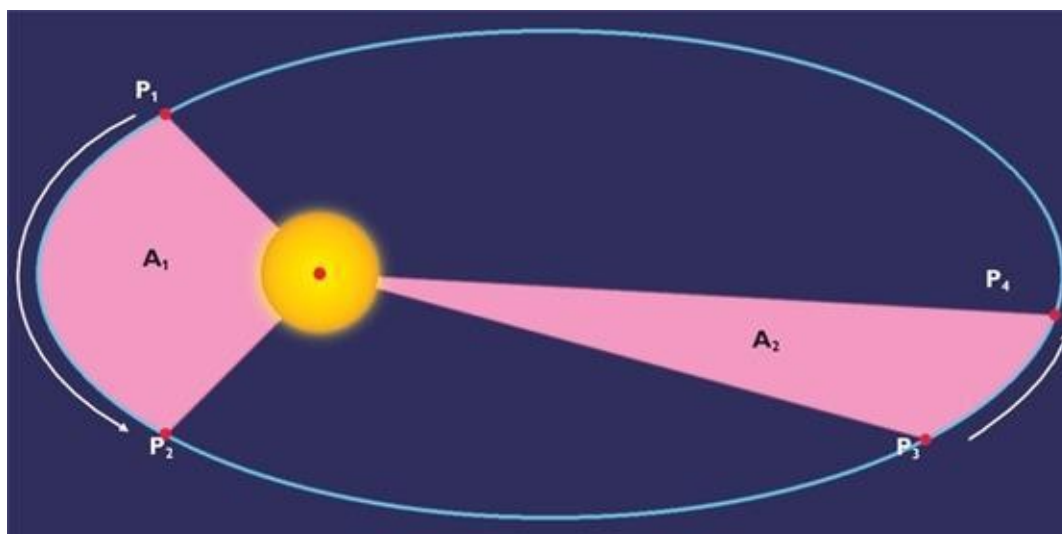


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Г. Рипп, О. В. Матузаева

ВТОРОЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА



Учебное пособие
по общей физике
для студентов технических
и естественно-научных специальностей

Севастополь
СевГУ
2022

УДК 53.082:523.4(075.8)
ББК 22.213:22.62я73
Р537

Рецензент:

С. А. Чернявская – канд. физ.-мат. наук,
доцент кафедры «Высшая математика»

Рипп А. Г.

Р537 Второй закон Кеплера : учебное пособие по общей физике для студентов технических и естественно-научных специальностей / А. Г. Рипп, О. В. Матузаева ; Севастопольский государственный университет. – Севастополь : СевГУ, 2022. – 23 с.

Учебное пособие разработано преподавателями кафедры «Физика» СевГУ и предназначено для студентов 1 и 2 курсов технических и естественно-научных специальностей, выполняющих лабораторные работы по дисциплинам: «Физика» и «Физический практикум». В пособии студентам предлагается познакомиться со Вторым законом Кеплера для движения материального тела по замкнутой орбите в гравитационном поле планеты и несколькими способами экспериментальной проверки этого закона. Лабораторная установка, на которой предлагается провести эксперименты, виртуальная, то есть представляет собой компьютерную модель.

Пособие содержит краткий теоретический материал, описание лабораторной установки, порядок выполнения лабораторной работы и методы оценки погрешности измерений. Материал изложен подробно и в доступной форме. Для студентов, желающих получить больше информации, в конце пособия приводится список литературы.

УДК 53.082:523.4(075.8)
ББК 22.213:22.62я73

Учебное пособие рассмотрено и утверждено на заседании кафедры «Физика», протокол № 9 от 01 июля 2022 г.

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет, 2022
© Рипп А. Г., Матузаева О. В., 2022

Работа 82. Второй закон Кеплера

Цель работы

1. Изучение характера движения тела по замкнутой орбите в гравитационном поле планеты.
2. Проверка Второго закона Кеплера.

1. Краткая теория

Согласно закону Всемирного тяготения, все материальные тела притягиваются друг к другу. Так как всякая сила приводит к появлению ускорения тела, на которое эта сила действует, то скорость тела, попавшего в гравитационное поле другого тела, изменяется со временем. В общем случае такое изменение происходит как по величине, так и по направлению, поэтому каждое тело в гравитационном поле другого тела движется по криволинейной траектории. Этот факт подтверждают наблюдения за планетами Солнечной системы, астероидами и кометами.

Закон Всемирного тяготения позволяет определить особенности траектории всякого тела в гравитационном поле. В первую очередь, представляет интерес траектория малого тела массой m в поле большого тела массой $M \gg m$. Будем для определённости называть малое тело просто *телом*, а большое тело – *планетой*¹. Из Второго закона Ньютона следует, что ускорения a_1 и a_2 , приобретаемые телом и планетой в результате их взаимодействия, равны:

$$a_1 = \frac{G_{21}}{m}, \quad a_2 = \frac{G_{12}}{M},$$

где G_{21} – сила, действующая на тело со стороны планеты, а G_{12} – сила, действующая на планету со тела. По третьему закону Ньютона $G_{21} = G_{12}$, поэтому из условия $M \gg m$ следует, что $a_1 \gg a_2$. Это означает, что ускорение планеты ничтожно по сравнению с ускорением тела, так что можно считать, что планета движется равномерно и прямолинейно. В этом случае система отсчёта K_0 , связанная с планетой, является практически инерциальной, и целесообразно рассматривать движение тела именно в системе K_0 . Планета в этой системе неподвижна, так что начало координат системы K_0 целесообразно разместить в центре планеты.

Будем считать, что рассматриваемая система двух тел *замкнутая*, то есть тело и планета взаимодействуют *только друг с другом*, ничто другое на них не действует. В отношении замкнутых систем справедливы три закона сохранения: энергии, импульса и момента импульса. Для второго закона Кеплера важен, в первую очередь, закон сохранения момента импульса. Обратим внимание на следующее.

¹ Планету с большой точностью можно считать планету шаром, а тело – материальной точкой.

- Во-первых, планета неподвижна, так что её момент импульса равен нулю. Во-вторых, момент импульса тела $\mathbf{L}$ равен

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор тела, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – импульс тела, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ – скорость тела.

- В-третьих, момент импульса – аддитивная величина, так что момент импульса тела совпадает с моментом импульса системы.

