

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
"СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
И УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Кафедра "Информатика и управление в технических системах"

ОСНОВЫ УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Методические указания

к выполнению расчетно-графической работы по дисциплине
для студентов направления подготовки
27.03.04 – Управление в технических системах



Севастополь
СевГУ
2022

УДК 517-004.09:004.942 (076.5)

ББК 32.965-01

О75

Р е ц е н з е н т:

А.А. Кабанов – канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой
"Информатика и управление в технических системах"

Составители: В.А. Крамарь, В.А. Карапетьян

О754 Основы управления в технических системах: методические указания к выполнению расчётно-графической работы по дисциплине для студентов направления подготовки 27.03.04 – Управление в технических системах / Севастопольский государственный университет, Институт информационных технологий и управления в технических системах, кафедра "Информатика и управление в технических системах" ; сост. : В.А. Крамарь, В.А. Карапетьян. – Севастополь: СевГУ, 2022. – 30 с. – Текст : электронный.

Приведены необходимые теоретические сведения, практические рекомендации и варианты заданий для выполнения расчётно-графической работы по дисциплине "Основы управления в технических системах".

Предназначены для студентов очной формы обучения направления подготовки 27.03.04 – Управление в технических системах.

УДК 517-004.09:004.942 (076.5)
ББК 32.965-01

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры "Информатика и управления в технических системах", протокол № 10 от 04 июля 2022 г.

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании ученого совета Института информационных технологий и управления в технических системах, протокол № 10 от 31 августа 2022 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ.....	3
2 ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЙ	4
2.1 Математическая модель движения самолёта	4
2.2 Система автоматического управления движением самолёта	6
3 ЗАДАНИЯ И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РГР	8
3.1 Основные пункты задания РГР	8
3.2 Порядок выполнения РГР	9
4 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.....	10
4.1 Системы линейных ОДУ в нормальной форме	10
4.2 Преобразование Лапласа	11
4.3 Решение систем линейных стационарных ОДУ методом преобразования Лапласа	12
4.4 Алгоритм синтеза стабилизирующего управления.....	14
5 ОФОРМЛЕНИЕ ПОЯСНИТЕЛЬНОЙ ЗАПИСКИ К РГР	17
5.1 Общие требования к структуре и содержанию ПЗ	17
5.2 Общие требования к оформлению ПЗ	17
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	22
ПРИЛОЖЕНИЕ А	23
Решение системы ОДУ в нормальной форме	23
А1 Решения системы ОДУ методом преобразования Лапласа.....	23
А2 Пример выполнения программы в Matlab.....	27
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	30
Титульный лист пояснительной записки РГР	30

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целями выполнения расчётно-графической работы (РГР) являются:

- систематизация, закрепление и расширение теоретических знаний для решения задач анализа свойств и построения движений линейных стационарных объектов управления на основе их математических динамических моделей;
- выработка умений и приобретение практических навыков в применении компьютерных технологий и специализированного программного обеспечения для решения прикладных математических и технических задач.

Инструментом решения задач РГР предлагается использовать программную среду Matlab/Simulink.

2 ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЙ

В качестве объекта исследований в РГР выбрана математическая модель бокового перемещения самолёта относительно заданного курса. Кинематическая схема бокового движения самолёта приведена на рисунке 2.1.

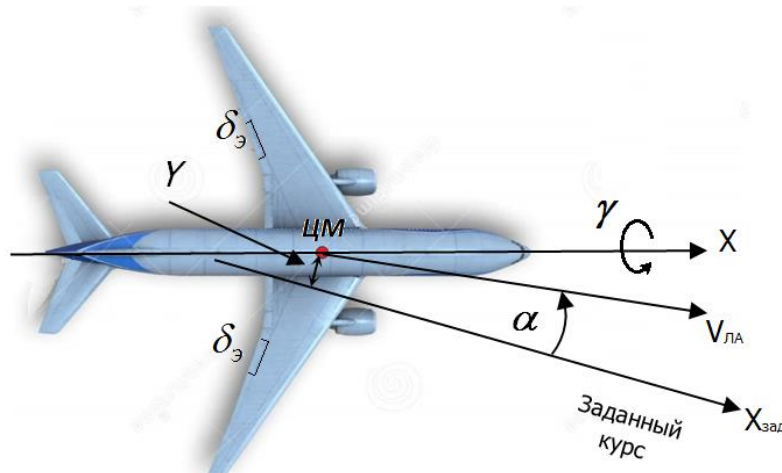


Рисунок 2.1 – Кинематическая схема бокового движения самолёта

Здесь введены следующие обозначения:

- X – продольная ось самолёта;
- $X_{\text{зад}}$ – заданный курс самолёта в горизонтальной плоскости;
- $V_{\text{ла}}$ – горизонтальная скорость движения самолёта;
- Y – боковое отклонение – отклонение центра масс (ЦМ) самолёта в горизонтальной плоскости относительно заданного курса (в метрах);
- α – угол курса – угол между направлением заданного курса и текущим направлением вектора скорости самолёта (в градусах);
- γ – угол крена самолёта (в градусах);
- $\delta_{\text{э}}$ – текущее значение угла поворота элеронов самолёта (в градусах).

2.1 Математическая модель движения самолёта

Математическая модель, описывающая в линейном приближении (для малых значений переменных Y, α, γ, u) боковое перемещение самолёта, представлена системой линейных стационарных (с постоянными параметрами) обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вида

$$\begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} = a_{Y\alpha}\alpha(t), \\ \frac{d\alpha(t)}{dt} = a_{\alpha\gamma}\gamma(t), \\ \frac{d\gamma(t)}{dt} = a_{\gamma\gamma}\gamma(t) + a_{\gamma u}u(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

В этих уравнениях, как и на рисунке 2.1:

- $Y(t)$ – боковое отклонение: отклонение центра масс самолёта в горизонтальной плоскости относительно заданного курса (в метрах);

- $\alpha(t)$ – угол курса – угол между направлением заданного курса и текущим направлением вектора скорости самолёта (в градусах);
- $\gamma(t)$ – угол крена самолёта (в градусах);
- $u(t)$ – внешнее воздействие, например, управляющее $\delta\alpha(t)$ – текущее значение угла поворота элеронов самолёта (в градусах).

Параметры модели (2.1) – коэффициенты $a_{Y\alpha}$, $a_{\alpha\gamma}$, $a_{\gamma\gamma}$, $a_{\gamma u}$ – известны и определены для каждого варианта задания РГР в таблице 2.1. Здесь приведены также и начальные условия Y_0 , α_0 , γ_0 для системы дифференциальных уравнений (2.1).

Таблица 2.1 – Коэффициенты модели и начальные условия (по вариантам)

№	$a_{Y\alpha}$	$a_{\alpha\gamma}$	$a_{\gamma\gamma}$	$a_{\gamma u}$	Y_0	α_0	γ_0
1	3,2	0,05	-0,05	0,05	0	3	-2
2	2,6	0,01	0,05	0,05	40	0	-1
3	3,5	0,04	-0,06	0,06	0	-3	2
4	2,5	0,05	-0,075	0,075	0	5	-2
5	3,0	0,015	0,06	0,06	-50	0	1
6	3,2	0,01	0,06	0,06	50	3	-1
7	2,6	0,03	-0,075	0,075	30	-2	0
8	3,5	0,05	-0,06	0,06	0	4	-2
9	2,5	0,07	0,06	0,06	-10	0	2
10	3,0	0,028	-0,05	0,05	0	-5	-2
11	3,2	0,03	-0,04	0,04	20	0	-2
12	2,6	0,05	-0,05	0,05	0	4	-2
13	3,5	0,02	0,05	0,05	40	-4	0
14	2,5	0,07	-0,075	0,075	40	0	-2
15	3,0	0,025	0,06	0,06	-40	0	2

№	$a_{Y\alpha}$	$a_{\alpha\gamma}$	$a_{\gamma\gamma}$	$a_{\gamma u}$	Y_0	α_0	γ_0
16	3,2	0,025	-0,06	0,06	50	0	-1
17	2,6	0,04	0,06	0,06	50	0	-1
18	3,5	0,06	-0,07	0,07	0	4	2
19	2,5	0,07	-0,075	0,075	0	-2	2
20	3,0	0,018	0,05	0,05	-40	3	0
21	3,2	0,05	0,04	0,04	100	-2	0
22	2,6	0,055	-0,075	0,075	40	0	-1
23	3,5	0,07	-0,08	0,08	0	-4	1
24	2,5	0,05	0,05	0,05	-60	2	0
25	3,0	0,05	-0,05	0,05	0	2	-2
26	3,2	0,05	-0,09	0,09	40	-3	0
27	2,6	0,04	-0,075	0,075	40	0	-2
28	3,5	0,03	0,06	0,06	-50	2	0
29	2,5	0,07	0,05	0,05	50	-4	0
30	3,0	0,012	-0,08	0,08	0	5	-1

Систему трёх дифференциальных уравнений модели (2.1) можно переписать в компактной – векторно-матричной – форме. Для этого следует сформировать вектор-функцию $x(t)$ из искомых функций $Y(t)$, $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$, объединить коэффициенты уравнений $a_{Y\alpha}$, $a_{\alpha\gamma}$ и $a_{\gamma\gamma}$ в числовую матрицу A , образовать числовой вектор-столбец B с коэффициентом $a_{\gamma u}$ для учёта внешнего воздействия $u(t)$, а также создать числовой вектор x_0 для упаковки начальных условий Y_0 , α_0 , γ_0 :

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(t) \\ \alpha(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix}; \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(0) \\ \alpha(0) \\ \gamma(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{Y\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & a_{\alpha\gamma} \\ 0 & 0 & a_{\gamma\gamma} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{\gamma u} \end{bmatrix}.$$

(2.2)

С учётом (2.2), систему (2.1) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Y(t) \\ \alpha(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{Y\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & a_{\alpha\gamma} \\ 0 & 0 & a_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(t) \\ \alpha(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{\gamma u} \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} Y(t) \\ \alpha(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} Y_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix}$$

или

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u(t); \quad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

или, окончательно,

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad x(t)|_{t=0} = x_0. \quad (2.3)$$

Системы дифференциальных уравнений (2.1), (2.3) описывают боковое движение нестабилизированного самолета. Последующий анализ модели покажет, что собственное движение самолёта является неустойчивым – ненулевые начальные условия приводят к неограниченному увеличению отклонения ЦМ (Y) от заданной траектории движения.

