

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
ОДНОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ
ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

Методические указания
к выполнению лабораторной работы
по дисциплине «Прикладная математика и информатика»
для студентов направления 09.03.01
«Информатика и вычислительная техника»
очной формы обучения

Севастополь
СевГУ
2022

УДК 519.651 (076.5)

ББК 22.193я73

Ч-660

Р е ц е н з е н т :

Е.В. Козлова - канд. техн. наук, доцент
кафедры информационных технологий и компьютерных систем

Составители : И.А. Балакирева, А.В. Скатков

Ч-660 Численные методы однокритериальной оптимизации функций одной переменной : методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине «Прикладная математика и информатика» для студентов направления 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» очной формы обучения / Севастопольский государственный университет; сост. : И.А. Балакирева, А.В. Скатков. – Севастополь : СевГУ, 2022. – 25 с. – Текст : электронный.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам в изучении дисциплины «Прикладная математика и информатика», а также при выполнении выпускных квалификационных работ, связанных с параметрической оптимизацией вычислительных систем.

УДК 519.651 (076.5)

ББК 22.193я73

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры информационных технологий и компьютерных систем, протокол № 7 от 31 мая 2022 г.

© ФГАОУВО «Севастопольский
государственный университет», 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Постановка задачи однопараметрической оптимизации	5
2. Поиск минимума функции на основе методов исключения интервалов	7
2.1. Метод деления интервала пополам	9
2.2 Метод золотого сечения	12
2.3. Метод Фибоначчи	14
3. Поиск минимума функции на основе методов полиномиальной аппроксимации. Метод квадратичной аппроксимации	18
4. Индивидуальные задания к разделу «Методы однопараметрической оптимизации»	22
5. Содержание отчета о выполнении индивидуального задания	22
Библиографический список	23
Приложение А	24

Введение

Теория оптимизации представляет собой совокупность математических методов, ориентированных на нахождение наилучших вариантов из множества альтернатив и позволяющих избежать полного перебора и оценивания возможных вариантов.

Задачи оптимизации могут быть связаны с выбором оптимальной структуры некоторого объекта. Такие задачи являются задачами структурной оптимизации. Если оптимизация связана с расчетом оптимальных значений параметров при заданной структуре объекта, то такая задача называется задачей параметрической оптимизации.

Для решения задач оптимизации необходимо иметь:

- математическую модель объекта;
- целевую функцию;
- алгоритмы оптимизации;

Целевая функция (критерий эффективности, критерий качества) формализует требования, предъявляемые к объекту проектирования. Цель проектирования может состоять, например, в увеличении надежности функционирования объекта, снижении стоимости проектирования и/или эксплуатации, в максимизации прибыли и так далее.

Алгоритмы оптимизации основываются на методах математического программирования и применяют для определения значений параметров объекта, при которых целевая функция достигает своего оптимального значения. Выбор тех или иных методов, а, следовательно, и алгоритмов оптимизации определяется прежде всего видом математической модели.

В задачах оптимизации, которые ставит перед разработчиками научная и инженерная практика, как правило, целевая функция зависит от большого числа параметров. Такие задачи относятся к задачам многопараметрической оптимизации. Тем не менее, в теории оптимизации также применимы методы поиска экстремумов функций, значения которых определяются единственным параметром. Такие методы носят название методов однопараметрической оптимизации. Они применяются, когда необходимо:

- исследовать поведение целевой функции в зависимости от изменения некоторого единственного параметра;
- определить оптимальное значение функции вдоль выбранного направления в методах многопараметрической оптимизации.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В этом разделе будут рассмотрены методы решения задачи безусловной минимизации функции одной переменной. Задачу запишем следующим образом [4,5]

$$f(x) \rightarrow \min, x \in X \subset R^1.$$

В дальнейшем без ограничения общности будем говорить о поиске минимального значения функции $f(x)$ на некотором интервале $[a, b]$ и записывать задачу минимизации в виде

$$f(x) \rightarrow \min_{a \leq x \leq b}$$

Значение x^* , доставляющее минимум целевой функции, будем называть минимальным. Отметим, что задачу максимизации $f(x)$ можно заменить эквивалентной ей задачей минимизации или наоборот. Если x^* - точка минимума функции $y = f(x)$, то для функции $y = -f(x)$ она является точкой максимума, в графической интерпретации графики функций $f(x)$ и $-f(x)$ симметричны относительно оси абсцисс.

Определение 1. Функция $f(x)$ является монотонной (как при возрастании, так и при убывании), если для двух произвольных точек x_1 и x_2 таких, что $x_1 \leq x_2$, выполняется одно из следующих неравенств $f(x_1) \leq f(x_2)$ или $f(x_1) \geq f(x_2)$ в первом случае имеем монотонно возрастающую функцию, во втором - монотонно убывающую.

Определение 2. Функция $f(x)$ является унимодальной на отрезке $a \leq x \leq b$ в том и только в том случае, если она монотонна по обе стороны от единственной на рассматриваемом интервале оптимальной точки x^* .

Определение 3. Стационарной точкой называется точка x^* , в которой

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x^*} = 0.$$

Если стационарная точка не является локальным экстремумом, то она является точкой перегиба, или седловой точкой.

Необходимыми условиями существования экстремума дважды дифференцируемой функции $f(x)$ в точке x^* на интервале $[a, b]$ являются

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x^*} = 0$$

и неотрицательность или неположительность второй производной.

Достаточные условия существования экстремума функции формулируются следующим образом. Пусть в точке x^* первые $(n - 1)$ производные функции $f(x)$ обращаются в нуль, а производная порядка n отлична от нуля. Тогда, если n – нечетное, то x^* – точка перегиба. Если n – четное, то x^* – точка локального экстремума. Кроме того, если производная функция $f(x)$ в этой точке положительна, то x^* – точка локального минимума, а если отрицательна, то x^* – точка локального максимума.

В зависимости от вида $f(x)$ экстремальное решение x^* может быть либо точкой локального минимума (максимума), либо точкой глобального минимума (максимума).

Определение 4. Функция $f(x)$, определенная на множестве X имеет локальный минимум в точке x^* тогда и только тогда, если $f(x^*) \leq f(x)$ для всех $|x - x^*| < \varepsilon$.

Определение 5. Функция $f(x)$, определенная на множестве X , достигает своего глобального минимума в точке $x^{**} \in X$ только в том случае, если $f(x^{**}) \leq f(x)$ для всех $x \in X$.

