

УДК 539.3

И.В. Хромов, канд. техн. наук

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ЭЙЛЕРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

С использованием кинематической модели Прагера выполнен анализ известных и разработан усовершенствованный метод численного решения дифференциальных уравнений течения в случае произвольной траектории пластического деформирования материала.

Для описания напряженно-деформированного состояния материала в технологических задачах обработки давлением, в том числе при моделировании процесса формообразования стальных канатов, широко используются дифференциальные уравнения теории пластичности [1–4]

$$d\tilde{\sigma} = (1 - k\tilde{\sigma}^2)d\tilde{\varepsilon} - k\tilde{\sigma}\tilde{\tau}d\tilde{\gamma}, \quad d\tilde{\tau} = -k\tilde{\sigma}\tilde{\tau}d\tilde{\varepsilon} + (1 - k\tilde{\tau}^2)d\tilde{\gamma}, \quad (1)$$

где $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\tau}$ – безразмерные нормальное и касательное напряжения, $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\gamma}$ – приведенные деформации удлинения и сдвига; $\varphi = 1 + \lambda \eta_p$; $k = \frac{1 - \lambda}{\varphi^2}$; λ –

коэффициент упрочнения материала. При этом напряжения удовлетворяют условию текучести Мизеса $\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\tau}^2 = \varphi^2$.

Как показано в [5], уравнения (1) в общем случае не имеют аналитического решения. При выборе численного метода для рассматриваемого класса технологических задач необходимо иметь ввиду, что процедура решения должна многократно выполняться для большого количества ($N \approx 10^4 \dots 10^5$) элементов поперечного сечения заготовки (проволока, канат). Поэтому в прикладных программах целесообразно использовать метод конечных приращений (метод Эйлера [6]), исключающий необходимость повторных пересчетов. Вместе с тем остается актуальным вопрос обеспечения достаточно высокой точности численного решения при заданном шаге интегрирования.

Стандартный вариант метода конечных приращений (в дальнейшем метод 1) предполагает, что на каждом шаге интегрирования новое напряженное состояние с учетом (1) определяется зависимостями (при $\lambda = 0$ и $\varphi = 1$):

$$\tilde{\sigma}' = \tilde{\sigma} + d\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma} + \tilde{\tau}(\tilde{\tau}d\tilde{\varepsilon} - \tilde{\sigma}d\tilde{\gamma}), \quad \tilde{\tau}' = \tilde{\tau} + d\tilde{\tau} = \tilde{\tau} - \tilde{\sigma}(\tilde{\tau}d\tilde{\varepsilon} - \tilde{\sigma}d\tilde{\gamma}). \quad (2)$$

Далее используем следующую особенность системы уравнений пластического течения (1): искомые функции напряжений $\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}$ на любом этапе

должны удовлетворять условию текучести $\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\tau}^2 = 1$. Это условие позволяет оценить наличие погрешности в расчете напряжений. Например, подставляя соотношения (2) в условие текучести, получаем:

$$\tilde{\sigma}'^2 + \tilde{\tau}'^2 = (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\tau}^2)(1 + (\tilde{\tau} d\tilde{\epsilon} - \tilde{\sigma} d\tilde{\gamma})^2) = 1 + (\tilde{\tau} d\tilde{\epsilon} - \tilde{\sigma} d\tilde{\gamma})^2 > 1,$$

т.е. величина $(\tilde{\tau} d\tilde{\epsilon} - \tilde{\sigma} d\tilde{\gamma})^2$ дает количественную оценку погрешности решения на шаге интегрирования.

В [1] описан вариант расчета напряженного состояния (в дальнейшем метод 2), согласно которому новое значение нормального напряжения, как и ранее, определяется по формуле (2), а касательное напряжение рассчитывается из условия $\tilde{\tau}' = \sqrt{1 - \tilde{\sigma}'^2}$. Таким образом, условие текучести будет выполняться автоматически на любом этапе деформации материала. Означает ли это, что расчет напряжений становится более точным?

