

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.И. Бохонский, А.И. Рыжков

МАТЕМАТИКА В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

**Методические указания
по выполнению самостоятельных работ**

Севастополь
СевГУ
2023

УДК 51-72:531.8(076.1)

ББК 22.21я73

Б863

Р е ц е н з е н т:

А.М. Поляков - канд. техн. наук, доцент,
доцент кафедры «Цифровое проектирование»

Бохонский, А. И.

Б863 Математика в курсе теоретической механики: методические указания по выполнению самостоятельных работ / А.И. Бохонский, А.И. Рыжков; Севастопольский государственный университет. – Севастополь: СевГУ, 2023. – 28 с.

В методических указаниях представлены темы применения элементарной и высшей математики в курсе теоретической механики, которые необходимы для подготовки:

- к тестам по заданным темам;
- выполнения РГР и контрольных работ;
- сдачи экзамена;
- сдачи зачета.

Подобраны задачи для самостоятельной работы.

Методические указания предназначены для студентов дневной и заочной форм обучения всех направлений подготовки и специальностей.

УДК 51-72:531.8(076.1)

ББК 22.21я73

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Цифровое проектирование», протокол № 6 от 27 февраля 2023 г.

В авторской редакции

Изд. № 45/2023. Объем 1,75 п.л. Усл. печ. л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,715.
РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Введение	5
1. Тригонометрия.....	6
2. Векторное исчисление.....	8
3. Функция	13
4. Дифференциальное исчисление.....	15
5. Интеграл.....	19
6. Дифференциальные уравнения.....	21
Заключение	26
Литература.....	27
Приложение	28

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математика как наука не нуждается в «современной» рекламе, тем не менее, воспользуемся случаем, чтобы обратить внимание любознательного Студента на математику как эффективный инструмент инженера, на ее непосредственно применение в теоретической механике.

А. Эйнштейн писал: «Настоящее творческое мышление присуще именно математике». Применение математики безусловно способствует интенсивному развитию интеллекта (лат. *intelligo* – понимаю), умению рассуждать логически, что является самым замечательным достоянием человека, чем бы он не занимался в жизни. Интеллект студента развивается при изучении истории возникновения фундаментальных знаний о Природе, доказательств теорем и, наконец, при решении задач по математике, физике, теоретической и прикладной механике, информатике и многим другим дисциплинам.

Краткая методическая разработка должна помочь студентам ***в применении математики непосредственно в теоретической механике*** – при создании математических образов механических объектов и процессов, в решении интересных и увлекательных задач статики, кинематики и динамики. Прежде всего, речь идет о студентах средних способностей, которые в результате упорного труда могут и должны не только развить способности, быть успешными, полезными себе и обществу, но и превзойти весьма способных, но ленивых.

Здесь следует напомнить, что чрезмерное сокращение и упрощение курсов по фундаментальным дисциплинам может привести к утрате профессиональной перспективы даже для очень одаренных студентов.

Предлагаемая методическая разработка иллюстрируется характерными достаточно простыми, но крайне необходимыми примерами из чистой математики и теоретической механики, призванных исключить у студентов комплекс боязни в изучении теоретической механики и, особенно, при решении задач. В краткой методической работе не удастся охватить приложения многих разделов математики к механике, но выполненная работа заслуживает одобрения.

Чтобы не жалеть о том, что чудесное в виде математических образов и механических моделей было рядом, в будущем не стать жертвой своей студенческой недалёковидности, пробудите в своей душе колокольчик, призывающий к увлечению математикой, теоретической и прикладной механикой, другими дисциплинами.

Молодые годы – творческая пора! Не упустите случая прочесть полезную для Вас методическую разработку.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая методическая разработка призвана помочь студентам в *изучении курса теоретической механики*, обратить внимание на необходимость изучения математики, восполнить возможные пробелы по элементарной и высшей математике, без которых в принципе невозможно понимание механики и успешное решение задач по этой дисциплине.

Материал методических указаний изложен следующим образом: сначала, как правило, приведены сведения и примеры по элементарной и высшей математике, а затем – наиболее характерные примеры из теоретической механики; указаны необходимые ссылки на литературные источники.

Несмотря на ограниченное количество приведенных примеров, по мнению автора, в должной мере показана неразрывная связь математики и механики, а также очерчен круг характерных задач, которые решаются в теоретической механике в рамках курса для технических вузов.