Методы поиска минимума функции одной переменной различаются как по требованиям к степени гладкости к ней (непрерывность, дифференцируемость и т.д.), так и по информации, используемой в каждой точке поиска. С этих позиций различают два класса методов. В методах первого класса, получивших название методов исключения интервалов, при определении длины шага поиска учитывается только признак убывания (возрастания) функции. Алгоритмы методов этого класса позволяют найти экстремум для достаточно широкого класса функций. В методах второго класса, основанных на полиномиальной аппроксимации, учитываются изменения численных значений функции в одной или нескольких итерациях [2,4].

В целом методы поиска экстремума различаются по объему вычислений, производимых на одной итерации; по числу обращений к функции; по точности оценки точки экстремума функции; по надежности.

При аналитической форме представления $f(x)$ в большинстве случаев возможно получение априорной информации о таких свойствах как непрерывность и дифференцируемость. Выполнение предпосылок о существовании и непрерывности функции $f(x)$ и ее производных позволяет использовать при поиске экстремума методы второго класса. В случае отсутствия аналитического описания $f(x)$ получить информацию о характере ее изменения в

окрестности предполагаемого экстремума становится крайне трудно. Это обстоятельство обуславливает необходимость при поиске экстремума привлекать методы первого класса [1,3].

2. ПОИСК МИНИМУМА ФУНКЦИИ МЕТОДАМИ ИСКЛЮЧЕНИЯ ИНТЕРВАЛОВ

В данном разделе будут рассмотрены методы поиска экстремума функции $f(x)$, основанные на нахождении точки внутри заданного интервала. Основная идея этих методов заключается в том, что на каждой k -ой операции путем исключения тех интервалов, в которых в силу унимодальности функции $f(x)$ точка x^* не содержится, определяется текущий отрезок неопределенности $[a_{k+1}; b_{k+1}]$, удовлетворяющий системе неравенств

$$a_k \leq a_{k+1} \leq x^* \leq b_{k+1} \leq b_k, \quad \text{или} \\ a_k < a_{k+1} < x^* < b_{k+1} < b_k.$$

Длина L текущего отрезка неопределенности $[a_{k+1}; b_{k+1}]$ зависит от расположения в отрезке $[a_k; b_k]$ точек испытаний x_1^k, x_2^k выбор которых определяется конкретным методом поиска.

Достоинством методов этого класса является то, что все они основаны лишь на вычислении значений функции. Функция $f(x)$ должна быть унимодальной, не иметь горизонтальных участков, хотя может быть недифференцируемой, разрывной, неопределенной в некоторых точках (рисунок 1).

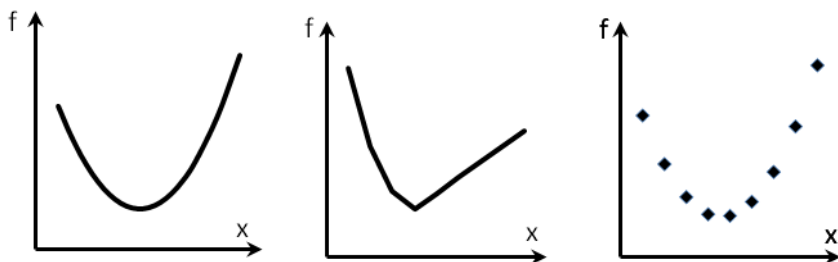


Рисунок 1 – Виды функций, к которым применимы методы исключения интервалов.

При практической реализации методов поиска экстремума функции выделяют два этапа:

- этап установления границ интервала, на котором реализуется процедура поиска границ достаточно широкого интервала, содержащего экстремум функции;

- этап уменьшения интервала, на котором реализуется конечная последовательность преобразований исходного интервала с тем, чтобы уменьшить его длину до заранее установленной величины.

На первом этапе обычно используют эвристические методы поиска. В качестве примера можно привести эвристический алгоритм, предложенный Свенном [4]:

1) задать произвольно следующие параметры: x_0 - некоторую начальную точку, $t > 0$ - величину шага, положить $k=0$;

2) вычислить значение функции в трех точках: $x_0 - t$, x_0 , $x_0 + t$;

3) проверить условие окончания:

а) если $f(x_0 - t) \geq f(x_0) \leq f(x_0 + t)$, то начальный интервал неопределенности найден: $[a_0, b_0] = [x_0 - t, x_0 + t]$;

б) если $f(x_0 - t) \leq f(x_0) \geq f(x_0 + t)$, то функция не является унимодальной (см. определение 2), а требуемый интервал неопределенности не может быть найден. В этом случае рекомендуется задать другую начальную точку x_0 ;

в) если условие окончания не выполняется перейти к шагу 4;

4) определить величину Δ :

а) если $f(x_0 - t) \geq f(x_0) \geq f(x_0 + t)$, то $\Delta = t$; $a_0 = x_0$;
 $x_1 = x_0 + t$; $k = 1$;

б) если $f(x_0 - t) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + t)$, то $\Delta = -t$; $b_0 = x_0$;
 $x_1 = x_0 - t$; $k = 1$;

5) найти следующую точку: $x_{k+1} = x_k + 2^k \Delta$;

6) проверить условие убывания функции:

а) если $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ и $\Delta = t$, то $a_0 = x_k$;

если $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ и $\Delta = -t$, то $b_0 = x_k$;

в обоих случаях положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 5;

б) если $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$, процедура завершается. При $\Delta = t$ положить $b_0 = x_{k+1}$, а при $\Delta = -t$ положить $a_0 = x_{k+1}$. В результате имеем $[a_0, b_0]$ - искомый начальный интервал неопределенности.

После того, как установлены границы интервала, содержащего точку экстремума функции, приступают к реализации второго этапа, т.е. уменьшению интервала поиска с целью получения уточненных оценок координаты точки x^* . Для этого используют различные итерационные методы, которые отличаются друг от друга объемом производимых вычислений и получаемой при этом точностью. Рассмотрим наиболее употребительные методы поиска координаты точки x^* функции $f(x)$.

Исходный интервал поиска иногда называют априорным интервалом неопределенности, а интервал, полученный после проведения n итерации, называют апостериорным интервалом неопределенности.

