

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ
И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Кафедра «Радиоэлектронные системы и технологии»

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Учебно-методическое пособие

к выполнению контрольной работы по дисциплине
для обучающихся заочной формы обучения
направления 11.03.01 – Радиотехника
и специальности
11.05.01 – Радиоэлектронные системы и комплексы

Севастополь
СевГУ
2022

УДК 537.8(075.8)
ББК 22.33я73
Э455

Р е ц е н з е н т:

В. В. Головин – канд. техн. наук, доцент,
профессор кафедры «Радиоэлектронные системы и технологии»

Ответственный за выпуск:

И. Л. Афонин - д-р техн. наук, профессор,
заведующий кафедрой «Радиоэлектронные системы и технологии»

Составители: И. Л. Афонин, И. В. Кудрявченко

Э455 Электродинамика: учебно-методическое пособие к выполнению контрольной работы по дисциплине для обучающихся заочной формы обучения направления 11.03.01 – Радиотехника и специальности 11.05.01 – Радиоэлектронные системы и комплексы / Севастопольский государственный университет; сост.: И. Л. Афонин, И. В. Кудрявченко. — Севастополь : СевГУ, 2022. – 31 с. – Текст : электронный.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для оказания помощи обучающимся заочной формы обучения в изучении базовой радиотехнической дисциплины «Электродинамика» и в выполнении контрольной работы, предусмотренной учебными планами направления 11.03.01 – «Радиотехника» и специальности 11.05.01 – «Радиоэлектронные системы и комплексы».

УДК 537.8(075.8)
ББК 22.33я73

Учебно-методическое пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании кафедры «Радиоэлектронные системы и технологии», протокол № 4 от 03 ноября 2022 года.

© Афонин И. Л., Кудрявченко И.В., сост., 2022
© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2022

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	4
1.	Рабочая программа дисциплины	5
2.	Перечень лабораторных работ	6
3.	Методические рекомендации по изучению дисциплины	6
3.1.	Характеристики электромагнитного поля	5
3.2.	Система уравнения электромагнитного поля	7
3.3.	Волновые уравнения и электродинамические потенциалы	7
3.4.	Статические и стационарные поля	7
3.5.	Основные методы решения задач электродинамики	8
3.6.	Плоские электромагнитные волны в однородной и неоднородной средах	8
3.7.	Направляющие системы и направляемые волны. Волноводы	9
3.8.	Электромагнитные поля в объёмных резонаторах	10
4.	Задания на контрольную работу	10
4.1.	Общие рекомендации	10
4.2.	Требования к оформлению контрольной работы	11
4.3.	Содержание контрольной работы	11
5.	Методические рекомендации к выполнению контрольной работы и основные теоретические сведения	14
5.1.	Элементы векторного анализа	14
5.2.	Уравнения Максвелла	16
5.3.	Статические и стационарные электромагнитные поля	19
5.4.	Плоские электромагнитные волны	20
5.5.	Отражение и преломление плоских электромагнитных волн	23
5.6.	Волноводы	25
5.7.	Объёмные резонаторы	28
	Библиографический список	31

ВВЕДЕНИЕ

Электродинамика (ЭД) — базовая дисциплина при подготовке радиоинженеров и специалистов радиоэлектронного профиля. Основная задача дисциплины — научить обучающихся основным методам анализа свойств электромагнитных волн (ЭМВ) в природных условиях и устройствах сверхвысоких частот (СВЧ). Особое внимание уделяется описанию свойств ЭМВ в направляющих системах (НС) и объёмных резонаторах (ОР). Эта дисциплина базируется на многих разделах дисциплин: «Высшая математика» и «Физика». Наиболее важными из них являются:

- векторный анализ;
- теория поля;
- дифференциальные уравнения;
- электромагнетизм;
- электромагнитные колебания и волны.

ЭД является базовым курсом для таких дисциплин, как:

- «Радиотехнические цепи и сигналы»;
- «Устройства сверхвысокой частоты и антенны»;
- «Радиотехнические системы»;
- «Электронные и квантовые приборы сверхвысокой частоты»;
- «Радиоэлектроника»;
- «Системы радиочастотной идентификации»;
- «Конструирование и технологии производства радиоэлектронных средств»;
- «Основы компьютерного проектирования и моделирования радиоэлектронных систем»;
- «Компьютерное моделирование радиоэлектронных систем»;
- «Электропреобразовательные устройства радиоэлектронных систем»;
- «Основы генерирования и формирования сигналов»;
- «Основы приема и обработки сигналов»;
- «Системы цифрового телевидения»;
- «Основы теории передачи информации»;
- «Устройства микроволнового диапазона»;
- «Основы сетевых информационных технологий»;
- «Основы телевидения и видеотехники»;
- «Системы мобильной радиосвязи»;
- «Современные судовые телекоммуникационные системы»;
- «Глобальная морская система связи при бедствиях»;
- «Основы телекоммуникационных технологий»;
- «Телекоммуникационные системы».

Дисциплина ЭД изучается в 4 семестре. По дисциплине сдаётся экзамен (промежуточная аттестация), проводятся лабораторный практикум, практические занятия и выполняются контрольные работы (требования ФГОС направлений 11.03.01 — «Радиотехника», 11.03.02 — «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» и специальности 11.05.01 — «Радиоэлектронные системы и комплексы»).

Все вопросы программы можно самостоятельно изучить по основной [1 — 4] и дополнительной литературе [5 — 16] с привлечением данного учебно-методического пособия.

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Введение

Место и значение курса «Электродинамика» в подготовке радиоинженеров. Основное содержание дисциплины. Краткий исторический очерк развития учений об электромагнетизме.

1.1. Характеристики электромагнитного поля

Векторы электромагнитного поля. Электромагнитные параметры среды. Виды сред: линейные, нелинейные, однородные, неоднородные, изотропные, анизотропные. Международная система электромагнитных единиц.

1.2. Система уравнений электромагнитного поля

Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах и их физический смысл. Уравнение непрерывности тока. Сторонние электрические и магнитные силы. Уравнения Максвелла в комплексной форме. Комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости. Граничные условия. Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга. Теорема и вектор Пойнтинга в комплексной форме.

1.3. Волновые уравнения и электродинамические потенциалы

Волновые уравнения для векторов поля. Волновые уравнения для электродинамических потенциалов. Волновые уравнения для векторов Герца. Волновые уравнения в комплексной форме. Уравнения Гельмгольца.

1.4. Статистические и стационарные поля

Статистические и стационарные поля как частный случай электромагнитного поля. Система уравнений электростатики. Уравнения Пуассона и Лапласа. Метод зеркальных отображений. Электрическая ёмкость. Энергия электростатического и постоянных магнитных полей. Электрическое и магнитное поле постоянных токов. Векторный потенциал магнитного поля. Индуктивность и взаимоиндуктивность.

1.5. Основные методы решения задач электродинамики

Постановка задачи в электродинамике. Внутренняя и внешняя задачи электродинамики. Краевые условия и условия излучения. Единственность решения задач электродинамики. Основные принципы и теоремы, используемые при решении задач электродинамики: принцип суперпозиции, теорема взаимности, теорема эквивалентности. Строгие методы решения задач электродинамики: метод запаздывающих потенциалов, метод разделения переменных, метод Кирхгофа. Приближенные методы решения задач электродинамики: метод геометрической оптики, метод волновой оптики, метод краевых волн, метод геометрической теории дифракции, метод электродинамического модулирования.

1.6. Плоские ЭМВ в однородной и неоднородной средах

Решение волнового уравнения для плоских волн. Плоские электромагнитные волны в диэлектрике, полупроводнике, проводнике. Поляризация электромагнитных волн. Понятие о распространении электромагнитных волн в нелинейных и анизотропных средах. Излучение электромагнитных волн в однородной среде. Виды элементарных излучателей. Структура поля в ближней и дальней зонах.

Отражение и преломление линейно поляризованных волн на плоской границе раздела сред. Законы Снеллиуса и формулы Френеля. Угол Брюстера. Угол полного внутреннего отражения. Явление поверхностного эффекта. Граничные условия Леонтовича. Граничные условия на поверхность идеального проводника.