Из всего этого следует, что

$$\mathbf{L} = m[\mathbf{r}\mathbf{v}] = \text{const},$$

причём это – константа не только по величине, но и *по направлению*. Из понятия векторного произведения следует, что вектор $\mathbf{L}$ перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$. Вектор $\mathbf{L}$ с течением времени сохраняет своё направление, поэтому сохраняет своё положение и плоскость, в которой расположены векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$. Но тот факт, что вектор скорости тела всё время лежит в одной и той же плоскости, означает, что траектория тела является *плоской линией*. Такое движение принято называть *плоским*.

Для исследования движения тела надо решить вопрос о выборе системы координат. Если выбрать декартовую систему, то начало координат целесообразно поместить в центре планеты, оси OX и OY – в плоскости орбиты. Ось OZ , перпендикулярная плоскости орбиты, никакого значения не имеет, так как в направлении этой оси тело не движется. В данной ситуации, однако, декартовая система – не лучший выбор. Выясним, почему.

Закон Всемирного тяготения утверждает, что сила $\mathbf{G}_{21}$, действующая на тело со стороны планеты, зависит только от расстояния между телом и центром планеты r и направлена вдоль линии центр планеты – тело. Такая сила называется *центральной*. Она, конечно, зависит от декартовых координат тела x и y ,

но опосредованно – через расстояние $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Так как сила в первую очередь определяет поведение тела, то в результате и все остальные физические величины, характеризующие тело, зависят от координат x и y через r – в том числе, и момент импульса. Тогда удобнее вместо двумерной декартовой системы координат XOY использовать *полярную*, где одной из двух координат как раз и является полярное расстояние r (вторая координата – полярный угол φ). Начало полярной системы координат (его называют *полюсом*) наиболее естественно разместить в центре планеты.

Вернёмся к моменту импульса. Выясним, каким является выражение для момента импульса в полярной системе координат и к чему приводит то, что

$\mathbf{L} = \text{const}$. Сначала разложим вектор $\mathbf{L} = m[\mathbf{r}\mathbf{v}]$ по его декартовым проекциям:

Как упоминалось выше, вдоль оси OZ тело не движется, так что $z = 0, \dot{z} = 0$. Отсюда следует:

$$\mathbf{L} = m \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = m(x\dot{y} - y\dot{x})\mathbf{k}, \quad L = L_z = (x\dot{y} - y\dot{x}). \quad (1)$$

$$\mathbf{L} = m \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}(x\dot{y} - y\dot{x})$$

Теперь перейдём в полярную систему координат. Связь между декартовыми координатами $(x; y)$ и полярными $(r; \varphi)$ определяется формулами

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (2)$$

Из этих формул следует:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi. \end{cases} \quad (3)$$

Подстановка (2) и (3) в (1) даёт выражение для момента импульса тела (и системы) в полярных координатах:

$$L = mr^2 \dot{\varphi} = mr^2 \frac{d\varphi}{dt}. \quad (4)$$

Произведение $r^2 d\varphi$ напоминает площадь элементарного сектора dS между двумя радиус-векторами тела и траекторией тела. Этот сектор показан на рисунке 1. А ещё на этом рисунке показаны: точка O – полюс полярной системы координат и ось OX , которая в полярной системе называется *полярной осью*.

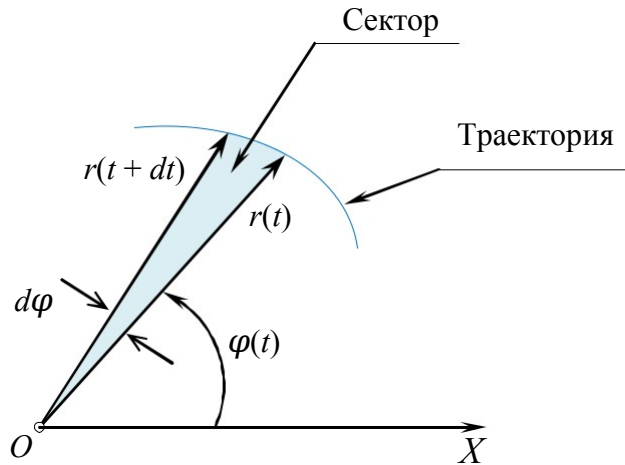


Рис. 1. Элементарный сектор траектории

Из геометрии известно, что площадь элементарного сектора dS равна

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi. \quad (5)$$

Тогда $r^2 d\varphi = 2dS$, и формулу для момента импульса (4) можно записать так:

$$L = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = 2m \frac{dS}{dt} = 2m\dot{S}.$$

Так как $L = \text{const}$ и масса тела m тоже в процессе его движения не изменяется, то можно сделать вывод:

$$\dot{S} = \text{const}. \quad (6)$$

Производная $\dot{S}$ называется *секторной скоростью*, она показывает, с какой скоростью изменяется площадь сектора, ограниченного двумя радиус-векторами тела $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}(0)$ в процессе движения тела. Формула (6) означает, что секторная скорость тела в процессе его движения *не изменяется*. Этот факт представляет собой первую формулировку *Второго закона Кеплера*. Немецкий учёный Иоганн Кеплер сформулировал его не теоретически (тогда ещё И. Ньютон не открыл свой закон Всемирного тяготения), а на основании огромного экспериментального материала, накопленного коллегой и другом И. Кеплера датским астрономом Тихо Браге. Свой закон И. Кеплер опубликовал в книге «[Новая астрономия](#)» в 1609 году вместе с ещё двумя законами – первым и третьим.

Постоянство секторной скорости приводит к тому, что площадь сектора, ограниченного двумя радиус-векторами тела $\mathbf{r}(t_1)$ и $\mathbf{r}(t_2)$, или, иными словами, площадь, заметаемая за время $\tau = (t_2 - t_1)$ радиус-вектором тела при его движении по орбите, равна

(7)

Это означает, что для любого участка траектории, которое тело проходит за некоторое время τ , площадь, заметаемая радиус-вектором тела, *одна и та же*. Данное утверждение – это альтернативная формулировка Второго закона Кеплера, известная как *закон площадей*. Именно так его сформулировал И. Кеплер в «[Новой астрономии](#)».

Суть Третьего закона Кеплера для предлагаемой вам лабораторной работы не имеет значения, а вот Первый закон важен. Он состоит в том, что плоская траектория тела (орбита) может быть финитной (замкнутой) или инфинитной (незамкнутой), при этом форма финитной траектории – это *эллипс*. Данная лабораторная работа предлагает вам исследовать финитные траектории, именно

по ним движутся планеты Солнечной системы вокруг Солнца и спутники вокруг планет. Форма финитной (эллиптической) орбиты тела показана на следующем рисунке 2.