2.2 Система автоматического управления движением самолёта

Для стабилизации бокового движения самолета предлагается сформировать стабилизирующее управление $u_{st}(t)$ в виде *пропорциональной отрицательной обратной связи по состоянию* $x(t)$, которое может быть представлено с помощью формулы

$$u_{st}(t) = -K \cdot x(t) \quad (2.4)$$

или

$$u_{st}(t) = -(k_Y y(t) + k_\alpha \alpha(t) + k_\gamma \gamma(t)) = - \begin{bmatrix} k_Y & k_\alpha & k_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}.$$

Здесь $K = [k_Y \ k_\alpha \ k_\gamma]$ – вектор коэффициентов усиления в обратной связи по компонентам вектора состояния $[x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T = [Y(t) \ \alpha(t) \ \gamma(t)]^T$.

Для линейных стационарных систем управления вида (2.3) такая организация управления получила название *модальное управление*, а устройство, формирующее такое управление, – *модальный регулятор*. Структурная схема системы автоматического управления (САУ) боковым движением самолёта с модальным регулятором приведена на рисунке 2.2.

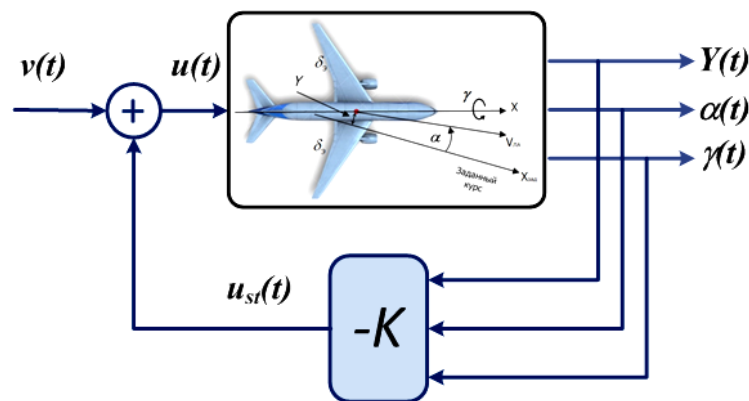


Рисунок 2.2 – Структурная схема стабилизирующей САУ

В целом, объект управления (самолёт) подвержен воздействию $u(t)$, представляющего собой сумму двух сигналов: внутреннего стабилизирующего $u_{st}(t)$ и внешнего $v(t)$:

$$u(t) = u_{st}(t) + v(t). \quad (2.5)$$

Математическую модель движения стабилизированного самолёта можно получить, подставив выражение для управления $u(t)$ из (2.5) в уравнение (2.3):

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) = A \cdot x(t) + B \cdot (u_{st}(t) + v(t)) = A \cdot x(t) - B \cdot K \cdot x(t) + B \cdot v(t)$$

или, после приведения подобных –

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A - B \cdot K) \cdot x(t) + B \cdot v(t), \quad x(t)|_{t=0} = x_0. \quad (2.6)$$

Матричный коэффициент обратной связи $K = [k_\gamma \ k_\alpha \ k_\gamma]$ следует выбрать таким, чтобы собственные числа матрицы $(A - B \cdot K)$ системы дифференциальных уравнений (2.6), описывающей движение стабилизированного самолета, были равны S_1 , S_2 и S_3 , в соответствии с вариантом задания, указанным в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Собственные числа матрицы стабилизированной САУ

№	Собственные числа матрицы $A - B \cdot K$ из (2.6)	
	S_1, S_2	S_3
1	$-0,1 \pm 0,25j$	-0,05
2	-0,02	-0,05
3	$-0,2 \pm 0,2j$	-0,06
4	-0,075	-0,075
5	-0,09	-0,045
6	$-0,1 \pm 0,2j$	-0,045
7	$-0,075 \pm 0,25j$	-0,06
8	$-0,2 \pm 0,25j$	-0,06
9	-0,15	-0,06
10	$-0,15 \pm 0,2j$	-0,05
11	$-0,1 \pm 0,24j$	-0,04
12	-0,1	-0,05
13	$-0,9 \pm 0,25j$	-0,045

№	Собственные числа матрицы $A - B \cdot K$ из (2.6)	
	S_1, S_2	S_3
16	$-0,2 \pm 0,2j$	-0,06
17	-0,15	-0,05
18	$-0,07 \pm 0,25j$	-0,07
19	$-0,075 \pm 0,15j$	-0,075
20	$-0,25 \pm 0,2j$	-0,05
21	$-0,9 \pm 0,2j$	-0,045
22	-0,15	-0,075
23	-0,08	-0,08
24	$-0,3 \pm 0,15j$	-0,06
25	$-0,1 \pm 0,3j$	-0,05
26	-0,09	-0,09
27	$-0,075 \pm 0,25j$	-0,075
28	$-0,09 \pm 0,2j$	-0,045

№	Собственные числа матрицы $A-B \cdot K$ из (2.6)	
	S_1, S_2	S_3
14	-0,15	-0,075
15	-0,9	-0,045

№	Собственные числа матрицы $A-B \cdot K$ из (2.6)	
	S_1, S_2	S_3
29	-0,09	-0,045
30	-0,08	-0,08

При моделировании вынужденного движения стабилизированной САУ боковым смещением следует использовать в качестве внешних возмущений $v(t)$ два вида воздействий – прямоугольно-импульсное возмущение $f_1(t)$ и гармоническое возмущение $f_2(t)$. Математические выражения для таких возмущений выбираются, в соответствии с вариантом задания, из таблицы 2.3.

Таблица 2.3 – Внешние возмущающие воздействия

№	$f_1(t)$	$f_2(t)$
1	$1(t-20)-1(t-30)$	$\sin 0,25t$
2	$1(t-30)-1(t-10)$	$\cos 0,25t$
3	$1(t-10)-1(t-20)$	$\sin 0,2t$
4	$1(t-20)-1(t-25)$	$\cos 0,2t$
5	$1(t)-1(t-30)$	$\sin 0,15t$
6	$1(t-30)-1(t)$	$\sin 0,2t$
7	$1(t-25)-1(t-30)$	$\cos 0,15t$
8	$1(t-10)-1(t-30)$	$\sin 0,25t$
9	$-1(t-10)+1(t-30)$	$\cos 0,25t$
10	$1(t-20)-1(t-30)$	$\sin 0,2t$
11	$1(t-30)-1(t-40)$	$\sin 0,24t$
12	$1(t-30)-1(t-20)$	$\cos 0,2t$
13	$1(t-30)-1(t-20)$	$\sin 0,25t$
14	$1(t-10)-1(t-20)$	$\cos 0,25t$
15	$1(t)-1(t-20)$	$\cos 0,15t$

№	$f_1(t)$	$f_2(t)$
16	$1(t-20)-1(t-25)$	$\sin 0,2t$
17	$1(t-20)-1(t)$	$\cos 0,2t$
18	$1(t)-1(t-30)$	$\sin 0,25t$
19	$1(t-30)-1(t-40)$	$\sin 0,15t$
20	$1(t-20)-1(t-30)$	$\sin 0,2t$
21	$1(t-20)-1(t-40)$	$\cos 0,2t$
22	$1(t-25)-1(t-30)$	$\sin 0,25t$
23	$1(t-40)-1(t-30)$	$\cos 0,25t$
24	$1(t-30)-1(t-20)$	$\cos 0,15t$
25	$1(t-20)-1(t-25)$	$\sin 0,15t$
26	$1(t-25)-1(t-30)$	$\sin 0,25t$
27	$1(t-30)-1(t-35)$	$\cos 0,25t$
28	$1(t-20)-1(t-40)$	$\sin 0,2t$
29	$1(t-40)-1(t-20)$	$\cos 0,2t$
30	$1(t)-1(t-30)$	$\sin 0,25t$

3 ЗАДАНИЯ И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РГР

В РГР необходимо провести предварительный анализ динамических свойств объекта управления, моделирование бокового движения нестабилизированного и стабилизированного самолёта путём численного решения систем ОДУ и решения ОДУ методами операционного исчисления (преобразования Лапласа).