.7. Направляющие системы и направляемые волны. Волноводы

Общие сведения о направляющих системах и направляемых волнах. Основные особенности волн: поперечных (T), магнитных (H_{mn}), электрических (E_{mn}). Прямоугольный металлический волновод: решение уравнения Гельмгольца для магнитных волн в волноводе. Критическая длина волны. Фазовая и групповая скорости. Длина волны в волноводе. Основная магнитная волна H_{10} . Электрические волны в прямоугольном волноводе. Основная электрическая волна E_{11} . Круглый металлический волновод. Электрические и магнитные волны в круглом волноводе. Характеристическое сопротивление волноводов и затухание электромагнитных волн в них. Выбор размеров волновода. Возбуждение волноводов и извлечение энергии из них. Замедляющие системы.

1.8. Электромагнитные поля в объёмных резонаторах

Объёмный резонатор как колебательная система с распределёнными параметрами. Прямоугольный объёмный резонатор. Типы колебаний в прямоугольном объёмном резонаторе. Собственная частота и добротность прямоугольного резонатора. Цилиндрические и объёмные резонаторы. Тороидальные резонаторы. Возбуждение объёмных резонаторов.

2. ПЕРЕЧЕНЬ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

2.1. Исследование электромагнитного поля основной волны в прямоугольном волноводе.

2.2. Исследование дисперсионных свойств волноводной линии передачи.

2.3. Исследование волноводного ответвителя вращающейся поляризации.

2.4. Исследование поляризации электромагнитных волн.

2.5. Исследование отражения и преломления электромагнитных волн.

2.6. Исследование электромагнитного поля прямоугольного резонатора.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Основной целью при изучении дисциплины является понимание уравнений Максвелла, их физического смысла и применение этих уравнений для решения прикладных задач радиотехники.

Методика и последовательность изучения курса соответствует перечню тем и методическим указаниям по их изучению, приведённых ниже.

Материал каждой темы насыщен математическими соотношениями, физическая интерпретация которых зачастую достаточно сложна, поэтому изучение материала требует серьёзной, вдумчивой работы.

3.1. Характеристики электромагнитного поля

В настоящем подразделе обучающийся должен усвоить, что электромагнитное поле полностью характеризуется двумя основными и четырьмя дополнительными векторами, которые определяются из физических законов. Электромагнитное поле существует и рассматривается в различных средах, которые классифицируются по виду зависимости их электромагнитных параметров от времени и пространственных координат, а также от величины и направления векторов электромагнитного поля, существующего в данной среде. Все математические соотношения данного курса записываются в международной системе единиц СИ.

Контрольные вопросы для самопроверки:

3.1.1. В чём заключается физический смысл векторов, характеризующих электромагнитное поле?

3.1.2. Какой вид имеют материальные уравнения для векторов электромагнитного поля?

3.1.3. Как классифицируются среды?

3.2. Система уравнений электромагнитного поля

В этом подразделе необходимо уяснить, что уравнения Максвелла являются результатом обобщения большого числа физических законов теории электромагнетизма, представляют собой фундаментальные зависимости макроскопической электродинамики, позволяющие получить все основные соотношения теории электромагнитного поля. Следует обратить внимание на то, что источниками электромагнитного поля в соответствии с уравнениями Максвелла являются электрические заряженные частицы; что электромагнитное поле как вид материи обладает энергией, для которой выполняется закон сохранения и превращения. Аналитическим представлением этого закона является уравнение баланса электромагнитной энергии — теорема Умова – Пойнтинга.

В практических приложениях часто используется гармоническая зависимость во времени величин, входящих в уравнения Максвелла, поэтому для их представления удобно применять символический метод.

Контрольные вопросы для самопроверки:

3.2.1. Какие экспериментальные законы лежат в основе уравнений Максвелла?

3.2.2. В чем состоит физический смысл тока смещения?

3.2.3. Что связывают между собой уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах?

3.2.4. Какие энергетические составляющие могут входить в уравнение баланса энергии электромагнитного поля?

3.2.5. Как записывается выражение для вектора Пойнтинга в случае гармонических во времени полей?

3.3. Волновые уравнения и электродинамические потенциалы

Из уравнений Максвелла следует, что электромагнитное поле может существовать в виде электромагнитных волн. Адекватными соотношениями, описывающими волновой характер электромагнитного поля, являются волновые уравнения – дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных, которые могут быть получены непосредственно из уравнений Максвелла (дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка). Для решения различного рода прикладных задач используются обычно волновые уравнения для векторов поля, для электродинамических потенциалов и вектора Герца.

Контрольные вопросы для самопроверки:

3.3.1. Какие виды волновых уравнений используют для решения электродинамических задач?

3.3.2. В чём заключается смысл калибровочного соотношения?

3.3.3. В чём состоит отличие уравнений Даламбера и Гельмгольца от обобщенного волнового уравнения?

3.3.4. Имеется ли разница между векторным потенциалом и вектором Герца в случае гармонического электромагнитного поля?

3.4. Статические и стационарные поля

Уравнения стационарных и статических полей получаются как частный случай из уравнений электродинамики (уравнений Максвелла) при условии, что источники

электромагнитного поля либо стационарны (не зависят от времени), либо, кроме того, ещё и неподвижны (статичны). Стационарные и статические поля материальны, для них выполняется закон сохранения и превращения энергии, но они не носят волнового характера и в уравнениях, описывающих их поведение, не содержится временной зависимости (например, уравнения Пуассона и Лапласа).

Контрольные вопросы для самопроверки:

3.4.1. При каких условиях система уравнений Максвелла распадается на системы электро- и магнитостатики?

3.4.2. В чём заключается суть метода зеркальных отображений?

3.4.3. Чем определяется величина энергии электростатического поля?

3.4.4. В чём отличие стационарных электромагнитных и статических полей?

3.4.5. Какой вид имеют уравнения второго порядка в частных производных для статических и стационарных полей?

3.4.6. Какие методы используются для решения задач электростатики?

3.5. Основные методы решения задач электродинамики

При изучении настоящего раздела обучающиеся должны познакомиться с особенностями формулировки и решения внутренних и внешних задач электродинамики, знать условия единственности решения электродинамических задач для ограниченных и безграничных объёмов пространства, основные принципы и теоремы, используемые при решении практических задач. Изучить основные строгие и приближённые методы решения, обратив внимание на то, что результаты решения задачи, полученные разными приближёнными методами, отличаются друг от друга.

Контрольные вопросы для самопроверки:

3.5.1. Как формулируются внутренние и внешние задачи в электродинамике?

3.5.2. В чём состоит роль условия излучения при решении внешних задач?

3.5.3. Как формулируется теорема о единственности решения задач электродинамики?

3.5.4. Для каких сред выполняется теорема взаимности и в чём заключается её сущность?

3.5.5. Что лежит в основе метода запаздывающих потенциалов?

3.5.6. Когда возможно использование метода запаздывающих потенциалов?

3.5.7. К каким методам решения – строгим или приближённым – относится метод Кирхгофа?

3.5.8. При каких приближениях используются методы геометрической и волновой оптики?

3.6. Плоские электромагнитные волны в однородной и неоднородной средах

При изучении настоящего раздела, следует найти метод разделения переменных в декартовых координатах: решение Гельмгольца для векторов электромагнитного поля в виде плоских волн. При этом необходимо обратить внимание на различные математические формы записи выражений для плоской волны, взаимную ориентацию векторов напряжённости электрического и магнитного полей и вектора Пойнтинга, а также на связь между ними и электромагнитными параметрами среды. Обратит внимание на особенности распространения плоской волны в диэлектрике, полупроводнике. Учесть специфику распространения плоской волны в средах с проводимостью, которая заключается в экспоненциальном убывании амплитуды с расстоянием и появлении фазового сдвига между векторами напряжённости, а также явление дисперсии, заключающейся в зависимости от частоты фазовой и групповой скорости распространения электромагнитных волн.