Орбита симметрична, у неё есть две взаимно перпендикулярные оси симметрии, на рисунке 2 они показаны штрихпунктирными линиями и обозначены A и B . Точка пересечения осей, обозначенная буквой O , называется *центром эллипса*. Расстояние от эллипса до его центра вдоль оси A называется *большой полуосью* и обозначается a . Аналогичное расстояние вдоль оси B называется *малой полуосью* и обозначается b .

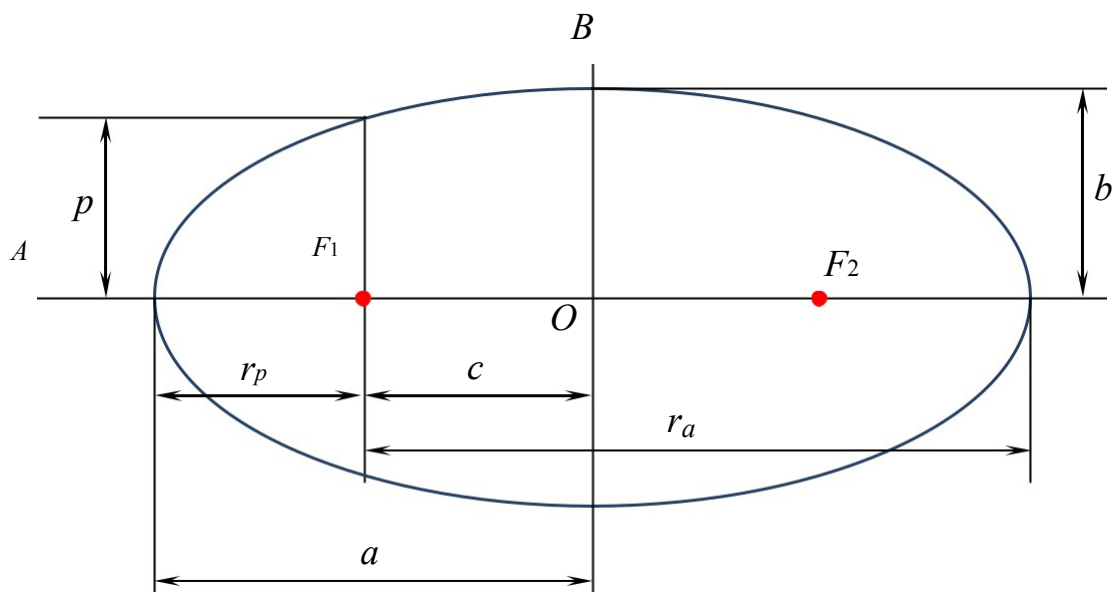


Рис. 2. Эллиптическая орбита и её основные характеристики

На оси A у эллипса есть две особые точки, симметричные относительно центра, они называются *фокусами* (на рисунке 2 фокусы обозначены красным цветом и буквами F_1 и F_2). В одном из них находится центр планеты. Расстояние каждого из фокусов до центра эллипса называется *фокальным расстоянием* и обозначается c , а расстояние от каждого фокуса до эллипса вдоль оси B называется *фокальным параметром* и обозначается p .

Отношение фокального расстояния c к большой полуоси a называется *эксцентриситетом* и обозначается буквой e :

$$e = \frac{c}{a}.$$

(8)

Чем больше эксцентриситет, тем более вытянут эллипс вдоль большой оси. Чем меньше эксцентриситет, тем меньше разница между a и b . При $e = 0$ малая и большая полуоси одинаковы, фокусы и центр эллипса сливаются, и он превращается в окружность радиусом $R = a = b$. Фокальный параметр p при этом тоже становится равным радиусу окружности.

Всякий вектор, проведённый из фокуса эллипса к какой-либо его точке, называется *фокальным радиусом*. Точка орбиты, в которой тело находится ближе всего к планете, называется *перигеем*. Фокальный радиус, проведённый в перигей, обладает минимальной длиной. Эту длину r_p тоже иногда называют перигеем. Аналогично точка орбиты, в которой тело находится дальше всего от планеты, называется *апогеем*, проведённый в ней фокальный радиус обладает максимальной длиной, которая обозначается r_a и тоже называется апогеем. Перигей и апогей – это крайние точки большой оси эллипса.

Уравнение эллипса. Будем для определённости считать, что планета находится в первом фокусе F_1 , тогда именно там находится полюс полярной системы координат, используемой для описания движения тела, при этом полярную ось удобнее всего направить вдоль большой оси, как показано на рисунке 3. В этом случае уравнение эллиптической орбиты тела имеет следующий вид:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}. \quad (9)$$

Указанной информации достаточно для понимания Первого закона Кеплера. Теперь вернёмся ко второму закону (закону площадей). Его наглядно иллюстрирует рисунок 3.

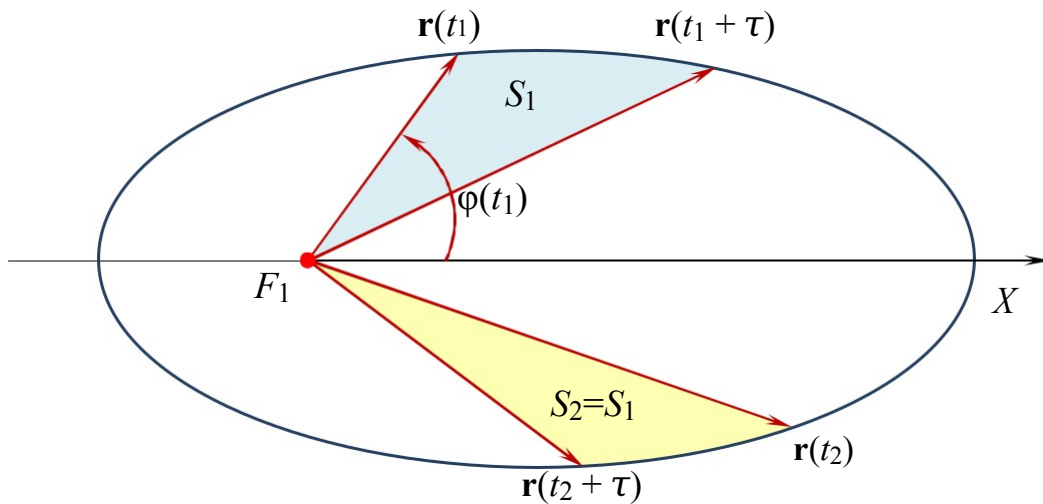


Рис. 3. Система координат и иллюстрация Второго закона Кеплера

На этом рисунке показаны два *произвольно выбранных* сектора, которые замечает за собой радиус-вектор планеты (фокальный радиус) в течение некоторого интервала времени τ : один начинается в момент времени t_1 с радиус-вектора $\mathbf{r}(t_1)$, второй начинается в другой момент времени t_2 с радиус-вектора $\mathbf{r}(t_2)$. Согласно второму закону Кеплера (закону площадей), площади этих двух секторов для любых произвольно выбранных моментов времени t_1 и t_2 *одинаковы*. Из данного закона, кстати, следует, что по мере удаления от планеты тело движется всё *медленнее*: ведь чем дальше от планеты, тем длиннее фокальные радиусы, ограничивающие сектор, и тем короче должна быть дуга, чтобы пло-

щадь сектора не увеличивалась. Следовательно, чем дальше от планеты, тем меньший путь проходит тело за заданное время τ , а это и означает замедление движения.