3.1 Основные пункты задания РГР

1. *Формирование математической модели* бокового движения нестабилизированного самолёта в виде системы ОДУ в нормальной форме.
2. *Аналитическое решение* системы ОДУ для нестабилизированного самолёта в изображениях по Лапласу и получение изображений $Y(s)$ для случаев его собственного движения, двух вынужденных и двух общих движений. По расположению на комплексной плоскости особых точек изображения $Y(s)$ сделать выводы о характере решения $Y(t)$.

3. Выполнить задания предыдущего пункта в среде Matlab с использованием символьных операций.

4. Численное решение системы ОДУ средствами среды Matlab и построение графиков изменений значения $Y(t)$ (отклонения ЦМ нестабилизированного самолёта от заданной траектории) для случаев собственного движения, двух вынужденных и двух общих движений.

5. По изображениям $Y(s)$, полученным в пунктах 2 и 3 найти оригиналы всех движений $Y(t)$ аналитически и средствами Matlab. Построить графики движений по найденным аналитическим выражениям $Y(t)$. Сравнить графики движений с аналогичными результатами, полученными в пункте 4.

6. Найти коэффициенты обратной связи k_Y , k_α и k_γ , обеспечивающие матрице стабилизированной системы $A-B \cdot K$ собственные значения $\{S_1, S_2, S_3\}$, соответствующие варианту задания. Сформировать математическую модель стабилизированной системы управления боковым движением самолёта в виде соотношений (2.6).

7. Выполнить все пункты задания, начиная с 1-го по 5-ый включительно, для САУ движением стабилизированного самолёта (2.6).

Каждый пункт задания должен сопровождаться кратким анализом полученных результатов расчётов и построений.

3.2 Порядок выполнения РГР

1. Сформировать матрицы коэффициентов A , B и вектор начальных условий x_0 модели нестабилизированного самолёта (2.3) по соотношениям (2.1), (2.2) и в соответствии с данными таблицы 2.1. Выполнить указанные действия в среде Matlab.

2. Решить систему ОДУ для нестабилизированного самолёта в изображениях по Лапласу. Получить изображение отклонения $Y(s)$ в аналитическом виде как изображения собственного решения с начальным условием x_0 , двух вынужденных решений для каждого из внешних воздействий $f_1(t)$ и $f_2(t)$, двух общих решений.

3. Выполнить задания предыдущего пункта в среде Matlab с использованием символьных переменных и операций. Использовать функции **laplace**, **sym2poly**, **numden**, **roots**, **poles**.

4. Изобразить на комплексной плоскости особые точки изображений собственного, двух вынужденных и двух общих решений $Y(s)$ и по их расположению сделать выводы о характере решений (оригиналов $Y(t)$).

5. По изображениям $Y(s)$, полученным в пунктах 2 и 3 найти оригиналы всех движений $Y(t)$ (вручную и с использованием Matlab-функции **ilaplace**). Построить графики $Y(t)$ по найденным аналитическим выражениям (функции **plot** и **fplot**).

6. Использовать функцию **ode45** среды Matlab для численного решения систем ОДУ и получения собственного (для x_0), двух вынужденных (для $f_1(t)$ и $f_2(t)$) и двух общих (для $[x_0, f_1(t)]$ и для $[x_0, f_2(t)]$) движений. Построить графики полученных решений с помощью Matlab-функции **plot**.

Сравнить графики $Y(t)$ с аналогичными, полученными в результате выполнения заданий пункта 5.

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}; \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}; \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

Если все элементы матрицы $A(t)$ суть постоянные (числа), то системы (4.1) или (2.2) называют системами линейных ОДУ в нормальной форме с *постоянными параметрами* (коэффициентами). В дальнейшем мы будем работать с такими системами ОДУ.

В задачах управления системы ОДУ в нормальной форме часто используются для математического описания управляемого движения динамических объектов и систем. Математические модели линейных управляемых объектов с постоянными параметрами записывают в, так называемой, форме пространства состояний

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + f(t), \quad (4.3)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t). \quad (4.4)$$

Систему линейных ОДУ с постоянными параметрами (4.3) называют *уравнением состояния* объекта управления. Соотношение (4.4) носит название *уравнения выходов* объекта управления. Вектор искомых функций $x(t)$ – n -вектор состояния; вектор-функция $u(t)$ – m -вектор управляющих входов; вектор-функция $f(t)$ – n -вектор независимых внешних воздействий; вектор-функция $y(t)$ – p -вектор управляемых выходов. Числовые матрицы соответствующих размерностей $A(n \times n)$, $B(n \times m)$, $C(p \times n)$ и $D(p \times m)$ – матрицы коэффициентов объекта управления.

4.2 Преобразование Лапласа

Преобразованием Лапласа называется интегральное преобразование вида

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt, \quad (4.5)$$

ставящее в соответствие некоторой функции $f(t)$ действительной переменной t функцию $F(s)$ комплексной переменной s .

Функцию $f(t)$ называют *функцией-оригиналом*, если она удовлетворяет следующим условиям:

- $f(t)$ кусочно-непрерывная функция на всей вещественной неотрицательной полуоси t , в отдельных точках функция $f(t)$ может иметь разрывы первого рода, причём количество разрывов конечно на любом конечном интервале оси t ;

- функция $f(t) \equiv 0$ для всех $t < 0$;

- при возрастании t модуль $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т.е. существуют такие числа $M > 0$ и $a > 0$, что для всех t выполняется условие $|f(t)| \leq M \cdot e^{at}$.

Функцию $F(s) = L\{f(t)\}$ соответственно называют *функцией-изображением*.

Взаимное соответствие функций-оригиналов и функций-изображений оформляют в виде следующих представлений: $F(s) \div f(t)$; $F(s) = L\{f(t)\}$.

Приведём необходимые нам свойства преобразования Лапласа.

1. *Линейность*. Если $f(t)$ и $g(t)$ – функции-оригиналы, а $F(s)$ и $G(s)$ – соответственно их функции-изображения, то для любых чисел α и β

$$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t) \div \alpha \cdot F(s) + \beta \cdot G(s).$$

2. *Дифференцирование оригинала*. Пусть $f(t)$ – функция-оригинал и $F(s)$ – её изображение. Пусть производные $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ также являются функциями-оригиналами. Тогда

$$f'(t) \div s \cdot F(s) - f(+0),$$

$$f''(t) \div s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(+0) - f'(+0),$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$f^{(n)}(t) \div s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(+0) - s^{n-2} \cdot f'(+0) - \dots - f^{(n-1)}(+0).$$

Здесь под $f^{(k)}(+0)$ понимается правый предел значения $f^{(k)}(t)$ в точке 0

$$f^{(k)}(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t).$$

3. *Запаздывание оригинала*. Пусть $f(t)$ – функция-оригинал и $F(s)$ – её изображение, тогда $\forall \tau > 0$

$$f(t - \tau) \cdot 1(t - \tau) \div e^{-s\tau} \cdot F(s).$$

Здесь $1(t)$ – функция Хэвисайда – функция единичного скачка.

4. *Свёртка оригиналов*. Если $f(t)$ и $g(t)$ – функции-оригиналы, а $F(s)$ и $G(s)$ – соответственно их функции-изображения, то

$$F(s) \cdot G(s) \div \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau = \int_0^t f(t - \tau) \cdot g(\tau) \cdot d\tau = f(t) \otimes g(t).$$

5. *Отыскание оригиналов дробно-рациональных изображений*. Пусть $f(t)$ – функция-оригинал и $F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ – её изображение в форме правильной рациональной дроби комплексной переменной s . Тогда оригинал $f(t)$ может быть получен в виде суммы вычетов функции $F(s) \cdot e^{st}$ в полюсах s_k , $k=1, 2, \dots, m$ изображения $F(s)$ с учётом кратности n_k этих полюсов

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{n_k-1}}{ds^{n_k-1}} \{ F(s) \cdot (s - s_k)^{n_k} \cdot e^{st} \}.$$

Последнее выражение существенно упрощается, когда все полюсы s_k изображения $F(s)$ простые. В этом случае оригинал определяется так

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{B(s_k)}{A'(s_k)} e^{s_k \cdot t}.$$

4.3 Решение систем линейных стационарных ОДУ методом преобразования Лапласа

Наиболее эффективным методом интегрирования систем линейных ОДУ с постоянными коэффициентами считается *метод преобразования Лапласа*.

Пусть система ОДУ задана в векторно-матричной форме (4.3)

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + f(t). \quad (4.3)$$

Напомним, что здесь $x(t)$ – n -вектор искомых функций, $u(t)$ и $f(t)$ – m - и n -векторы внешних воздействий, соответственно, управляющего и независимого. $A(n \times n)$ и $B(n \times m)$ – числовые матрицы коэффициентов системы ОДУ. Предполагается, что для системы (4.3) известны значения искомого вектора $x(t)$ в начальный момент времени $t=0$, т.е., известны начальные условия

$$x_0 = x(0) = [x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)]^T. \quad (4.6)$$

Алгоритм решения (интегрирования) системы линейных стационарных ОДУ с использованием метода преобразования Лапласа содержит три основных шага.