При изучении вопроса излучения электромагнитных волн в однородной среде необходимо уяснить постановку задачи, а также то, что излучение вызывается только заряженными частицами, движущимися с ускорением. Обучающийся должен усвоить цель введения понятия элементарного излучателя, виды моделей элементарных излучателей и методы расчета их характеристик. Следует обратить внимание на особенности распределения электромагнитного поля элементарного излучателя в зависимости от расстояния и угловых координат: при этом нельзя забывать, что в дальней зоне присутствует лишь активная составляющая потока энергии, в то время как в ближней зоне имеет место активная и реактивная составляющие. Необходимо также знать следующие основные технические характеристики излучателей: диаграмма направленности, мощность и сопротивление излучения, коэффициент направленного действия.

При изучении вопросов отражения и преломления электромагнитной волны на плоской границе раздела уяснить постановку задачи и физику явлений. Следует изучить содержание и смысл понятий: плоскость падения, плоскость отражения, угол Брюстера, угол полного внутреннего отражения, поверхностный эффект, поляризация плоских волн.

Контрольные вопросы для самопроверки:

- 3.6.1. Какие основные свойства плоской электромагнитной волны?
- 3.6.2. Какой характер носит волновое число в диэлектрической, полупроводящей и проводящей средах?
- 3.6.3. В чём заключаются особенности распространения плоской волны в полупроводящей среде по сравнению со средами диэлектрической и проводящей?
- 3.6.4. Какова природа явления дисперсии при распространении плоской волны в полупроводниковой среде?
- 3.6.5. К чему приводит нелинейность и анизотропия среды при распространении плоской волны?
- 3.6.6. Какие виды поляризации могут иметь место в задачах электродинамики?
- 3.6.7. Для чего вводится понятие элементарного излучателя?
- 3.6.8. Как формулируется задача излучения электромагнитных волн элементарным излучателем?
- 3.6.9. На какие зоны принято делить пространство в зависимости от расстояния до излучателя, каковы критерии разделения?
- 3.6.10. Какие энергетические составляющие электромагнитного поля имеют место в различных зонах излучения?
- 3.6.11. Какие модели используются для описания элементарных излучателей?
- 3.6.12. В чём заключается физика явлений отражения и преломления плоской волны на границе раздела?
- 3.6.13. Как определяется поляризация электромагнитной волны, падающей на границу раздела?
- 3.6.14. В чём заключается физический смысл явления полной поляризации?
- 3.6.15. Как изменяются модуль и фаза коэффициента отражения при падении плоской волны на границу раздела?

3.7. Направляющие системы и направляемые волны. Волноводы

В данном разделе следует изучить виды направляющих систем, типы и основные особенности электромагнитных волн, распространяющихся в них. Рассмотреть решение волнового уравнения в прямоугольном и круглом волноводах, обратив внимание на то, что решение получается в виде суперпозиции различных типов колебаний. Уяснить следующие основные параметры, характеризующие работу волновода: критическая длина волны, длина волны в волноводе, фазовая и групповая скорости, характеристическое сопротивление волновода. Необходимо знать и уметь выбрать размеры волновода при

работе на заданном типе колебаний. Следует также иметь представление о распространении токов на стенках волновода и системах возбуждения и связи волноводов.

Контрольные вопросы для самопроверки:

- 3.7.1. Какие типы направляющих систем рассматриваются в электродинамике?
- 3.7.2. В чём заключается отличие электрических, магнитных и поперечных электромагнитных волн?
- 3.7.3. Какие граничные условия используют при решении волнового уравнения в волноводе?
- 3.7.4. При каких условиях наблюдается распространение электромагнитной энергии в волноводе?
- 3.7.5. В каких пределах могут меняться фазовая и групповая скорости электромагнитных волн в волноводе?
- 3.7.6. Какой тип колебаний принято называть основным?
- 3.7.7. Исходя из каких условий, производится выбор поперечного сечения волновода?
- 3.7.8. Каким образом можно возбудить электромагнитные колебания в волноводе, и каковы требования, предъявляемые к устройствам возбуждения?

3.8. Электромагнитные поля в объёмных резонаторах

При изучении этого раздела необходимо чётко уяснить назначение и конструктивные особенности различных видов объёмных резонаторов. Ознакомиться с методом решения волнового уравнения для прямоугольного объёмного резонатора, типами и структурами простейших колебаний в нём, а также с методами расчета добротности резонатора. Следует знать основные типы колебаний в цилиндрических объёмных резонаторах, способы определения собственной резонансной частоты и размеров резонатора, методы возбуждения резонаторов.

Контрольные вопросы для самопроверки:

- 3.8.1. Какие типы объёмных резонаторов используются в микроволновой технике?
- 3.8.2. Какие типы колебаний могут существовать в объёмных резонаторах?
- 3.8.3. Как определяется добротность объёмного резонатора?
- 3.8.4. Как определяются размеры волноводных объёмных резонаторов?
- 3.8.5. Какие способы возбуждения резонаторов используются на практике?

4. ЗАДАНИЯ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

4.1. Общие рекомендации

Учебным планом по дисциплине «Электродинамика» предусмотрено выполнение контрольной работы (КР) в 4 семестре.

Номер варианта должен совпадать с последней цифрой номера зачётной книжки студента.

Типичные ошибки, допускаемые студентами при выполнении контрольных работ:

- использование различных систем единиц;
- использование относительной диэлектрической и магнитной проницаемостей вместо их абсолютных значений;
- неверное обозначение размерностей вычисляемых величин (напряжённостей электрического и магнитного полей, индукции электрического и магнитного полей и т. д.);
- ошибки в преобразованиях при переходе от векторной к скалярной форме записи выражений;
- арифметические ошибки при расчетах.

4.2. Требования к оформлению контрольной работы

4.2.1. Контрольная работа выполняется на персональном компьютере (ПК) на стандартных листах формата А4.. Она должна быть аккуратно оформлена и разборчиво набрана. Все страницы нумеруются. Возможно оформление контрольной работы в обычной ученической тетради. При этом для замечаний преподавателя на каждой странице оставляются поля шириной 3 — 4 см.

4.2.2. На обложке тетради указывается фамилия, имя, отчество, группа обучающегося, шифр, дисциплина, номер контрольного задания, адрес обучающегося. Аналогичная информация выносится на титульный лист КР при выполнении ее на ПК.

4.2.3. Рисунки, графики, выполнение которых требуется в задании, должны быть сделаны аккуратно. Графики строятся с использованием графических редакторов или на миллиметровой бумаге с указанием размерностей по осям. Рекомендуется использование прикладных программ для расчетов.

4.2.4. Расчётные формулы должны приводиться в тексте работы в общем виде с объяснением буквенных значений.

4.2.5. Расчёты необходимо выполнить до трёх значащих цифр.

4.2.6. В конце работы приводится библиографический список, то есть использованные источники информации, оформленный в соответствии с действующими государственными стандартами.

4.2.7. Контрольная работа должна быть подписана автором.

4.3. Содержание контрольной работы

4.3.1. Задача 1

4.3.1.1. Определите градиент скалярного произведения двух векторов $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Исходные данные приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 — Исходные данные к подпункту 4.3.1.1

Номер варианта	$\bar{A}$	$\bar{B}$
1	$\bar{1}_x 5 + \bar{1}_y 4 + \bar{1}_z 3$	$\bar{1}_x x + \bar{1}_y y + \bar{1}_z z$
2	$\bar{1}_x 2 + \bar{1}_y 3 + \bar{1}_z 4$	$\bar{1}_x x + \bar{1}_y 2y + \bar{1}_z 3z$
3	$\bar{1}_x 6 + \bar{1}_y 7 + \bar{1}_z 5$	$\bar{1}_x 2x + \bar{1}_y 3y + \bar{1}_z 2z$
4	$\bar{1}_x 6 + \bar{1}_y 2 + \bar{1}_z 3$	$\bar{1}_x x + \bar{1}_y 4y + \bar{1}_z 3z$
5	$\bar{1}_x 2 + \bar{1}_y 5 + \bar{1}_z 4$	$\bar{1}_x 5x + \bar{1}_y 5y + \bar{1}_z 5z$
6	$\bar{1}_x 3 + \bar{1}_y 5 + \bar{1}_z 3$	$\bar{1}_x 4x + \bar{1}_y 6y + \bar{1}_z 8z$
7	$\bar{1}_x 3 + \bar{1}_y 4 + \bar{1}_z 5$	$\bar{1}_x 7x + \bar{1}_y 7y + \bar{1}_z 7z$
8	$\bar{1}_x 5 + \bar{1}_y 5 + \bar{1}_z 5$	$\bar{1}_x 8x + \bar{1}_y 7y + \bar{1}_z 6z$
9	$\bar{1}_x 3 + \bar{1}_y 6 + \bar{1}_z 9$	$\bar{1}_x 9x + \bar{1}_y y + \bar{1}_z z$
0	$\bar{1}_x 7 + \bar{1}_y 7 + \bar{1}_z 7$	$\bar{1}_x 5 + \bar{1}_y 4y + \bar{1}_z 5z$