2. Методики эксперимента

Так как у Второго закона Кеплера есть две альтернативные формулировки, то для экспериментальной проверки можно предложить две методики.

Первая методика эксперимента – проверка закона площадей

- Измерить основные параметры эллиптической орбиты тела.
- Задать время τ наблюдения сектора орбиты, заметаемого фокальным радиусом тела.
- Измерить площади несколько секторов S_i , наблюдаемых за одно и тоже время τ в различных частях орбиты. Убедиться в том, что все результаты измерений отличаются друг от друга не более, чем на погрешность измерения.

Вторая методика – проверка постоянства секторной скорости

- Измерить основные параметры эллиптической орбиты тела.
- Задать начальное положение тела, то есть начальные полярные координаты тела φ_0 и r_0 .
- Так как по Второму закону Кеплера секторная скорость $\dot{S} = \text{const}$, то площадь сектора $S(t)$, заметаемого фокальным радиусом тела от начального момента времени $t = 0$ до момента времени t , зависит от времени так:

$$S(t) = \dot{S}t,$$

то есть площадь сектора S пропорциональна времени его наблюдения t . Поэтому надо провести ряд измерений площади сектора в разные моменты времени и убедиться, что экспериментально полученная зависимость $S(t)$ действительно прямо пропорциональная.

Мы полагаем, что вторая методика проще, и предлагаем вам воспользоваться именно ею.

Для измерения площади сектора в момент времени t нужно, разумеется, сначала измерить координаты тела в момент времени t : φ и r . А вот как по этим двум числам узнать площадь сектора, это – проблема. Рассмотрим её решение. Будем отталкиваться от формулы (5):

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi.$$

Для нахождения S надо вычислить интеграл

$$S = \int_1^2 dS = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} [r(\varphi)]^2 d\varphi.$$

(10)

Функция $r(\varphi)$ в этом интеграле – это уравнение эллипса (9)

Интеграл (10) можно вычислять двумя способами.

Первый способ вычисления интеграла (10)

Он состоит в том, что уравнение эллипса (9) подставляется в интеграл, в результате чего получается:

$$S(\varphi) = \int_1^2 dS = \frac{p^2}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{dx}{(1 - e \cos x)^2}.$$

Естественно принять $\varphi_0 = 0$. Физический смысл этого условия ясен: тело в начальный момент времени находится в *апогее*. Тогда

$$S(\varphi) = \frac{p^2}{2} \int_0^{\varphi} \frac{dx}{(1 - e \cos x)^2}, \quad (11)$$

В справочнике [6] на стр. 93 приведена формула 446.03, из которой следует

$$S(\varphi) = \frac{p^2}{2(1-e^2)} \left(\frac{e \sin \varphi}{1 - e \cos \varphi} + \int_0^{\varphi} \frac{dx}{1 - e \cos x} \right).$$

Фокальный параметр эллипса p и его эксцентриситет e связаны друг с другом. Эта связь выражается формулами:

$$p = a(1 - e^2) = b\sqrt{1 - e^2}. \quad (12)$$

Тогда

$$S(\varphi) = \frac{ap}{2} \left(\frac{e \sin \varphi}{1 - e \cos \varphi} + \int_0^{\varphi} \frac{dx}{1 - e \cos x} \right). \quad (13)$$

В вышеуказанном справочнике [6] на той же стр. 93 приведена формула 446.00, из которой следует, что

Корень $\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$ в этой формуле, который уже встречался ранее, равен коэффициенту сжатия эллипса², который обозначается k . Второй корень в формуле можно преобразовать так:

² Коэффициентом сжатия эллипса называется отношение полуосей: $k = \frac{b}{a}$.

Таким образом,

$$\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{1+\frac{c}{a}}{1-\frac{c}{a}}} = \sqrt{\frac{a+c}{a-c}} = \sqrt{\frac{r_a}{r_p}}$$

Подстановка этой формулы в (13) даёт:

$$S(\varphi) = \frac{ap}{2} \left[\frac{e \sin \varphi}{1 - e \cos \varphi} + 2 \arctg \left(\sqrt{\frac{r_a}{r_p}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right] = kb. \quad \text{Тогда}$$

$$ape = a(kb)e = abke, \quad \frac{ap}{e} = \frac{a(kb)}{e} = ab. \quad (14)$$

Итак, в результате получается следующая формула для функции $S(\varphi)$:

$$S(\varphi) = ab \left[\arctg \left(\sqrt{\frac{r_a}{r_p}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{ke}{2} \frac{\sin \varphi}{1 - e \cos \varphi} \right] \quad (15)$$

Эта формула показывает, как можно узнать площадь сектора S в момент времени t , если в этот момент проведено измерение полярного угла тела φ . Таким образом, формула (15) определяет способ косвенного измерения площади сектора.

Проверим эту формулу в нескольких предельных случаях, в которых результат заранее известен.

1. $\varphi = 0$. Это сектор с нулевым углом раствора, который вообще не сектор, а линия, её площадь равна нулю. Так и получается из формулы (15): $S(0) = 0$.
2. $\varphi = 2\pi$. Этот сектор есть полный эллипс, его площадь, как известно, равна πab . Формула (15) даёт тот же результат: $S(2\pi) = \pi ab$.
3. $\varphi = \pi$. Этот сектор есть половина эллипса, его площадь равна $\frac{\pi ab}{2}$. Формула (15) даёт тот же результат: $S(\pi) = \frac{\pi ab}{2}$.

