

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

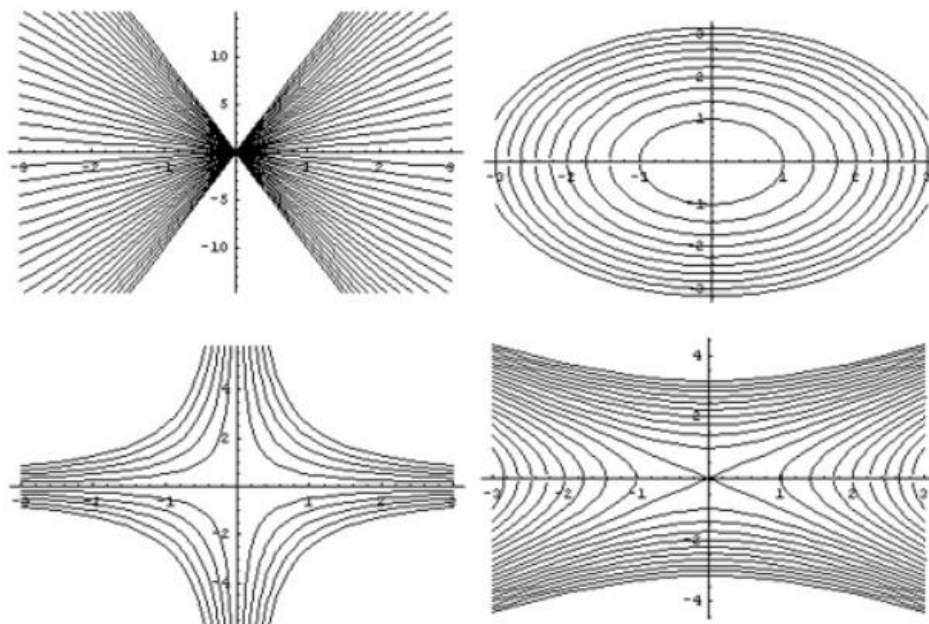
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Л.В. Третьякова, С.А. Чернявская, В.Г. Царёв

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Методические указания

к проведению практических занятий по высшей математике
для студентов технических и естественно-научных специальностей



Севастополь
СевГУ
2023

УДК 517.9(07)
ББК 22.161.6я73
Т66

Р е ц е н з е н т:
О.В. Матузаева – канд. техн. наук

Третьякова Л. В.

Т66 Дифференциальные уравнения высших порядков : методические указания к проведению практических занятий по высшей математике для студентов технических и естественно-научных специальностей / Л.В. Третьякова, С.А. Чернявская, В.Г. Царёв ; Севастопольский государственный университет. – Севастополь: СевГУ, 2023. – 36 с. – Текст: электронный.

Методические указания разработаны преподавателями кафедры «Высшая математика» СевГУ и предназначены для студентов 1-го курса технических и естественно-научных специальностей, выполняющих индивидуальные задания по дисциплине «Высшая математика».

Пособие знакомит читателя с понятиями: обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков, с дифференциальными уравнениями высших порядков, допускающих понижение порядка, с линейными однородными и неоднородными дифференциальными уравнениями второго и высших порядков с постоянными коэффициентами и методами их решения. В пособии приведено достаточное количество примеров и задач по рассматриваемым темам, приведены варианты индивидуальных заданий по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков». Для студентов, желающих расширить свой кругозор знаний по рассматриваемой теме, в конце пособия приводится список литературы.

УДК 517.9(07)
ББК 22.161.6я73

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Высшая математика», протокол № 2 от 28 октября 2022 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Основные понятия теории дифференциальных уравнений 2-го и высших порядков	4
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ: «Дифференциальные уравнения 2-го и высших порядков, допускающих понижение порядка»	7
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ: «Решение линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го и n-го порядков с постоянными коэффициентами»	13
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ: «Интегрирование л.н.д.у. 2-го порядка со специальной правой частью»	19
ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ	32
ЛИТЕРАТУРА	36

Тема: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Основные понятия теории дифференциальных уравнений 2-го и высших порядков

п. 1. Формы записи

Все дифференциальные уравнения порядка выше первого называются дифференциальными уравнениями высших порядков.

Обыкновенные дифференциальные уравнения n -го порядка в общем случае имеют вид

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Если разрешить последнее уравнение относительно старшей производной, то получаем

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

В частности уравнение 2-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'') = 0 \text{ или } y'' = f(x, y, y').$$

Последнее уравнение разрешено относительно второй производной.

Здесь $y = y(x)$ есть функция одной независимой переменной x .

Решением дифференциального уравнения n -го порядка называется всякая функция $y = y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

График решения дифференциального уравнения называется его интегральной кривой, а процесс отыскания решений – интегрированием этого уравнения.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения n -го порядка называется функция $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ – зависящая от независимой переменной x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ такая, что

1. При любых $C_1, C_2, \dots, C_n$ эта функция удовлетворяет заданному уравнению.

2. Каковы бы не были начальные условия

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

всегда можно подобрать такие числа $C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0}$, что функция $\varphi(x, C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0})$ удовлетворяет заданным начальным условиям.

В частности для уравнения второго порядка общее решение имеет вид $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, а начальные условия

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0.$$

Определение. Общим интегралом дифференциального уравнения n -го порядка называется функция $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, удовлетворяющая всем условиям общего решения.

Отличие общего решения от общего интеграла состоит в том, что общее решение разрешено относительно y , а общий интеграл нет, т.е. общий интеграл, это неявное задание общего решения.

Определение. Решение $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$, полученное из общего $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ при конкретных значениях C_1 и C_2 называется частным решением.

Равенство $\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$ есть частный интеграл.

Геометрически: общее решение $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ уравнений $F(x, y, y', y'') = 0$ или $y'' = f(x, y, y')$ представляет собой бесконечную совокупность интегральных кривых, зависящую от двух параметров C_1 и C_2 (двухпараметрическое семейство кривых).

Конкретные значения C_1 и C_2 можно найти используя начальные условия $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$ из системы

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2) \\ y'_0 = \varphi'(x_0, C_1, C_2) \end{cases},$$

в результате чего получим частное решение $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$, удовлетворяющее уравнению $y'' = f(x, y, y')$ и начальным условиям $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$.

п. 2. Задача Коши

Задача Коши для уравнений 2-го и высших порядков состоит в том, чтобы найти единственное решение удовлетворяющее уравнению и заданным начальным условиям.

Теорема Коши (теорема единственности решения для дифференциальных уравнений 2 порядка).

Если в уравнении $y'' = f(x, y, y')$, функция $f(x, y, y')$ и ее частные производные по y и y' непрерывны в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0, y_0, y'_0)$, то существует единственное решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$.

Заметим, что единственность решения задачи Коши для уравнения второго порядка не означает, что через данную точку (x_0, y_0) плоскости xOy проходит только одна интегральная кривая, как это имело место для уравнения $y' = f(x, y)$.

Для уравнения $y'' = f(x, y, y')$ с начальными условиями $y|_{x=0} = y_0$, $y'|_{x=0} = y'_0$ единственность решения задачи Коши нужно понимать в том смысле, что через точку (x_0, y_0) плоскости xOy проходит единственная интегральная кривая, касательная к которой в этой точке имеет угловой коэффициент $k = y'_0$.

Через точку (x_0, y_0) проходит бесчисленное множество интегральных кривых уравнения с другим наклоном касательных в этой точке.

Аналогичные положения теории имеют место и для дифференциальных уравнений

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

порядок которых выше двух.

Общее решение $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, а значит и общий интеграл $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ содержат n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Частное решение (частный интеграл) выделяется из общего с помощью начальных условий

$$y|_{x=0} = y_0, \quad y'|_{x=0} = y'_0, \quad y''|_{x=0} = y''_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=0} = y^{(n-1)}_0. \quad (1)$$

Следует помнить, что начальных условий должно быть столько, каков порядок уравнения.

Задача Коши для уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ состоит в отыскании решения, удовлетворяющего начальным условиям (1).

Теорема Коши (существования и единственности решения уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$) читается следующим образом.

Если в дифференциальном уравнении $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ и ее частные производные по аргументам $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ непрерывны в некоторой области D , содержащей значения $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y^{(n-1)}_0$, то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее условиям (1).

Решить (проинтегрировать) дифференциальное уравнение n -го порядка – это значит:

1. найти его общее решение (общий интеграл), если начальные условия не заданы, или
2. найти частное решение (частный интеграл), если начальные условия заданы.

Задача нахождения общего решения (общего интеграла) уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ сложнее, чем в случае $n = 1$. Поэтому ограничимся рассмотрением лишь отдельных видов дифференциальных уравнений высших порядков.