1. Применение преобразования Лапласа к системе (4.3).
2. Решение системы линейных алгебраических уравнение в области изображений и нахождение изображения искомого вектора $X(s)$.
3. Получение оригинала искомого вектора $x(t)$ с помощью обратного преобразования Лапласа.

Выполнение шага 1. Применим преобразование Лапласа к системе ОДУ (4.3) и учтём свойства линейности и дифференцирования оригинала.

$$\begin{aligned} L \left\{ \frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + f(t) \right\} &\rightarrow s \cdot X(s) - x_0 = A \cdot X(s) + B \cdot U(s) + F(s) \rightarrow \\ &\rightarrow s \cdot X(s) - A \cdot X(s) = B \cdot U(s) + F(s) + x_0 \rightarrow \\ &\rightarrow (s \cdot I - A) \cdot X(s) = B \cdot U(s) + F(s) + x_0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь $X(s) \div x(t)$, $U(s) \div u(t)$, $F(s) \div f(t)$, x_0 – вектор начальных значений, I – единичная матрица размерности $n \times n$.

Выполнение шага 2. Из последнего соотношения получим явное выражение изображения общего решения $X(s)$ – искомой вектор-функции $x(t)$:

$$X(s) = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot [B \cdot U(s) + F(s)] + (s \cdot I - A)^{-1} \cdot x_0 = X_B(s) + X_C(s). \quad (4.8)$$

Первое слагаемое в (4.8)

$$X_B(s) = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot [B \cdot U(s) + F(s)] \quad (4.9)$$

представляет собой *изображение вынужденной составляющей* общего решения системы ОДУ.

Второе слагаемое в (4.8)

$$X_C(s) = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot x_0 \quad (4.10)$$

является *изображением собственной составляющей* общего решения системы ОДУ.

В теории динамических управляемых систем эти две составляющих общего решения системы ОДУ называют соответственно *вынужденным движением* $x_B(t)$ и *собственным движением* $x_C(t)$.

В силу свойства линейности преобразования Лапласа в изображении вынужденного движения (4.9) можно выделить два слагаемых $X_B(s) = X_U(s) + X_F(s)$:

– изображение вынужденного движения, вызванного управляющим воздействием $u(t)$

$$X_U(s) = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s); \quad (4.11)$$

– изображение вынужденного движения, вызванного независимым (неуправляемым) внешним воздействием $f(t)$

$$X_F(s) = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot F(s). \quad (4.12)$$

Выполнение шага 3. Применяя обратное преобразование Лапласа к изображениям $X_C(s)$, $X_U(s)$ и $X_F(s)$, определим функции-оригиналы всех трёх видов движений $x_C(t)$, $x_U(t)$ и $x_F(t)$, сложив которые, получим вектор-функцию $x(t) = x_C(t) + x_U(t) + x_F(t)$ — искомое *общее решение* системы линейных ОДУ с постоянными коэффициентами (4.3).

Наиболее трудоёмким является третий шаг алгоритма выполнения задачи нахождения решения системы ОДУ (4.3).

Как следует из формул (4.10), (4.11) и (4.12), изображения $X_C(s)$, $X_U(s)$ и $X_F(s)$ составляющих решения (движения) содержат в качестве первого множителя матричную функцию $(sI - A)^{-1}$ комплексной переменной s . Структурно матричную функцию $(sI - A)^{-1}$ можно представить в известной форме:

$$(s \cdot I - A)^{-1} = \frac{1}{\det(s \cdot I - A)} \cdot (s^{n-1} \cdot P_{n-1} + s^{n-2} \cdot P_{n-2} + \dots + s \cdot P_1 + P_0). \quad (4.13)$$

Здесь $\det(sI - A)$ — определитель (детерминант) матричной функции $(sI - A)$, представляющий собой полином n -ой степени с вещественными коэффициентами $\alpha_i, i=0, 1, \dots, n-1$ относительно комплексной переменной s — *характеристический полином* матрицы A

$$p(s) = s^n + \alpha_{n-1} \cdot s^{n-1} + \alpha_{n-2} \cdot s^{n-2} + \dots + \alpha_1 \cdot s + \alpha_0. \quad (4.14)$$

Числовые вещественнозначные матрицы $P_{n-1}, P_{n-2}, \dots, P_1, P_0$ служат матричными коэффициентами, образующими матричный $(n-1)$ -степени полином переменной s — присоединённую матрицу $\text{adj}(sI - A)$.

Нули характеристического полинома (4.14) вместе с нулями знаменателей дробно-рациональных изображений внешних воздействий $U(s)$ и $F(s)$ составляют всё множество полюсов изображения $X(s)$ искомой вектор-функции $x(t)$.

Используя пятое свойство преобразования Лапласа — образуя сумму вычетов функции-изображения $X(s) \cdot e^{st}$ в этих полюсах — получаем окончательное выражение для функции-оригинала $x(t)$ — решение системы ОДУ (4.3).

В Приложении А приведён пример решения конкретной системы линейных ОДУ в постоянными параметрами по описанному выше алгоритму.

4.4 Алгоритм синтеза стабилизирующего управления

В подразделе 2.1 предложен способ стабилизации бокового движения самолёта на основе *модального регулятора*, с помощью которого управляющий (стабилизирующий) сигнал $u_{st}(t)$ формируется в виде (2.4) — *пропорциональной отрицательной обратной связи по состоянию* объекта управления (самолёта). В этом случае математическая модель САУ боковым движением самолёта представляется уравнением состояния (2.6) и матрица динамики САУ становится равной A —

В·К. Значения *собственных чисел* матрицы **A-B·K** определяют, в том числе, и факт устойчивости/неустойчивости САУ движением самолёта.

В матрице **A-B·K**, в свою очередь, значения элементов матрицы обратной связи **K=[k_γ k_α k_γ]** (коэффициентов модального регулятора) пока не определены и от их выбора зависят значения собственных чисел **A-B·K**.

По заданию РГР коэффициенты **[k_γ k_α k_γ]** следует назначить такими, чтобы собственные числа матрицы (**A-B·K**) системы дифференциальных уравнений (2.6), описывающей движение САУ стабилизированного самолета, были бы равными **S₁**, **S₂** и **S₃**, значения которых определяются для каждого варианта из таблицы 2.2

Для существования решения сформулированной выше задачи необходимо и достаточно, чтобы пара матриц **{A,B}** была бы *управляемой*. Проверить справедливость этого свойства для матриц **A** и **B** можно путём определения *ранга* матрицы управляемости **U**:

$$U=[B \ A \cdot B \ A^2 \cdot B \ \dots \ A^{n-1} \cdot B].$$

Если **rankU=n** (где **n** – размерность квадратной матрицы **A**), то пара матриц **{A,B}** *управляема*.

Когда пара **{A,B}** управляема и матрица **B** представляет собой матрицу-столбец, то решение задачи о синтезе модального регулятора имеет единственное решение.

Из выражений (2.2) для матриц модели движения самолёта **A** и **B** следует, что матрица **B** представляет собой столбец 3×1, а матрица управляемости **U** может быть получена в общем виде как

$$U = [B : AB : A^2B] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{\gamma u} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & a_{Y\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & a_{\alpha\gamma} \\ 0 & 0 & a_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{\gamma u} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & a_{Y\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & a_{\alpha\gamma} \\ 0 & 0 & a_{\gamma\gamma} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{\gamma u} \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{\gamma u} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ a_{\alpha\gamma} a_{\gamma u} \\ a_{\gamma\gamma} a_{\gamma u} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & a_{Y\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & a_{\alpha\gamma} \\ 0 & 0 & a_{\gamma\gamma} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{\gamma u} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{Y\alpha} a_{\alpha\gamma} a_{\gamma u} \\ 0 & a_{\alpha\gamma} a_{\gamma u} & a_{\alpha\gamma} a_{\gamma\gamma} a_{\gamma u} \\ a_{\gamma u} & a_{\gamma\gamma} a_{\gamma u} & a_{\gamma\gamma}^2 a_{\gamma u} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Матрица управляемости **U** квадратная размерности **n=3**. Чтобы пара матриц **{A,B}** была управляемой необходимо и достаточно равенство трём ранга матрицы **U**. Так как матрица **U**, то её невырожденность означает, что **rankU=n=3**. Из представления для **U** (4.15) с очевидностью следует, что определитель матрицы управляемости **U** равен **a_{γu}³ a_{αγ}² a_{Yα} ≠ 0** для всех вариантов РГР.