4.3.1.2. Векторное поле задано функцией $\bar{A}$. Определите $\text{div } \bar{A}$ и $\text{rot } \bar{A}$ векторного поля. Исходные данные приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2 — Исходные данные к подпункту 4.3.1.2

Номер варианта	$\bar{A}$
1	$\bar{1}_x 2x + \bar{1}_y y + \bar{1}_z 3z$
2	$\bar{1}_x xy - \bar{1}_y xz + \bar{1}_z yz$
3	$\bar{1}_x 20\sin(x/\pi) + \bar{1}_z 3y^2$
4	$\bar{1}_x 8\sin(x/4) + \bar{1}_y 3\cos(y/6)$
5	$\bar{1}_x 0,5\sin(\omega t - kz)$
6	$\bar{1}_x xyz + \bar{1}_y xy + \bar{1}_z x$
7	$\bar{1}_x \sin x + \bar{1}_y xy$
8	$\bar{1}_x \sin xy + \bar{1}_z xz$
9	$\bar{1}_x \cos x + \bar{1}_z xyz$
0	$\bar{1}_y \sin x + \bar{1}_z xz$

4.3.2. Задача 2

В среде с параметрами ε и σ создано электрическое поле, имеющее частоту f и амплитуду E_m . Вычислите амплитудное значение и фазовый угол вектора плотности полного тока, существующего в каждой точке данной среды. Исходные данные приведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3 — Исходные данные к задаче 2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
σ , См/м	0,67	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76
f , МГц	550	560	570	580	590	600	610	620	630	640
E_m , В/м	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

4.3.3. Задача 3

Во многих микроволновых устройствах для уменьшения омических потерь токоведущие поверхности покрывают тонким слоем серебра. Определите толщину серебряного слоя, при которой плотность тока на его внутренней поверхности уменьшается в n раз по сравнению с плотностью тока на границе раздела металл — воздух. Частота поля — f , ГГц. Исходные данные приведены в таблице 4.4.

Таблица 4.4 — Исходные данные к задаче 3

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250
f , ГГц	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55

4.3.4. Задача 4

Плоская электромагнитная волна с частотой f распространяется в среде с параметрами ε , $\operatorname{tg} d_j$, $\mu = 1$. Определите фазовую скорость, длину волны и коэффициент ослабления. Исходные данные приведены в таблице 4.5.

Таблица 4.5 — Исходные данные к задаче 4

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
f , ГГц	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
ε	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
$\operatorname{tg} d_j$	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15

4.3.5. Задача 5

Плоская электромагнитная волна падает нормально из вакуума на границу раздела со средой, имеющей параметры ε , $\mu = 1$, σ . Определите комплексные коэффициенты отражения $\dot{\Gamma}$ и преломления $\dot{T}$ на частоте f , а также тангенс угла диэлектрических потерь $\operatorname{tg} d_j$. Исходные данные приведены в таблице 4.6.

Таблица 4.6 — Исходные данные к задаче 5

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	81	81	75	70	65	60	55	50	45	40
σ , См/м	0,1	4	0,12	0,1	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04
f , ГГц	0,1	10	0,3	0,5	0,7	1,0	1,2	1,4	1,6	2,0

4.3.6. Задача 6

Плоская электромагнитная волна падает под углом φ на поверхность среды. Определите модули коэффициентов отражения для нормально- и параллельно-поляризованных волн. Параметры среды: ε , $\mu = 1$, $\sigma = 0$. Угол φ изменяется от 0 до 90 градусов. Построить графики зависимостей $\Gamma = f(\varphi)$. Исходные данные приведены в таблице 4.7.

Таблица 4.7 — Исходные данные к задаче 6

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	5	10	20	30	40	50	60	81	2,4	2,1

4.3.7. Задача 7

Какие типы волн могут распространяться в прямоугольном волноводе сечением 23×10 мм, заполненным диэлектриком с относительной проницаемостью ε ? Частота колебания 10 ГГц. Определите длину волны в волноводе, фазовую и групповую скорости волны типа H_{10} . Исходные данные приведены в таблице 4.8.

Таблица 4.8 — Исходные данные к задаче 7

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0

4.3.8. Задача 8

В прямоугольном волноводе сечением 48×24 мм распространяется волна типа H_{10} . Частота колебаний — f , ГГц, передаваемая мощность — 10 кВт. Определите максимальное значение напряжённости электрического поля. Исходные данные приведены в таблице 4.9.

Таблица 4.9 — Исходные данные к задаче 8

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
f , ГГц	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0

4.3.9. Задача 9

Цилиндрический резонатор диаметром d и длиной l заполнен диэлектриком с заданной диэлектрической проницаемостью ε . Какой тип колебаний в контуре является основным? Вычислите резонансную частоту, добротность и полосу пропускания резонатора на этом типе колебаний. Материал стенок — медь. Тангенс диэлектрических потерь $\operatorname{tg} d_s = 2 \cdot 10^{-4}$. Исходные данные приведены в таблице 4.10.

Таблица 4.10 — Исходные данные к задаче 9

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
d , см	6,0	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9
l , см	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
ε	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	2,4	2,25	2,1

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ И ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

5.1. Элементы векторного анализа

Для описания физических полей принято использовать их математические модели — скалярные и векторные поля. В прямоугольной (декартовой) системе координат скалярное поле U приобретает вид некоторой функции $U(x, y, z)$, принимающей численные значения — действительные или комплексные. Векторное поле $\vec{A}$ задаётся тремя проекциями на единичные векторы (орты) системы координат

$$\vec{A} = A_x \cdot \vec{1}_x + A_y \cdot \vec{1}_y + A_z \cdot \vec{1}_z.$$

Для характеристики величины и направления скорости изменения скалярного поля в пространстве вводят градиент этого поля

$$\text{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \bar{1}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \bar{1}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \bar{1}_z. \quad (5.1)$$

Векторное поле $\bar{A}$ принято характеризовать скалярным полем — дивергенцией ($\text{div } \bar{A}$) и векторным полем — ротором ($\text{rot } \bar{A}$).

Дивергенция векторного поля $\bar{A}$ в декартовой системе координат

$$\text{div } \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (5.2)$$

Ротор векторного поля $\bar{A}$ в декартовой системе координат имеет вид

$$\text{rot } \bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{1}_x & \bar{1}_y & \bar{1}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cdot \bar{1}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cdot \bar{1}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cdot \bar{1}_z. \quad (5.3)$$

Дифференциальные операции со скалярными и векторными полями удобно записывать с помощью оператора Гамильтона ∇ (вектор «набла»). В декартовой системе координат этот символический вектор записывается следующим образом

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \bar{1}_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \bar{1}_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \bar{1}_z, \quad (5.4)$$

а $\text{grad } U$, $\text{div } \bar{A}$ и $\text{rot } \bar{A}$ имеют вид:

$$\text{grad } U = \nabla U, \quad \text{div } \bar{A} = (\nabla \cdot \bar{A}), \quad \text{rot } \bar{A} = [\nabla \times \bar{A}]. \quad (5.5)$$

Из дифференциальных векторных операций второго порядка широкое применение в электродинамике находит оператор: ∇^2 , закон действия которого на векторное поле $\bar{A}$ описывается соотношением

$$\nabla^2 \bar{A} = \text{grad div } \bar{A} - \text{rot rot } \bar{A}. \quad (5.6)$$

Дифференциальная операция второго порядка, действующая на скалярное поле, задаётся оператором Лапласа

$$\nabla^2 U = \Delta U = \text{div grad } U.$$

Оператор Лапласа в декартовой системе координат

$$\Delta^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (5.7)$$

Для графического изображения векторных полей принято строить картину их силовых линий. В каждой точке силовой линии вектор поля касателен к ней.