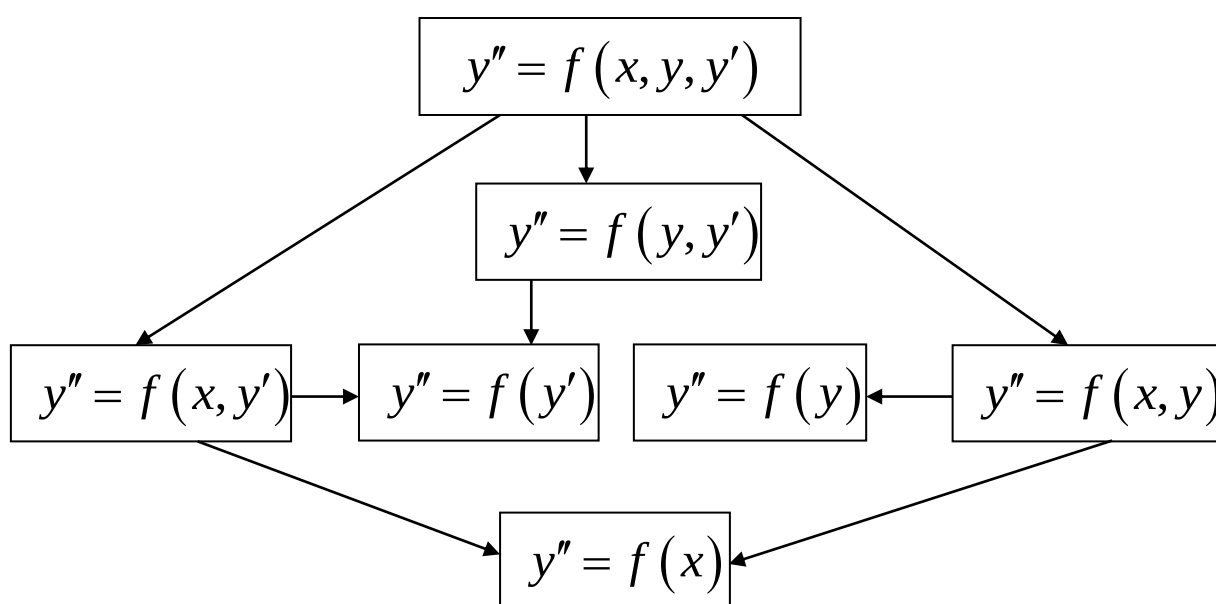
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ

«Дифференциальные уравнения 2 и высших порядков, допускающих понижение порядка»

Интегрирование дифференциальных уравнений n -го порядка в конечном виде удастся произвести только в некоторых частных случаях.

Одним из методов при этом является понижение порядка, то есть сведение уравнения путем замены переменных к другому, имеющему порядок ниже данного.

Рассмотрим общее уравнение второго порядка $y'' = f(x, y, y')$. Частные случаи этого уравнения представлены на схеме:



Рассмотрим, в каких из представленных случаев можно свести уравнение второго порядка к уравнению первого порядка.

Случай 1. $y'' = f(x)$.

Интегрируя это уравнение два раза, мы получаем его общее решение

$$y' = \int f(x) dx + C_1$$

$$y = \int \left(\int f(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2$$

Пример. $y'' = x^3$.

Отсюда

$$y' = \frac{x^4}{4} + C_1,$$

$$y = \frac{x^5}{20} + C_1 x + C_2. \text{ — общее решение.}$$

Замечание 1: Общее решение уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$ находим методом n -кратного интегрирования. Т.е.:

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$$

Повторяя эту операцию, приходим к уравнению $(n-2)$ -го порядка:

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2 \text{ и т.д.}$$

$$y = \int \dots \left(\int \left(\int f(x) dx \right) dx \right) dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n - \text{общее решение.}$$

Замечание 2: при решении задачи Коши для уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка, целесообразно определять значения постоянных $C_i (i = \overline{1, n})$ в процессе решения, а не после нахождения общего решения. Это упрощает процесс интегрирования уравнений.

Пример. $y''' = e^{2x}$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$, $y''|_{x=0} = \frac{1}{2}$.

Решение. Требуется найти частное решение (частный интеграл) данного дифференциального уравнения, так как заданы начальные условия (решить задачу Коши).

Интегрируем трижды:

$$y'' = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1,$$

т.к.

$$y''|_{x=0} = \frac{1}{2}, \text{ то } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} e^0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$$

$$y' = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C_1 \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2,$$

$$y'|_{x=0} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{4} e^0 + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{4}.$$

Интегрируя последнее равенство

$$y = \int \left(\frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{1}{8} e^{2x} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Учитывая проведенные выше вычисления и $y|_{x=0} = 1$, имеем:

$$1 = \frac{1}{8} e^0 - \frac{1}{4} x + C_3 \Rightarrow C_3 = \frac{7}{8}.$$

Окончательно имеем $y = \frac{1}{8} e^{2x} - \frac{1}{4} x + \frac{7}{8}$ – частное решение данного дифференциального уравнения.

Случай 2. $y'' = f(x, y')$.

Это уравнение не содержит явным образом искомую функцию y . Способ решения. Введем новую неизвестную функцию $P(x)$, положив

$$y' = P(x), \text{ тогда } y'' = \frac{dP}{dx}.$$

Подставляя выражения для y' и y'' в исходное уравнение $y'' = f(x, y')$, получаем уравнение 1-го порядка

$$\frac{dP}{dx} = f(x, P).$$

относительно вспомогательной функции $P(x)$. Решив это уравнение одним из известных способов, найдем его общее решение: $P = P(x, C_1)$, но $P(x) = y'$.

Из соотношения $y' = P(x, C_1)$ получаем общее решение данного уравнения, т.е. $y = \int P(x, C_1) dx + C_2$.

Пример. $y'' + \frac{y'}{x} = x$. В уравнении отсутствует в явном виде y .

Делаем замену:

$$y' = P(x), \quad y'' = P' \Rightarrow P' + \frac{P}{x} = x.$$

Полученное уравнение является линейным уравнением 1-го порядка относительно P .

Решение этого уравнения будем искать в виде $P = U \cdot V$, тогда $P' = U'V + UV'$.

Подставляем в последнее уравнение

$$U'V + UV' + \frac{UV}{x} = x.$$

Тогда записываем систему

$$\begin{cases} UV' + \frac{UV}{x} = 0 \\ U'V = x \end{cases}.$$

Из первого уравнения системы имеем

$$V' = -\frac{V}{x} \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -\frac{V}{x} \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln V = -\ln x$$

$$V = \frac{1}{x}.$$

Подставляем во второе уравнение системы

$$U' \cdot \frac{1}{x} = x \Rightarrow U' = x^2.$$

Отсюда $U = \frac{x^3}{3} + C_1$.

Таким образом $P = U \cdot V = \left(\frac{x^3}{3} + C_1 \right) \cdot \frac{1}{x}$, но $P = y'$. Следовательно,

$$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

Окончательно, после интегрирования получаем общее решение данного дифференциального уравнения $y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln x + C_2$.

Частный случай. Уравнение вида

$$y'' = f(y')$$

так же не содержит явно искомую функцию y , а поэтому интегрируется тем же способом

$$y' = P(x), \quad y'' = \frac{dP}{dx}.$$

Случай 3. $y'' = f(y, y')$.

В этом уравнении в явном виде отсутствует аргумент искомой функции x .

Способ решения. Сделаем замену $y' = P(y)$. Учитывая, что $y = y(x)$, применим правило дифференцирования сложной функции

$$y''_x = P'_y \cdot y'_x = P' \cdot P = P \cdot \frac{dP}{dy}.$$

Подставляя y' и y'' в заданное уравнение, получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно $P(y)$

$$P' \cdot P = f(y, P).$$

Решив его, найдем $P = P(y, C_1)$, или

$$y' = P(y, C_1)$$

– уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные

$$\frac{dy}{P(y, C_1)} = dx$$

и проинтегрировав это уравнение, найдем общий интеграл заданного дифференциального уравнения, т.е. равенство вида $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$.

Пример. Решить уравнение

$$y'' \sin y \cos y = -y'^2.$$

Делаем замену $y' = P(y)$, так как отсутствует в явном виде x , тогда

$$y'' = P \cdot \frac{dP}{dy}$$

$$P \cdot \frac{dP}{dy} \cdot \sin y \cdot \cos y = -P^2 \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{dy}{\sin y \cdot \cos y}$$

$$\int \frac{dP}{P} = -\int \frac{dy}{\sin^2 y \cdot \operatorname{ctg} y} \Rightarrow \ln P = \int \frac{d(\operatorname{ctg} y)}{\operatorname{ctg} y}$$

$$\ln P = \ln |\operatorname{ctg} y| + \ln C_1 \Rightarrow P = C_1 \cdot \operatorname{ctg} y.$$

Подставим вместо P , его найденное значение

$$y' = C_1 \cdot \operatorname{ctg} y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 \cdot \operatorname{ctg} y \Rightarrow \operatorname{tg} y dy = C_1 \cdot dx \Rightarrow -\ln \cos y = C_1 x + C_2.$$

Получили общий интеграл заданного уравнения.