Алгоритм синтеза модального регулятора (нахождение матрицы регулятора **K=[k_γ k_α k_γ]**) основан на определении собственных чисел матрицы как нулей её характеристического многочлена. Характеристический многочлен матрицы **A-B·K** определяется как

$$q_{A-BK}(s) = \det[sI - (A - B \cdot K)] =$$

$$= s^n + \beta_{n-1} \cdot s^{n-1} + \beta_{n-2} \cdot s^{n-2} + \dots + \beta_1 \cdot s + \beta_0. \quad (4.16)$$

Если известны все собственные числа $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ некоторой неизвестной матрицы M , то характеристический многочлен этой матрицы формируется так:

$$\begin{aligned} q_n(s) &= \det(sI - M) = (s - S_1)(s - S_2) \dots (s - S_{n-1})(s - S_n) = \\ &= s^n + \alpha_{n-1} \cdot s^{n-1} + \alpha_{n-2} \cdot s^{n-2} + \dots + \alpha_1 \cdot s + \alpha_0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

В представлении (4.16) коэффициенты β_i характеристического многочлена $q_{A-BK}(s)$ матрицы $A-B \cdot K$ зависят от неопределённых пока элементов k_Y , k_α и k_γ матрицы обратной связи K . В представлении (4.17) значения всех коэффициентов α_i характеристического многочлена $q_n(s)$ известны, т.к. известны все собственные числа $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ матрицы M .

В нашем случае размерность объекта управления $n=3$, тогда, с учётом выражений (2.2) для матриц A , B и представления $K=[k_Y \ k_\alpha \ k_\gamma]$, характеристический многочлен (4.16) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} q_{A-BK}(s) &= \det[sI - (A - B \cdot K)] = \det \left[s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & a_{Y\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & a_{\alpha\gamma} \\ 0 & 0 & a_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{\gamma u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_Y & k_\alpha & k_\gamma \end{bmatrix} \right) \right] = \\ &= \det \left[\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{Y\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & a_{\alpha\gamma} \\ -k_Y a_{\gamma u} & -k_\alpha a_{\gamma u} & a_{\gamma\gamma} - k_\gamma a_{\gamma u} \end{bmatrix} \right] = \det \begin{bmatrix} s & -a_{Y\alpha} & 0 \\ 0 & s & -a_{\alpha\gamma} \\ k_Y a_{\gamma u} & k_\alpha a_{\gamma u} & s - a_{\gamma\gamma} + k_\gamma a_{\gamma u} \end{bmatrix} = \\ &= s^3 + (k_\gamma a_{\gamma u} - a_{\gamma\gamma})s^2 + k_\alpha a_{\alpha\gamma} a_{\gamma u} s + k_Y a_{Y\alpha} a_{\alpha\gamma} a_{\gamma u}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Характеристический многочлен (4.17) для $n=3$ можно записать так:

$$\begin{aligned} q_3(s) &= \det(sI - M) = (s - S_1)(s - S_2)(s - S_3) = \\ &= s^3 + (-S_1 - S_2 - S_3)s^2 + (S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3)s + (-S_1 S_2 S_3). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Для того, чтобы многочлены (4.18) и (4.19) имели одинаковый набор нулей необходимо и достаточно совпадение их коэффициентов при одинаковых степенях переменной s . В нашем случае это совпадение коэффициентов выражается следующей системой соотношений:

$$\begin{cases} k_\gamma a_{\gamma u} - a_{\gamma\gamma} = -S_1 - S_2 - S_3, \\ k_\alpha a_{\alpha\gamma} a_{\gamma u} = S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3, \\ k_Y a_{Y\alpha} a_{\alpha\gamma} a_{\gamma u} = -S_1 S_2 S_3. \end{cases} \quad (4.20)$$

Решив систему (4.20) относительно неизвестных k_Y , k_α и k_γ , получим матрицу $K=[k_Y \ k_\alpha \ k_\gamma]$, которая обеспечивает матрице динамики стабилизированного самолёта требуемый набор собственных чисел $\{S_1, S_2, S_3\}$ из Таблицы 2.2.

5 ОФОРМЛЕНИЕ ПОЯСНИТЕЛЬНОЙ ЗАПИСКИ К РГР

5.1 Общие требования к структуре и содержанию ПЗ

Рекомендации по оформлению пояснительной записки (ПЗ) к РГР основаны на материалах ГОСТ 7.32-2017 СИБИД. Отчет о НИР. Структура и правила оформления¹.

Структурно в ПЗ к РГР выделяют титульный лист, содержание ПЗ, исходные данные к РГР, основную часть, заключение, список использованных источников и приложения.

Титульный лист оформляется в виде специального бланка (Приложение Б).

Содержание включает в себя номера и наименования основных пунктов заданий РГР, начиная с исходных данных, с указанием номеров страниц.

Во **Введении** следует кратко изложить основные цели и задачи РГР.

Основная часть ПЗ состоит из разделов, содержащих постановки и решения задач, сформулированных в основных пунктах задания на РГР (подраздел 3.1 настоящих указаний): первые пять пунктов – исследование нестабилизированного самолёта; шестой пункт – синтез регулятора состояния; последние пять пунктов – исследование стабилизированного самолёта. Каждый раздел задания сопровождается краткими выводами по существу сделанного.

В **Заключении** необходимо перечислить и кратко охарактеризовать результаты выполнения заданий, сформулировать основные выводы по работе.

Список использованных источников должен включать названия только тех источников (книг, статей, интернет-ссылок и т.п.), на которые в тексте ПЗ имеются ссылки.

Приложения содержат материалы, которые исполнитель по каким-либо причинам не счёл необходимым включить в основной текст ПЗ. Сюда могут быть помещены громоздкие ручные математические выкладки, тексты программ, таблицы результатов эксперимента, графики, иллюстрации, описания основного программного обеспечения и вспомогательных пакетов и библиотек и т.п.

Текст в разделах ПЗ должен быть кратким, чётким и не допускать различных толкований. Необходимо применять термины общепринятые в научно-технической литературе. Не допускается применять обороты разговорной речи, техницизмы, профессионализмы, сленг.

Полный объем ПЗ в листах формата А4 не лимитирован.

5.2 Общие требования к оформлению ПЗ

ПЗ к РГР оформляют на листах белой бумаги формата А4 (210х297мм) компьютерным способом на одной стороне листа. Текст следует печатать, соблюдая следующие размеры полей: левое – 3 см, правое – 1,5 см, верхнее и нижнее – 2 см. Разрешается использовать компьютерные возможности акцентирования внимания, применяя шрифты разной гарнитуры и стиля.

¹ ГОСТ 7.32-2017 СИБИД. Отчет о НИР. Структура и правила оформления [Текст]. – Введ. 2018–07–01. – М.: Стандартинформ, 2018. – 27 с.

Нумерация страниц ПЗ осуществляется арабскими цифрами в центре нижней части листа без точки в конце тем же шрифтом и размером, что и основной текст ПЗ. Используется сквозная нумерация, т.е. номера присваиваются всем без исключения страницам ПЗ, включая титульный. При этом титульный лист ПЗ не нумеруется, но в сквозной нумерации учитываются. В нашем случае всегда лист "Содержание" будет иметь номер 2.

Заголовки структурных элементов ПЗ печатают заглавными полужирными буквами без точки в конце и центрируют (**СОДЕРЖАНИЕ, ВВЕДЕНИЕ, ЗАКЛЮЧЕНИЕ, СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ, ПРИЛОЖЕНИЕ**).

Основная часть работы делится на разделы, подразделы, пункты и подпункты. Разделы ПЗ имеют порядковую нумерацию и обозначаются арабскими цифрами без завершающей точки. **Подразделы** должны иметь порядковую нумерацию **в пределах своего раздела**. Номер подраздела состоит из номера раздела и порядкового номера подраздела, разделённых точкой (например, 2.3 – подраздел 3 раздела 2). После номера подраздела точка не ставится. **Пункты** подраздела требуют "тройной" нумерации (например, 2.3.4 – пункт 4 в подразделе 3 раздела 2). ГОСТ допускает "четверную" нумерацию для **подпунктов**. Последующие уровни нумерации ГОСТом не предусмотрены. Разделы и подразделы **должны** иметь заголовки, а пункты и подпункты могут их иметь. **Все заголовки** элементов **основной части** следует печатать полужирным шрифтом с основного абзацного отступа строчными буквами, начиная с прописной, без точки в конце, не подчёркивая. Если заголовок состоит из нескольких предложений, то их разделяют точкой. Переносы слов в заголовках не допускаются.

5.2.1 Текст и перечисления

Для набора текста в качестве основного шрифта следует применять шрифт **Times New Roman**. Оформление заголовков допускается осуществлять шрифтом Arial. Размер символов – 14 пунктов.

Междустрочный интервал в тексте – одинарный. Абзацный отступ – один по всему тексту, равный 1,25 см. Выравнивание текста в абзаце – по ширине. Не разрешается оставлять одну строку абзаца на странице. Допускается перенос слов в основном тексте.

Текст компьютерных программ рекомендуется набирать шрифтом **Courier**, размером 12 пунктов.

Каждый **структурный элемент** ПЗ и каждый **раздел основной части** ПЗ должен начинаться с новой страницы.

Все заголовки от основного текста отделяются одной пустой строкой. Междустрочный интервал для следующих подряд один за другим заголовков выбирается таким же, как и в основном тексте.

Не допускается размещать наименование подраздела, пункта и подпункта в нижней части страницы, если после него расположена только одна строка текста.