Поле является соленоидальным, когда $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, и потенциальным, при выполнении условия $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$.

Дивергенция векторного произведения двух векторов равна

$$\operatorname{div} [\vec{A} \times \vec{B}] = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B}. \quad (5.8)$$

5.2. Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла описывают совокупность эмпирических сведений об электромагнитном поле. Для вакуума вводят два векторных объекта — напряжённость электрического поля $\vec{E}$ [В/м] и напряжённость магнитного поля $\vec{H}$ [А/м]. Кроме того, скалярное поле определяют объёмной плотностью электрического заряда ρ [Кл/м³] и векторное поле — плотностью электрического тока $\vec{j}$ [А/м²]. Система уравнений Максвелла для вакуума относительно перечисленных величин записываются в виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где ε_0 и μ_0 — физические константы: $\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$ Ф/м — электрическая постоянная и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная.

Первое уравнение системы представляет собой дифференциальную форму записи известного закона Ампера, дополненную вектором плотности тока смещения

$$\vec{j}_{\text{см}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (5.10)$$

Второе уравнение системы (5.9) описывает закон электромагнитной индукции Фарадея. Из третьего уравнения следует, что электрические силовые линии могут начинаться и оканчиваться только на электрических зарядах. Четвёртое уравнение указывает на то, что в вакууме силовые линии магнитного поля всегда замкнуты.

В присутствии материальных сред теория Максвелла должна быть дополнена рядом новых представлений, учитывающих микроскопическую структуру вещества.

Материальные уравнения электромагнитного поля можно записать в форме:

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}; \quad \vec{j} = s \vec{E}, \quad (5.11)$$

где $\vec{D}$ — вектор электрического смещения (индукции), Кл/м; $\vec{B}$ — вектор магнитной индукции, Вб/м² или Тл; ε_a — абсолютная диэлектрическая проницаемость, Ф/м; μ_a —

абсолютная магнитная проницаемость, Гн/м; σ — удельная проводимость вещества, См/м.

В расчётах часто используют относительные проницаемости:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0}; \quad \mu = \frac{\mu_a}{\mu_0}. \quad (5.12)$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме для материальных сред:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \sigma \bar{E} + \bar{j}_{\text{ст.э}}; \\ \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \bar{j}_{\text{ст.м}}; \\ \operatorname{div} \bar{D} &= \rho; \\ \operatorname{div} \bar{B} &= 0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

где $\bar{j}_{\text{ст.э}}$, $\bar{j}_{\text{ст.м}}$ — плотности сторонних электрического и магнитного токов.

Уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \oint_L \bar{H} d\bar{l} &= \oint_S \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \sigma \bar{E} + \bar{j}_{\text{ст.э}} \right) d\bar{S}; \\ \oint_L \bar{E} d\bar{l} &= -\oint_S \left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \bar{j}_{\text{ст.м}} \right) d\bar{S}; \\ \oint_S \bar{D} d\bar{S} &= \int_V \rho dV; \\ \oint_S \bar{B} d\bar{S} &= 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Часто приходится рассматривать электромагнитные поля, изменяющиеся во времени по гармоническому закону с частотой ω . При этом уравнение Максвелла записывают относительно комплексных амплитуд полей:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\bar{H}} &= i\omega \varepsilon_a \dot{\bar{E}} + \dot{\bar{j}}_{\text{ст.э}}; \\ \operatorname{rot} \dot{\bar{E}} &= -i\omega \mu_a \dot{\bar{H}} - \dot{\bar{j}}_{\text{ст.м}}; \\ \operatorname{div} \dot{\bar{D}} &= \rho; \\ \operatorname{div} \dot{\bar{B}} &= 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

В эти уравнения входят комплексные диэлектрическая $\dot{\epsilon}_a$ и магнитная $\dot{\mu}_a$ проницаемости:

$$\dot{\epsilon}_a = \epsilon'_a - i\epsilon''_a; \quad \dot{\mu}_a = \mu'_a - i\mu''_a.$$

Наличие мнимых частей проницаемости указывает на необратимые превращение части энергии электромагнитного поля в энергию теплового движения. Если потери в среде связаны только с наличием токов проводимости, то

$$\dot{\epsilon}_a = \epsilon_a - i\frac{\delta}{\omega}; \quad \dot{\mu}_a = \mu_a. \quad (5.16)$$

В технике различные вещества принято характеризовать при помощи тангенсов углов диэлектрических магнитных потерь:

$$\text{tg}d_\epsilon = \frac{e''_a}{e'_a}; \quad \text{tg}d_\mu = \frac{m''_a}{m'_a}. \quad (5.17)$$

в случае (5.16)

$$\text{tg}d_\epsilon = \frac{d}{we_a}.$$

На границе раздела двух материальных сред с различными электродинамическими параметрами векторы поля должны удовлетворять определённым граничным условиям. Каждый из векторов (например, $\vec{E}$) в точке границы принято разлагать на нормальную и тангенциальную (касательную) составляющие

$$\vec{E} = E_n \cdot \vec{1}_n + E_t \cdot \vec{1}_t,$$

где $\vec{1}_n$ и $\vec{1}_t$ — орты нормального и тангенциального направлений соответственно.

Нормальные составляющие индукций и тангенциальные составляющие напряжённостей непрерывны в каждой точке границы раздела диэлектриков:

$$\begin{aligned} D_{1n} &= D_{2n}; & E_{1t} &= E_{2t}; \\ B_{1n} &= B_{2n}; & H_{1t} &= H_{2t}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Если одной из сред является идеально проводящий металл, для которого $\delta \rightarrow \infty$, то на его поверхности тангенциальная составляющая электрического вектора отсутствует

$$E_t = 0.$$

На поверхности проводника имеется электрический ток с поверхностной плотностью

$$\vec{j}_s = [\vec{1}_n \times \vec{H}]. \quad (5.20)$$

Электромагнитное поле является носителем энергии. Объёмная плотность энергии в любой точке пространства

$$W = \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}). \quad (5.21)$$

Закон сохранения энергии находит своё отражение в теореме Пойнтинга

$$-\operatorname{div}[\bar{E} \times \bar{H}] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} (\bar{E}\bar{D} + \bar{H}\bar{B}) \right] + dE^2 + \bar{j}_{\text{ст.э}} \bar{E} + \bar{j}_{\text{ст.м}} \bar{H}. \quad (5.22)$$

Вектор Пойнтинга

$$\bar{\Pi} = [\bar{E} \times \bar{H}]. \quad (5.23)$$

характеризует плотность потока мощности излучения.

Для полей, изменяющихся по времени по гармоническому закону, принято вводить комплексный вектор Пойнтинга

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} [\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*]. \quad (5.24)$$

Действительная часть этого вектора

$$\bar{\Pi}_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*]. \quad (5.25)$$

равна среднему за период потоку мощности излучения.

5.3. Статические и стационарные электромагнитные поля

Электростатическое поле удовлетворяет уравнениям (5.26)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \bar{D} &= \rho. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Система уравнений (5.27) характеризует магнитное поле постоянных токов

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= \bar{j}, \\ \operatorname{div} \bar{B} &= 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Безвихревой характер электростатического поля позволяет описать его с помощью поля скалярного электрического потенциала φ , определив связь между величинами $\bar{E}$ и φ соотношением

$$\bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (5.28)$$

Разность потенциалов между двумя произвольными точками

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \bar{E} d\mathbf{l}. \quad (5.29)$$

не зависит от вида кривой, соединяющей точки 1 и 2, вдоль которой производится интегрирование.

