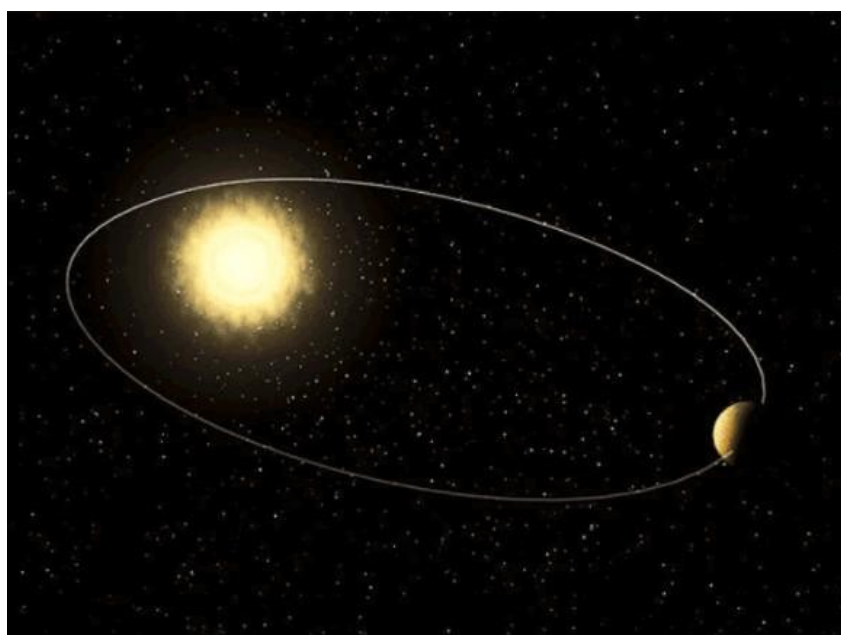


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Г. Рипп, Е. В. Мирошниченко

ПЕРВЫЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА



Учебное пособие
по общей физике
для студентов технических
и естественно-научных специальностей

Севастополь
СевГУ
2022

УДК 53.082:523.4(075.8)
ББК 22.213:22.62я73
Р537

Рецензент:
С. А. Чернявская – канд. физ.-мат. наук,
доцент кафедры «Высшая математика»

Рипп А. Г.

Р537 Первый закон Кеплера : учебное пособие по общей физике для студентов технических и естественно-научных специальностей / А. Г. Рипп, Е. В. Мирошниченко ; Севастопольский государственный университет. – Севастополь : СевГУ, 2022. – 13 с.

Учебное пособие разработано преподавателями кафедры «Физика» СевГУ и предназначено для студентов 1 и 2 курсов технических и естественно-научных специальностей, выполняющих лабораторные работы по дисциплинам: «Физика» и «Физический практикум». В пособии студентам предлагается познакомиться с Первым законом Кеплера для движения материального тела по замкнутой орбите в гравитационном поле планеты и несколькими способами экспериментальной проверки этого закона. Лабораторная установка, на которой предлагается провести эксперименты, виртуальная, то есть представляет собой компьютерную модель.

Пособие содержит краткий теоретический материал, описание лабораторной установки, порядок выполнения лабораторной работы и методы оценки погрешности измерений. Материал изложен подробно и в доступной форме. Для студентов, желающих получить больше информации, в конце пособия приводится список литературы.

УДК 53.082:523.4(075.8)
ББК 22.213:22.62я73

Учебное пособие рассмотрено и утверждено на заседании кафедры «Физика», протокол № 9 от 01 июля 2022 г.

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет, 2022
© Рипп А. Г., Мирошниченко Е. В., 2022

Работа 81. Первый закон Кеплера

Цель работы

1. Изучение характера движения тела по замкнутой орбите в гравитационном поле планеты.
2. Проверка Первого закона Кеплера.