Интересно, что функция $S(\varphi)$ нечётная, то есть $S(-\varphi) = -S(\varphi)$. Отрицательность полярного угла φ вполне допустима, а вот отрицательность площади сектора кажется странной. Объяснить эту странность можно, если обратить

внимание на формулу (10), из которой получено выражение (15), определяющее способ измерения площади сектора:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_n}^{\varphi} r(\varphi)^2 d\varphi.$$

Так как в этом интеграле подынтегральная функция положительна, то из него следует, что площадь сектора положительна, если $\varphi > \varphi_n$, то есть при движении тела *против часовой стрелки* – в направлении, в котором полярный угол *нарастает*. При движении тела по часовой стрелке формула (10) даст отрицательное число. Причина в том, что в этом случае площадь сектора надо определять по другой формуле:

$$S = -\frac{1}{2} \int_{\varphi_n}^{\varphi} r(\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi_0} r(\varphi)^2 d\varphi.$$

Тогда получится положительное число. Если же не менять формулу, то придётся признать возможными отрицательные значения площади сектора – в случае, если $\varphi < \varphi_n$.

Второй способ вычисления интеграла (10)

Он состоит в том, что интегрирование производится не по полярному углу, а по полярному расстоянию r (другими словами, по фокальному радиусу). Это означает, что в интеграле (10) делается замена переменной интегрирования φ на переменную r . Для этого надо продифференцировать уравнение эллипса (9)

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}.$$

Дифференцирование даёт:

откуда следует:

$$dr = -\frac{p}{(1 - e \cos \varphi)^2} e \sin \varphi d\varphi = -\frac{r^2}{p} e \sin \varphi d\varphi$$

$$\frac{dr}{r^2} d\varphi = -p \frac{e \sin \varphi}{r^2} d\varphi.$$

Тогда

Будем считать, что в начальный момент времени t_0 (при $t = 0$) тело находится в перигее орбиты, то есть $r_0 = r_n$. При этом:

Из уравнения эллипса следует $\frac{dr}{dr} = -\frac{p}{r^2} \frac{dr}{dr}$

$$e \cos \varphi(r) = 1 - \frac{p}{r}, \quad e \sin \varphi(r) = \pm \sqrt{e^2 - \left(1 - \frac{p}{r}\right)^2}.$$

Знак синуса зависит от того, в какой части эллипса находится тело. В верхней части полярный угол φ положительный и синус его тоже положительный, в нижней части полярный угол φ и его синус отрицательны. Если тело вращается вокруг планеты *против часовой стрелки* (от перигея), то сначала оно движется в нижней части эллипса, где $\varphi < 0$, поэтому

$$S(r) = \frac{p}{2} \int_{r_p}^r \frac{dx}{\sqrt{e^2 - \left(1 - \frac{p}{x}\right)^2}}$$

Обозначим эту функцию $S_1(r)$:

(16)

$$S_1(r) = \frac{p}{2} \int_{r_p}^r \frac{dx}{\sqrt{e^2 - \left(1 - \frac{p}{x}\right)^2}}$$

Если сектор заканчивается в верхней части орбиты, то его площадь проще всего найти так:

где $S = \pi a b$ — это полная площадь эллипса. Данную формулу наглядно поясняет следующий рисунок 4. На этом рисунке жёлтым цветом показан сектор площадью $S(r)$, а голубым цветом — сектор площадью $S_1(r)$, отражённый снизу вверх.

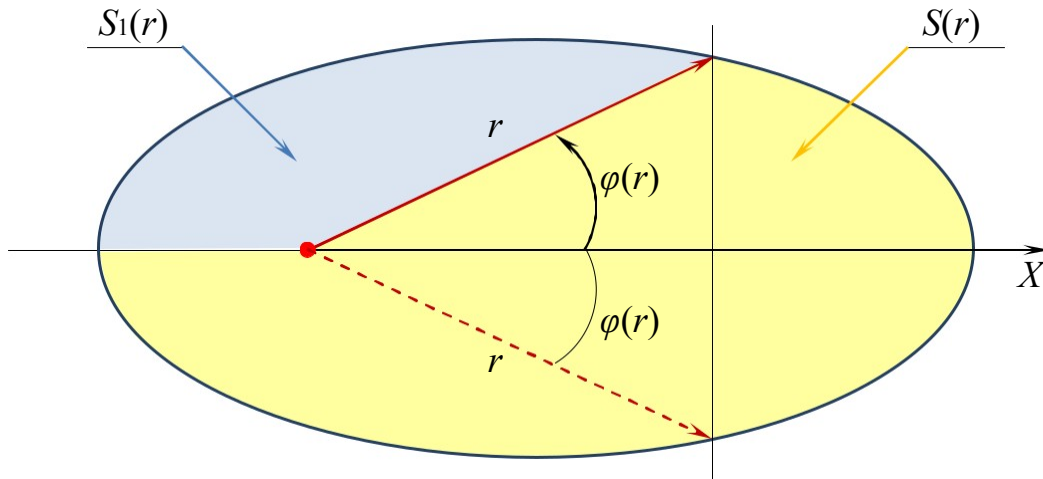


Рис. 4. Пояснение к формуле площади сектора, оканчивающегося в верхней части орбиты тела

Итак,

(17)

Интеграл в (16) вычислен авторами книги [4], ими получена формула

(18)

где буквами Z_1 и Z_2 обозначено:

$$S_1(r) = ab \left(\arctg Z_1 - \frac{Z_2}{2a} \right)$$

$$Z_1 = \sqrt{\frac{r-r_p}{r_a-r}}, \quad Z_2 = \sqrt{(r-r_p)(r_a-r)}.$$

(19)

Формулы (17) и (18) показывают, как можно узнать площадь сектора S в момент времени t , если в этот момент проведено измерение полярных координат тела: r и φ . Таким образом, формулы (17 – 18) определяют способ косвенного измерения площади сектора.

Протестируем формулы (17 – 18) на трёх предельных случаях, в которых результат заранее известен.

1. $r = r_n$. Тело находится в перигее, то есть в начальном состоянии. Сектор ещё только начинается, так что его площадь равна нулю. Именно это и получается из формул (17 – 18): $Z_1 = 0$, $Z_2 = 0$, $S_1 = 0$, $S = S_1 = 0$.
2. $r = r_a$. Тело находится в апогее, то есть оно пролетело ровно половину орбиты, и её радиус-вектор замёл площадь $S = \frac{S_g}{2} = \frac{\pi ab}{2}$. Формулы (17 – 18) дают такой же ответ: $Z_1 = \infty$, $Z_2 = 0$, $S_1 = ab \frac{\pi}{2}$, $S = S_1 = \frac{\pi ab}{2}$.

3. $r = r_n$. Тело находится в перигее, но спустя полный период вращения по орбите после начала движения. Тело описало вокруг планеты полный эллипс, так что площадь сектора равна площади эллипса: $S = S_n = \pi ab$. Именно это и получается из формул (17 – 18): $Z_1 = 0, Z_2 = 0, S_1 = 0, S = \pi ab$.