2.1. Метод деления интервала пополам

Метод половинного деления – один из самых простых методов этого класса. Основная идея состоит в том, что на каждой итерации вычисляются значения $f(x)$ только в двух точках x_1 и x_2 . Точки x_1 и x_2 располагаются симметрично относительно середины текущего отрезка $[a_k; b_k]$ и разнесены между собой ровно на половину этого отрезка. Поэтому на каждой итерации вычисления $f(x)$ в точках x_1 и x_2 половина текущего отрезка в силу уни-modalности функции исключается из дальнейшего рассмотрения. На рисунке 1 показаны возможные ситуации при исключении половины отрезка.

После проведения $n/2$ пар испытаний длина апостериорного интервала неопределенности составляет $(1/2)^{n/2}$ величины априорного интервала.

Алгоритм метода деления интервала пополам включает следующие шаги поисковой процедуры [4]:

Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности $[a^0, b^0]$ и $\varepsilon > 0$ - требуемую точность.

Шаг 2. Положить $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить координату средней точки $x_m^k = \frac{a^k + b^k}{2}$, $f(x_m^k)$ и длину текущего интервала $L^k = b^k - a^k$.

Шаг 4. Вычислить координаты точек: $x_1^k = a^k + L^k/4$ и $x_2^k = b^k - L^k/4$, а также $f(x_1^k)$ и $f(x_2^k)$.

Шаг 5. Сравнить значения $f(x_1^k)$ и $f(x_m^k)$:

а) если $f(x_1^k) < f(x_m^k)$, исключить интервал $(x_m^k, b^k]$, положив

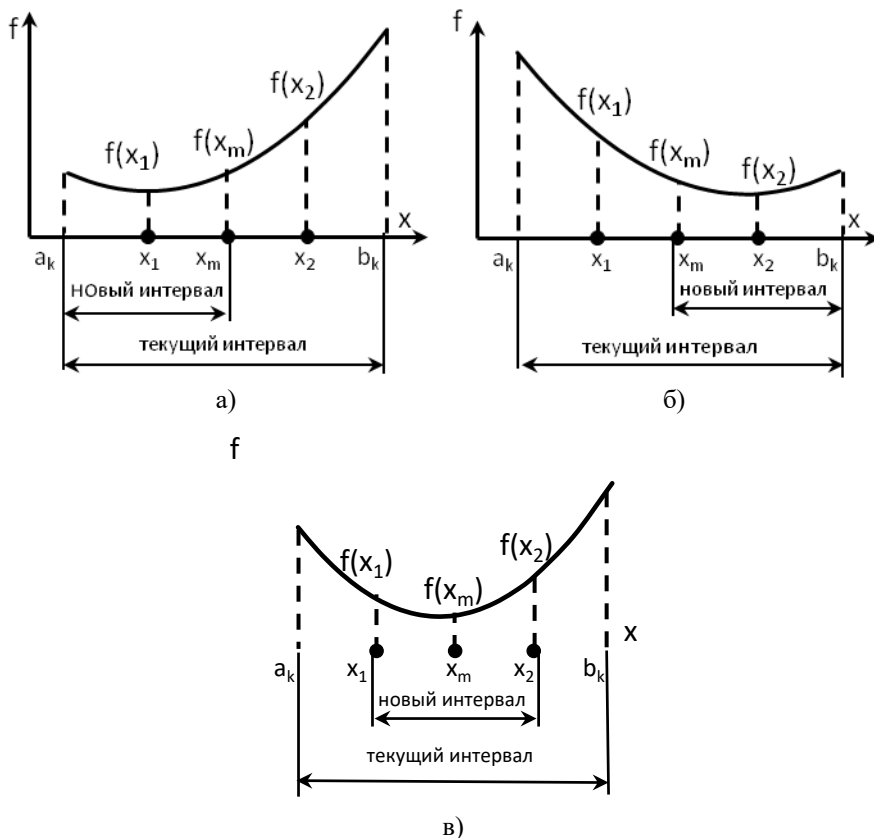


Рисунок 2. – Исключение интервалов при реализации метода деления отрезка пополам.

$b^{k+1} = x_m^k$ и $a^{k+1} = a^k$. Средней точкой нового интервала будет $x_m^{k+1} = x_1^k$ (рисунок 2,а). Перейти к шагу 7;

б) если $f(x_1^k) \geq f(x_m^k)$, перейти к шагу 6.

Шаг 6. Сравнить $f(x_2^k)$ и $f(x_m^k)$:

а) если $f(x_2^k) < f(x_m^k)$, исключить интервал $[a^k, x_m^k]$, положив $a^{k+1} = x_m^k$, $b^{k+1} = b^k$. Средней точкой нового интервала будет $x_m^{k+1} = x_2^k$ (рисунок 2,б). Перейти к шагу 7;

б) если $f(x_2^k) \geq f(x_m^k)$, исключить интервалы $[a^k, x_1^k]$ и $(x_2^k, b^k]$, положив $a^{k+1} = x_1^k$, $b^{k+1} = x_2^k$. Средней точкой нового интервала останется $x_m^{k+1} = x_m^k$ (рисунок 2,в).

Шаг 7. Вычислить $L^{k+1} = b^{k+1} - a^{k+1}$ и проверить условие окончания:

а) если $L^{k+1} \leq \varepsilon$, процесс завершается и $x^* = \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}$;

б) если $L^{k+1} > \varepsilon$, то положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 4.

Пример 1. Реализовать две итерации алгоритма определения минимума $f(x) = 2x^2 - 12x$ методом деления отрезка пополам.

1. Начальный интервал неопределенности $[0,10]$, точность вычислений ε не задается, поскольку в примере реализуется две итерации алгоритма.

2. Положим $k = 0$.

3⁰. Вычислим $x_m^0 = \frac{0+10}{2} = 5$; $L^0 = 10 - 0 = 10$; $f(x_m^0) = -10$.

4⁰. Вычислим $x_1^0 = a^0 + L^0/4 = 0 + 10/4 = 2,5$; $f(x_1^0) = -17,5$;
 $x_2^0 = b^0 - L^0/4 = 10 - 10/4 = 7,5$; $f(x_2^0) = 22,5$.

5⁰. Сравним значения $f(x_1^0)$ и $f(x_m^0)$.

Так как $f(x_1^0) = -17,5 < f(x_m^0) = -10$, то положим $a^1 = a^0 = 0$,

$b^1 = x_m^0 = 5$, $x_m^1 = x_1^0 = 2,5$.

7⁰. Получим $L^1 = 5 - 0 = 5$, $k = 1$. Переходим к шагу 4.