Перечисления (списки) используются внутри любых структурных единиц документа и могут иметь уровни детализации. Перед перечислением ставится двоеточие. Каждая позиция перечисления **первого** уровня детализации начинается с

абзацного отступа и обозначается строчной буквой национального алфавита с последующей закрывающей круглой скобкой или, если не требуется идентификация позиции, обозначается дефисом. При наличии конкретного числа перечислений допускается перед каждым элементом перечисления ставить арабские цифры, после которых ставится скобка. Перечисления приводятся с абзацного отступа в столбик. Для дальнейшей детализации (**второй** и последующие уровни) перечисления используются дефис или арабские цифры со скобкой, располагаемые с отступом относительно положения элементов перечислений первого уровня детализации.

5.2.2 Формулы и уравнения

Формулы и уравнения располагают и **центрируют** в отдельных строках непосредственно после текста, в котором они упомянуты. Выше и ниже каждой формулы или уравнения необходимо оставить не менее одной пустой строки. Применяется сквозная порядковая нумерация математических выражений **в пределах раздела**. Номер формулы состоит из двух чисел, разделённых точкой – номера раздела и порядкового номера формулы в разделе. Нумеруются **только** те формулы и уравнения, на которые имеются ссылки в тексте ПЗ.

Номера записываются в круглых скобках на уровне формулы или уравнения в **крайнем правом** положении в строке.

Пояснения значений символов и числовых коэффициентов приводят непосредственно под формулой или уравнением в той последовательности, в которой они встречаются. Пояснения для каждого символа следует давать с новой строки. Первую строку пояснений начинают с абзацного отступа словом "где" без двоеточия. Перенос формулы или уравнения на следующую строку допускается только на знаках выполняемых операций, причём знак операции повторяется на следующей строке. Идущие в последовательных строках формулы, не разделённые текстом, отделяются запятыми. Размеры символов в редакторе формул следует выбирать такими: обычный – 14 пт; крупный индекс – 9 пт; мелкий индекс – 7 пт; крупный символ – 22 пт; мелкий символ – 14 пт.

5.2.3 Иллюстрации

Иллюстрации (чертежи, рисунки, графики, схемы) следует помещать непосредственно после текста, в котором они упоминаются впервые или на следующей странице. На одной странице можно располагать несколько иллюстраций. На все иллюстрации в тексте должны быть ссылки. Если иллюстрация создана не автором работы, необходимо указать библиографическую ссылку на её источник. Иллюстрации **могут** иметь названия, которые помещаются **под** иллюстрацией. При необходимости, **между** иллюстрацией и её названием размещают поясняющие данные (подрисовочный текст).

Любая иллюстрация, имеющая название, обозначается словом "Рисунок" с последующими атрибутами – номер, дефис и собственно название иллюстрации. Например, "Рисунок 3.1 – График переходного процесса". Вся эта фраза центрируется под рисунком. Нумерация иллюстраций осуществляется арабскими цифрами по порядку в **пределах раздела**. Точка после последней цифры в номере не ставится. Если иллюстрация не уместится на одной странице, то её можно переносить на последующие страницы. При этом название иллюстрации обязательно должно

присутствовать на первой странице. На каждой последующей странице под продолжением рисунка могут размещаться поясняющие данные и под ними **обязательно** приводят обозначение продолжения рисунка, например, "Рисунок 2.12, лист 2".

5.2.4 Таблицы

Таблицу располагают сразу после ссылки на неё в тексте или на следующей странице. На каждую таблицу в работе должна быть ссылка. Таблицы **могут** иметь краткие названия, которые помещают без абзацного отступа слева над таблицами. Нумеруют таблицы арабскими цифрами по порядку в **пределах раздела**. Точка после последней цифры в номере не ставится. При переносе части таблицы на другие страницы для этих частей повторяют головные строки таблицы (головные строки допускается заменять номерами граф или строк), **над** которыми пишут "Продолжение таблицы ХХХ". Заголовки колонок печатают, начиная с прописных букв, а подзаголовки, если они составляют одно предложение с заголовком, – со строчных, иначе – также с прописных, без точек в конце и в единственном числе.

5.2.5 Библиографический список

Ссылки на библиографические источники указывают их порядковыми номерами, помещёнными в квадратные скобки. Например, [2, 3, 7 – 12]. Ссылки на источники оформляют в виде перечня отдельным **структурным элементом** ПЗ с названием **"БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК"**.

Сведения об источниках располагают в порядке появления ссылок на источники в тексте ПЗ, нумеруют арабскими цифрами с точкой и печатают с абзацного отступа. Примеры оформления элементов списка источников приведены ниже.

1. Математические основы теории автоматического управления: Учеб. пособие: В 3 т. / Под ред. Б.К. Чегодамова. – 3-е изд., перераб и доп. – Т. 1. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 552 с.

2. Брайсон А. Новые идеи по теории управления /А. Брайсон//Аэрокосмическая техника. – 1986. – № 8. – С. 31-42.

3. Гайдук, А.Р. Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB : учебное пособие / А.Р. Гайдук, В.Е. Беляев, Т.А. Пьявченко. — 5-е изд., испр. и доп. — СПб.: Лань, 2019. — 464 с. — Текст: электронный // Лань: ЭБС. — URL: <https://e.lanbook.com/book/125741> (дата обращения: 25.02.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

4. Chu E.K. Optimization and Pole Assignment in Control System Design /E.K. Chu//Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2001, Vol. 11, No.5, pp.1035-1053.

5. Никульчев Е.В. Пособие "Control System Toolbox". Синтез оптимального управления с полной обратной связью [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://matlab.exponenta.ru/controlsystem/book1/5.php>. – Загл. с экрана. Яз.рус.

5.2.6 Приложения

Приложения, как и любые структурные элементы ПЗ, начинаются с новой страницы. Объёмные приложения могут иметь свою внутреннюю автономную структуру, включая разделы, подразделы, пункты и подпункты. На первой странице Приложения в первой его строке посередине и прописными буквами печатают

слово ПРИЛОЖЕНИЕ и прописную букву (без завершающей точки), обозначающую приложение – ПРИЛОЖЕНИЕ А. Приложения обозначают заглавными буквами национального алфавита, начиная с А, за исключением букв (Ё, З, Й, О, Ч, Ь, Ы, Ъ). Если приложение в ПЗ единственное, то оно также обозначается буквой А.

Приложения могут быть **обязательными** или **информационными** (рекомендуемыми или справочными). Поэтому, в следующей, после слова "ПРИЛОЖЕНИЕ", строке в круглых скобках строчными буквами печатают одно из слов: "обязательное", "справочное" или "рекомендуемое". Каждое Приложение должно иметь заголовок (название Приложения), который печатается в третьей сверху строке строчными буквами с первой прописной и центрируется.

Для нумерации страниц Приложений используется сквозная нумерация в пределах всей ПЗ. Иллюстрации, таблицы, формулы нумеруют в пределах всего Приложения (не разделов Приложения), например, "Рисунок Б.5 – График собственного решения". Перед каждым номером структурной части Приложения также проставляют обозначение Приложения (букву), например, Б.3.2. (второй подраздел третьего раздела Приложения Б).

Ссылки на источники, цитируемые только в Приложении, рассматриваются независимо от ссылок в основных разделах ПЗ. Перечень таких ссылок должен быть оформлен как отдельный раздел Приложения и помещён в конце этого Приложения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Математические основы теории автоматического управления: Учеб. пособие: В 3 т. / Под ред. Б.К. Чемоданова. – 3-е изд., перераб и доп. – Т. 1. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 552 с.
2. Математические основы теории автоматического управления: Учеб. пособие: В 3 т. / Под ред. Б.К. Чемоданова. – 3-е изд., перераб и доп. – Т. 2. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 616 с.
3. Крамарь, В.А. Специальные разделы математики: Практикум. / В.А. Крамарь, В.А. Карапетьян, В.В. Альчаков. — М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2019. — 123 с. — URL: <https://znanium.com/catalog/product/1019406> (дата обращения: 20.07.2022).
4. Карапетьян, В.А. Средства Matlab в задачах анализа и синтеза линейных стационарных САУ: учебное пособие / В.А. Карапетьян, В.А. Крамарь. — 2-е изд., доп. и испр. — М.: Центркаталог, 2021. — 240 с. — Текст: электронный // Лань: ЭБС. — URL: <https://e.lanbook.com/book/223733> (дата обращения: 20.07.2022).
5. Гайдук, А.Р. Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB: учебное пособие для вузов / А.Р. Гайдук, В.Е. Беляев, Т.А. Пьявченко. — 6-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2022. — 464 с. — Текст: электронный // Лань: ЭБС. — URL: <https://e.lanbook.com/book/200441> (дата обращения: 20.07.2022).
6. Амос, Г. MATLAB. Теория и практика / Г. Амос; перевод с англ. Н.К. Смоленцев. — 5-е изд. — М.: ДМК Пресс, 2016. — 416 с. — Текст: электронный // Лань: ЭБС. — URL: <https://e.lanbook.com/book/82814>.
7. Дьяконов В.П. MATLAB. Полный самоучитель /В.П. Дьяконов. – М.: ДМК Пресс, 2012. – 768 с.
8. MATLAB® Primer. – The MathWorks, Inc., 2022. – 142 p.
9. MATLAB® Mathematics – The MathWorks, Inc., 2022. – 708 p.
10. Symbolic Math Toolbox™ User's Guide. – The MathWorks, Inc., 2022. – 2266 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

(рекомендуемое)

Решение системы ОДУ в нормальной форме

А1 Решения системы ОДУ методом преобразования Лапласа

Рассмотрим, в качестве примера, систему из трёх линейных ОДУ с постоянными коэффициентами в нормальной форме (в форме Коши)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = -2 \cdot x_1(t) - 5 \cdot x_2(t) - 4 \cdot x_3(t) + u(t) + g(t). \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Пусть здесь:

– внешнее управляющее воздействие $u(t)=1(t)$ – функция единичного скачка (функция Хэвисайда);

– внешнее независимое воздействие $g(t)=\sin(2 \cdot t)$ – гармоническая функция;

– заданы начальные условия $x_1(0)=2$, $x_2(0)=-1$, $x_3(0)=0$.