Для качественного анализа данного вопроса используем кинематическую модель Прагера [2, 5], согласно которой напряженное состояние определяется вектором $\vec{\Phi}$ с направляющим углом α в системе координат, связанной с центром подвижного кольца, имитирующего поверхность текучести (рисунок 1). Изменение вектора напряжений, как известно, определяется упругой составляющей деформации $d\vec{\eta}_e$, направленной по касательной к поверхности нагружения, т.е.

$$d\vec{\varphi} = d\vec{\eta}_e. \quad (3)$$

Согласно методу 1 новое напряженное состояние графически будет определяться вектором $\vec{\varphi}' = \vec{\varphi} + d\vec{\varphi}$ (вектор $\vec{OB}$ на рисунке 1). Видно, что этот вектор правильно отражает направление нового вектора напряженного состояния $\vec{\varphi}'$, однако при переходе к конечным приращениям неверно определяет его модуль, поскольку вектор выходит за пределы окружности (нарушается условие текучести, как показано выше).

Решение с помощью метода 2 на рисунке 1 определяется вектором $\vec{OC}$, где C – точка пересечения окружности с вертикальной прямой, проведенной через точку с координатами $(\tilde{\sigma}', 0)$. При этом правильно вычисляется модуль нового вектора $\vec{\varphi}'$, но появляется погрешность в определении

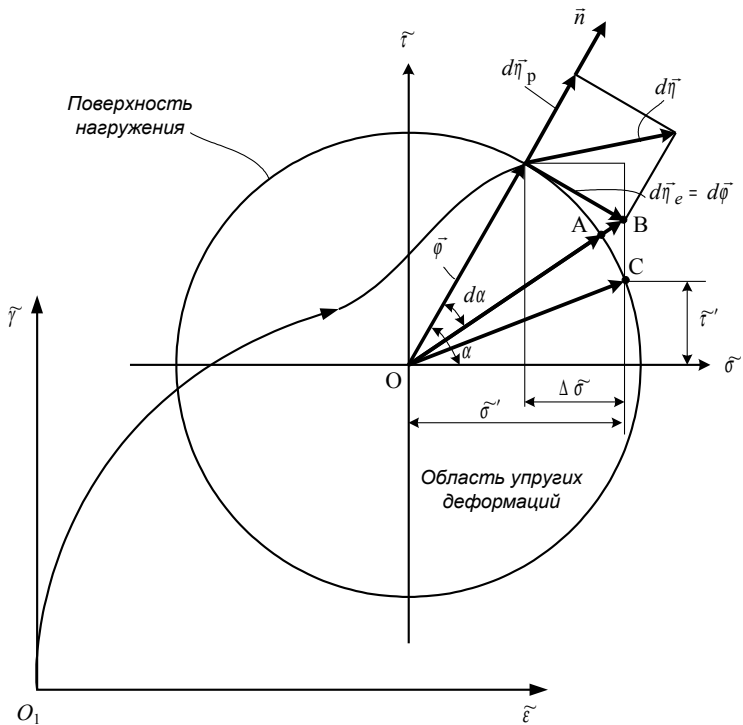


Рисунок 1 – Кинематическая модель определения вектора напряженного состояния при различных методах численного решения уравнений течения

его направления. Это значит, что погрешность расчета отдельных напряже-

ний остается такого же порядка, как и в предыдущем методе, хотя условие текучести здесь не нарушается.