4¹. Вычислим $x_1^1 = a^1 + L^1/4 = 0 + 5/4 = 1,25$; $f(x_1^1) = -11,875$;
 $x_2^1 = b^1 - L^1/4 = 5 - 5/4 = 3,75$; $f(x_2^1) = -16,875$.

5¹. Сравним значения $f(x_1^1)$ и $f(x_m^1) = f(x_1^0) - 17,5$.

Так как $f(x_1^1) = -11,875 > f(x_m^1) = -17,5$, то перейдем к шагу 6.

6¹. Сравним $f(x_2^1)$ и $f(x_m^1)$.

Так как $f(x_2^1) = -16,875 > f(x_m^1) = -17,5$, то положим $a^2 = x_1^1 = 1,25$;

$b^2 = x_2^1 = 3,75$; $x_m^2 = x_m^1 = 2,5$.

⁷¹. В результате получили интервал неопределенности, равный $[a^2, b^2] = [1,25; 3,75]$. Далее можно продолжать вычисления по уже данному алгоритму до достижения указанной точности результата.

2.2. Метод золотого сечения

Для построения конкретного метода минимизации по принципу последовательного сокращения интервала неопределенности, следует задать правило выбора на каждом шаге двух внутренних точек. Желательно, чтобы одна из них всегда использовалась в качестве внутренней и для следующего интервала. Тогда количество вычислений сократится вдвое и одна итерация потребует расчета только одного нового значения функции. В методе золотого сечения в качестве двух внутренних точек выбираются точки золотого сечения.

Определение 6. Точка производит «золотое сечение» отрезка, если отношение длины всего отрезка к большей его части равно отношению большей части отрезка к его меньшей части: $\frac{1}{\tau} = \frac{\tau}{1-\tau}$. Из последнего соотношения получаем уравнение $\tau^2 = 1 - \tau$. Решение последнего уравнения позволяет получить значение $\tau = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) \approx 0.6183$.

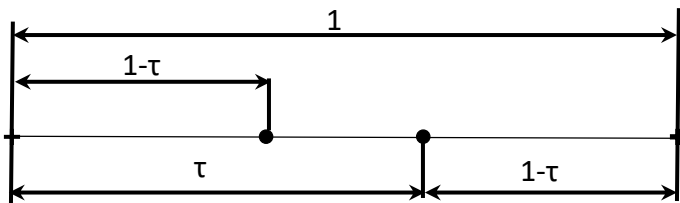


Рисунок 3 – Золотое сечение единичного отрезка.

После проведения n испытаний исходный отрезок единичной длины будет равен $L_n = \frac{1}{\tau^{n-1}}$. При этом получим интервал неопределенности, равный

$$L_n = (b_0 - a_0)\tau^{n-1}.$$

Алгоритм метода золотого сечения включает в себя следующие шаги:

Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности $[a^0, b^0]$ и $\varepsilon > 0$ - требуемую точность.

Шаг 2. Положить $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить $y_0 = a_0 + (1-\tau) \cdot (b_0 - a_0)$; $z_0 = a_0 + b_0 - y_0$;
 $1-\tau = 0,38196$.

Шаг 4. Вычислить $f(y_k)$ и $f(z_k)$.

Шаг 5. Сравнить $f(y_k)$ и $f(z_k)$:

- а) если $f(y_k) \leq f(z_k)$, то положить $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = z_k$ и $y_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - y_k$, $z_{k+1} = y_k$ (рисунок 4,а). Перейти к шагу 6;
 б) если $f(y_k) > f(z_k)$, положить $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = b_k$ и $y_{k+1} = z_k$, $z_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - z_k$ (рисунок 4,б).

Шаг 6. Вычислить $\Delta = |a_{k+1} - b_{k+1}|$ и проверить условие окончания:

- а) если $\Delta \leq \varepsilon$, процесс поиска завершается и $x^* \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$. В качестве приближенного решения можно взять середину последнего интервала:

$$x^* = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2};$$

- б) если $\Delta > \varepsilon$, положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 4.

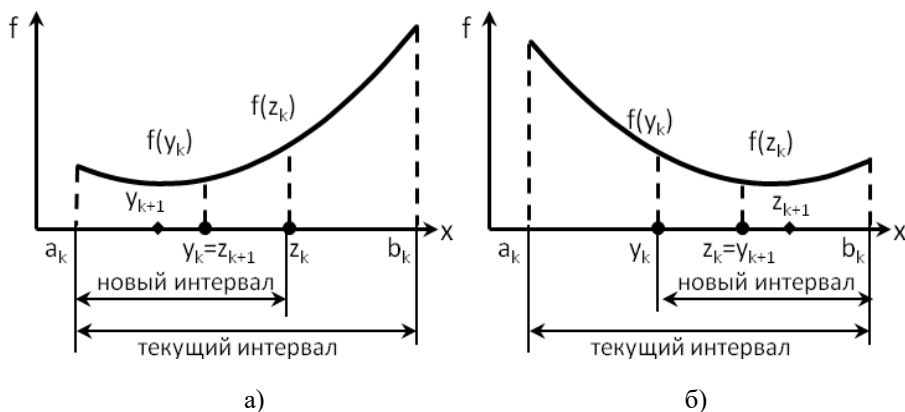


Рисунок 4 – Исключение интервалов при реализации метода золотого сечения.

Пример 2. Реализовать две итерации поиска минимума функции $f(x) = 2x^2 - 12x$ методом золотого сечения.

1. Начальный интервал неопределенности $[0, 10]$, точность вычислений ε не задается, поскольку в примере реализуется две итерации алгоритма.

2. Положим $k = 0$.

3⁰. Вычислим $y_0 = a_0 + 0,382 \cdot (b_0 - a_0) = 0 + 0,382 \cdot 10 = 3,82$;
 $z_0 = a_0 + b_0 - y_0 = 0 + 10 - 3,82 = 6,18$.

4⁰. Вычислим $f(y_0) = -16,65$; $f(z_0) = 2,22$.

5⁰. Сравним $f(y_0)$ и $f(z_0)$. Так как $f(y_0) < f(z_0)$, то $a_1 = a_0 = 0$,
 $b_1 = z_0 = 6,18$; $y_1 = a_1 + b_{k+1} - y_0 = 0 + 6,18 - 3,82 = 2,36$,
 $z_1 = y_0 = 3,82$ (рисунок 2, а).