1. Краткая теория

Согласно закону Всемирного тяготения, все материальные тела притягиваются друг к другу. Так как всякая сила приводит к появлению ускорения тела, на которое эта сила действует, то скорость тела, попавшего в гравитационное поле другого тела, изменяется со временем. В общем случае такое изменение происходит как по величине, так и по направлению, поэтому в гравитационном поле звезды или планеты каждое тело движется по криволинейной траектории. Этот факт подтверждают наблюдения за планетами Солнечной системы, астероидами и кометами. В 17 веке немецкий учёный Иоганн Кеплер на основании огромного экспериментального материала, накопленного датским астрономом Тихо Браге, с которым его связывала долгая и успешная совместная работа, пришёл к выводу, что Марс движется по плоской эллиптической траектории, причём в фокусе эллипса находится Солнце. Этот результат И. Кеплер опубликовал в своей книге «[Новая астрономия](#)» в 1609 году. В дальнейшем вывод И. Кеплера получил название *Первого закона Кеплера*. В той же книге И. Кеплер сформулировал ещё два интересных факта, характеризующих движение Марса, которые позже были названы Вторым и Третьим законами Кеплера¹. Наблюдения за другими планетами Солнечной системы показали, что и для них тоже справедливы три закона Кеплера.

Исследования Иоганна Кеплера очень заинтересовали Исаака Ньютона и привели его через полвека (в 1666 году) к открытию вышеупомянутого закона Всемирного тяготения. Ценность этого открытия И. Ньютона, как минимум, в том, что из него можно **теоретически** получить все три закона Кеплера.

Для того чтобы лучше понять Первый закон Кеплера, полезно разобраться с тем, что такое эллипс и какие у него свойства. Эллипс – это плоская замкнутая симметричная линия, показанная на следующем рисунке 1.

¹ Для проверки Второго и Третьего законов Кеплера на кафедре «Физика» СевГУ разработаны ещё две лабораторные работы – возможно, вам будет предложено их выполнить.

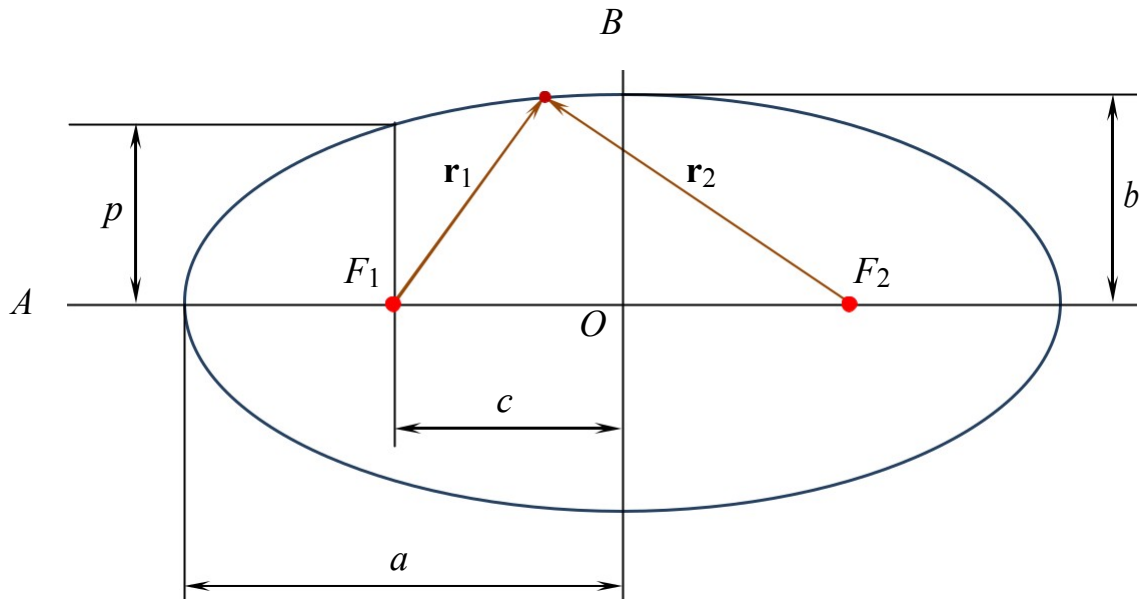


Рис. 1. Эллипс и его основные характеристики

Для описания эллипса используют две взаимно перпендикулярные оси симметрии, на рисунке 1 это – штрихпунктирные линии. Точка пересечения осей, обозначенная буквой O , называется *центром эллипса*. Расстояние от эллипса до его центра вдоль оси A называется *большой полуосью* и обозначается a . Аналогичное расстояние вдоль оси B называется *малой полуосью* и обозначается b .