Рассмотрим новый вариант расчета (метод 3), идея которого заключается в том, что конечное приращение искомой функции определяется не по касательной к ее графику, как в обычном методе Эйлера (точка В на рисунке 1), а по дуге окружности (точка А на рисунке 1). Тогда можно использовать следующий алгоритм. По заданному вектору начальных напряжений $\vec{\varphi}$ вычисляется единичный нормальный вектор $\vec{n} = \vec{\varphi} / \varphi$. Вектор приращения деформации $d\vec{\eta}$ проецируется на направление нормали $d\vec{\eta}_p = (d\vec{\eta} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$. Затем определяются тангенциальная проекция этого вектора $d\vec{\eta}_e = d\vec{\eta} - d\vec{\eta}_p$ и изменение направляющего угла $d\alpha \approx \text{tg} d\alpha = d\eta_e / \varphi$. Компоненты нового вектора напряженного состояния $\vec{OA}$ вычисляются по формулам $\tilde{\sigma}' = \varphi \cos(\alpha + \Delta \alpha)$ и $\tilde{\tau}' = \varphi \sin(\alpha + \Delta \alpha)$. Из рисунка 1 следует, что вектор $\vec{OA}$, соответствующий методу 3, наиболее правильно определяет направление и величину нового вектора напряжений $\vec{\varphi}'$.

Необходимо отметить, что для материала с упрочнением ($\lambda \neq 0$) изменение напряжений происходит не только за счет нейтрального смещения $d\vec{\eta}_e$, но и за счет изотропного расширения поверхности нагружения $d\vec{\eta}'$. Тогда в формуле (3) появляется дополнительное слагаемое $d\vec{\varphi} = d\vec{\eta}_e + d\vec{\eta}'$. Однако последний член определяется по линейному уравнению $d\vec{\eta}' = \lambda d\vec{\eta}_p$ и не влияет на результаты сравнительного анализа рассмотренных выше методов.

Ниже приведены результаты численных экспериментов по расчету изменения напряженного состояния материала при условии $\lambda=0$ для ломаной траектории деформирования. Расчетные напряжения сравнивались с известным аналитическим решением [4]. Предположим, что траектория деформации описывается ломаной линией А-В-С-Д (рисунок 2) с начальными

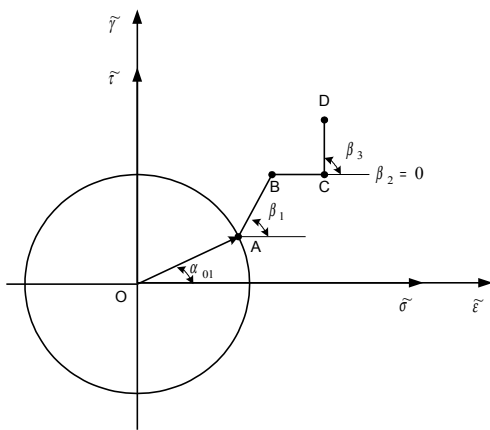


Рисунок 2 – Пример ломаной траектории деформирования

условиями $\alpha_{01} = \frac{\pi}{6}$; $\beta_1 = \frac{\pi}{3}$; $\beta_2 = 0$; $\beta_3 = \frac{\pi}{2}$. Длина пути на каждом участке деформирования $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta = 0,5$. Требуется определить напряженное состояние материала в конце траектории деформирования.

Пользуясь известной формулой, находим точное аналитическое решение для отдельных участков траектории:

$$\alpha_1 = \alpha_{02} = \beta_1 + 2 \arctg \left[\tg \left(\frac{\alpha_{01} - \beta_1}{2} \right) \cdot e^{-\eta} \right] = 0,724976 \text{ рад};$$

$$\alpha_2 = \alpha_{03} = \beta_2 + 2 \arctg \left[\tg \left(\frac{\alpha_{02} - \beta_2}{2} \right) \cdot e^{-\eta} \right] = 0,452183 \text{ рад};$$

$$\alpha_3 = \beta_3 + 2 \arctg \left[\tg \left(\frac{\alpha_{03} - \beta_3}{2} \right) \cdot e^{-\eta} \right] = 0,845064 \text{ рад}.$$

По полученному направляющему углу α_3 определяются конечные значения напряжений в безразмерном виде:

$$\tilde{\sigma} = \varphi \cdot \cos \alpha = \cos(0,845064) = 0,66368, \quad \tilde{\tau} = \varphi \cdot \sin \alpha = \sin(0,845064) = 0,74801.$$

