с. – ISBN 978-5-8114-0974-7. – Текст : электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/534>

4. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для бакалавриата / В. Е. Гмурман. – 12-е изд. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 479 с. – (Серия : Бакалавр. Прикладной курс). – ISBN 978-5-534-00211-9. – Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/book/636B8B1D-1DD9-4ABE-845B-2E048D04ED84>

5. Энатская, Н. Ю. Теория вероятностей и математическая статистика для инженерно-технических направлений: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / Н. Ю. Энатская, Е. Р. Хакимуллин. – М.: Издательство Юрайт, 2017. – 399 с. – (Серия : Бакалавр. Прикладной курс). – ISBN 978-5-534-02662-7. – Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/book/4E109289-0CA0-4240-9D69-CDAE027A0F30>

ПРИЛОЖЕНИЕ А **Варианты заданий карт Карно**

1

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	1	1	1

2

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	1	1	1

3

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	1	1	1

4

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1

5

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0

6

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	1	0	1

7

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	1

8

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	1	0

9

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	1	1	1	1

10

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	1	0	1

11

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0

12

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1

13

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	1	1	0

14

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	0	1	0

15

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1

16

$\begin{smallmatrix} & xy \\ z & \end{smallmatrix}$	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	0	1

17

$\begin{smallmatrix} & xy \\ z & \end{smallmatrix}$	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	1	0	0	1

18

$\begin{smallmatrix} & xy \\ z & \end{smallmatrix}$	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	0	0	1

19

$\begin{smallmatrix} & xy \\ z & \end{smallmatrix}$	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	1	1	0

20

$\begin{smallmatrix} & xy \\ z & \end{smallmatrix}$	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1

21

$\begin{smallmatrix} & xy \\ z & \end{smallmatrix}$	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	0	1	0	1

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Критические точки распределения Стьюдента

Таблица А.1 – Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двухсторонняя критическая область)					
	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
1	6.31	12.7	31.82	63.7	318.3	637.0
2	2.92	4.30	6.97	9.92	22.33	31.6
3	2.35	3.18	4.54	5.84	10.22	12.9
4	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	2.01	2.58	3.37	4.03	5.89	6.86
6	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.40
8	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.80	2.20	2.72	3.11	4.03	4.44
12	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.01
17	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.96
18	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.73	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					
Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двухсторонняя критическая область)					
	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
21	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.72	2.07	2.51	2.82	3.51	3.79
23	1.71	2.07	2.50	2.81	3.49	3.77
24	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.74
25	1.71	2.06	2.49	2.89	3.45	3.72
26	1.71	2.06	2.48	2.78	3.44	3.71
27	1.71	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
29	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.66	1.98	2.36	2.62	3.17	3.37
∞	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					