Перепишем систему (А.1) в векторно-матричной форме

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + f(t).$$

В нашем примере: искомая функция $x(t)$ имеет размерность 3 (векторная функция); внешнее управляющее воздействие $u(t)$ имеет размерность 1 (скалярная функция); вектор-функция внешнего независимого воздействия $f(t)$ имеет размерность 3; числовая матрица коэффициентов A – квадратная, размерности 3×3 ; числовая матрица коэффициентов при внешнем управляющем входе B – вектор столбец размерности 3×1 .

Приведём структуры и значения всех векторов и матриц системы (А.1):

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}; \quad u(t) = [u(t)]; \quad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g(t) \end{bmatrix}; \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Выполним *первый шаг* алгоритма для решения системы (А.1). Применяя преобразование Лапласа к системе ОДУ (А.1), получим выражение вида (4.7) для нашего примера в следующем виде

$$\left(s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot U(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Выполним *второй шаг* алгоритма. Получив изображения по Лапласу внешних воздействий:

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}; \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(2t) \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{s^2 + 2^2} \end{bmatrix},$$

запишем явное выражение для изображения $\mathbf{X}(s)$ общего решения (4.8)

$$\mathbf{X}(s) = \left(s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{s^2 + 2^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Изображение $\mathbf{X}_B(s) = \mathbf{X}_U(s) + \mathbf{X}_F(s)$ вынужденного движения (4.9) –

$$\mathbf{X}_B(s) = \left(s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{s^2 + 2^2} \end{bmatrix} \right).$$

Изображение $\mathbf{X}_C(s)$ собственного движения (4.10) –

$$\mathbf{X}_C(s) = \left(s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Приступим к выполнению *третьего шага* алгоритма.

Найдём характеристический полином матрицы коэффициентов A

$$\det \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 2 & 5 & s+4 \end{vmatrix} = s^3 + 4s^2 + 5s + 2 = (s+1)^2 (s+2).$$

Определим присоединённую матрицу $\mathbf{adj}(s\mathbf{I} - A)$

$$\mathbf{adj}(s\mathbf{I} - A) = \mathbf{adj} \begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 2 & 5 & s+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 + 4s + 5 & s + 4 & 1 \\ -2 & s(s+4) & s \\ -2s & -5s - 2 & s^2 \end{pmatrix}.$$

Матрица-резольвента $(sI-A)^{-1}$ имеет вид

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} \begin{pmatrix} s^2 + 4s + 5 & s + 4 & 1 \\ -2 & s(s+4) & s \\ -2s & -(5s+2) & s^2 \end{pmatrix}.$$

Получим изображения собственного движения $X_C(s)$ и вынужденных управляемого $X_U(s)$ и неуправляемого $X_F(s)$ движений:

$$X_C(s) = (sI - A)^{-1} \cdot x_0 = (sI - A)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2s+3}{(s+1)^2} \\ -\frac{(s+2)}{(s+1)^2} \\ \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix},$$

$$X_U(s) = (sI - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) = (sI - A)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)^2(s+2)} \\ \frac{s(s+1)^2(s+2)}{(s+1)^2(s+2)} \\ \frac{1}{s(s+1)^2(s+2)} \end{bmatrix},$$

$$X_F(s) = (sI - A)^{-1} \cdot F(s) = (sI - A)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{s^2+4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{(s^2+4)(s+1)^2(s+2)} \\ \frac{2s}{(s^2+4)(s+1)^2(s+2)} \\ \frac{2s^2}{(s^2+4)(s+1)^2(s+2)} \end{bmatrix}.$$

Оригиналы трёх составляющих движений – собственного $x_C(t)$ и двух вынужденных $x_U(t)$ и $x_F(t)$ получим, применив процедуру обратного преобразования Лапласа к соответствующим изображениям $X_C(s)$, $X_U(s)$ и $X_F(s)$:

– собственное движение $x_C(t)$ –

$$x_C(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_C(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{2s+3}{(s+1)^2} \\ -\frac{(s+2)}{(s+1)^2} \\ \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1+2(s+1)}{(s+1)^2} \\ -\frac{1+(s+1)}{(s+1)^2} \\ \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} (t+2) \cdot e^{-t} \\ -(t+1) \cdot e^{-t} \\ t \cdot e^{-t} \end{bmatrix};$$

– вынужденное управляемое движение $x_U(t)$ –

$$x_U(t) = \mathbf{L}^{-1} \{X_U(s)\} = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)^2(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} \\ \frac{s}{(s+1)^2(s+2)} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0,5 - te^{-t} - 0,5e^{-2t} \\ (t-1)e^{-t} + e^{-2t} \\ (2-t)e^{-t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix};$$

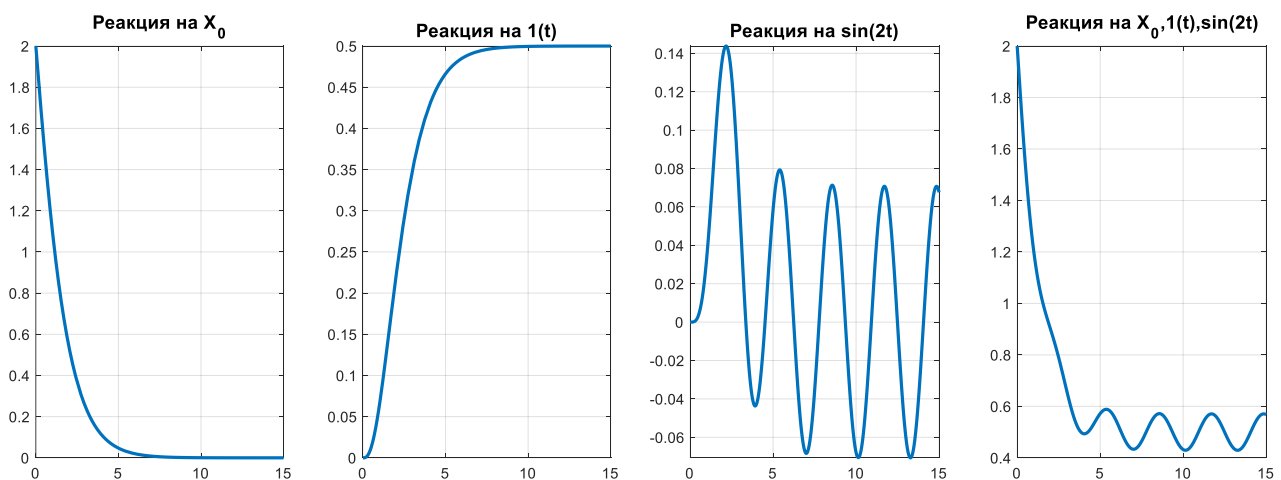
– вынужденное неуправляемое движение $x_F(t)$ –

$$x_F(t) = \mathbf{L}^{-1} \{X_F(s)\} = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{(s^2+4)(s+1)^2(s+2)} \\ \frac{2s}{(s^2+4)(s+1)^2(s+2)} \\ \frac{2s^2}{(s^2+4)(s+1)^2(s+2)} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0,25e^{-2t} - 0,07 \sin 2t - 0,01 \cos 2t + e^{-t}(0,4t - 0,24) \\ -0,5e^{-2t} + 0,02 \sin 2t - 0,14 \cos 2t - e^{-t}(0,4t - 0,64) \\ e^{-2t} + 0,28 \sin 2t + 0,04 \cos 2t + e^{-t}(0,4t - 1,04) \end{bmatrix}.$$

Общее решение системы (А.1) находится как сумма собственного и вынужденного решений $x(t) = x_C(t) + x_U(t) + x_F(t)$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - 0,07 \sin 2t - 0,01 \cos 2t - 0,25e^{-2t} + e^{-t}(0,4t - 0,24) + 0,5 \\ 0,02 \sin 2t - 0,14 \cos 2t - 2e^{-t} + 0,5e^{-2t} - e^{-t}(0,4t - 0,64) \\ 0,04 \cos 2t + 0,28 \sin 2t + 2e^{-t} - e^{-2t} + e^{-t}(0,4t - 1,04) \end{bmatrix}.$$

Графики решений системы (А.1) для компоненты $x_1(t)$ приведены ниже.