На оси A у эллипса есть две особые точки, симметричные относительно центра, они называются *фокусами* (на рисунке 1 фокусы обозначены красным цветом и буквами F_1 и F_2). Расстояние каждого из фокусов до центра эллипса называется *фокальным расстоянием* и обозначается c , а расстояние от каждого фокуса до эллипса вдоль оси B называется *фокальным параметром* и обозначается p . Основное свойство фокусов состоит в следующем. Выберем на эллипсе произвольную точку M и проведём в неё из фокусов радиус-векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, они называются *фокальными радиусами*. Так вот, сумма длин фокальных радиусов для всех точек эллипса *одна и та же*, и она равна большой оси эллипса:

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = 2a. \quad (1)$$

Это свойство эллипса иногда принимают за определение эллипса: «Эллипс – это геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух данных точек, именуемых фокусами, постоянна». А ещё свойство (1) можно понимать как способ нарисовать эллипс: если вам надо его нарисовать на земле, то надо взять шнур, привязать к его концам два колышка, затем вбить колышки в землю на некотором расстоянии друг от друга так, чтобы шнур не был натянут, а затем с помощью третьего колышка (тоже вертикального) натянуть шнур, не привязывая его к шнуру, и двигать этот колышек по земле так, чтобы шнур всё

время оставался в натянутом состоянии. В результате третий колышек, скользя вдоль шнура, нарисует на земле эллипс.

Из основного свойства эллипса (1) следует, что фокальное расстояние c и фокальный параметр p связаны с полуосями эллипса a и b . Эта связь выражается формулами:

$$c^2 = a^2 - b^2, p = \frac{b^2}{a}. \quad (2)$$

Попробуйте самостоятельно получить эти формулы.

В аналитической геометрии выводится *уравнение эллипса*. Оно зависит от системы координат. С точки зрения математики, наиболее естественно выбрать декартову систему – для неё уже есть готовые взаимно перпендикулярные оси: A и B . Итак, OX направим вдоль оси A , ось OY – вдоль B , начало координат будет в точке пересечения осей, то есть в центре эллипса. В этом случае уравнение эллипса имеет канонический² вид:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad (3)$$

где x и y – координаты точек на эллипсе. Интересно, что при $a = b$ уравнение эллипса превращается в уравнение окружности с радиусом $R = a = b$. Это означает, что окружность есть частный случай эллипса.

С точки зрения физики, выбор начала координат в центре эллипса – это не очень хорошая идея. Начало координат удобно связывать с чем-то материальным, где можно закрепить линейку или какой-то иной прибор для измерения расстояний. Но если эллипс – это траектория тела в гравитационном поле планеты, то в центре траектории ничего материального нет. Поэтому лучше выбрать начало координат на поверхности планеты. Именно так и выбрано начало координат в предлагаемой вам экспериментальной установке, а точнее – в центре планеты, то есть не в центре эллипса, а в его *фокусе* F_1 . Эта точка смещена относительно центра эллипса влево на величину фокального расстояния c . Поэтому каноническое уравнение эллипса (3) трансформируется так:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{(x-c)^2}{a^2} = 1. \quad (4)$$

2. Задачи эксперимента

Для экспериментальной проверки Первого закона Кеплера надо наблюдать за орбитой материального тела, вращающегося в гравитационном поле другого, значительно более массивного тела (звезды или планеты) и убедиться в том, что эта орбита – эллипс, причём массивное тело находится в одном из фокусов эллипса. Это можно сделать несколькими способами.

² Термин «канонический» значит – простейший.

Первый способ.

Надо измерить параметры орбиты a , b , c и p , а затем убедиться в том, что выполняются равенства (2).

Второй способ.

Надо измерить координаты нескольких точек траектории $(x; y)$, по ним определить для каждой точки фокальные радиусы r_1 и r_2 , а затем убедиться, что для всех выбранных точек выполняется основное свойство эллипса (1): сумма фокальных радиусов $(r_1 + r_2)$ равна большой оси $2a$.

Третий способ.

Надо измерить координаты нескольких точек траектории $(x; y)$, а затем убедиться, что результаты измерений согласуются с уравнением эллипса (4). Чтобы в этом убедиться, можно использовать два метода.

Метод прямого сравнения. Сначала нужно измерить большую и малую полуоси a и b и фокальное расстояние c , а затем, используя уравнение эллипса (4), рассчитать для каждой из измеренных x -координат точек траектории y -координату. После этого останется только сравнить расчётные значения y с измеренными.