В дальнейшем в курсе информатики непременно следует закрепить понятие функции, ее производной, интеграла, приобрести опыт в построении графиков функций с использованием пакетов MathCad, Maple.

Примеры и некоторые формулировки, взятые из курса теоретической механики, выделены курсивом.

Наиболее надежное убежище истина
обрела в математике.

Денни Дидро

1. ТРИГОНОМЕТРИЯ

Тригонометрические функции острого угла (рисунок 1) [5].

Синус угла α – отношение противолежащего катета к гипотенузе $\sin \alpha = \frac{b}{c}$.

Косинус угла α – отношение прилежащего катета к гипотенузе $\cos \alpha = \frac{a}{c}$.

Тангенс угла α – отношение противолежащего катета к прилежащему $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$.

Котангенс угла α – отношение прилежащего катета к противолежащему $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b}$.

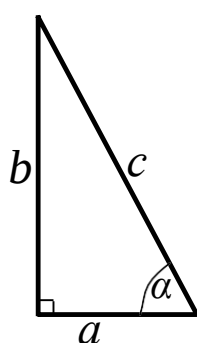


Рисунок 1

$$a = c \cos \alpha, \quad b = c \sin \alpha, \quad b = a \operatorname{tg} \alpha, \quad a = b \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ – теорема Пифагора.}$$

Таблица 1–Значения тригонометрических функций для некоторых углов

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
0°	0	1	0	∞
30°	0,5	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60°	$\sqrt{3}/2$	0,5	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
90°	1	0	∞	0
180°	0	-1	0	∞

Соотношения между тригонометрическими функциями:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Теорема синусов (рисунок 2):

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

где R – радиус описанной окружности.

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

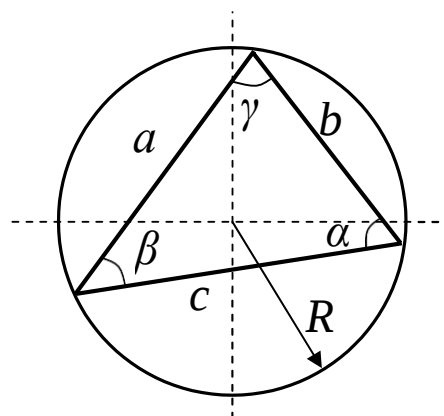


Рисунок 2

Выражения для тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, & \cos \alpha &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, & \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, & \sin^2 \alpha &= \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}. \end{aligned}$$

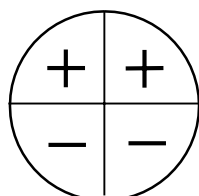
Формулы сложения:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

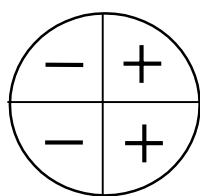
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

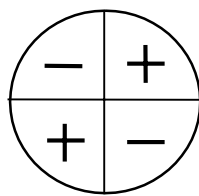
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$



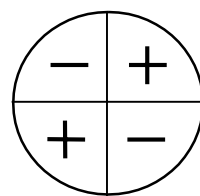
а) синус



б) косинус



в) тангенс



г) котангенс

Рисунок 3 – Знаки тригонометрических функций (в четвертях)

Формулы двойных и половинных углов:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Тригонометрические функции используются при проектировании векторов силы и момента на оси и плоскости, при решении огромного количества задач теоретической механики.

2. ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

(и его приложение в теоретической механике)

Вектором называется направленный прямолинейный отрезок, имеющий определенную длину и направление [10]. Вектор, началом которого служит точка A , а концом – точка B , обозначается $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$. Вектор характеризуется численным значением (модулем), точкой приложения и направлением.

В теоретической механике сила – векторная величина и характеризуется численным значением (модулем), точкой приложения и направлением. Когда сила приложена к абсолютно твердому телу, то только в этом случае она – скользящий вектор, т.е. точку приложения силы можно переместить вдоль линии действия силы.

Модуль вектора (его длина) есть скалярная величина, вычисляемая в декартовой системе координат по формуле: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (на основании теоремы Пифагора), где a_x, a_y, a_z – проекции вектора $\vec{a}$ на оси Ox, Oy, Oz (рисунок 4).

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Ox называется отрезок $A'B'$, начало которого A' есть проекция начала A на ось Ox , а конец B' – проекция конца B на ту же ось.