6⁰. $\Delta = |0 - 6,18| = 6,18 > \varepsilon$. Положим $k = 1$ и перейдем к шагу 4.

4¹. Вычислим $f(y_1) = -17,18$ (новое вычисление),
 $f(z_1) = f(y_0) = -16,65$ (было вычислено на шаге 4⁰).

5¹. Сравним $f(y_1)$ и $f(z_1)$. Так как $f(y_1) < f(z_1)$, то $a_2 = a_1 = 0$,
 $b_2 = z_1 = 3,82$; $y_2 = a_2 + b_{k+1} - y_1 = 0 + 3,82 - 2,36 = 1,66$,
 $z_2 = y_1 = 2,36$ (рисунок 4, а).

6¹. $\Delta = |0 - 3,82| = 3,82 > \varepsilon$. Положим $k = k + 1 = 2$ и перейдем к шагу 4.

4². Вычислим $f(y_2) = -13,25$ (новое вычисление),
 $f(z_2) = f(y_1) = -17,18$ (было вычислено на шаге 4¹).

5². Сравним $f(y_2)$ и $f(z_2)$. Так как $f(y_2) > f(z_2)$, то
 $a_3 = y_2 = 1,46$, $b_3 = b_2 = 3,82$; $y_3 = z_2 = 2,36$,
 $z_3 = a_3 + b_3 - z_2 = 1,46 + 3,82 - 2,36 = 2,92$ (рисунок 4, б).

6². $\Delta = |1,46 - 3,82| = 3,82 > \varepsilon$. Итак, в результате трех итераций получили интервал неопределенности $[1,46; 3,82]$.

2.2. Метод Фибоначчи

В методе Фибоначчи реализована стратегия, обеспечивающая максимальное гарантированное сокращения интервала неопределенности при заданном количестве вычислений функции. Эта стратегия опирается на числа Фибоначчи.

Определение 7. Числа Фибоначчи определяются по формуле

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

Последовательность чисел Фибоначчи имеет вид 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Стратегия метода заключается в следующем. Задается начальный интервал неопределенности и количество N вычислений функции. Алгоритм уменьшения интервала опирается на анализ значений функции в двух точках (рисунок 4). Точки вычисления функции находятся с использованием чисел Фибоначчи. Как и в методе золотого сечения, на первой итерации требуется два вычисления функции, а на каждой последующей только по одному. Процесс поиска завершается при выполнении $(N-1)$ -й итерации.

Алгоритм метода золотого сечения включает в себя следующие шаги:

Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0, b_0]$ и $l > 0$ - допустимую длину конечного интервала, $\varepsilon > 0$ - константу различимости.

Шаг 2. Найти количество N вычислений функции, как наименьшее целое число, при котором удовлетворяется условие $F_N \geq \frac{|L_0|}{l}$ и числа Фибоначчи $F_0, F_1, \dots, F_N$.

Шаг 3. Положить $k = 0$.

Шаг 4. Вычислить $y_0 = a_0 + \frac{F_{N-2}}{F_N}(b_0 - a_0)$;

$$z_0 = a_0 + \frac{F_{N-1}}{F_N}(b_0 - a_0).$$

Шаг 5. Вычислить $f(y_k)$ и $f(z_k)$.

Шаг 6. Сравнить $f(y_k)$ и $f(z_k)$:

а) если $f(y_k) \leq f(z_k)$, то положить $a_{k+1} = a_k$; $b_{k+1} = z_k$; $z_{k+1} = y_k$ и $y_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{N-k-3}}{F_{N-k-1}}(b_{k+1} - a_{k+1})$. Перейти к шагу 7;

б) если $f(y_k) > f(z_k)$, положить $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = b_k$; $y_{k+1} = z_k$, $z_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{N-k-2}}{F_{N-k-1}}(b_{k+1} - a_{k+1})$.

Шаг 7. Проверить условие окончания и в случае необходимости сделать заключительное вычисление функции для получения решения:

а) если $k \neq N - 3$, положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 5;

б) если $k = N - 3$, то всегда $y_{N-2} = z_{N-2} = \frac{a_{N-2} + b_{N-2}}{2}$, то есть

отсутствует точка нового вычисления функции. Следует положить

$y_{N-1} = y_{N-2} = z_{N-2}$ и $z_{N-1} = y_{N-1} + \varepsilon$. В точках y_{N-1} и z_{N-1} вычисляются значения функции и находятся границы конечного интервала неопределенности:

если $f(y_{N-1}) \leq f(z_{N-1})$, положить $a_{N-1} = a_{N-2}$ и $b_{N-1} = z_{N-1}$;

если $f(y_{N-1}) > f(z_{N-1})$, положить $a_{N-1} = y_{N-2}$ и $b_{N-1} = b_{N-2}$.

Процесс поиска завершается и $x^* \in [a_{N-1}, b_{N-1}]$. В качестве приближенного решения можно взять любую точку последнего интервала, например, его середины $x^* \cong \frac{a_{N-1} + b_{N-1}}{2}$.

Пример 3. Найти минимум функции $f(x) = 2x^2 - 12x$ на основе метода Фибоначчи.

1. Начальный интервал неопределенности: $L_0 = [0, 10]$, $l = 1$, $\varepsilon = 0,01$

2. Определим N : $F_6 \geq \frac{|L_0|}{l} = \frac{10}{1} = 10$, отсюда $N=6$.

Найдем числа Фибоначчи

$$F_0 = F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, F_6 = 13.$$

3. Положим $k = 0$.

$$4^0. \text{ Вычислим } y_0 = a_0 + \frac{F_4}{F_6}(b_0 - a_0) = 0 + \frac{5}{13} \cdot 10 = 3,846;$$

$$z_0 = a_0 + \frac{F_5}{F_6}(b_0 - a_0) = 0 + \frac{8}{13} = 6,154.$$

$$5^0. \text{ Вычислим } f(y_0) = -16,57; f(z_0) = 1,893.$$

6⁰. Сравним $f(y_0)$ и $f(z_0)$. Так как $f(y_0) < f(z_0)$, то $a_1 = a_0 = 0$,

$$b_1 = z_0 = 6,154; y_1 = a_1 + \frac{F_{6-3}}{F_{6-1}}(b_1 - a_1) = 0 + \frac{3}{8} \cdot 6,154 = 2,308;$$

$$z_1 = y_0 = 3,846.$$

7⁰. Проверим условие окончания: $k = 0 \neq N - 3$; $L_1 = [0; 6,154]$.