Частный случай. Уравнение вида

$$y'' = f(y)$$

так же не содержит явно x . Решаем аналогично, т.е. полагаем

$$y = P(y), \quad y'' = P \cdot \frac{dP}{dy}.$$

Анализируя рассмотренные случаи, сформулируем **общее правило:**

1. Если уравнение второго порядка не содержит переменную y , то делается замена $y' = P(x)$.
2. Если уравнение не содержит x , то делается замена $y' = P(y)$.
3. В частности уравнения $y'' = f(y')$, $y'' = f(y)$ можно решить заменой $y' = P(y)$.

Понижение порядка в уравнениях n -порядка.

Из всех уравнений n -го порядка, рассмотрим только два типа.

1 тип. $y^{(n)} = f(x)$.

Для решения этого уравнения достаточно проинтегрировать его n раз.

Пример.

$$y''' = x^2 + 1$$

$$y'' = \frac{x^3}{3} + x + c$$

$$y' = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

$$y = \frac{x^5}{60} + \frac{x^3}{6} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3.$$

2 тип. $y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$, где $n \geq 2$

В этом случае делается замена

$$y^{(n-1)} = P(x), \quad y^{(n)} = P'_x,$$

и уравнение сводится к уравнению первого порядка $P' = f(x, P)$ относительно $P(x)$. Решив его, найдем $P = P(x, C_1)$. Из равенства $y^{(n-1)} = P(x, C_1)$ найдем y , проинтегрировав последнее равенство $(n-1)$ раз.

Пример. Решить уравнение $y''' = y'' \cdot \operatorname{ctg} x$.

Положим $y'' = P(x)$, тогда $y''' = P'$.

$$P' = P \cdot \operatorname{ctg} x, \quad \frac{dP}{dx} = P \cdot \operatorname{ctg} x, \quad \int \frac{dP}{P} = \int \operatorname{ctg} x dx, \quad \ln|P| = \ln|\sin x| + \ln|C_1|, \quad P = C_1 \cdot \sin x,$$

$$y'' = C_1 \cdot \sin x,$$

$$y' = \int (C_1 \cdot \sin x) dx = -C_1 \cdot \cos x + C_2,$$

$$y = \int (-C_1 \cdot \cos x + C_2) dx = -C_1 \cdot \sin x + C_2 x + C_3 \quad \text{— искомое общее решение данного дифференциального уравнения.}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Укажите способ дифференцирования данных дифференциальных уравнений:

а) $y^{(n)} = f(x)$;

г) $y'' = f(y, y')$;

б) $y'' = f(x, y')$;

д) $y'' = f(y)$;

$$в) y'' = f(y');$$

$$е) y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)}).$$

2. Проинтегрировать следующие уравнения

$$1) y''' = x^2 - \sin x$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{x^5}{60} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x - \cos x + C_3.$$

$$2) yy'' = (y')^2$$

$$\text{Ответ: } y = C_2 e^{C_1 x}.$$

$$3) y'' = x \sin x$$

$$\text{Ответ: } y = C_1 x + C_2 - x \sin x - 2 \cos x.$$

$$4) y^{IV} = \frac{y''}{x}$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{C_1 x^4}{24} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

$$5) x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$$

$$\text{Ответ: } y = C_1 \ln x + C_2 x + C_3 - \frac{1}{2x}.$$

Решить задачу Коши

$$1) y'' = \frac{\ln x}{x^2}, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = 1$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x + 2x + 1.$$

$$2) xy''' - y'' = x^2 + 1, \quad y(-1) = 0, \quad y'(-1) = 1, \quad y''(-1) = 0;$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x + \frac{2}{3}.$$

$$3) y'' = e^{2y}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

$$\text{Ответ: } \frac{y}{4e^{2y}} + \frac{1}{4e^{2y}} - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0.$$

$$4) 2y'y'' = 1, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{2}{3} \left(x^{3/2} - 1 \right).$$

$$5) y'' = y' + x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$$

$$\text{Ответ: } y = e^x - \frac{x^2}{2} - x + 2.$$

$$6) y'' = \frac{3}{2}y^2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{y}(3-x) = 2.$$

Самостоятельная работа

$$1) x^2 y'' = (y')^2;$$

$$\text{Ответ: } y = C_2 - \frac{x}{C_1} - \frac{1}{C_1} \ln |1 - C_1 x|.$$

$$2) 2(y')^2 = (y-1)y'', \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1;$$

$$\text{Ответ: } y = (x+1)/x.$$

$$3) xy'' - y' = x^2 e^x;$$

$$\text{Ответ: } y = C_1 x^2 + C_2 + e^x (x-1).$$

$$4) y^3 y'' + 1 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0;$$

$$\text{Ответ: } y = \sqrt{2x - x^2}.$$

$$5) y'' = \frac{y'}{x} + x;$$

$$\text{Ответ: } y = x^3/3 + C_1 x^2 + C_2.$$

$$6) 2y'' = 3y^2, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1.$$

$$\text{Ответ: } y = 4/(x+4)^2.$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ «Решение линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го и n-го порядков с постоянными коэффициентами»

Основные понятия и определения

Среди всех дифференциальных уравнений высших порядков линейные уравнения занимают особое место. Это наиболее простой и изученный тип дифференциальных уравнений. Очень важны их применения в физике, механике. В частности, задачи, связанные с колебаниями, приводят к линейным дифференциальным уравнениям.

Определение. Дифференциальное уравнение n -порядка называется линейным, если оно линейно относительно неизвестной функции y , и всех ее производных $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Общий вид линейного уравнения

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

где функции $a_i(x)$, $i = \overline{0, n}$ и правая часть $f(x)$ есть функции, непрерывные в некотором интервале (a, b) , $a_0(x) \neq 0$.

Здесь $y = y(x)$ – искомая функция.

Если $f(x) = 0$, то уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением (л.о.д.у.), если же $f(x) \neq 0$, то уравнение называется неоднородным (л.н.д.у.).

Далее, мы будем рассматривать линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

В частности, уравнения 2-го порядка будут иметь вид

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad \text{л.н.д.у.}$$

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad \text{л.о.д.у.}$$

Если все коэффициенты разделить на a_0 , то получаем уравнения вида

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad \text{л.н.д.у.}$$

$$y'' + py' + qy = 0 \quad \text{л.о.д.у.}$$

Теорема (о частных решениях): Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – частные решения л.о.д.у. 2-го порядка, то их линейная комбинация $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ также является решением этого уравнения, при любых значениях постоянных c_1, c_2 .

Определение. Функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ называется линейно-зависимыми на отрезке $[a, b]$, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ одновременно не равные нулю, что выполняется равенство

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0.$$

Если две функции линейно зависимы, то имеем

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0.$$

Отсюда

$$\frac{y_1}{y_2} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \text{const}.$$

Таким образом, если две функции линейно-зависимы, то их отношение есть постоянное число.

Определение. Определитель, составленный для функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ имеющий вид

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \text{ называется определителем Вронского.}$$

Если y_1 и y_2 - линейно-независимые решения линейного дифференциального уравнения 2 порядка, то определитель Вронского имеет вид

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Теорема. Если функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно-зависимы, на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского на этом отрезке равен нулю.

Теорема. Если $y_1, y_2, \dots, y_n$ - линейно-независимые решения л.о.д.у. n -порядка на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке этого отрезка.

Определение. Совокупность линейно-независимых частных решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ л.о.д.у. n -го порядка называется фундаментальной системой решений (ф.с.р.) этого уравнения.

Терема (о структуре общего решения л.о.д.у. 2-го порядка).

Если частные решения y_1 и y_2 л.о.д.у. 2-го порядка $y'' + py' + qy = 0$ образуют ф.с.р., то общее решение этого уравнения имеет вид: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, где c_1, c_2 - произвольные постоянные.

Интегрирование л.о.д.у. 2-го и n -го порядков с постоянными коэффициентами

Рассмотрим л.о.д.у. 2 порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (2)$$

Определение. Уравнение, полученное заменой в л.о.д.у. производных функции y на число k в степени, равной порядку производной, а саму функцию единицей, называется характеристическим уравнением ($y'' \rightarrow k^2, y' \rightarrow k, y \rightarrow 1$).

Общий вид характеристического уравнения для л.о.д.у. 2 порядка

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (3)$$

Например, для уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$, характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 5k + 6 = 0$.

Теорема (о частном решении л.о.д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами).

Для того, чтобы функция $y = e^{k_0 x}$ была решением уравнения (2), необходимо и достаточно, чтобы k_0 было корнем характеристического уравнения (3).