Какой из двух описанных методов измерения площади сектора выбрать, зависит от вас: выберите тот, который вам показался проще и понятней.

3. Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка виртуальная, то есть представляет собой компьютерную программу, имитирующую реальную установку. Программа разработана в Национальном исследовательском Томском политехническом университете. При включении установки (при запуске программы) на дисплей компьютера выводится окно с названием лабораторной установки «Движение инертного тела в гравитационном поле». После этого вам надо нажать кнопку «Эксперимент», в результате чего на дисплее появится окно «Эксперимент», которое позволяет экспериментатору наблюдать траекторию тела в гравитационном поле планеты и проводить измерения параметров траектории. Это окно показано на следующем рисунке 2.

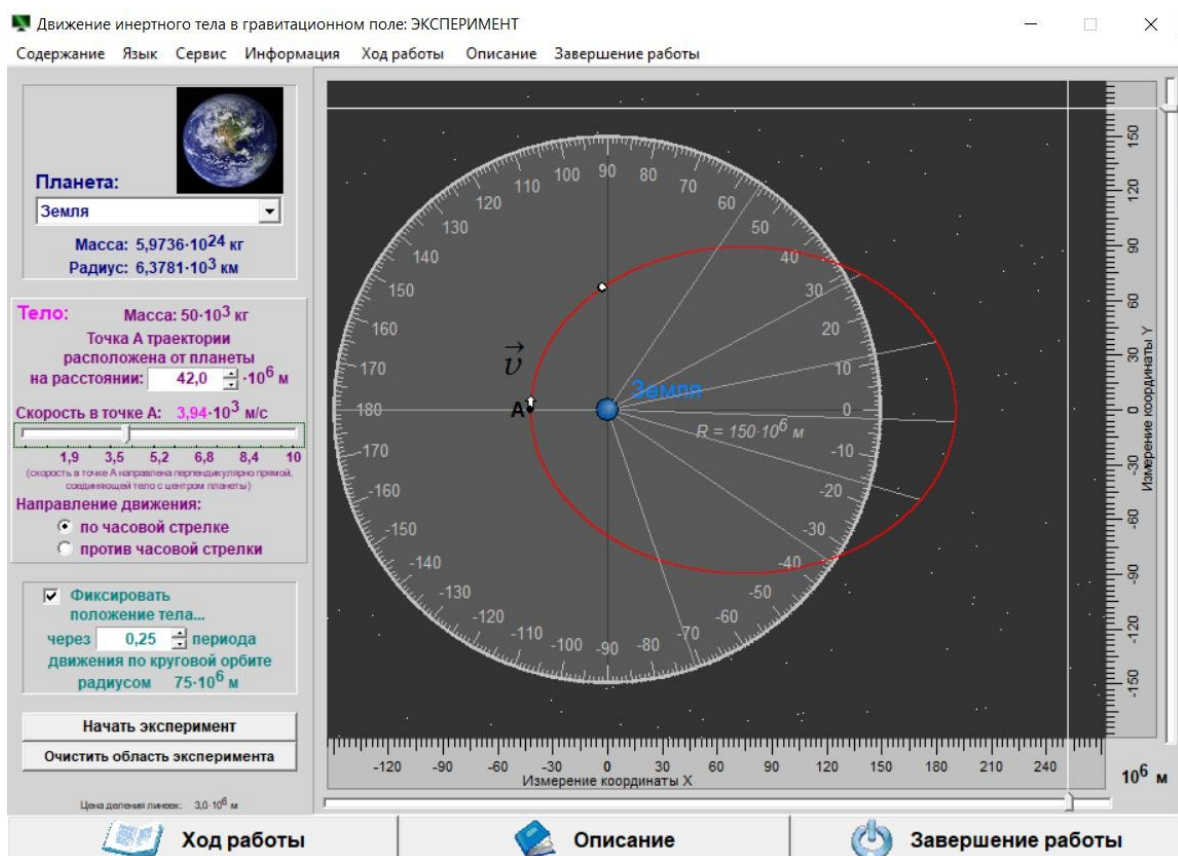


Рис. 2. Окно «Эксперимент»

В левой части окна расположена приборная панель, позволяющая выбирать следующие условия эксперимента.

- Планету Солнечной системы.
- Начальное состояние тела. Предполагается, что в начальный момент времени тело находится **в перигее**, то есть в точке минимального удаления тела от планеты. У вас есть возможность установить следующие параметры начального состояния: расстояние тела от планеты r_p , скорость тела v_p и направление движения.

В правой части окна расположена область визуализации, в которой движется тело, там же есть две линейки с бегунками, позволяющие измерять координаты тела, и транспортир для измерения угла, под которым тело видно с планеты. Обратите внимание: в установке начало декартовой системы координат и полюс полярной системы координат находятся, как и указывалось выше, в точке расположения планеты (точнее – в центре планеты).

Для управления экспериментом на приборной панели расположены окошко «**Фиксировать положение тела**» и две кнопки: «**Начать эксперимент**» и «**Очистить область эксперимента**». При нажатии на кнопку «**Начать эксперимент**» тело начинает движение и рисуется траектория тела, при этом надпись на кнопке превращается в «**Остановить эксперимент**». При нажатии на кнопку «**Очистить область эксперимента**» траектории тела, сохранённые в области визуализации, стираются. Окошко «**Фиксировать положение тела**» нужно для того, чтобы в процессе вращения тела через равные промежутки времени τ на экране появлялся радиус-вектор тела. Для этого, однако, надо *установить флажок* в окошке. В результате у вас появится возможность измерять декартовы координаты тела (x ; y) и полярные координаты тела (r ; ϕ) через равные промежутки времени τ , то есть координаты тела в моменты времени t в единицах τ :

$t = 0, t = \tau, t = 2\tau, t = 3\tau$ и т.д. Что такое промежуток времени τ , указано на приборной панели установки. Вы при желании можете вычислить значение τ , но в этом нет необходимости, важно другое: у вас есть возможность по своему желанию *устанавливать* моменты времени, в которые установка показывает фокальные радиусы тела.

4. Порядок выполнения работы

Выберите по согласованию с преподавателем планету и начальное состояние тела. Результаты запишите в следующую таблицу 1.