Совместное рассмотрение уравнения $\operatorname{div} \bar{D} = \rho$ и $\bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ приводит к уравнению Пуассона

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} j = \nabla^2 j = -\frac{\rho}{\epsilon_a}, \quad (5.30)$$

которое является наиболее общим уравнением для однородной среды, содержащей объёмные электрические заряды. Если в некоторой области пространства эти заряды отсутствуют, то скалярный электрический потенциал подчиняется уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (5.31)$$

Точечный заряд q в вакууме характеризуется сферически симметричным распределением потенциала

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (5.32)$$

Если внутри ограниченной области V распределены электрические заряды с объёмной плотностью ρ , то на основании принципа суперпозиции решение уравнения Пуассона запишется в виде

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho dV}{R}. \quad (5.33)$$

где R — длина отрезка между точками наблюдения и интегрирования.

Важным понятием электростатики являются ёмкость системы двух проводников

$$C = \frac{q}{U}, \quad (5.34)$$

где $U = |\varphi_1 - \varphi_2|$ — абсолютные значения разности потенциалов между проводниками.

Энергия электростатического поля, запасённая в объёме V

$$W_s = \frac{1}{2} \int_V \bar{E} \bar{D} dV. \quad (5.35)$$

5.4. Плоские электромагнитные волны

Плоские электромагнитные волны существуют в однородных безграничных средах. В случае полей, изменяющихся во времени по гармоническому закону, комплексные амплитуды $\bar{E}$ и $\bar{H}$ удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{E} + \gamma^2 \bar{E} &= 0; \\ \nabla^2 \bar{H} + \gamma^2 \bar{H} &= 0, \end{aligned} \quad (5.36)$$

где $\gamma = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = \beta - i\alpha$ — комплексный коэффициент распространения; β — коэффициент фазы, или волновое число; α — коэффициент ослабления.

Решение уравнения Гельмгольца описывает однородную плоскую волну. Если последняя распространяется вдоль оси z декартовой системы координат, то указанное решение имеет вид

$$\bar{E}(z) = \bar{E}_1(0)e^{-iyz} + \bar{E}_2(0)e^{iyz}. \quad (5.37)$$

Первое слагаемое соответствует прямой (падающей) волне, распространяющейся в направлении положительных значений z , второе слагаемое — обратной (отражённой) волне, распространяющейся в направлении отрицательных значений z .

Поскольку $e_a = e_a(1 - \operatorname{tg} d_3)$, $\mu = \mu_a$, то комплексный коэффициент распространения определяется выражением

$$g = b - ia = w \sqrt{e_a m_a} \cdot \sqrt{1 - \operatorname{tg} d_3}. \quad (5.38)$$

Коэффициент фазы β характеризует изменение фазы гармонических колебаний при распространении волны. Расстояние, на котором фаза изменяется на 2π радиан, называется длиной волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Плоскость равных фаз называется фазовым фронтом волны, а скорость перемещения этой плоскости — фазовой скоростью

$$V_\phi = \frac{w}{b}. \quad (5.39)$$

Коэффициент фазы и коэффициент ослабления могут быть выражены следующими формулами

$$b = \frac{2p \sqrt{e}}{l_0} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 d_3}}{2} \right)^{1/2}. \quad (5.40)$$

$$a = \frac{2p \sqrt{e}}{l_0} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 d_3} - 1}{2} \right)^{1/2}. \quad (5.41)$$

Таким образом, между ними существует соотношение

$$a = b \operatorname{tg} \left(\frac{d_3}{2} \right).$$

Фазовая скорость

$$V_\phi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}} \frac{c}{\left(1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 d_3} \right)^{1/2}}, \quad (5.42)$$

λ — длина волны

$$l = \frac{l_0 \sqrt{2}}{\sqrt{e \left(1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 d_3}\right)^{1/2}}}. \quad (5.43)$$

Отношение фазовой скорости в среде к скорости света называют коэффициентом преломления

$$n = \sqrt{\varepsilon \mu}.$$

Из уравнений Максвелла следует, что в случае плоской волны комплексные амплитуды векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ связаны характеристическим сопротивлением среды

$$Z_c = \frac{\omega \mu_a}{\gamma} = \sqrt{\frac{\dot{\mu}_a}{\dot{\varepsilon}_a}}, \quad (5.44)$$

так что

$$\vec{E} = Z_0 \cdot \vec{H}.$$

Характеристическое сопротивление для немагнитных сред ($\mu_a = \mu_0$)

$$Z_c = \sqrt{\frac{m_0}{e e_0}} (1 - i \operatorname{tg} d_3)^{-1/2} = \frac{120 \rho}{\sqrt{e}} (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_3)^{-1/4} e^{i \frac{d_3}{2}}, \text{ Ом.}$$

Аргумент принимает значение от нуля (диэлектрические потери) до 90 градусов (идеальный проводник).

Характеристическое сопротивление для вакуума

$$Z_0 = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} = 120\pi = 377 \text{ Ом.}$$

Векторные уравнения (5.36) означают, что любая координатная составляющая векторов поля удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \dot{U} + \gamma^2 \dot{U} = 0$, имеющую в декартовой системе координат, частное решение

$$U = C \exp[-i\gamma(v_x x + v_y y + v_z z)]. \quad (5.45)$$

где C — константа, а v_x, v_y, v_z — комплексные постоянные, удовлетворяющие условию

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1. \quad (5.46)$$

Если v_x, v_y, v_z — вещественные числа, то выражение (5.45) описывает однородную плоскую волну, распространяющуюся в произвольном относительно исходной схемы координат направлении. Эту волну удобно выразить формулой

$$\dot{U} = C \exp[-i\gamma(vr)]. \quad (5.47)$$

Числа v_x, v_y, v_z имеют смысл направляющих косинусов, фиксирующих распространение волны, а r — есть радиус — вектор точки (x, y, z) Если хотя бы одно из

чисел v_x, v_y, v_z комплексное, то выражение (5.45) описывает неоднородную плоскую волну

$$U = c \exp\{-i \operatorname{Re} [\gamma(v_x x + v_y y + v_z z)] - \operatorname{Im} [(v_x x + v_y y + v_z z)]\}, \quad (5.48)$$

у которой фазовый фронт задаётся уравнением

$$\operatorname{Re} [\gamma(v_x x + v_y y + v_z z)] = \text{const},$$

а плоскость равных амплитуд — уравнением

$$\operatorname{Im} [\gamma(v_x x + v_y y + v_z z)] = \text{const}.$$

В общем случае фазовый фронт и плоскость равных амплитуд образует между собой произвольный угол.

Поскольку уравнения Максвелла линейны, любая комбинация их решений также является линейным решением. В частности, если $E_x \bar{1}_x$ и $E_y \bar{1}_y$ — решения исходных уравнений, то

$$\dot{\bar{E}} = \dot{E}_x \bar{1}_x + \dot{E}_y \bar{1}_y \quad (5.49)$$

тоже есть решение уравнений Максвелла и, следовательно, оно описывает распространение в пространстве некоторой волны. В зависимости от соотношения между фазами и амплитудами E_x и E_y в каждой точке пространства конец вектора $\bar{E}$ будет перемещаться по эллипсу с различным отношением и ориентацией его полуосей. Такая волна называется волной с эллиптической поляризацией. Отношение большой полуоси эллипса к малой называют коэффициентом эллиптичности $K_{\text{эл}}$. Линейно поляризованная волна представляет собой один из предельных случаев эллиптичности поляризованной волны. Второй предельный случай имеет место при равенстве амплитуд исходных полей и сдвиге фаз между ними, равном 90 градусов. Здесь конец вектора $\bar{E}$ перемещается по окружности, и волна называется волной с круговой поляризацией. Поле такой волны можно представить выражением

$$\bar{E}_{+-} = \bar{E}_+ + \bar{E}_- = \dot{E}(\bar{1}_x \pm i \bar{1}_y), \quad (5.51)$$

$$\text{где } \bar{E}_+ = \frac{E_x}{2}(\bar{1}_x + i \bar{1}_y); \quad \bar{E}_- = \frac{E_x}{2}(\bar{1}_x - i \bar{1}_y), \quad (5.52)$$

то есть любая волна с линейной поляризацией может быть представлена суммой двух волн с круговой поляризацией, например, $\bar{E} = \bar{E}_+ + \bar{E}_-$.