Метод линеаризации. Нужно с помощью замены переменных привести уравнение эллипса (4), связывающее координаты точек траектории x и y , к линейной зависимости – так, чтобы в новых переменных уравнение эллипса стало уравнением прямой линии, а затем убедиться, что переход от экспериментальных координат $\{(x; y)\}$ действительно показывает линейную зависимость новых переменных друг от друга. Уравнение эллипса можно преобразовать так:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{(x-c)^2}{a^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{(x-c)^2}{a^2}, \quad y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}(x-c)^2.$$

Таким образом, переменные $z = y^2$ и $t = (x-c)^2$ связаны линейной зависимостью

$$z = kt + b_0, \tag{5}$$

параметры которой (угловой коэффициент k и свободный член b_0) равны:

$$k = -\frac{b^2}{a^2}, \quad b_0 = b^2.$$

Достоинство этого метода в том, что можно не измерять предварительно значения большой и малой полуосей a и b – для перехода от $(x; y)$, к $(t; z)$ в этом нет необходимости. Необходимо только убедиться в том, что экспериментальная зависимость $z(t)$, которую можно назвать *линеаризованным эллипсом*, дей-

ствительно является линейной³. После этого, измерив параметры линейной зависимости k и b_0 , можно определить a и b :

$$b = \sqrt{b_0}, \quad a = \frac{b}{\sqrt{|k|}}. \quad (6)$$

Полученные значения a и b естественно сравнить с результатами прямых измерений.

Какой из вышеописанных способов экспериментальной проверки Первого закона Кеплера следует выбрать? – Целесообразно использовать все три, при этом достигается максимальная достоверность вывода о том, подтверждают эксперименты Первый закон Кеплера или нет.

3. Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка виртуальная, то есть представляет собой компьютерную программу, имитирующую реальную установку. Программа разработана в Национальном исследовательском Томском политехническом университете. При включении установки (при запуске программы) на дисплей компьютера выводится окно «Эксперимент», которое позволяет экспериментатору наблюдать траекторию тела в гравитационном поле планеты и проводить измерения параметров траектории. Это окно показано на следующем рисунке 2.