Характеристическое уравнение (3) имеет два корня $k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

В зависимости от его коэффициентов возможны три случая:

Дискриминант $D = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$	Корни характеристического уравнения	ФСР уравнения (2)	Общее решение уравнения (2)
$D > 0$	$k_1 \neq k_2$ — действительные различные	$y_1(x) = e^{k_1 x}$ $y_2(x) = e^{k_2 x}$	$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$
$D = 0$	$k_1 = k_2 = k$ — действительный кратный	$y_1(x) = e^{kx}$ $y_2(x) = xe^{kx}$	$y = e^{kx} (c_1 + c_2 x)$
$D < 0$	$k_{1,2} = a \pm ib$ — пара комплексно сопряженных корней	$y_1(x) = e^{ax} \cos bx$ $y_2(x) = e^{ax} \sin bx$	$y = e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$

Примеры. Найти общее решение следующих уравнений

а) $y'' - 3y' + 2y = 0$,

б) $y'' + 4y' + 4y = 0$,

в) $-y'' + 6y' + 13y = 0$.

а) Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 3k + 2 = 0$.

Отсюда корни этого уравнения $k_1 = 2$, $k_2 = 1 \Rightarrow$

ФСР: $\begin{cases} y_1(x) = e^{2x} \\ y_2(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow$ Общее решение $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$.

б) Характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 4 = 0$

Корни: $k_1 = k_2 = -2$

ФСР: $y_1(x) = e^{-2x}$, $y_2(x) = xe^{-2x}$.

Общее решение: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$.

в) Характеристическое уравнение: $k^2 + 6k + 13 = 0$

Корни: $k_{1,2} = -3 \pm 2i$

ФСР: $y_1(x) = e^{-3x} \cos 2x$, $y_2(x) = e^{-3x} \sin 2x$

Общее решение: $y = c_1 e^{-3x} \cos 2x + c_2 e^{-3x} \sin 2x$.

Интегрирование л.о.д.у. n -порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим л.о.д.у. n -порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (4)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ действительные числа.

Теорема (о частных и общих решениях л.о.д.у. n -порядка).

Если $k_1, k_2, \dots, k_n$ – корни характеристического уравнения соответствующего уравнению (4)

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0, \text{ то}$$

1. Каждому простому действительному корню $k_i, (i = \overline{1, n})$ соответствует решение $y = e^{k_i x}$.

2. Каждой простой паре комплексных взаимно-сопряженных корней $\alpha \pm \beta i$ соответствует пара решений $e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $e^{\alpha x} \sin \beta x$.

3. Каждому действительному корню $k_i, (i = \overline{1, n})$ кратности r соответствует r решений $e^{k_i x}, x e^{k_i x}, \dots, x^{r-1} e^{k_i x}$.

4. Каждой паре комплексных взаимно-сопряженных корней $\alpha \pm \beta i$ кратности r соответствует $2r$ решений

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots$$

причем, все полученные решения являются линейно-независимыми.

Пример 1. Характеристическое уравнение имеет корни

$$k_1 = 1, k_2 = 2, k_{3,4} = 2 \pm 3i, k_{5,6} = 2 \pm 3i, k_{7,8} = 4 \pm i.$$

Записать общее решение.

Так как k_1, k_2, k_7, k_8 простые корни, то по указанной выше теореме их ФСР имеет вид

$$y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_7 = e^{4x} \cos x, y_8 = e^{4x} \sin x.$$

Корни $k_{3,4,5,6}$ взаимно сопряженные кратности 2, поэтому имеем

$$y_3 = e^{2x} \cos 3x, \quad y_5 = x e^{2x} \cos 3x$$

$$y_4 = e^{2x} \sin 3x, \quad y_6 = x e^{2x} \sin 3x.$$

Отсюда общее решение имеет вид

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4 + c_5 y_5 + c_6 y_6 + c_7 y_7 + c_8 y_8.$$

Пример 2. Решить уравнение $y^V - y^{IV} = 0$. Составляем характеристическое уравнение и решаем его

$$k^5 - k^4 = 0 \Rightarrow k^4(k-1) = 0 \Rightarrow k_{1,2,3,4} = 0, \quad k_5 = 1.$$

Отсюда ФСР:

$$y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2, y_4 = x^3, y_5 = e^x.$$

Общее решение

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 e^x.$$

Пример 3. Решить уравнение $y^V - 4y^{IV} + 4y''' = 0$.

Характеристическое уравнение:

$$k^5 - 4k^4 + 4k^3 = 0, \Rightarrow k^3(k^2 - 4k + 4) = 0.$$

Решение характеристического уравнения $k_{1,2,3} = 0, \quad k_{4,5} = 2.$

$$\text{ФСР: } y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2, y_4 = e^{2x}, y_5 = xe^{2x}.$$

Общее решение $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{2x} + c_5xe^{2x}.$

Пример 4. Решить уравнение $y^{IV} + 2y'' + y = 0.$

Характеристическое уравнение и его решение

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 0 \Rightarrow (k^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow (k + i)^2(k - i)^2 = 0.$$

Решение характеристического уравнения $k_{1,2} = \pm i, \quad k_{3,4} = \pm i.$

$$\text{ФСР: } y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x, \quad y_3 = x \cos x, \quad y_4 = x \sin x.$$

Общее решение $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x.$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Проинтегрировать дифференциальные уравнения

1. $y'' + 2y' - 3y = 0;$

Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}.$

2. $y'' + 4y' + 4y = 0;$

Ответ: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$

3. $y'' + 2y' + 2y = 0$

Ответ: $y = C_1 e^{-x} \cos(x) + C_2 e^{-x} \sin(x).$

Решить задачу Коши

1. $y'' + y' - 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2;$

Ответ: $y = \frac{4}{3} e^x - \frac{1}{3} e^{-2x}.$

2. $y'' - 4y' = 0, y(0) = -1, y'(0) = 1;$

Ответ: $y = \frac{1}{4} (e^{4x} - 5).$

3. $y'' + 6y' + 13y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Ответ: $y = \frac{1}{2} e^{-3x} \sin 2x.$

Самостоятельно

1. $y^{IV} - y = 0;$	2. $4y'' + 4y' + y = 0;$	3. $y^{IV} + 2y'' + y = 0;$
4. $y^V - 10y''' + 9y' = 0;$	5. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0;$	6. $4y'' - 8y' + 5y = 0;$
7. $y'' - 9y = 0;$	8. $y''' - 3y' + 2y = 0;$	9. $y^V - y^{IV} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0;$
10. $y'' - 2y' + y = 0;$	11. $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0;$	12. $y^V - 2y^{IV} + y''' = 0.$

Ответы:

1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin(x) + C_4 \cos(x);$

2) $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-\frac{x}{2}} x;$

3) $y = C_1 \cos(x) + C_2 x \cos(x) + C_3 \sin(x) + C_4 x \sin(x);$

4) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^x + C_4 e^{3x} + C_5;$

5) $y = C_1 e^x + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^x;$

6) $y = C_1 e^x \sin\left(\frac{x}{2}\right) + C_2 e^x \cos\left(\frac{x}{2}\right);$

$$7) y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x};$$

$$8) y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 x e^x;$$

$$9) y = C_1 \cos(x) + C_2 x \cos(x) + C_3 \sin(x) + C_4 x \sin(x) + C_5 e^x;$$

$$10) y = C_1 e^x + C_2 x e^x;$$

$$11) y = C_1 \cos(x) + C_2 \cos(x) + C_3 \cos(\sqrt{3}x) + C_4 \sin(\sqrt{3}x)$$

$$12) y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x + C_5 x e^x.$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ
«Интегрирование л.н.д.у. 2-го порядка с постоянными
коэффициентами и со специальной правой частью»

Такие уравнения имеют вид $y'' + py' + qy = f(x)$, а соответствующее им однородное – $y'' + py' + qy = 0$.

Здесь p и q – действительные числа,

$f(x)$ – заданная функция от x , непрерывная на $(a; b)$.

Теорема (о структуре общего решения л.н.д.у. 2-го порядка)

Общее решение л.н.д.у. 2-го порядка представляет собой сумму общего решения $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения, и какого-либо частного решения y^* неоднородного уравнения, т.е. $y = \bar{y} + y^*$.

Рассмотрим л.н.д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (5)$$

Его общее решение находим по формуле $y = \bar{y} + y^*$. Способ нахождения $\bar{y}$ мы уже рассматривали выше. Частное решение y^* можно найти при некоторых (специальных) видах правой части $f(x)$ уравнения (5)

Рассмотрим, специальные виды правой части $f(x)$:

1. $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$
2. $f(x) = e^{\alpha x} (P_k(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$.

Случай I. Пусть $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$,

где $P_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$ – многочлен степени n , α – любое действительное число.

Будем искать частное решение в виде:

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x).$$

Здесь $Q_n(x)$ – многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, но с неопределенными коэффициентами, а r – число, показывающее сколько раз число α встречается среди корней характеристического уравнения для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

1. Если α – не является корнем характеристического уравнения, то

$$y^* = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}.$$

2. Если α – простой корень уравнения, то $y^* = x \cdot Q_n(x) e^{\alpha x}$.