Положим $k = 1$ и перейдем к шагу 5.

5¹. Вычислим значение $f(y_1) = -17,4$; $f(z_1) = -16,57$ (вычислено на шаге 5⁰).

6¹. Сравним $f(y_1)$ и $f(z_1)$. Так как $f(y_1) < f(z_1)$, то $a_2 = a_1 = 0$,
 $b_2 = z_1 = 3,846$; $y_2 = a_2 + \frac{F_{6-4}}{F_{6-2}}(b_2 - a_2) = 0 + \frac{2}{5} \cdot 3,846 = 1,538$;

$z_2 = y_1 = 2,308$.

7¹. Проверим условие окончания: $k = 1 \neq N - 3$; $L_2 = [0; 3,846]$.

Положим $k = 2$ и перейдем к шагу 5.

5². Вычислим значение $f(y_2) = -13,73$; $f(z_2) = -17,04$ (вычислено на шаге 5¹).

6². Сравним $f(y_2)$ и $f(z_2)$. Так как $f(y_2) > f(z_2)$, то
 $a_3 = y_2 = 1,538$, $b_3 = b_2 = 3,846$; $y_3 = z_2 = 2,308$,
 $z_3 = a_3 + \frac{F_{6-4}}{F_{6-3}}(b_3 - a_3) = 1,538 + \frac{2}{3} \cdot (3,846 - 1,538) = 3,077$.

7². Проверим условие окончания: $k = 2 \neq N - 3$; $L_4 = [1,538; 3,846]$.

Положим $k = 3$ и перейдем к шагу 5.

5³. Вычислим $f(y_3) = f(z_2) = -17,04$ (уже известно);

$f(z_3) = -17,9884$.

6³. Сравним $f(y_3)$ и $f(z_3)$. Так как $f(y_3) > f(z_3)$, то
 $a_4 = y_3 = 2,308$, $b_4 = b_3 = 3,846$; $y_4 = z_3 = 3,077$,
 $z_4 = a_4 + \frac{F_{6-5}}{F_{6-4}}(b_4 - a_4) = 2,308 + \frac{1}{2} \cdot (3,846 - 2,308) = 3,077$.

7³. Проверим условие окончания: $k = 3 = N - 3$; $L_5 = [2,308; 3,846]$.

Положим $y_5 = y_4 = z_4 = 3,077$; $z_5 = y_5 + \varepsilon = 3,077 + 0,01 = 3,087$.

Вычислим $f(y_5) = -17,9884$ (было вычислено на шаге 5³);

$f(z_5) = -17,985$. Так как $f(y_5) < f(z_5)$, то $a_5 = a_4 = 2,308$;

$b_5 = z_5 = 3,087$. Поэтому $x^* \in [2,308; 3,087]$;

$L_6 = 3,087 - 2,308 = 0,78 < l = 1$. В качестве приближенного решения можно взять середину интервала L_6 : $x^* \cong \frac{2,308 + 3,087}{2} = 2,697$.

3. МЕТОДЫ ПОИСКА МИНИМУМА ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, ОСНОВАННЫЕ НА ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ. КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ.

Рассмотрим класс методов, называемых методами полиномиальной аппроксимации, основная идея которых заключается в том, что по информации о вычисленных значениях функции $f(x_i), i = 1, 2, \dots, n$, строится полином $\varphi_m(x)$ степени $m \leq n-1$, обладающий следующими свойствами:

- $\varphi_m(x)$ является равномерным приближением минимизируемой функции на отрезке $[a_k, b_k]$;
- точка минимума $\bar{x}$ полинома $\varphi_m(x)$ определяется достаточно просто.

Отмеченные свойства полинома $\varphi_m(x)$ позволяют на каждом шаге поиска использовать для сокращения текущего отрезка не только информацию о точках x_i , но и информацию о значениях функции $f(x_i)$ в этих точках.

Необходимым условием эффективной реализации методов этого класса является унимодальность и непрерывность функции $f(x)$.

Согласно теореме Вейерштрасса об аппроксимации, если функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, то ее с любой степенью точности можно аппроксимировать полиномом достаточно высокого порядка. Следовательно, если функция $f(x)$ унимодальна и найден полином, который с заданной точностью ее аппроксимирует, то координаты точки экстремума функции определяются посредством вычисления координаты точки экстремума полинома [2,4].

Точность оценки координаты точки экстремума, полученной с помощью аппроксимирующего полинома, можно повысить двумя способами: использованием полинома более высокого порядка и уменьшением интервала аппроксимации.

Положим, что в ограниченном интервале функцию $f(x)$ можно аппроксимировать квадратичным полиномом. Пусть задана последовательность точек x_1, x_2, x_3 и известны значения функции в этих точках: $f(x_1) = f_1$,

$f(x_2) = f_2$, $f(x_3) = f_3$. Тогда можно определить постоянные коэффициенты a_0 , a_1 и a_2 таким образом, что значения квадратичного полинома [4]:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) \quad (1)$$

совпадут со значениями функции $f(x)$ в трех указанных точках. Для этого вычислим значение $\varphi(x)$ в трех заданных точках.

Так как $f_1 = f(x_1) = a_0$, получаем $a_0 = f_1$. Поскольку $f_2 = f(x_2) = \varphi(x_2) = f_1 + a_1(x_2 - x_1)$, получаем:

$$a_1 = (f_2 - f_1)/(x_2 - x_1). \quad (2)$$

При $x = x_3$ имеем

$$\begin{aligned} f_3 &= f(x_3) = \varphi(x_3) = \\ &= f_1 + [(f_2 - f_1)/(x_2 - x_1)](x_3 - x_1) + a_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Из выражения (3) можно определить:

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2} \left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \right) \quad (4)$$

Если точность аппроксимации функции $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$ квадратичным полиномом оказывается достаточно высокой, то построенный полином далее используется для оценивания координаты точки минимума функции $f(x)$.

Стационарные точки полинома (1) определяются посредством приравнивания к нулю его первой производной и последующим нахождением корней полученного таким образом уравнения. Имеем

$$\frac{d\varphi}{dx} = a_1 + a_2(x - x_2) + a_2(x - x_1) = 0.$$

Тогда для оценки координаты точки минимума функции $f(x)$ получаем формулу

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(x_2 + x_1) - \frac{a_1}{2a_2} \quad (5)$$

Приведем описание алгоритма метода последовательного оценивания с использованием квадратичной аппроксимации, разработанного Пауэллом [4].