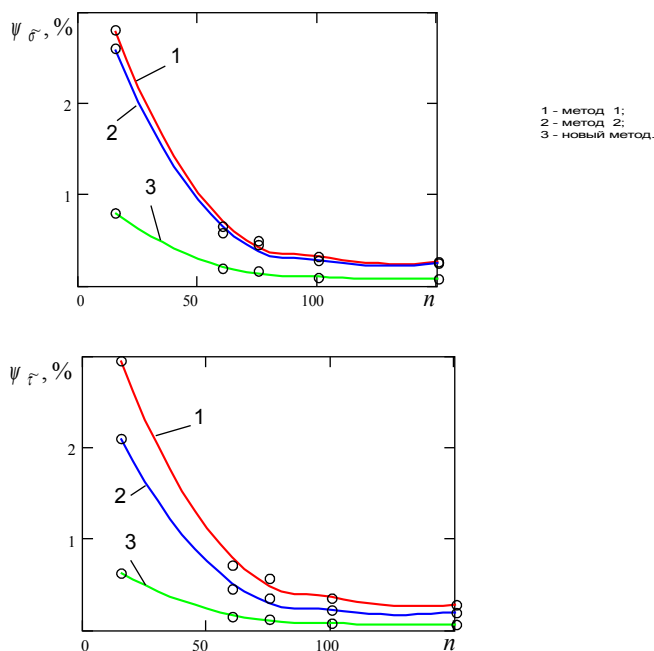


Рисунок 3 – Зависимости относительной погрешности от количества разбиений

Результаты численного решения этой же задачи на ЭВМ с использованием описанных выше трех численных методов интегрирования для различных значений шага $\Delta\eta = \eta/n$ (n – выбранное количество шагов на заданной траектории деформации η) показаны на рисунке 3. Здесь приведены зависимости относительной погрешности для нормальных Ψ_σ и касательных Ψ_τ напряжений, рассчитанных разными методами. Полученные данные показывают, что относительная погрешность Ψ численного решения по предложенному методу 3 примерно в 3 раза меньше, чем при использовании известных методов 1 и 2, и уже при конечном приращении величины деформации $\Delta\eta = 0,1$ она не превышает 0,8%.

В ходе численных экспериментов были рассмотрены также примеры для нелинейных видов траектории деформирования. На основании выполненных исследований можно сделать вывод о том, что для рассматриваемого класса технологических задач модифицированный с помощью кинематической модели метод Эйлера без введения итерационной процедуры обеспечивает наиболее высокую точность в предпочтительном диапазоне шага интегрирования уравнений пластического течения $\Delta\eta = 0,07\text{--}0,12$. С использованием предложенного метода предполагается решить ряд новых задач по совершенствованию технологии изготовления канатов.

Библиографический список

1. Ветров А.П. Напряженно-деформированное состояние в упругопластической стадии нагружения / А. П. Ветров, В.Г. Хромов // Машиностроение: Сб. науч. тр. — М.: ИВУЗ, 1977. — № 4. — С. 14–18.
2. Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
3. Reckling K.A. Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme / K.A. Reckling. — Berlin: Springer-Verlag, 1967. — 361 s.
4. Маламен Г.Д. Нейтрализация технологических напряжений в элементах плоскопрядных канатов / Г.Д. Маламен, Е.К. Морозовский, Ю.М. Хомяк // Прочность и долговечность стальных канатов: Сб. науч. тр. — К.: Техника, 1975. — С. 104–111.
5. Хромов И.В. Анализ вариантов аналитического решения дифференциальных уравнений пластического течения / И.В. Хромов // Надежность и долговечность механизмов, элементов конструкций и биомеханических систем: Материалы междунар. науч.-техн. конф. 5-8 сентября 2005 г. — Севастополь, 2005. — С. 189–192.
6. Демидович Б.П. Численные методы анализа / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. — М.: Наука, 1967. — 368 с.

Поступила в редакцию 10.03.2006 г.