3. Если α – двукратный корень характеристического уравнения, то

$$y^* = x^2 Q_n(x) e^{\alpha x}.$$

Следствие. Если $f(x) = P_n(x)$, т.е. $\alpha = 0$, и

1. если $\alpha = 0$ не является корнем уравнения $k^2 + pk + q = 0$, то $y^* = Q_n(x)$,

2. если $\alpha = 0$ простой корень характеристического уравнения, то $y^* = xQ_n(x)$,

3. если $\alpha = 0$ – двукратный корень характеристического уравнения, то $y^* = x^2Q_n(x)$.

Пример. Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$y'' - 5y' + 6y = f(x)$ и запишем вид y^* , если

а) $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 4)$

б) $f(x) = e^{2x}(7x^3 + 2)$.

Решение. Найдем корни соответствующего характеристического уравнения $k^2 - 5k + 6 = 0$. $k_1 = 2$, $k_2 = 3$.

а) Число $\alpha = 1$, оно не входит в число корней, т.е.

$$y^* = P_2(x)e^x = (ax^2 + bx + c)e^x.$$

б) число $\alpha = 2$, оно входит в число корней один раз, т.е.

$$y^* = x \cdot P_3(x)e^{2x} = xe^{2x}(ax^3 + bx^2 + cx + d).$$

Случай II. Пусть $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x)$.

Здесь $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степеней соответственно n и m .

В этом случае решение будем искать в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(M_s(x)\cos \beta x + N_s(x)\sin \beta x),$$

где r означает, сколько раз пара комплексно сопряженных чисел $(\alpha \pm \beta i)$ встречается среди корней соответствующего характеристического уравнения, $S = \max(n, m)$, $M_s(x)$ и $N_s(x)$ – многочлены степени S .

Пример. Запишем вид y^* для

$$y'' - 6y' + 13y = e^{3x}(x \cos 2x + x^2 \sin 2x).$$

В нашем случае $\alpha \pm \beta i = 3 \pm 2i$.

Находим корни соответствующего характеристического уравнения $k^2 - 6k + 13 = 0$, $k_{1,2} = 3 \pm 2i$.

Так как $(3 \pm 2i)$ входит один раз в число корней, то $r = 1$.

$$S = \max\{1, 2\} = 2.$$

Отсюда

$$y^* = xe^{3x}(M_2(x)\cos 2x + N_2(x)\sin 2x).$$

Рассматривая первый случай, когда $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$, мы замечаем, что он является частным случаем рассмотренного. Действительно, если положить во втором случае $\beta = 0$, то получим

$$f(x) = e^{\alpha x}P_n(x).$$

Поэтому, объединяя оба случая, можем составить следующий план записи вида частного решения y^* по специальной правой части.

1. Записываем число $\alpha + \beta i$, где α – коэффициент показателя экспоненты, β – коэффициент аргумента косинуса и синуса.
2. Находим корни характеристического уравнения.
3. Выясняем, сколько раз число $\alpha + \beta i$ (а значит, и $\alpha - \beta i$) встретилось среди корней, получаем значение r .
4. Отыскиваем наивысшую степень многочленов входящих в правую часть уравнения $S = \max\{m, n\}$.
5. Записываем y^*

$$y^* = x^r e^{\alpha x} (M_S(x) \cos \beta x + N_S(x) \sin \beta x).$$

Пример. Записать y^* .

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x} (3x - 4).$$

1. Записываем число $\alpha + \beta i = 3$.
2. Решаем уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$, $k_1 = k_2 = 3$.
3. Число $\alpha + \beta i = 3$ входит в число корней ровно 2 раза.
4. Наивысшая степень $S = 1$.
5. $y^* = x^2 e^{3x} P_n(x) = x^2 e^{3x} (ax + b)$.

Нами получен метод записи общего вида y^* для уравнений со специальной правой частью. Для того чтобы найти коэффициенты многочленов, необходимо воспользоваться методом неопределенных коэффициентов.

Суть этого метода: полученное y^* подставляют в исходное уравнение и приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной.

Пример. Найти y^* для

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x} (x + 4).$$

Запишем сначала y^*

1. $\alpha + \beta i$.
2. $k^2 - 5k + 6 = 0$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$.
3. $r = 1$.
4. $S = 1$.
5. $y^* = x e^{2x} (ax + b)$.

Найдем производные y^* и подставим в уравнение

$$\begin{array}{l|l} 6 & y^* = e^{2x} (ax^2 + bx) \\ -5 & y^{*'} = e^{2x} (2ax^2 + 2bx + 2ax + b) \\ 1 & y^{*''} = e^{2x} (4ax^2 + 4bx + 4ax + 2b + 4ax + 2b + 2a) \end{array}.$$

Умножим каждое значение на соответствующий коэффициент уравнения, входящего в данное уравнение. Учитывая, что e^{2x} входит в каждый сомножитель в каждую часть, поэтому, на него внимания обращать не будем, а сразу будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 4a - 10a + 6a = 0 \quad 0 = 0 \\ x & 4b + 4a + 4a - 10b - 10a + 6b = 1, \quad -2a = 1 \\ x^0 & 2b + 2b + 2a - 5b = 4 \quad 2a - b = 4 \end{array}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -5 \end{cases}$$

Следовательно

$$y^* = e^{2x} x \left(-\frac{1}{2} x - 5 \right).$$

Пример 2. $y'' + 4y' = x^2 + 2x - 1$.

Запишем y^* .

1. $\alpha + \beta i = 0$.
2. $k^2 + 4k = 0, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = -4$.
3. $r = 1$.
4. $S = 2$
5. $y^* = x(ax^2 + bx + c)$.

Найдем коэффициенты y^* .

$$\begin{array}{l|l} 0 & y^* = ax^3 + bx^2 + c \\ 4 & y^{*'} = 3ax^2 + 2bx + c \\ 1 & y^{*''} = 6ax + 2b \\ & 0 = 0 \\ x^3 & 12a = 1, \quad a = \frac{1}{12} \\ x^2 & 6a + 8b = 2, \quad b = \frac{3}{16} \\ x & 2b + 4c = 1, \quad c = -\frac{11}{32} \\ x^0 & \end{array}$$

Отсюда

$$y^* = \frac{1}{12} x^3 + \frac{3}{16} x^2 - \frac{11}{32} x,$$

Тогда

$$y = c_1 e^{-4x} + c_2 + \frac{1}{12} x^3 + \frac{3}{16} x^2 - \frac{11}{32} x.$$

Пример 3. $y'' + 4y = 3 \cos 2x$.

Запишем y^*

1. $\alpha + \beta i = 2i$.
2. $k^2 + 4 = 0, \quad k_{1,2} = \pm 2i$.
3. $r = 1$.
4. $S = 0$.
5. $y^* = x(a \cos 2x + b \sin 2x)$.

$$\begin{array}{l|l} & y^* = x(a \cos 2x + b \sin 2x) \\ 4 & y^{*'} = a \cos 2x + b \sin 2x + x(-2a \sin 2x + 2b \cos 2x) \\ 0 & \\ 1 & y^{*''} = -2a \sin 2x + 2b \cos 2x - 2a \sin 2x + 2b \cos 2x + x(-4a \cos 2x - 4b \sin 2x) \end{array}.$$

$$\begin{cases} 2b + 2b - 4ax + 4ax = 3 \\ -2a - 2a - 4bx + 4bx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} \cos 2x & \begin{cases} 4b = 3 & b = \frac{3}{4} \\ -4a = 0 & a = 0 \end{cases} \\ \sin 2x & \end{array}$$

$$y^* = \frac{3}{4} x \sin 2x.$$

Отсюда

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{3}{4} x \sin 2x.$$

Интегрирование л.н.д.у. n -порядка со специальной правой частью.

Пусть задано уравнение n -го порядка

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где $f(x)$ – функция вида

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x),$$

или

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_k(x) \sin \beta x).$$

Требуется записать общий вид y^* , а затем найти коэффициенты. Учитывая, что первый случай является частным случаем второго, при $\beta = 0$, поэтому, сформулируем правило записи y^* для общего случая.

1. Записываем число $\alpha + \beta i$.
2. Решаем характеристическое уравнение. Пусть его корни будут $k_1, k_2, \dots, k_n$.
3. Подсчитываем, сколько раз число $\alpha + \beta i$ встретилось среди корней соответствующего характеристического уравнения, пусть это число будет r .
4. Находим число $S = \max\{n, k\}$.
5. Записываем y^*

$$y^* = e^{\alpha x} \cdot x^r (M_S(x) \cos \beta x + N_S(x) \sin \beta x),$$

если $\beta = 0$, то

$$y^* = t^{\alpha x} \cdot x^r \cdot M_n(x),$$

если $\beta = 0, \alpha = 0$, то $y^* = x^r M_n(x)$.

Пример 1. $y^{IV} - y'' + 4y = x^2 - 5x + 1$.