Шаг 1. Пусть $f(x)$ – оптимизируемая функция, $x = x_1$ – начальная точка, $\Delta x > 0$ – величина шага по оси абсцисс; ε_1 и ε_2 – малые положительные числа, характеризующие точность.

Шаг 2. Вычислить $x_2 = x_1 + \Delta x$.

Шаг 3. Вычислить значения $f(x_1) = f_1$ и $f(x_2) = f_2$.

Шаг 4. Сравнить f_1 с f_2 :

а) если $f_1 > f_2$, положить $x_3 = x_1 + 2\Delta x$ (рисунок 5,а);

б) если $f_1 \leq f_2$, положить $x_3 = x_1 - \Delta x$ (рисунок 5,б).

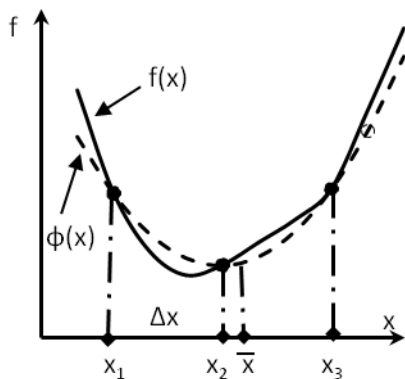
Шаг 5. Вычислить $f(x_3) = f_3$.

Шаг 6. Найти $F_{\min} = \{f_1, f_2, f_3\}$, $x_{\min} = x_i : f(x_i) = F_{\min}$.

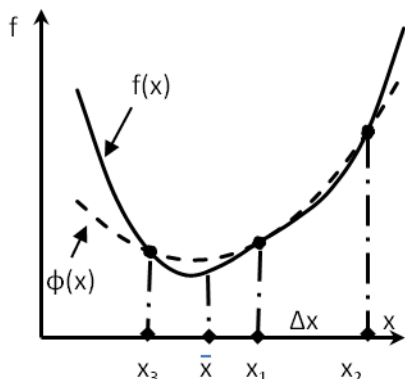
Шаг 7. Применяя формулы (2)-(5), вычислить $\bar{x}$ и величину функции $f(\bar{x})$ (рисунок 5).

Шаг 8. Проверить выполнение условий окончания поиска:

$$\left| \frac{F_{\min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})} \right| < \varepsilon_1, \quad \left| \frac{x_{\min} - \bar{x}}{\bar{x}} \right| < \varepsilon_2.$$



а)



б)

Рисунок 5 – Минимизация функций на основе метода квадратичной аппроксимации.

Тогда:

а) если оба условия выполнены, процедура закончена и $x^* \cong \bar{x}$;

б) если хотя бы одно из условий не выполнено и $\bar{x} \in [x_1, x_3]$, выбрать наилучшую точку $x_{\min}$ или $\bar{x}$ и две точки по обе стороны от нее. Обозначить эти точки в естественном порядке и перейти к шагу 6;

в) если хотя бы одно из условий не выполнено и $\bar{x} \notin [x_1, x_3]$, то положить $x_1 = \bar{x}$ и перейти к шагу 2.

Пример 3. Найти минимум $f(x) = 2x^2 + \frac{16}{x}$, методом квадратичной аппроксимации.

1°. Зададим начальную точку $x_1 = 1$; величину шага $\Delta x = 1$, $\varepsilon_1 = 0,003$; $\varepsilon_2 = 0,03$.

2°. Вычислим $x_2 = x_1 + \Delta x = 2$.

3°. Вычислим $f(x_1) = f_1 = 18$ и $f(x_2) = f_2 = 16$.

4°. Так как $f_1 > f_2$, положим $x_3 = x_1 + 2\Delta x = 1 + 2 = 3$ (рисунок 5,а).

5°. Вычислим $f(x_3) = f_3 = 23,33$.

6°. Найдем $F_{\min} = \{18, 16, 23,33\}$, $x_{\min} = x_2 = 2$.

7°. Вычислим точку минимума полинома, используя соотношения (2) - (5):

$$a_1 = \frac{16 - 18}{2 - 1} = -2; \quad a_2 = \frac{1}{3 - 2} \left[\frac{23,33 - 18}{3 - 2} - a_1 \right] = 4,665;$$

$$\bar{x} = \frac{1 + 2}{2} - \frac{(-2)}{2 \cdot 4,665} = 1,714, \quad f(\bar{x}) = 15,210$$

8°. Проверим условия окончания

$$\left| \frac{f(x_{\min}) - f(\bar{x})}{f(\bar{x})} \right| = \left| \frac{16 - 15,210}{15,210} \right| = 0,0519 > 0,003 \quad (\text{не выполняется}),$$

$\bar{x}$ – наилучшая точка, слева от нее точка $x_1 = 1$, а справа $x_2 = 2$. Обозначим их в естественном порядке $x_1 = 1$; $x_2 = \bar{x} = 1,714$; $x_3 = 2$. Этим точкам соответствуют следующие значения функции $f_1 = 18$; $f_2 = 15,21$; $f_3 = 16$.
Перейдем к шагу 6.

6°. Найдем $F_{\min} = \{18; 15,21; 16\}$, $x_{\min} = x_2 = 1,714$.

7°. Вычислим по соотношениям (2)-(5) точку минимума аппроксимирующего многочлена $\bar{x} = 1,65$ и значение функции $f(\bar{x}) = 15,142$.

$$8°. \text{ Проверим условия окончания } \left| \frac{15,21 - 15,142}{15,142} \right| = 0,0045 > 0,003 \quad (\text{не}$$

выполняется), $\bar{x}$ – наилучшая точка, слева от нее точка $x_1 = 1$, а справа

$x_2 = 1,714$. Обозначим их в естественном порядке $x_1 = 1$; $x_2 = \bar{x} = 1,65$; $x_3 = 1,714$. Этим точкам соответствуют следующие значения функции $f_1 = 18$; $f_2 = 15,142$; $f_3 = 15,21$. Перейдем к шагу 6.

6². Найдем $F_{\min} = \{18; 15,142; 15,21\}$, $x_{\min} = x_2 = 1,65$.

7². Вычислим по соотношениям (2)-(5) точку минимума аппроксимирующего многочлена $\bar{x} = 1,6125$ и значение функции $f(\bar{x}) = 15,123$.