A2 Пример выполнения программы в Matlab

В Matlab-программе используются следующие функции:

Функция	Назначение функции
clc	Очистка командного окна Matlab
clear	Очистка рабочей области Matlab
det	Вычисление детерминанта (определителя) матрицы
eye	Формирование единичной матрицы
fplot	Построение графика по символьному выражению функции
heaviside	Вычисление значения функции Хэвисайда $1(t)$
ilaplace	Выполняет процедуру обратного преобразования Лапласа
laplace	Выполняет процедуру прямого преобразования Лапласа
plot	Построение двумерного графика в декартовых координатах
simplify	Выполняет алгебраическое упрощение символьного выражения
sin	Вычисление значения функции синуса
solve	Решение системы алгебраических уравнений
subplot	Выделяет поле для изображения графика в графическом окне
syms	Объявление символьных переменных
title	Вывод титульной надписи в заголовок поля графика
vpa	Преобразование чисел из символьной формы в десятичную

```

clc; clear
%% Исходные данные примера МУ к РГР
A=[0 1 0; 0 0 1; -2 -5 -4];
B=[0;0;1];
C=[1 0 0]; D=[0];
x0=[2;-1;0];
n=3; m=1; p=1;
% входные воздействия u(t) и f(t)
% u(t)=heaviside(t) f(t)=[0;0;sin(2*t)]
syms t s;
% Оригиналы и изображения входных воздействий на систему
u_t=heaviside(t);
f_t=[0; 0; sin(2*t)];
U_s=laplace(u_t);
F_s=laplace(f_t);
% Определение резольвенты матрицы A
As=s*eye(3)-A;
Res=simplify(As^-1);
% Определение изображений движений исходной системы
Xc=Res*x0;
XU_s=Res*B*U_s;
XF_s=Res*F_s;
% Определение оригиналов движений исходной системы
Xc_t=ilaplace(Xc);
Xu_t=ilaplace(XU_s);
Xf_t=ilaplace(XF_s);
Xcuf_t=Xc_t+Xu_t+Xf_t;

```

```

% Построение графиков движений исходной системы
tk=15;
subplot(1,4,1); fplot(Xc_t(1),[0 tk]); grid on
title('Реакция на X_0');
subplot(1,4,2); fplot(Xu_t(1),[0 tk]); grid on
title('Реакция на 1(t)');
subplot(1,4,3); fplot(Xf_t(1),[0 tk]); grid on
title('Реакция на sin(2t)');
subplot(1,4,4); fplot(Xcuf_t(1),[0 tk]); grid on
title('Реакция на X_0,1(t),sin(2t)');
%% Построение модели САУ
syms Ky Ka Kg
Koc=[Ky Ka Kg];
Aoc=A-B*Koc; vpa(Aoc,4);
pol=collect(det(s*eye(3)-Aoc),s);
pol1=flipplr(coeffs(pol,s));
koef=poly([-1 -0.8 -0.7]);
koef=poly([-3 -3 -3]);
[Ky,Ka,Kg]=solve(pol1(2:end)==koef(2:end),Ky,Ka,Kg);
K=[Ky Ka Kg];
Aoc=A-B*K;
Aoc_s=s*eye(3)-Aoc;
Res_oc=Aoc_s^-1;
% Определение изображений движений САУ
Xc_oc=Res_oc*x0;
XU_s_oc=Res_oc*B*U_s;
XF_s_oc=Res_oc*F_s;
% Определение оригиналов движений САУ
Xc_t_oc=ilaplace(Xc_oc);
Xu_t_oc=ilaplace(XU_s_oc);
Xf_t_oc=ilaplace(XF_s_oc);
Xcuf_t_oc=Xc_t_oc+Xu_t_oc+Xf_t_oc;
% Построение графиков движений САУ
figure
subplot(1,4,1); fplot(Xc_t_oc(1),[0 tk]); grid on
title('Реакция на X_0');
subplot(1,4,2); fplot(Xu_t_oc(1),[0 tk]); grid on
title('Реакция на 1(t)');
subplot(1,4,3); fplot(Xf_t_oc(1),[0 tk]); grid on
title('Реакция на sin(2t)');
subplot(1,4,4); fplot(Xcuf_t_oc(1),[0 tk]); grid on
title('Реакция на X_0,1(t),sin(2t)')

```

Графические результаты расчётов

Графики решений $x_1(t)$ для исходной и синтезированной систем приведены на рисунках А1 и А2.

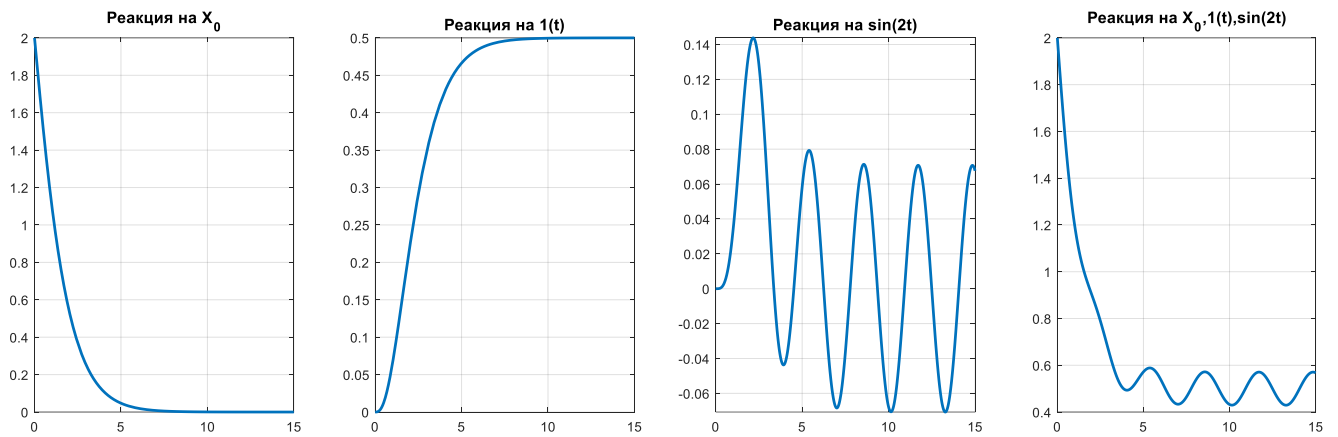


Рисунок А.1 – Графики решений компоненты $x_1(t)$ для исходной системы

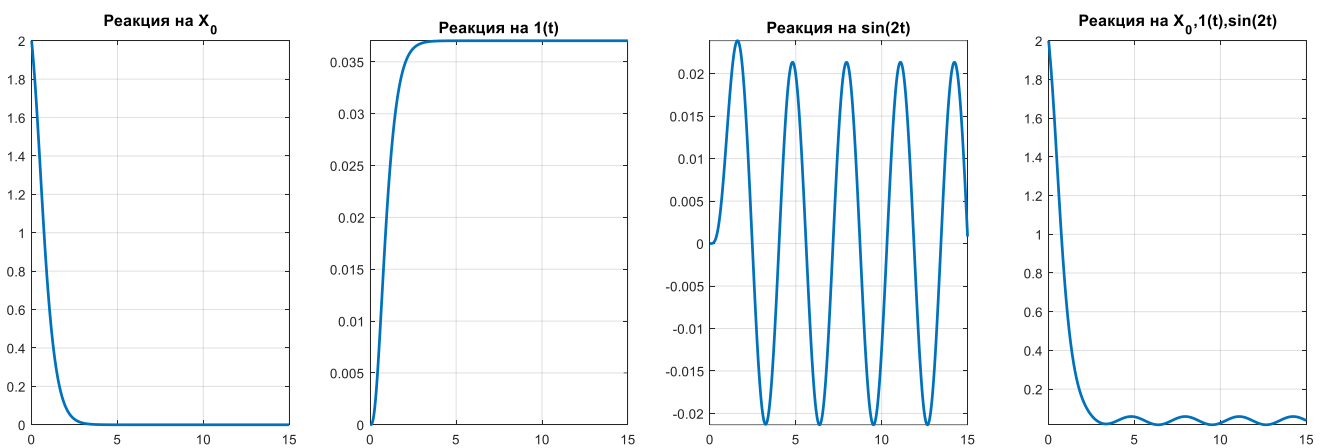


Рисунок А.2 – Графики решений компоненты $x_1(t)$ для синтезированной системы

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

(обязательное)

Титульный лист пояснительной записки РГР

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра "Информатика и управление в технических системах"

ОСНОВЫ УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Пояснительная записка к РГР

Выполнил студент
группы УТС/б-XX-X-о
_____ Крымов В.А.

"__" _____ 202_ г.

Проверил
_____ Карабанов А.В.

"__" _____ 202_ г.

Оценка: _____

"__" _____ 202_ г.

Севастополь
СевГУ
202_

ОСНОВЫ УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

*Методические указания
к расчетно-графической работе по дисциплине*

*Составители: **Крамарь** Вадим Александрович,
Карапетьян Валерий Артёмович*

В авторской редакции

Изд. № 174/2022. Объем 2 п.л. Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 1,96.
РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»