Таблица 1

Условия эксперимента

Планета			
Перигей	r_p	Мм	
Скорость тела в перигее	v_p	км/с	
Погрешность измерения координат	$\Delta(x) = \Delta(y)$		

- 4.1. Выберите направление движения: *против* часовой стрелки.
- 4.2. Поставьте флажок в окошке «**Фиксировать положение тела**», а в следующем окошке «**через**» выберите число от 0,05 до 0,5. Чем меньше это число, тем меньше значение временного интервала τ , через который установка показывает положение фокального радиуса тела, и тем подробнее вы сможете исследовать зависимость площади сектора S , заметаемого фокальным радиусом тела r , от времени наблюдения t .
- 4.3. Нажмите на кнопку «**Начать эксперимент**». Тело начнёт движение, за ним остаётся цветной след – траектория и с периодичностью τ появляются фокальные радиусы тела. В программе предусмотрено, что тело совершает два оборота, а потом движение прекращается. Однако нет смысла ждать окончания опыта – как только тело пошло на второй оборот, нажмите кнопку «**Остановить эксперимент**».
- 4.4. Полученную орбиту целесообразно показать в вашем отчёте. Для этого сделайте скриншот рабочего экрана, вырежьте из него область визуализации и скопируйте в отчёт.
- 4.5. С помощью линеек и бегунков измерьте основные параметры орбиты: расстояние тела от планеты в апогее r_a , большую и малую полуоси a и b , фокальный параметр p и фокальное расстояние c . Результаты впишите в таблицу 2. Значение эксцентриситета в таблице 2 определите по формуле (8):

$$e = \frac{c}{a}.$$

Таблица 2

Измерения параметров орбиты

Апогей	r_a	Мм	
	$\Delta(r_a)$	Мм	
Большая ось	$2a$	Мм	
Большая полуось	a	км/с	
	$\Delta(a)$	Мм	
Малая полуось	b	Мм	
	$\Delta(b)$	Мм	
Фокальный параметр	p	Мм	
	$\varepsilon(b)$	%	
Фокальное расстояние	c	Мм	
Эксцентриситет	e		

Дальнейшие ваши действия зависят от того, какой способ измерения площади сектора вы выберете.

Действия при использовании первого способа измерения площади сектора

- 4.6. Заполните дополнительную таблицу 3, данные из которой вам будут полезны для дальнейшего определения площади сектора в различные моменты времени.

Таблица 3
Вспомогательные параметры

ab	Мм^2	
$ke/2$		
$(r_a/r_p)^{1/2}$		
$p^2/2$	Мм^2	

Пояснение: параметр k – это упоминавшийся выше коэффициент сжатия

эллипса: $k = \frac{b}{a}$.

Если хотите, присвойте параметрам в таблице 3 имена и сохраните их в диспетчере имён, при этом полезно ввести в таблицу 3 ещё один столбец для имени.

- 4.7. Заполните следующую таблицу 4 – основную таблицу с результатами экспериментов. Первая строчка в этой таблице (при $t = 0$) относится к начальному фокальному радиусу тела: горизонтальному, проведённому в перигей. Каждая из следующих строчек содержит информацию об остальных фокальных радиусах.

Таблица 4
Зависимость площади сектора S
от времени его наблюдения в единицах τ

t	φ		$S(\varphi)$	$\Delta(S)$
τ	град.	рад.		Мм^2
0	-180			
1				
2				
...				

- 4.8. Используя данные из таблицы 4, постройте график зависимости $S(t)$, укажите на графике планки погрешностей и уравнение тренда.

Прокомментируйте график.

- 4.9. Сформулируйте общие выводы по лабораторной работе.

Действия при использовании второго способа измерения площади сектора

- 4.6. Заполните дополнительную таблицу 3, данные из которой вам будут полезны для дальнейшего определения площади сектора в различные моменты времени.

Таблица 3
Вспомогательные параметры

ab	Мм^2	
S_e	Мм^2	
$\Delta(S_e)$	Мм^2	
e^2		

Если хотите, присвойте параметрам в таблице 3 имена и сохраните их в диспетчере имён, при этом полезно ввести в таблицу 3 ещё один столбец для имени.

- 4.7. Заполните следующую таблицу 4 с результатами экспериментов. Первая строчка в этой таблице (при $t = 0$) относится к начальному фокальному радиусу тела: горизонтальному, проведённому в перигей. Каждая из следующих строчек содержит информацию об остальных фокальных радиусах.

Таблица 4

Координаты радиус-вектора тела
в процессе его вращения по орбите

t	x	y	φ	r	$\Delta(r)$
τ	Мм	Мм	град.	Мм	Мм
0		0	-180		
1					
2					
...					

- 4.8. Заполните следующую таблицу 5 – с основными результатами экспериментов.

Таблица 5

Зависимость площади сектора S от времени его наблюдения в единицах τ

t	$r - r_p$	$r_a - r$	Z_1	Z_2	$S_1(r)$	$S(r)$	$\Delta(S_1)$	$\Delta(S)$
τ	Мм	Мм		Мм	Мм ²	Мм ²	Мм ²	Мм ²
0								
1								
2								
...								

- 4.9. Используя данные из таблицы 5, постройте график зависимости $S(t)$, укажите на графике планки погрешностей и уравнение тренда.
 4.10. Прокомментируйте график.
 4.11. Сформулируйте общие выводы по лабораторной работе.

5. Оценка погрешностей измерений

- 5.1. Погрешности прямых измерений.

Прямым способом измеряются координаты точек орбиты: x , y , φ и параметров орбиты: r_a , a , b , p , c . Для этого используются линейки и транспортир в области визуализации. Погрешности измерений можно оценить как половину цены деления этих инструментов.

- 5.2. Погрешность измерения фокального радиуса r .

Для измерения фокального радиуса используется формула

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Применение общего правила оценки погрешностей косвенных измерений даёт:

$$\Delta(r) = \Delta_x(r) + \Delta_y(r) = \left| \frac{\partial r}{\partial x} \right| \Delta(x) + \left| \frac{\partial r}{\partial y} \right| \Delta(y) =$$

5.3. Погрешность измерения площади орбиты S_e .

$$\text{Площадь орбиты (эллипса) измеряется по формуле} \\ = \left| \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right| \Delta(x) + \left| \frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right| \Delta(y) = \frac{|x|+|y|}{r_1} \Delta(x)$$

Из этой формулы следует:

$$\varepsilon(S_e) = \varepsilon(a) + \varepsilon(b) = \frac{\Delta(S_e)}{S_e} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Delta(x)$$

5.4. Погрешность измерения площади сектора $S(\varphi)$ – при первом способе измерения площади.