8². Проверим условия окончания $\left| \frac{15,142 - 15,123}{15,123} \right| = 0,0013 < 0,003$ и

$\left| \frac{1,65 - 1,6125}{1,6125} \right| = 0,023 < 0,03$. Поиск закончен, $x^* \cong \bar{x} = 1,6125$.

4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ «МЕТОДЫ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ»

Определить локальный минимум функции на основе методов однопараметрической оптимизации.

1. Сократить интервал неопределенности на основе методов исключения интервалов:

- а) методом деления отрезка пополам, выполнив три итерации;
- б) уточнить границы интервала неопределенности методом
 - золотого сечения (для нечетных вариантов), выполнив три итерации;
 - методом Фибоначчи (для четных вариантов), выбрав $N=5$;

2. Получить оценку координаты минимума функции методом квадратичной аппроксимации с точностью, указанной в варианте задания. Выбрать в качестве начальной точки один из концов интервала неопределенности, полученного при выполнении пункта 1.

3. Определить локальный минимум функции, используя по выбору программы Mathcad, Matlab, Excel. Результаты сравнить.

Вариант для выполнения индивидуального задания выбирается соответственно номеру студента в списке группы.

5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА О ВЫПОЛНЕНИИ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

1. Постановка задачи.
2. Последовательность вычислений при решении задачи.
3. Графическая интерпретация решения.
4. Результаты решения задачи в выбранных программных средах.
5. Анализ результатов и выводы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ашманов, С. А. Теория оптимизации в задачах и упражнениях : учебное пособие / С. А. Ашманов, А. В. Тимохов. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2012. — 448 с. — ISBN 978-5-8114-1366-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/3799>
2. Болотский, А. В. Исследование операций и методы оптимизации : учебное пособие / А. В. Болотский, О. А. Кочеткова. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 116 с. — ISBN 978-5-8114-4568-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/136175>
3. Исследование операций в задачах программной инженерии : учебное пособие / Н. А. Соловьев, Е. Н. Чернопрудова, Н. А. Тишина, А. Ф. Валеев. — Санкт-Петербург : Лань, 2019. — 164 с. — ISBN 978-5-8114-3770-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL:
4. Лесин, В. В. Основы методов оптимизации : учебное пособие / В. В. Лесин, Ю. П. Лисовец. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 344 с. — ISBN 978-5-8114-1217-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/86017>
5. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. — 4-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 512 с. — ISBN 978-5-8114-1887-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/67460>

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Вариант	Функция, интервал неопределенности, точность вычислений
1	$f(x) = x * \sin(x) + 2 * \cos(x), x \in [-5; -4], \varepsilon = 0.02$
2	$f(x) = e^x - \frac{1}{3}x^3 + 2 * x, x \in [-2; -1], \varepsilon = 0.01$
3	$f(x) = x^4 + 2 * x^2 + 4 * x + 1, x \in [-1; 0], \varepsilon = 0.1$
4	$f(x) = x^4 + 8 * x^3 - 6 * x^2 - 72 * x + 90, x \in [1.5; 2], \varepsilon = 0.05$
5	$f(x) = -x^3 + 3(1+x)[\ln(1+x) - 1], x \in [-0.5; 0.5], \varepsilon = 0.05$
6	$f(x) = x^6 + 3 * x^2 + 6 * x - 1, x \in [1; 0.0], \varepsilon = 0.1$
7	$f(x) = 3(5-x)^{4/3} + 2 * x^2, x \in [1.5; 2], \varepsilon = 0.025$
8	$f(x) = 10x \ln x - \frac{x^2}{2}, x \in [0.1; 0.7], \varepsilon = 0.05$
9	$f(x) = (x+1)^4 - 2x^2, x \in [-2.5; -1.5], \varepsilon = 0.05$
10	$f(x) = x^2 + 2(x \lg \frac{x}{e} - 2), x \in [1.5; 2], \varepsilon = 0.01$
11	$f(x) = x^2 - 2x - 2 \cos x, x \in [0.25; 0.75], \varepsilon = 0.05$
12	$f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 21x^2 + 12x, x \in [-0.5; 0], \varepsilon = 0.01$
13	$f(x) = x^2 + 3x(\ln x - 1), x \in [0.5; 1], \varepsilon = 0.05$
14	$f(x) = 2\sqrt{1+x^2} + e^{-2x}, x \in [0, 1], \varepsilon = 0.001$
15	$f(x) = x - \ln x, x \in [0.1; 2], \varepsilon = 0.01$
16	$f(x) = x^2 - \sin x, x \in [0; \pi/2], \varepsilon = 0.001$
17	$f(x) = x^4 + x^2 + x + 1, x \in [-1; 2], \varepsilon = 0.01$
18	$f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x, x \in [0; 3], \varepsilon = 0.01$
19	$f(x) = e^x + \frac{1}{x}, x \in [0.1; 2], \varepsilon = 0.001$
20	$f(x) = (x-4)^2 + \ln x, x \in [3; 5], \varepsilon = 0.01$

21	$f(x) = x^4 + e^{-x}, x \in [0;1], \varepsilon = 0.01$
22	$f(x) = \frac{\cos x}{x^2}, x \in [7;12], \varepsilon = 0.01$
23	$f(x) = -\sqrt{20x - x^2} + 0.01 \sin x, x \in [9;11], \varepsilon = 0.05$
24	$f(x) = (0.1x - 5)^8 + \cos(0.02x), x \in [49;51], \varepsilon = 0.02$
25	$f(x) = 0.5x^2 - 2 \sin x, x \in [0; \pi/2], \varepsilon = 0.001$
26	$f(x) = \sqrt{1 + 2x^2} + e^{-x}, x \in [0,1], \varepsilon = 0.001$
27	$f(x) = (x+1)^4 - x^2, x \in [-2.5; -1.5], \varepsilon = 0.05$
28	$f(x) = 5x \ln x + x^2, x \in [0.1; 0.7], \varepsilon = 0.05$
29	$f(x) = e^{2x} - \frac{1}{2}x^3 + x, x \in [-1.5; -0.5], \varepsilon = 0.01$
30	$f(x) = x^2 - 2x - 2.5 \cos x, x \in [0.5; 1], \varepsilon = 0.05$

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
ОДНОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ
ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

Методические указания

*Составители : Балакирева Ирина Аркадьевна,
Скатков Александр Владимирович*

В авторской редакции

Изд. № 188/2022. Объем 1,75 п.л. Усл. печ. л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,715.
РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»