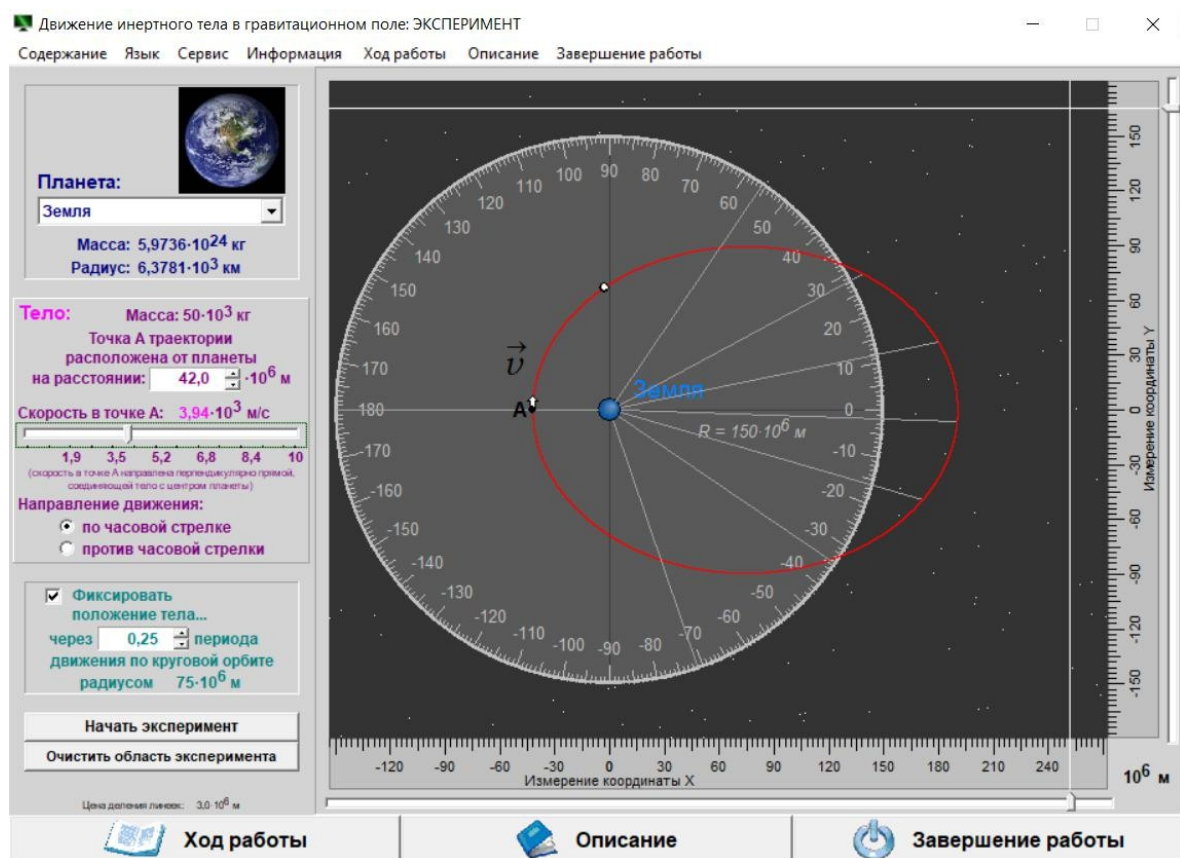


Рис. 2. Окно «Эксперимент»

³ Иными словами, эллипс в координатах (t, z) имеет форму прямолинейного отрезка.

В левой части окна расположена приборная панель, позволяющая выбирать следующие условия эксперимента.

- Планету Солнечной системы.
- Начальное состояние тела **в перигее**, то есть в точке минимального удаления тела от планеты: расстояние тела от планеты r_p , скорость тела v_p и направление движения.

В правой части окна расположена область визуализации, в которой движется тело, там же есть две линейки с бегунками, позволяющие измерять координаты тела, и транспортир для измерения угла, под которым тело видно с планеты. Обратите внимание: начало координат в установке, как и указывалось выше, находится в точке расположения планеты (точнее – в центре планеты).

Для управления экспериментом на приборной панели расположены окошко «**Фиксировать положение тела**» и две кнопки: «**Начать эксперимент**» и «**Очистить область эксперимента**». При нажатии на кнопку «**Начать эксперимент**» тело начинает движение и рисуется траектория тела, при этом надпись на кнопке превращается в «**Остановить эксперимент**». При нажатии на кнопку «**Очистить область эксперимента**» траектории тела, сохранённые в области визуализации, стираются. Окошко «**Фиксировать положение тела**» в данной лабораторной работе использовать нет необходимости, оно предусмотрено для проверки Второго закона Кеплера.

4. Порядок выполнения работы

Выберите по согласованию с преподавателем планету и начальное состояние тела. Результаты запишите в следующую таблицу 1.

Таблица 1

Условия эксперимента

Планета			
Перигей	r_p	Мм	
Скорость тела в перигее	v_p	км/с	
Погрешность измерения координат	$\Delta(x) = \Delta(y)$		

Простейшая проверка Первого закона Кеплера

- 4.1. Нажмите на кнопку «**Начать эксперимент**». Тело начнёт движение, за ним остаётся цветной след – траектория. В программе предусмотрено, что тело совершает два оборота, а потом движение прекращается. Однако нет смысла ждать окончания опыта – как только тело пошло на второй оборот, нажмите кнопку «**Остановить эксперимент**».
- 4.2. С помощью линеек и бегунков измерьте следующие параметры орбиты: расстояние тела от планеты в апогее r_a , большую и малую полуоси a и b , фокальный параметр p и фокальное расстояние c . Результаты впишите в таблицу 2.

Таблица 2

Измерения параметров орбиты

Апогей	r_a	Мм	
Большая ось	$2a$	Мм	
Большая полуось	a	км/с	
Малая полуось	b	Мм	
Фокальный параметр	p	Мм	
Фокальное расстояние	c	Мм	

4.3. Полученную орбиту целесообразно показать в вашем отчёте. Для этого сделайте скриншот рабочего экрана, вырежьте из него область визуализации и скопируйте в отчёт.

4.4. Проверьте, выполняются ли равенства (2):

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad p = \frac{b^2}{a}.$$

Прокомментируйте результат.