Для измерения используется формулы (11) и (15):

$$S(\varphi) = \frac{p^2}{2} \int_0^\varphi \frac{dx}{(1 - e \cos x)^2},$$

Чтобы оценить погрешность $\Delta(S)$ достаточно первой формулы. Из неё следует, что значение S зависит от трёх величин: фокального параметра p , полярного угла φ и от эксцентриситета e . Поэтому надо оценить три частные погрешности: $\Delta_p(S)$, $\Delta_\varphi(S)$ и $\Delta_e(S)$.

$$\Delta_p(S) = \left| \frac{\partial S}{\partial p} \right| \Delta(p) = \frac{1}{p} \Delta(p) \\ \Delta_\varphi(S) = \left| \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right| \Delta(\varphi) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{(1 - e \cos \varphi)^2} \Delta(\varphi) \\ \Delta_e(S) = \left| \frac{\partial S}{\partial e} \right| \Delta(e) = \frac{1}{2} \frac{p^2 \sin \varphi}{(1 - e \cos \varphi)^3} \Delta(e)$$

Вычисление производной $\frac{\partial S}{\partial e}$ приводит к серьёзным математическим трудностям, поэтому есть смысл в первом приближении не учитывать частную погрешность $\Delta_e(S)$. В результате, конечно, оценка погрешности $\Delta(S)$ окажется заниженной. Однако, если это не повлияет на общий результат работы, то первое приближение можно считать достаточным.

Итак,

5.5. Погрешность измерения площади сектора $\Delta(S) = \frac{2S}{p} \Delta(p) + \frac{p^2}{2(1-e\cos\phi)^2} \Delta(e)$ при втором способе измерения площади.

Для измерения используются формулы (16) и (17):

$$S_1(r) = \frac{p}{2} \int_r^r \frac{dx}{\sqrt{e^2 - \left(1 - \frac{p}{r}\right)^2}}$$

(16)
(17)

Из (16) следует, что значение S_1 зависит от четырёх величин: фокального параметра p , фокального радиуса r , перигея r_p и эксцентриситета e . Из них перигей известен наиболее точно – его задаёт установка с погрешностью, меньшей 1%. Поэтому достаточно оценить только три частных погрешности: $\Delta_p(S_1)$, $\Delta_r(S_1)$ и $\Delta_e(S_1)$.

Наиболее просто оценить вторую из них:

$$\Delta_r(S_1) = \left| \frac{\partial S_1}{\partial r} \right| \Delta(r) = \frac{p}{2} \frac{1}{\sqrt{e^2 - \left(1 - \frac{p}{r}\right)^2}} \Delta(r) = \frac{p \Delta(r)}{2 \sqrt{e^2 - \left(1 - \frac{p}{r}\right)^2}}$$

Теперь оценим первую частную погрешность.

$$\Delta_p(S_1) = \left| \frac{\partial S_1}{\partial p} \right| \Delta(p)$$

Фокальный параметр p входит в формулу (16) дважды: в множитель перед интегралом и в знаменатель подынтегральной функции. Второе

очень осложняет вычисление производной $\frac{\partial S_1}{\partial p}$, поэтому можно в первом приближении не учитывать наличие фокального параметра в знаменателе подынтегральной функции, тогда

$$\Delta_p(S_1) = \left| \frac{\partial S_1}{\partial p} \right| \Delta(p) = \left[\frac{1}{2} \int_{r_p}^r \frac{dx}{\sqrt{2\mu \left(E - \frac{\mu}{r} - \frac{p^2}{2\mu r^2} \right)}} \right] \Delta(p) = \frac{S_1}{p} \Delta(p)$$

$$\Delta_e(S_1) = \left| \frac{\partial S_1}{\partial e} \right| \Delta(e)$$

Вычисление производной $\frac{\partial S_1}{\partial e}$ приводит к серьёзным математическим трудностям, поэтому есть смысл в первом приближении не учитывать частную погрешность $\Delta_e(S)$. В результате, конечно, оценка погрешности $\Delta(S)$ окажется заниженной. Однако, если это не повлияет на общий результат работы, то указанное приближение можно считать достаточным.

Таким образом,

$$\Delta(S_1) = \Delta_p(S_1) + \Delta_r(S_1) = S_1 \frac{\Delta(p)}{p} + \frac{p \Delta(r)}{\sqrt{2\mu \left(E - \frac{\mu}{r} - \frac{p^2}{2\mu r^2} \right)}}$$

Согласно (17) площадь сектора S равна S_1 , если сектор заканчивается в нижней части орбиты, то есть $\varphi(r) < 0$. При этом $\Delta(S) = \Delta(S_1)$. Если же сектор заканчивается в верхней части орбиты, то $S(r) = S_e - S_1(r)$. В этом случае

$$\Delta(S) = \Delta(S_e) + \Delta(S_1).$$

Итак,

$$\Delta(S) = \begin{cases} \Delta(S_1), & \text{если } \varphi(r) < 0, \\ \Delta(S_e) + \Delta(S_1), & \text{если } \varphi(r) > 0. \end{cases}$$

6. Контрольные вопросы

- 6.1. Какая особенность траектории тела в гравитационном поле планеты вытекает из закона сохранения момента импульса?
- 6.2. В каких координатах удобнее описывать движение тела в гравитационном поле планеты? Обоснуйте ваш ответ.
- 6.3. В чём состоит Второй закон Кеплера?
- 6.4. Как зависит площадь сектора, заметаемого фокальным радиусом планеты, от времени?
- 6.5. Напишите уравнение орбиты тела при его движении по замкнутой траектории в гравитационном поле планеты.
- 6.6. Напишите формулу площади орбиты тела в гравитационном поле планеты.

- 6.7. Каким является начальное состояние тела в предлагаемой вам экспериментальной установке?
- 6.8. В какой точке выбрано начало координат в предлагаемой вам экспериментальной установке?
- 6.9. Каким рекомендуется установить направление движения тела?

7. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1.– М.: Наука, 1977–1985 г.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. – М.: Наука, 1989.
3. Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Высшая школа, 2003.
4. Ревинская О.Г., Кравченко Н.С. Лабораторный практикум по изучению моделей физических процессов на компьютере. – Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2007.
5. Рипп А.Г. Обработка измерений : методическое пособие. – Севастополь : СНУЯЭП, 2012.
6. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1966.

Учебное издание

**Рипп Александр Гешелевич
Матузаева Ольга Вячеславовна**

ВТОРОЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА

Учебное пособие

В авторской редакции

Изд. № 171/2022. Объем 1,5 п.л. Усл. печ. л. 1,39. Уч.-изд. л. 1,47. РИИЦМ
ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»