1. $\alpha + \beta i = 0$.
2. $k^4 - 5k^2 + 4 = 0$.
 $k^2 = 4, \quad k^2 = 1$
 $k_{1,2} = \pm 2, \quad k_{3,4} = \pm 1$.
3. $r = 0$.
4. $S = 2$.
5. $y^* = Ax^2 + Bx + C$.

Найдем коэффициенты A, B, C . Для этого y^* продифференцируем четыре раза и подставим в уравнение.

$$\begin{array}{l|l}
 4 & y^* = Ax^2 + Bx + C \\
 0 & y^{*'} = 2Ax + B \\
 -5 & y^{*''} = 2A \\
 0 & y^{*'''} = 0 \\
 1 & y^{*IV} = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
 & 4A = 1 \quad A = \frac{1}{4} \\
 x^2 & 4B = -5 \quad B = -\frac{5}{4} \\
 x & -10A + 4C = 1 \quad C = \frac{7}{8} \\
 x^0 & y^* = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}
 \end{array}$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}.$$

Пример 2. $y^{IV} - 4y''' = x - 1$.

1. $\alpha + \beta i = 0$.
2. $k^4 - 4k^3 = 0$. $k_{1,2,3} = 0, \quad k_4 = 4$.
3. $r = 3$.
4. $S = 1$.
5. $y^* = x^3(Ax + B)$.

$$\begin{array}{l|l}
 & y^* = x^3(Ax + B) \\
 0 & y^* = Ax^4 + Bx^3 \\
 0 & y^{*'} = 4Ax^3 + 3Bx^2 \\
 0 & y^{*''} = 12Ax^2 + 6Bx \\
 -4 & y^{*'''} = 24Ax + 6B \\
 1 & y^{*IV} = 24A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
 x & -24A = 1, \quad A = -\frac{1}{24} \\
 x^0 & -24B - 24A = -1, \quad B = 0
 \end{array}$$

$$y^* = x^3 \left(-\frac{1}{24} x \right) = -\frac{1}{24} x^4$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{4x} - \frac{1}{24} x^4.$$

Пример 3. $y''' + y = 5 \cos x + 7 \sin x$.

1. $\alpha + \beta i = i$.

2. $k^3 + 1 = 0, \quad k_1 = -1, \quad k_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

3. $r = 0$.

4. $S = \max\{0, 0\} = 0$.

5. $y^* = A \cos x + B \sin x$.

$$\begin{array}{l|l} 1 & y^* = A \cos x + B \sin x \\ 0 & y^{*'} = -A \sin x + B \cos x \\ 0 & y^{*''} = -A \cos x - B \sin x \\ 1 & y^{*'''} = A \sin x - B \cos x \end{array}.$$

$$\begin{array}{l} \cos x \\ \sin x \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -B + A = 5 \\ A + B = 7 \end{array} \right.$$

$$A = 6$$

$$B = 1$$

$$y^* = 6 \cos x + \sin x$$

Теорема о наложении решений.

Теорема. Если правая часть л.н.д.у. есть сумма двух функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, то частное решение уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f_1(x) + f_2(x),$$

равно сумме частных решений уравнений

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f_1(x),$$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f_2(x).$$

Замечание. Если $f_1(x)$, $f_2(x)$ – функции специального вида, то для нахождения y^* необходимо применять план записи y^* для каждой функции.

Пример. Найти частное решение уравнения $y'' + 3y' + 2y = x + 3e^x$.

Это уравнение распадается на два

$$y'' + 3y' + 2y = x$$

$$y'' + 3y' + 2y = 3e^x.$$

Находим y^* для каждого уравнения:

$$y'' + 3y' + 2y = x$$

1. $\alpha + \beta i = 0$.

$$y'' + 3y' + 2y = 3e^x$$

1. $\alpha + \beta i = 1$.

$$2. k^2 + 3k + 2 = 0, \quad k_1 = -2, \quad k_2 = -1.$$

$$3. r = 0.$$

$$4. S = 1.$$

$$5. y_1^* = Ax + B.$$

$$\begin{array}{l} 2 \left| y_1^* = Ax + B \right. \\ 3 \left| y_1^{*'} = A \right. \\ 1 \left| y_1^{*''} = 0 \right. \end{array}.$$

$$2. k_1 = -2, \quad k_2 = -1.$$

$$3. r = 0.$$

$$4. S = 0.$$

$$5. y_2^* = ce^x.$$

$$\begin{array}{l} 2 \left| y^* = ce^x \right. \\ 3 \left| y^{*'} = ce^x \right. \\ 1 \left| y^{*''} = ce^x \right. \end{array}.$$

$$\begin{array}{l} x' \left| 2A = 1, \quad A = \frac{1}{2} \right. \\ x^0 \left| 2B + 3A = 0 \quad B = -\frac{3}{4} \right. \end{array}.$$

$$x^0 \left| c + 3c + 2c = 3 \right.$$

$$6c = 3 \Rightarrow c = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, получим

$$y^* = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}e^x.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

I. Определить и записать структуру частного решения y^* линейного неоднородного дифференциального уравнения по виду функции $f(x)$.

$$1) y'' - 4y' + 3y = 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 2;$$

$$2) y^{IV} + y''' = 3x^3 + 4x - 1;$$

$$3) y'' - 3y' + 4y = e^{2x}(x^2 - 1);$$

$$4) y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(3x^2 + 5x - 1);$$

$$5) y'' - 5y' + 4y = e^{4x}(x^3 + x^2 + 1).$$

$$6) 3y'' - 7y' + 2y = (3x^2 + 5)\sin 2x - (x - 2)\cos 2x;$$

$$7) 2y'' - 7y' + 3y = \cos 3x;$$

$$8) y'' + 9y = (5x^3 - 3x^2 + 1)\cos 3x + (4x - 1)\sin 3x;$$

$$9) y'' + 4y' + 13y = e^{-2x}((x^2 + 5x - 2)\cos 3x - (5x^3 - 1)\sin 3x).$$

II. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$1) y^{IV} - 5y''' + 6y'' = 72x^2 - 120x + 36;$$

$$2) y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(6x - 2);$$

$$3) y^V - 3y''' = 180x^2 - 72x - 96;$$

$$4) y'' - 2y' + y = e^x(12x - 4)$$

$$5) y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x}\cos 2x. \quad (\text{Ответ: } y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{-x}\cos 2x).$$

$$6) y'' - 2y' - 8y = 12\sin 2x - 36\cos 2x. \quad (\text{Ответ: } y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} + \cos 2x).$$

7) $y'' + y = 2 \cos x - (4x + 4) \sin x$. (Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (x^2 + 2x) \cos x$).

8) $y'' - 3y' + 2y = 3 \cos x + 19 \sin x$. (Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 6 \cos x + \sin x$).

9) $y'' - 5y' - 6y = 3 \cos x + 19 \sin x$. (Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{6x} + \cos x - 2 \sin x$).

10) $y'' + y = -4 \cos x - 2 \sin x$. (Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(\cos x - 2 \sin x)$).

III. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям.

1) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

(Ответ: $y = 4(e^x - e^{2x}) + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^{3x}$).

2) $y''' - y' = -2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = y''(0) = 2$.

(Ответ: $y = e^x - e^{-x} + x^2$).

3) $y^{IV} - y = 8e^x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$.

(Ответ: $y = 2xe^x - 3e^x + e^{-x} + \cos x + 2 \sin x$).

4) $y'' - 2y' = 2e^x$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.

(Ответ: $y = e^{2x-1} - 2e^x + e + 1$).

5) $y'' + 4y = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{\pi}{2}$.

(Ответ: $y = \frac{1}{4}x + \cos 2x + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}\right) \sin 2x$).

6) $y'' - 2y' + y = -12 \cos 2x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.

(Ответ: $y = -2e^x - 4xe^x + 3 \sin 2x$).

7) $y'' + 6y = e^x(\cos 4x - 8 \sin 4x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.

Ответ: $y = \sin 4x - \cos 4x + e^x \cos 4x$.

8) $y'' - 9y' + 18y = 26 \cos x - 8 \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

(Ответ: $y = 2e^{6x} - 3e^{3x} - \sin x + \cos x$).

IV. Определить вид частного решения уравнений:

1) $y'' - y = x + e^x$; 2) $y''' + y' = x \cos^2 x$; 3) $y'' - y = \cos x + \sin 2x$.

V. Найти решения уравнений:

1) $y'' - 3y' + 2y = 5 + e^x$;

(Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - xe^x + \frac{5}{2}$).

2) $y'' + 4y = x \sin^2 x$.

(Ответ: $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) - \frac{1}{16}x^2 \sin(2x) + \frac{x}{8} - \frac{1}{32}x \cos(2x)$).

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ «Интегрирование л.н.д.у. методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)»

Пусть задано линейное неоднородное уравнение второго порядка

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad (6)$$

где функции $a_1(x)$, $a_2(x)$ и правая часть $f(x)$ есть функции, непрерывные в некотором интервале (a, b) .