5.5. Отражение и преломление плоских электромагнитных волн

При распространении плоской электромагнитной волны на границе раздела сред возникают отражённые и преломлённые волны, комплексные амплитуды которых связаны с комплексной амплитудой падающей волны коэффициентом отражения и коэффициентом преломления (прохождения)

$$\dot{\Gamma} = \frac{\dot{E}_{\text{отр}}}{\dot{E}_{\text{пад}}}; \quad \dot{T} = \frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{\dot{E}_{\text{пад}}}.$$

Если вектор Пойнтинга падающей волны перпендикулярен границе раздела, то

$$\dot{\Gamma} = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}; \quad (5.53)$$

$$\dot{T} = \frac{2Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}}. \quad (5.54)$$

где Z_{c1} и Z_{c2} — характеристики сопротивления сред.

При наклонном падении направления распространения волн по отношению к границе раздела задаются углами, измеряемые относительно нормали к этой границе. Плоскость, содержащая вектор Пойнтинга падающей волны и нормаль к границе раздела, называют плоскостью падения. Из граничных уравнений следует, что углы падения φ , отражения φ_0 и преломления j_{np} связаны законом зеркального отражения $\varphi = \varphi_0$ и законом Снеллиуса

$$\frac{\sin j}{\sin j_{np}} = \frac{b_2}{b_1}. \quad (5.55)$$

где индекс 1 относится к среде, содержащей падающую волну. Так как для сред без потерь

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}, \quad \text{то} \quad \frac{\sin j}{\sin j_{np}} = \sqrt{\frac{e_2 m_2}{e_1 m_1}}. \quad (5.56)$$

Коэффициенты отражения $\dot{\Gamma}$ и преломления $\dot{T}$ для заданного значения угла падения зависят от ориентации векторов электромагнитного поля по отношению к плоскости падения. Если вектор $\vec{E}$ лежит в этой плоскости, то

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{Z_{c2} \cos j_{np} - Z_{c1} \cos j}{Z_{c2} \cos j_{np} + Z_{c1} \cos j}. \quad (5.57)$$

$$T_{\parallel} = \frac{2Z_{c2} \cos j}{Z_{c2} \cos j_{np} + Z_{c1} \cos j}. \quad (5.58)$$

Если вектор $\vec{E}$ перпендикулярен плоскости падения, то коэффициент отражения и преломления выражается соотношениями

$$\Gamma_{\perp} = \frac{Z_{c2} \cos j - Z_{c1} \cos j_{np}}{Z_{c2} \cos j + Z_{c1} \cos j_{np}}. \quad (5.59)$$

$$T_{\perp} = \frac{2Z_{c2} \cos j}{Z_{c2} \cos j + Z_{c1} \cos j_{np}}. \quad (5.61)$$

Для диэлектрических сред Γ и T удобно представить в более компактной форме

$$\Gamma_{\perp} = -\frac{\sin(j - j_{\text{пр}})}{\sin(j + j_{\text{пр}})}. \quad (5.61)$$

$$\Gamma_{\parallel} = -\frac{\text{tg}(j - j_{\text{пр}})}{\text{tg}(j + j_{\text{пр}})}. \quad (5.62)$$

$$T_{\perp} = \frac{2 \sin j_{\text{пр}} \cos j}{\sin(j + j_{\text{пр}})}. \quad (5.63)$$

$$T_{\parallel} = \frac{2 \sin j_{\text{пр}} \cos j}{\sin(j + j_{\text{пр}}) \cos(j_{\text{пр}} - j)}. \quad (5.64)$$

Во всех приведенных формулах при необходимости можно исключить угол преломления $j_{\text{пр}}$, используя закон Снеллиуса. Из формулы (5.62) следует, что при $j + j_{\text{пр}} = \pi/2$ коэффициент отражения для плоских электромагнитных волн, вектор $\vec{E}$ которых лежит в плоскости падения, равен нулю, и отражённая волна на границе раздела двух немагнитных сред не возникает. Угол падения, при котором наблюдается такое явление, называют углом Брюстера для немагнитных сред, который находят из соотношения

$$\text{tg } j_{\text{Б}} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}. \quad (5.65)$$

Согласно равенству (5.56) при $\epsilon_2 \mu_2 < \epsilon_1 \mu_1$ угол преломления больше угла падения, поэтому, если

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}}, \quad (5.66)$$

то преломлённая волна будет скользить вдоль границы раздела и, в соответствии с выражениями (5.57) и (5.59), коэффициенты отражения по модулю становятся равными единице. При дальнейшем увеличении угла падения модули отражения $\Gamma_{\parallel}$, $\Gamma_{\perp}$, остаются равными единице; изменяются только фазы коэффициентов. Такое явление называется полным внутренним отражением.

5.6. Волноводы

Волновод представляет собой полую металлическую трубу произвольного сечения, внутри которой распространяются электромагнитные волны. Наиболее часто применяют волноводы прямоугольного сечения, реже, круглого сечения, ещё реже — волноводы более сложного сечения, например П — образные и Н — образные.

В волноводах с идеально проводящими стенками и однородным заполнением могут распространяться волны электрического типа (E_{mn}), у которых $H_z = 0$, а $E_z \neq 0$ (направление оси z совпадает с продольной осью волновода, и волны магнитного типа (H_{mn}), у которых $E_z = 0$, а $H_z \neq 0$.

Предположим, что волновод заполнен диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью $\mu = 1$. Каждый конкретный тип волны в волноводе может распространяться в том случае, если

$$\frac{l_0}{\sqrt{e}} < l_{кр}. \quad (5.67)$$

где λ_0 — длина волны генератора; $l_{кр}$ — критическая длина волны, которая определяется размерами и формой поперечного сечения волновода.

Для волн типа E_{mn} и H_{mn} в прямоугольном волноводе

$$l_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}, \quad (5.68)$$

где a, b — размеры поперечного сечения волновода; m, n — количество полуволн, укладывающихся на широкой и узкой стенках волновода (a и b) соответственно.

Расчетные формулы для фазовой скорости, длины волны в волноводе и групповой скорости имеет вид:

$$V_{\phi} = \frac{c/\sqrt{e}}{\sqrt{1 - \frac{1}{e} \left(\frac{l_0}{l_{кр}}\right)^2}}; \quad (5.69)$$

$$l_{в} = \frac{l_0/\sqrt{e}}{\sqrt{1 - \frac{1}{e} \left(\frac{l_0}{l_{кр}}\right)^2}}; \quad (5.70)$$

$$V_{гр} = \frac{c}{\sqrt{e}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{e} \left(\frac{l_0}{l_{кр}}\right)^2}. \quad (5.71)$$

где c — скорость света в свободном пространстве.

Выражения для составляющих векторов напряженностей типа H_{mn} , в прямоугольном волноводе записываются в виде:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= -i\omega\mu_a \frac{\pi n}{g^2 b} H_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-ihz}; \\ \dot{E}_y &= -\omega\mu_a \frac{\pi b}{g^2 a} H_0 \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-ihz}; \\ \dot{E}_z &= 0; \\ \dot{H}_x &= i \frac{h p m}{g^2 a} H_0 \sin\left(\frac{p m x}{a}\right) \cos\left(\frac{p n y}{b}\right) e^{-ihz}; \end{aligned} \quad (5.72)$$

$$\dot{H}_y = i \frac{h\pi n}{g^2 b} H_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-ihz};$$

$$\dot{H}_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-ihz}.$$

Основным типом волны в прямоугольном волноводе при $a > b$, является волна H_{10} , для которой $l_{кр} = 2a$, ближайшими высшими типами — волны H_{20} , H_{01} , H_{11} .

Наибольшее практическое значение имеет волна типа H_{10} в прямоугольном волноводе. Составляющие векторов поля этой волны описываются выражениями:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= 0; \\ \dot{E}_y &= E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-ihz}; \\ \dot{E}_z &= 0; \\ \dot{H}_x &= -\frac{h}{\omega \mu_0} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-ihz}; \\ \dot{H}_y &= 0; \\ \dot{H}_z &= i \frac{\pi}{a} \frac{E_0}{\omega \mu_0} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-ihz}. \end{aligned} \tag{5.73}$$

где $h = \sqrt{\beta^2 \varepsilon - g^2}$, — продольное волновое число; $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_0}$; $g = \frac{2\pi}{l_{кр}}$ — поперечное волновое число.