Проверка основного свойства эллипса

Основное свойство эллипса описывается равенством (1):

$$r_1 + r_2 = 2a,$$

где r_1 и r_2 – это фокальные радиусы эллипса, $2a$ – большая ось эллипса.

4.5. Выберите на орбите 15 – 20 точек и измерьте их координаты. Результаты впишите в таблицу 3.

Таблица 3

Проверка основного свойства эллипса

Номер опыта	x	y	r_1	$\Delta(r_1)$	r_2	$\Delta(r_2)$	$r_1 + r_2$
	Мм	Мм	Мм	Мм	Мм	Мм	Мм
1							
2							
...							
...							

4.6. Заполните остальные столбцы таблицы 3.

Следующий рисунок 3 поясняет, как можно определить фокальные радиусы эллипса.

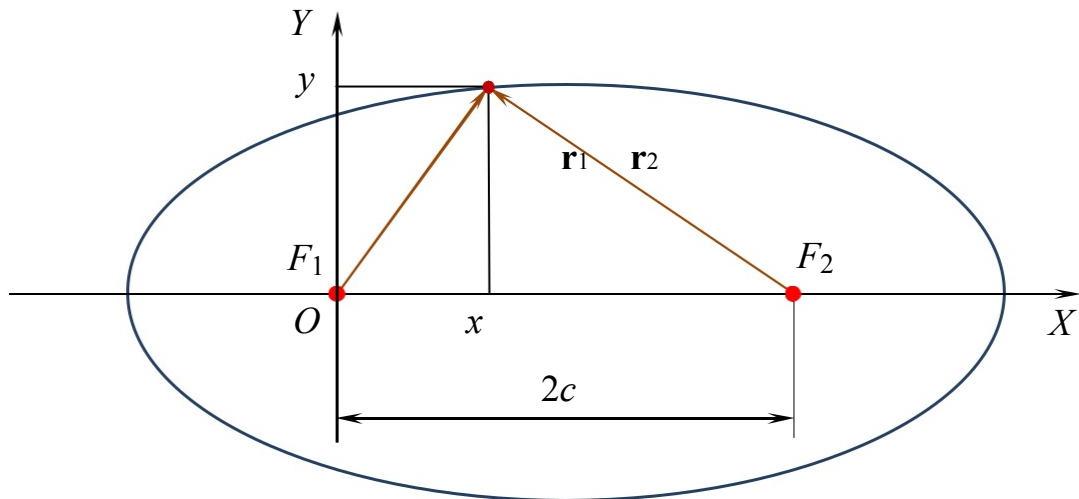


Рис. 3. Измерение фокальных радиусов эллипса

Из рисунка следует, что

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(2c - x)^2 + y^2}. \quad (7)$$

Как оценить погрешности измерения фокальных радиусов, написано в разделе 5.

Прокомментируйте результаты.

Проверка уравнения эллипса

4.7. Для проверки, выполняется ли для полученной вами траектории уравнение эллипса (4), подготовьте таблицу 4. Внесите в неё результаты измерений координат ряда точек эллипса x и y . Вы эти измерения уже проделали, и они записаны в таблице 3.

Таблица 4

Проверка уравнения эллипса

Номер опыта	x Мм	y Мм	$t = (x - c)^2$ Мм ²	$\Delta(t)$ Мм ²	$z = y^2$ Мм ²	$\Delta(z)$ Мм ²
1						
2						
...						
...						

4.8. Заполните остальные столбцы таблицы 4.

4.9. По данным таблицы 4 постройте график линеаризованного эллипса $z(t)$. Не забудьте про планки погрешностей.

4.10. Прокомментируйте результат.

4.11. Определите параметры k и b_0 линейной зависимости $z(t)$. Это удобно сделать с помощью функции ЛИНЕЙН. Зная k и b_0 , определите большую и малую полуоси эллипса a и b в соответствии с формулами (6). Для указанных действий используйте таблицу 5.

Таблица 5

Измерение полуосей эллипса по его линеаризованному уравнению

Величина	k	b_0	b	a
Размерность		Мм ²	Мм	Мм
Значение				
Абсолютная погрешность				
Относительная погрешность				

4.12. Сравните полученные результаты с результатами прямых измерений a и b .

4.13. Сформулируйте общие выводы по лабораторной работе.