И пусть известна ф.с.р. $y_1(x)$, $y_2(x)$ соответствующего ему однородного уравнения

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \quad (7)$$

Тогда общее решение однородного уравнения (7) $\bar{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2$ (c_1, c_2 – постоянные). Частное решение л.н.д.у. (6) будем искать в такой же форме, что и общее решение соответствующего однородного, заменив постоянные c_1, c_2 на функции $c_1(x), c_2(x)$, т.е.

$$y^* = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2. \quad (8)$$

Так как y^* – содержит две неизвестные функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$, то для их определения необходимы два условия, причем одно условие можно выбрать произвольно, тогда второе будет получено в зависимости от нашего произвольного выбора, но таким образом, чтобы y удовлетворяло исходному уравнению.

Для этого, продифференцируем y^* . Имеем

$$y^{*'} = c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x).$$

Будем искать такое решение, чтобы

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0,$$

т.е. $y^{*'} = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x).$

Отсюда

$$y^{*''} = c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_2(x)y_2''(x).$$

Подставим полученные значения $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ в исходное уравнение (6)

$$\begin{aligned} & c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_2(x)y_2''(x) + \\ & + a_1(x)c_1(x)y_1'(x) + a_1(x)c_2(x)y_2'(x) + \\ & + a_2(x)c_1(x)y_1(x) + a_2(x)c_2(x)y_2(x) = f(x) \end{aligned}$$

Сгруппируем относительно $c_1(x)$ и $c_2(x)$.

$$\begin{aligned} & c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \\ & + c_1(x)(y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x)) + \\ & + c_2(x)(y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x)) = f(x) \end{aligned}$$

Но $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – частные решения л.о.д.у., поэтому, выражения в скобках равны нулю. Отсюда получаем второе условие

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Таким образом, для определения коэффициентов $c_1(x)$ и $c_2(x)$ получили систему

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}.$$

Данная система имеет единственное решение, так как ее главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

есть определитель Вронского, который не равен нулю, так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно-независимые решения л.о.д.у (7).

По формулам Крамера

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\Delta} = \varphi_1(x); \quad c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}}{\Delta} = \varphi_2(x).$$

После интегрирования, получим

$$c_1(x) = \int \varphi_1(x) + c_1^*; \quad c_2(x) = \int \varphi_2(x) + c_2^*$$

Так как y^* – частное решение уравнения, то постоянные интегрирования c_1^* и c_2^* можно положить равными нулю.

Подставляем найденные $c_1(x)$ и $c_2(x)$ в (8), имеем

$$y^* = y_1(x) \cdot \int \varphi_1(x) + y_2(x) \cdot \int \varphi_2(x).$$

И общее решение уравнения (6)

$$y = \bar{y} + y^* = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_1(x) \cdot \int \varphi_1(x) + y_2(x) \cdot \int \varphi_2(x),$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные. Окончательно,

$$y = y_1(x) \cdot \left(c_1 + \int \varphi_1(x) \right) + y_2(x) \cdot \left(c_2 + \int \varphi_2(x) \right)$$

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 8y' + 16y = \frac{e^{4x} \ln x}{x}.$$

Находим общее решение соответствующего л.о.д.у. $y'' - 8y' + 16y = 0$.

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$k^2 - 8k + 16 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 4.$$

Ф.с.р. $y_1 = e^{4x}$, $y_2 = xe^{4x}$

Общее решение л.о.д.у. $\bar{y} = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$

Ищем общее решение данного д.у. в виде $y = c_1(x) e^{4x} + c_2(x) x e^{4x}$.

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1' e^{4x} + c_2' x e^{4x} = 0 \\ 4c_1' e^{4x} + c_2' (e^{4x} + 4x e^{4x}) = \frac{e^{4x} \ln x}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1' + c_2' x = 0 \\ 4c_1' + c_2' (1 + 4x) = \frac{\ln x}{x} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 4 & 1+4x \end{vmatrix} = 1+4x-4x=1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \frac{\ln x}{x} & 1+4x \end{vmatrix} = -\ln x, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & \ln x \end{vmatrix} = \ln x.$$

$$c_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \ln x \Rightarrow c_1 = x \ln x - x$$

$$c_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow c_2 = \ln |\ln x|.$$

Отсюда

$$y = (x \ln x - x + c_1) e^{4x} + (\ln \ln x + c_2) x e^{4x}.$$

Пусть задано л.н.д.у. 3 порядка $y''' + py'' + qy' + ry = f(x)$.

Рассуждая аналогично, будем искать решение в виде

$$y = (c_1(x) + c_1) y_1 + (c_2(x) + c_2) y_2 + (c_3(x) + c_3) y_3,$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

В этом случае необходимо три условия для определения функций $c_1(x), c_2(x), c_3(x)$, два из них выберем произвольно, а третье получим. В этом случае будем иметь систему трех уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) + c_3'(x) y_3(x) = 0 \\ c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) + c_3'(x) y_3'(x) = 0 \\ c_1'(x) y_1''(x) + c_2'(x) y_2''(x) + c_3'(x) y_3''(x) = f(x) \end{cases},$$

которая так же будет иметь единственное решение.

Пример. Решить $y''' + y' = \operatorname{tg} x$.

Решение у равнения ищем в виде $y = \bar{y} + y^*$.

Л.о.д.у. $y''' + y' = 0$

Характеристическое уравнение $k^3 + k = 0 \Rightarrow k_1 = 0, \quad k_{2,3} = \pm i$.

Таким образом

$$\bar{y} = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x.$$

Отсюда общее решение будет иметь вид

$$y^* = c_1(x) + c_2(x) \cos x + c_3(x) \sin x.$$

Запишем систему

$$\begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x) \cos x + c_3'(x) \sin x = 0 \\ -c_2'(x) \sin x + c_3'(x) \cos x = 0 \\ -c_2'(x) \cos x - c_3'(x) \sin x = \operatorname{tg} x \end{cases}.$$

Решая эту систему, получаем

$$c_1'(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow c_1(x) = -\ln \cos x + \overline{c_1}$$

$$c_2'(x) = -\sin x \Rightarrow c_2(x) = \cos x + \overline{c_2}$$

$$c_3'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} \Rightarrow c_3(x) = -\ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \sin x + \overline{c_3}.$$

Отсюда

$$y = (-\ln \cos x + c_1) + (\cos x + c_2) \cos x + \left(-\ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \sin x + c_3 \right) \sin x.$$

Аналогично рассуждая, можно получить систему n -уравнений для л.н.д.у. n порядка.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных.

$$1) \quad y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

$$(\text{Ответ: } y = \left(-\frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) + C_1 \right) e^{-x} + \left(\frac{1}{2} \ln \frac{e^x}{e^x + 1} C_2 \right) e^x).$$

$$2) \quad y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

$$(\text{Ответ: } y = \left(\frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + C_2 \right) \cos 2x + \left(\frac{1}{2} x + C_2 \right) \sin 2x).$$

$$3) \quad y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

$$(\text{Ответ: } y = (\ln |\cos x| + C_1) e^{2x} \cos x + (x + C_2) e^{2x} \sin x).$$

$$4) \quad y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \operatorname{ctg} x.$$

$$(\text{Ответ: } y = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + e^{-x} \sin x \cdot \ln |\operatorname{tg}(x/2)|).$$

$$5) \quad y'' - 2y' + 2y = e^x / \sin x.$$

$$(\text{Ответ: } y = (-x + C_1) e^x \cos x + (\ln |\sin x| + C_2) e^x \sin x).$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

Обыкновенные д.у. высших порядков.

Вариант №1.

1. $xy'' + y' = 0$
2. $y^2 + y'^2 - 2yy'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
3. $y'' + 4y' - 5y = (16 - 12x)e^{-x}$
4. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$
5. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

Вариант №3.

1. $(1 + e^x)y'' + y' = 0$
2. $3y'^2 + 2yy'' = 4y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
3. $y''' - y'' - y' - y = (7 + 3x)e^{2x}$
4. $y'' - 4y' + 4y = e^{-2x} \sin 6x$
5. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$.

Вариант №5.

1. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$
2. $y'(y-1) - y'^2 + y'' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$
3. $y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}$
4. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$
5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

Вариант №7.

1. $(1 + x)y'' - (x + 2)y' + x + 2 = 0$
2. $y'^2 + yy'' = y'^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
3. $y''' - 4y'' + 4y' = (x - 1)e^x$
4. $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$
5. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \ln x$.

Вариант №9.

1. $xy''' + y'' = x + 1$
2. $y'^2 - y'' = y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
3. $y''' + y'' - y' - y = (8x + 4)e^x$
4. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 4x$
5. $y'' + y = \operatorname{ctgx}$.

Вариант №2.

1. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$
2. $y^3 y'' = 1$, $y(\frac{1}{2}) = y'(\frac{1}{2}) = 1$
3. $y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^x$
4. $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$
5. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

Вариант №4.

1. $x^2 y'' + xy' = 1$
2. $y^2 - y'^2 + 2yy'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
3. $y''' - 2y'' + y' = (5 + 2x)e^{2x}$
4. $y'' + y = 3\sin 7x + 2\cos 7x$
5. $y'' + y'' = \frac{1}{1 + e^x}$.

Вариант №6.

1. $y'' = -\frac{x}{y}$
2. $y'^2 + yy'' = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
3. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^x$
4. $y'' - 4y' + 8y = e^x(5\sin x - 3\cos x)$
5. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.

Вариант №8.

1. $xy'' - y' \ln \frac{y'}{x} = 0$
2. $1 + y'^2 - 2yy'' = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$
3. $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^x$
4. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x$
5. $y'' - y' = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

Вариант №10.

1. $(1 + x)y'' - 2xy' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$
2. $(y - 1)y'' = 2y'^2$
3. $y''' - 3y'' - 2y = -4xe^x$
4. $y'' + y = -3\sin 3x + 2\cos 3x$
5. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

Вариант №11.

1. $xy'' = y'$, $y(1)=1$, $y'(1)=1$
2. $yy'' - y'(1+y') = 0$
3. $y''' - 3y'' + 2y = (4x+9)e^{2x}$
4. $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$
5. $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$.

Вариант №13.

1. $(1+\ln x)y'' + \frac{1}{x}y' = 2 + \ln x$, $y(1)=0,5$, $y'(1)=1$
2. $y'' = 1 - y'^2$
3. $y''' - y'' - 2y' = (6x-11)e^{-x}$
4. $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$
5. $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{\sqrt{9-x^2}}$.

Вариант №15.

1. $(x-1)y''' = y''$
2. $yy'' + y'^2 = 0$
3. $y''' + 4y'' + 4y' = (9x+15)e^x$
4. $y'' + y = 2\sin 5x + 2\cos 5x$
5. $y'' + 8y' + 16y = \frac{e^{-4x}}{1+x^2}$.

Вариант №17.

1. $x^3y'' + x^2y' = 1$, $y(1)=1$, $y'(1)=0$
2. $y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}$
3. $y''' + y'' + 4y' + 4y = (7-6x)e^x$
4. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos x$
5. $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$.

Вариант №19.

1. $y''x \ln x = y'$
2. $y^4 - y^3y'' = 1$, $y(0)=\sqrt{2}$, $y'(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20-16x)e^{-x}$
4. $y'' + 2y' = 6e^x(\sin x + \cos x)$
5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 4}$.

Вариант №12.

1. $xy'' + y' + x = 0$, $y(1)=0$, $y'(1)=3$
2. $y'' = -\frac{1}{2y^3}$
3. $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x+16)e^x$
4. $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3\sin x + 4\cos x)$
5. $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{\sqrt{9-x^2}}$.

Вариант №14.

1. $(x+1)y'' + xy'^2 = y'$, $y(1)=-2$, $y'(1)=4$
2. $yy'' = y'^2$
3. $y''' + y'' - 2y' = (6x+5)e^{-x}$
4. $y'' - 4y' + 4y = \sin 5x$
5. $y'' + 16y = \frac{1}{\sin 4x}$.

Вариант №16.

1. $(1-x^2)y'' = 2xy' - 2$
2. $yy'' - y'^2 = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$
3. $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4-8x)e^x$
4. $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$
5. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$.

Вариант №18.

1. $y'' + y'tgx = \sin 2x$
2. $2y'' = 3y^2$, $y(-2)=1$, $y'(-2)=-1$
3. $y''' + 3y'' + 2y' = (1-2x)e^{-x}$
4. $y'' - 4y' + 8y = e^x(3\sin x + 5\cos x)$
5. $y'' + y = \operatorname{ctg}^2 x$.

Вариант №20.

1. $xy'' - y' = e^x x^2$
2. $y'' = e^{2y}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$
3. $y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^x$
4. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 4x$
5. $y'' - y' = \frac{e^x}{9+e^x}$.

Вариант №21.

1. $y'' + 2xy'^2 = 0$
2. $y^3 y'' = -1, y(1) = 1, y'(1) = 0$
3. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = (32x - 32)e^x$
4. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 5x$
5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{7 + x^2}.$

Вариант №23.

1. $(x - 3)y'' + y' = 0$
2. $yy'' - y'^2 = y^2, y(0) = 1, y'(0) = 0$
3. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8 - 12x)e^x$
4. $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$
5. $y'' - 3y' + y = \frac{e^x}{x^7}.$

Вариант №25.

1. $xy'' - y' = 0$
2. $yy'' - y'^2 = y^4, y(0) = 1, y'(0) = 0$
3. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$
4. $y'' + 2y' = 3e^x (\sin x + \cos x)$
5. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^2}.$

Вариант №27.

1. $y'' = \frac{y'}{x} + x, y(1) = 0, y'(1) = 0$
2. $y^3 y'' + 1 = 0$
3. $y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^x$
4. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 8x$
5. $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x.$

Вариант №29.

1. $(x^2 + 1)y'' = 2xy', y(0) = 1, y'(0) = 3$
2. $y'' = \frac{6}{y^3}$
3. $y''' - y'' - 9y' + 9y = 12e^x$
4. $y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x$
5. $y'' + 25y = \frac{1}{\cos 5x}.$

Вариант №22.

1. $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$
2. $1 + yy'' + y'^2 = 0, y(1) = 1, y'(1) = 1$
3. $y''' - 3y'' + 9y' = 4xe^x$
4. $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x$
5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{(1 + x)^3}.$

Вариант №24.

1. $x(y'' + 1) + y' = 0$
2. $\frac{y''}{y'} = \frac{2yy'}{1 + y^2}, y(0) = 0, y'(0) = 1$
3. $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(4 + 8x)e^x$
4. $y'' - 4y' + 8y = e^x (2\sin x - \cos x)$
5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}.$

Вариант №26.

1. $y'' = y' + x, y(0) = 0, y'(0) = 0$
2. $y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$
3. $y''' - 2y'' - 3y' = (8x - 14)e^{-x}$
4. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 4x$
5. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{5 + x^2}.$

Вариант №28.

1. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$
2. $y'' = \sqrt{1 - y'^2}$
3. $y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)e^x$
4. $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$
5. $y'' + y = \sin^3 x.$

Вариант №30.

1. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}, y(2) = 0, y'(2) = 4$
2. $y''(2y + 3) = 2y'^2$
3. $y''' + 2y'' + 4y' = 4(1 - x)e^{-x}$
4. $y'' - 4y' + 8y = -\sin x + 2\cos x$
5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{7 - x^2}.$

Вариант №31.

1. $x^2 y'' = y'^2, y(1) = 1, y'(1) = 1$
2. $y'' = 2yy'$
3. $y^{IV} + 4y''' - 5y'' = 20x + 14$
4. $y'' - 4y' + 4y = 8\sin 6x$
5. $y'' + 2y = \frac{1}{\cos(x\sqrt{2})}$.

Вариант №33.

1. $y^{IV} = \sin x$
2. $y'' - \frac{1}{\sqrt{y}} = 0$
3. $y'' + 2y' - 3y = 4e^{-x}$
4. $y'' + y' = 5\sin 2x$
5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.

Вариант №35.

1. $y''' = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$
2. $y'' - 5y' = 0$
3. $y'' + 4y' + 4y = 5e^{-2x}$
4. $y'' - 2y' + 10y = x\cos 2x$
5. $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}$.

Вариант №32.

1. $y'' = -\frac{2}{3x}$
2. $y'' = \frac{1}{2}(1 + y'^2), y(0) = 0, y'(0) = 0$
3. $y'' + y' + y = 3e^{2x}$
4. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$
5. $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$.

Вариант №34.

1. $y^{IV} = e^{2x}$
2. $xy'' + y' = 0$
3. $y'' - 4y' = 2e^{4x}$
4. $y'' + 2y' + 5y = 4\sin x + 2\cos x$
5. $y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1972. – Т.П.
2. *Бермант А.Ф.* Краткий курс математического анализа. – М.: Физматгиз, 1961.
3. *Фролов С.В., Шостак Р.Н.* Курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1966.
4. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.: ил. – (Высшее образование).
5. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. – М.: Наука, 1967. – Т. 2.
6. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальные уравнения. Кратные Интегралы. Функция комплексного переменного. – М.: Наука, 1981.
7. *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.
8. *Демидович Б. П., Моденов В. П.* Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. 3-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2008. — 288 с: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-0677-7
9. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1972.
10. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике. – Харьков: ХГУ, 1967.
11. *С.А. Агафонов, А.Д. Герман, Т.В. Муратова* Дифференциальные уравнения. - МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. - 348 с. - (Математика в техническом университете).

В авторской редакции