Характеристическим сопротивлением Z_c волновода, называется отношение поперечных составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Для волн магнитного типа

$$Z_{cm} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{l}{l_{кр}}\right)^2}}. \tag{5.75}$$

для волн электрического типа

$$Z_{cz} = Z_0 \sqrt{1 - \left(\frac{l}{l_{кр}}\right)^2},$$

где $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ — характеристическое сопротивление плоской волны в свободном пространстве.

Мощность, переносимую волной любого типа в волноводе, определяют интегрированием вектора Пойнтинга по поперечному сечению волновода

$$P_{cp} = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re} \left(\vec{1}_z \cdot [\vec{E} \times \vec{H}^*] \right) dS. \quad (5.76)$$

Подставляя выражения для составляющих векторов поля (5.73) в (5.76), получим формулу для расчета мощности, переносимой волной типа H_{10} в прямоугольном волноводе

$$P = \frac{ab \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a} \right)^2}}{4Z_0} E_0^2. \quad (5.77)$$

где E_0 — максимальная амплитуда напряжённости электрического поля в волноводе.

Максимальная переносимая мощность в волноводе определяется максимально допустимой (пробивной) напряжённостью электрического поля в волноводе. Для сухого воздуха при атмосферном давлении $E_{max} = 30 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}$.

Коэффициент ослабления волны типа H_{10} в волноводе, равен сумме коэффициентов ослабления, вызванных потерями в металлических стенках и в диэлектрике

$$a_{общ} = a_m + a_p;$$

$$a_m = \frac{R_s \left[1 + \left(\frac{l_0}{2a} \right)^2 \cdot \frac{2b}{a} \right]}{Z_0 b \sqrt{1 - \left(\frac{l_0}{2a} \right)^2}}, \quad (5.78)$$

где $R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\theta}}$ — поверхностное сопротивление металла;

$$a_p = \frac{\rho_e \operatorname{tg} d_s}{l_0 \sqrt{1 - \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{l_0}{2a} \right)^2}}. \quad (5.79)$$

5.7. Объёмные резонаторы

Объёмный резонатор представляет собой замкнутую полость, ограниченную металлическими стенками, внутри которой существуют электромагнитные колебания.

Конфигурация объёмного резонатора может быть любой, однако, наибольшее практическое применение находят прямоугольный, цилиндрический, коаксиальный и тороидальный объёмные резонаторы.

Резонансная частота колебаний типа H_{mnp} или E_{mnp} прямоугольного объёмного резонатора равна

$$w_p = \frac{1}{\sqrt{e_a m_a}} \cdot \sqrt{\left(\frac{mp}{a}\right)^2 + \left(\frac{np}{b}\right)^2 + \left(\frac{pp}{l}\right)^2}, \quad (5.80)$$

где a, b, l — геометрические размеры резонатора; индексы m, n, p означает число вариаций поля по осям x, y, z соответственно.

Основным типом колебаний в прямоугольном резонаторе, имеющим минимальную резонансную частоту, в зависимости от соотношения размеров a, b и l могут быть $H_{101}, H_{011}, E_{110}$. Например, при $b < a$ и $b < l$, основным типом колебания является H_{101} , составляющие векторов поля которого описываются выражениями:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= 0; \\ \dot{E}_y &= -i\omega\mu_a c \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right); \\ \dot{E}_z &= 0; \\ \dot{H}_x &= -c \frac{\pi^2}{al} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right); \\ \dot{H}_y &= 0; \\ \dot{H}_z &= c \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right). \end{aligned} \quad (5.81)$$

Энергия, запасённая в объёмном резонаторе любого типа

$$W = \int_V \epsilon_a \frac{E^2}{2} dV + \int_V \mu_a \frac{H^2}{2} dV, \quad (5.82)$$

где E и H — амплитудные значения напряжённостей электрического и магнитного полей; интегрирование ведётся по объёму резонатора.

В частности, для колебаний типов $H_{101}, H_{011}, E_{110}$ в прямоугольном объёмном резонаторе

$$W = \frac{1}{8} \epsilon_a E_{\max}^2 abl, \quad (5.83)$$

где $E_{\max}$ — максимальная амплитуда напряжённости электрического поля в резонаторе.

Добротность объёмного резонатора определяет как отношение энергии электромагнитного поля, запасённой в резонаторе, к энергии теряемой за период собственных колебаний.

Для колебаний типа H_{101} в прямоугольном резонаторе

$$Q = \frac{w_p m_a}{2R_s} \cdot \frac{abl(a^2 + l^2)}{a^3(l + 2b) + l^3(a + 2b)}. \quad (5.84)$$

Если резонатор заполнен диэлектриком с потерями, то результирующая добротность Q_p равна

$$Q_p = \frac{1}{\frac{1}{Q} + \operatorname{tg} d_3}. \quad (5.85)$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Боков, Л.А. Электродинамика и распространение радиоволн : учеб. пособие / Л.А. Боков, В.А. Замотринский, А.Е. Мандель. — Томск : ТУСУР, 2012. — 301 с.
2. Электродинамика и распространение радиоволн: учеб. пособие / Д.Ю. Муромцев, Ю.Т. Зырянов, П.А. Федюнин и др. — СПб.: Лань, 2014. — 448 с.
3. Петров, Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн / Б.М. Петров. — М. : Горячая линия — Телеком, 2007. — 558 с.
4. Саламатин, В. В. Основы электродинамики (традиционной и геометрической): учеб. пособ. / В. В. Саламатин, И. Л. Афонин ; Под ред. В. В. Саламатина. — Севастополь : Изд-во СевНТУ, 2003. — 216 с.

Дополнительная литература

5. Потапов, Л.А. Электродинамика и распространение радиоволн: учебное пособие для бакалавриата и специалитета / Л. А. Потапов. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 196 с.
6. Гольдштейн, Л. Д. Электромагнитные поля и волны / Л. Д. Гольдштейн, Н. А. Зернов. — М. : Сов. радио, 1971. — 664 с.
7. Федоров, Н. Н. Основы электродинамики / Н. Н. Федоров. — М. : Высш. шк., 1980. — 399 с.
8. Марков, Г. Т. Электродинамика и распространение радиоволн / Г. Т. Марков, Б. М. Петров, Г. П. Грудинская. — М. : Сов. радио, 1979. — 376 с.
9. Никольский, В. В. Электродинамика и распространение радиоволн / В. В. Никольский. — М. : Сов. радио, 1976. — 543 с.
10. Сборник задач по курсу «Электродинамика и распространение радиоволн»: учеб. пособ. / С. И. Баскаков, В. Г. Карташов, Г. Д. Лобов и др.; Под ред. С. И. Баскакова. — М. : Высш. шк., 1981. — 208 с.
11. Витевский, В. Б. Сборник упражнений и задач по электродинамическим дисциплинам / В. Б. Витевский, О. Н. Маслов, Э. А. Павловская. — М. : Радио и связь, 1996. — 197 с.
12. Семенов, Н. А. Техническая электродинамика / Н. А. Семенов. — М. : Связь, 1973. — 300 с.
13. Фальковский, О. И. Техническая электродинамика / О. И. Фальковский. — М. : Связь, 1978. — 356 с.
14. Векштейн, Е. Г. Сборник задач по электродинамике / Е. Г. Векштейн. — М. : Высш. шк., 1966. — 288 с.
15. Двайт, Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. — М. : Наука, 1986. — 176 с.
16. Саламатин, В. В. Основы геометрической электродинамики волноводов прямоугольного сечения: учеб. пособ. / В. В. Саламатин, И. Л. Афонин, С. Н. Бердышев. — Севастополь : Изд-во СевНТУ, 2008. — 220 с.

Учебное издание

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Учебно-методическое пособие

Составители: **Афонин** Игорь Леонидович,
Кудрявченко Иван Владимирович

В авторской редакции

Изд. № 187/2022. Объем 2 п.л. Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 1,96.
РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»