В декартовой системе координат вектор $\vec{a}$ с помощью единичных векторов осей Ox, Oy, Oz (ортов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) можно представить в виде:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора $\vec{a}$ на оси Ox, Oy, Oz .

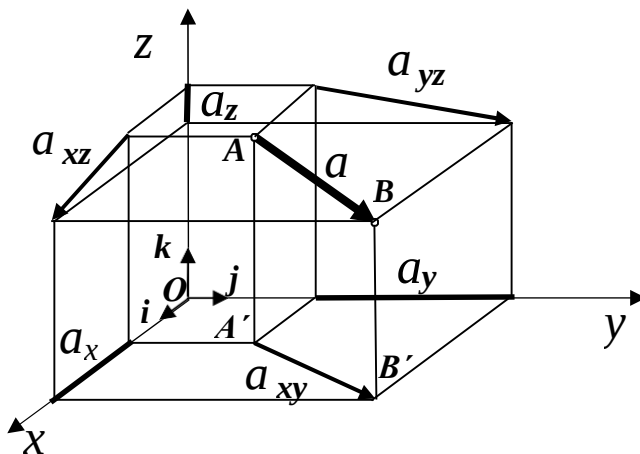


Рисунок 4 – Проекции вектора на координатные плоскости и оси

Например, сила, приложенная к телу, момент силы относительно точки, скорость и ускорение материальной точки являются векторными величинами [7].

Проекция силы на ось – алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси.

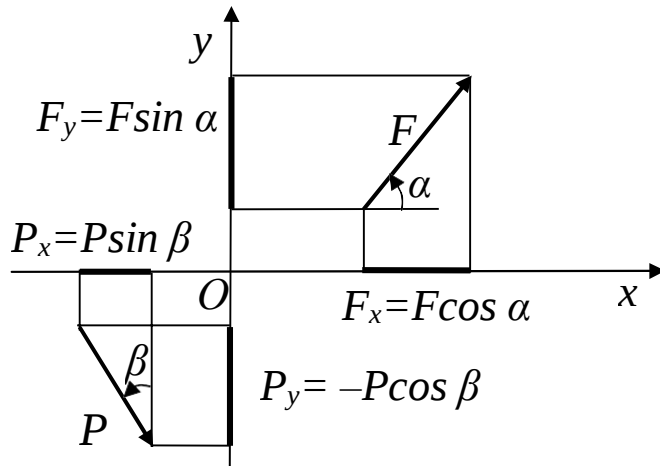


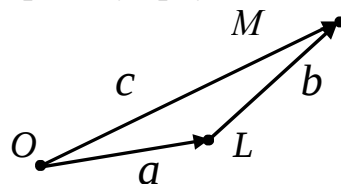
Рисунок 5 – Примеры проекций векторов сил F и P на оси

Ниже приведены некоторые сведения о векторах [4].

1. Векторы a и b равны ($\vec{a} = \vec{b}$), если они коллинеарны (лежат на одной или параллельных прямых), одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

2. Два вектора, имеющие равные модули и противоположно направленные, называются противоположными. Вектор, противоположный вектору a , обозначается $-a$.

3. Суммой векторов a и b называется третий вектор c , получаемый так: из произвольного начала O строим вектор $\vec{OL}$, равный a ; из точки L , как из начала, строим вектор $\vec{LM}$, равный b . Вектор $\vec{c} = \vec{OM} = \vec{a} + \vec{b}$ есть сумма векторов a и b (правило треугольника). Сумма $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ означает, что векторы необходимо сложить по правилу треугольника или параллелограмма.

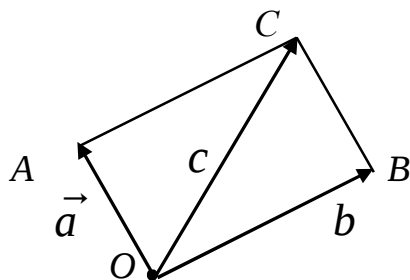


4. Сумма противоположных векторов равна нулю: $a + (-a) = 0$.

5. От перестановки слагаемых сумма векторов не меняется: $a + b = b + a$.

6. Правило параллелограмма. Если слагаемые a и b не коллинеарны (они не лежат на одной или на параллельных прямых), то сумму $a + b$ можно найти следующим построением: из любого начала O строим векторы $\vec{OA} = \vec{a}$ и

$\overrightarrow{OB} = b$; на отрезках OA , OB строим параллелограмм $OACB$. Вектор диагонали $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ есть сумма векторов a и b (так как $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$).