5. Оценка погрешностей измерений

5.1. Погрешности прямых измерений.

Прямым способом измеряются только координаты точек орбиты – с помощью линеек в области визуализации. Погрешность измерений можно оценить как половину цены деления этих линеек.

5.2. Погрешность измерения фокальных радиусов r_1 и r_2 .

Для измерения фокальных радиусов используются формулы (7):

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(2c - x)^2 + y^2}.$$

Применение общего правила оценки погрешностей косвенных измерений для $\Delta(r_1)$ даёт:

$$\begin{aligned} \Delta(r_1) &= \Delta_x(r_1) + \Delta_y(r_1) = \left| \frac{\partial r_1}{\partial x} \right| \Delta(x) + \left| \frac{\partial r_1}{\partial y} \right| \Delta(y) = \\ &= \left| \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} 2x \right| \Delta(x) + \left| \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} 2y \right| \Delta(y) = \frac{|x|}{r_1} \Delta(x) + \frac{|y|}{r_1} \Delta(y) = \end{aligned}$$

Погрешность $\Delta(r_2)$ оценить несколько сложнее, так как r_2 зависит не от двух, а от трёх измеряемых величин: от x , y и c . В таком случае лучше использовать другую формулу:

$$\Delta(r_2) = \sqrt{\Delta_x^2(r_2) + \Delta_y^2(r_2) + \Delta_c^2(r_2)}.$$

При этом

$$\Delta_y(r_2) = \left| \frac{\partial r_2}{\partial y} \right| \Delta(y) = \frac{|y|}{r_2} \Delta(y) = \frac{|y|}{r_2} \Delta(x),$$

В результате получается $\left| \frac{\partial r_2}{\partial c} \right| \Delta(c) = \frac{|2c-x| \cdot 2}{r_2} \Delta(c) = 2 \frac{|2c-x|}{r_2} \Delta(x)$

$$\Delta(r_2) = \sqrt{5 \cdot (2c-x)^2 + y^2} \cdot \frac{\Delta(x)}{r_2}$$

5.3. Погрешность измерения суммы фокальных радиусов.

Так как абсолютная погрешность суммы равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых, то

5.4. Погрешность измерения переменных $\Delta(x) + \Delta(r_2)$

Эти переменные определяются формулами

$$z = y^2, \quad t = (x - c)^2$$

Тогда использование общей формулы оценки погрешностей косвенных измерений даёт:

$$\Delta(t) = \Delta_x(t) + \Delta_c(t) = \left| \frac{\partial}{\partial x} (x-c)^2 \right| \Delta(x) + \left| \frac{\partial}{\partial c} (x-c)^2 \right| \Delta(c) =$$

6. Контрольные вопросы

6.1. В чём состоит Первый закон Кеплера?

6.2. Какие основные количественные характеристики (параметры) используются для описания эллипса?

6.3. Как связаны друг с другом различные параметры эллипса?

6.4. В чём состоит основное свойство эллипса?

6.5. Тело вращается вокруг планеты по замкнутой орбите с апогеем $12 \cdot 10^8$ м и перигеем $4 \cdot 10^8$ м. Определите большую полуось орбиты.

6.6. Запишите уравнение эллипса.

6.7. Можно ли окружность считать эллипсом?

6.8. В каких координатах эллипс представляет собой отрезок прямой линии?

6.9. Зависит ли уравнение эллипса от того, где выбрано начало координат?

7. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 7.1. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 1 : учебное пособие / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1977–1985.
- 7.2. Савельев И. В. Курс общей физики : в 3 т. : т. 1. : учебник для вузов / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1989.
- 7.3. Трофимова Т. И. Курс физики. – М., Высшая школа, 2003.
- 7.4. Ревинская О. Г., Кравченко Н. С. Лабораторный практикум по изучению моделей физических процессов на компьютере. – Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2007.
- 7.5. Рипп А. Г. Обработка измерений : методическое пособие. – Севастополь : СНУЯЭП, 2012.

Учебное издание

**Рипп Александр Гешелевич
Мирошниченко Евгения Владимировна**

ПЕРВЫЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА

Учебное пособие

В авторской редакции

Изд. № 170/2022. Объем 1 п.л. Усл. печ. л. 0,93. Уч.-изд. л. 0,98. РИИЦМ
ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»