Например, силы, как векторы, можно складывать по правилу параллелограмма или треугольника.

В разделе «Кинематика» курса «Теоретическая механика» ускорение при вращательном движении является векторной суммой осестремительного и вращательного ускорений $a = a_{oc} + a_{вр}$ (рисунок 6), а ускорение при сложном движении точки равно векторной сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений $a = a_e + a_r + a_c$ [7] (задачи 23.27, 23.30, 23.31 из [9]).

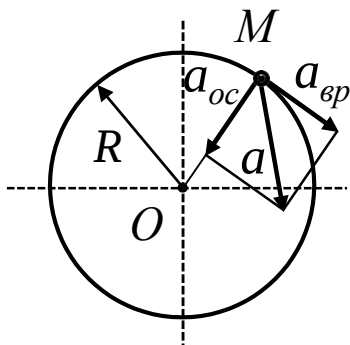
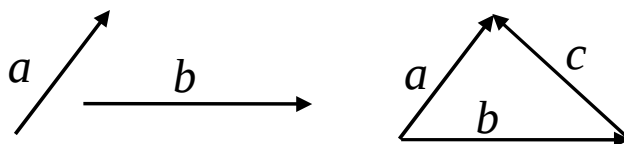


Рисунок 6 – Ускорение при движении точки по окружности

7. Под разностью векторов a и b понимается вектор $\vec{c} = \vec{a} - b$ такой, что $b + \vec{c} = \vec{a}$.



8. Скалярным произведением вектора a на вектор b называется число, равное произведению их модулей на косинус угла α между ними. Обозначение: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Согласно определению $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ или $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$.

Или через проекции векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

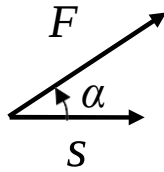
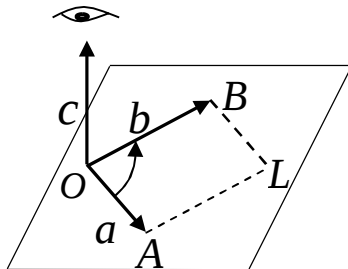


Рисунок 7

Например, работа постоянной силы при перемещении по прямой (раздел «Динамика») вычисляется как скалярное произведение векторов силы и перемещения: $A = F \cdot \vec{s}$, где s – перемещение, на котором сила F совершает работу A [8] (рисунок 7).

9. Векторным произведением вектора a на вектор b называется вектор C , который:

1. Перпендикулярен векторам a и b , т.е. $c \perp a$ и $\vec{c} \perp b$.
2. Его модуль численно равен площади параллелограмма ($AOBL$), построенного на векторах a и b , как на сторонах, т.е. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$.
3. Направление вектора C выбирается (из двух возможных) так, чтобы векторы a , b , c составляли правую систему (т.е. вращение первого вектора



a до совмещения со вторым вектором b по кратчайшей дуге с острия вектора c было видно против часовой стрелки).

Обозначение: $a \times b$.

Векторное произведение через проекции векторов определяется так:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Скорость точки при вращательном движении $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, где ω – угловая скорость, r – радиус (рисунок 8).

Кориолисово ускорение $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$, где ω_e – угловая скорость переносного движения, V_r – скорость в относительном движении [7] (рисунок 9).

Момент количества движения материальной точки $l_0 = \vec{r} \times m\vec{V}$, где $m\vec{V}$ – количество движения [8] (задача 37.09 из [9]).

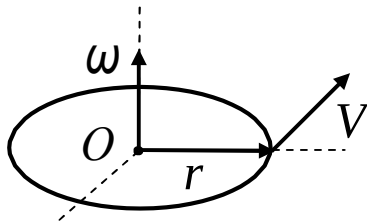


Рисунок 8 – Скорость точки

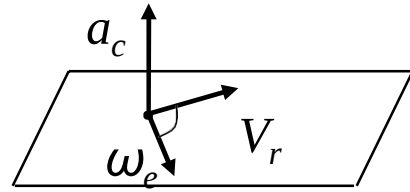


Рисунок 9 – Кориолисово ускорение

В теоретической механике момент силы $M = \vec{r} \times F$, где r – радиус-вектор, определяющий точку приложения силы F .

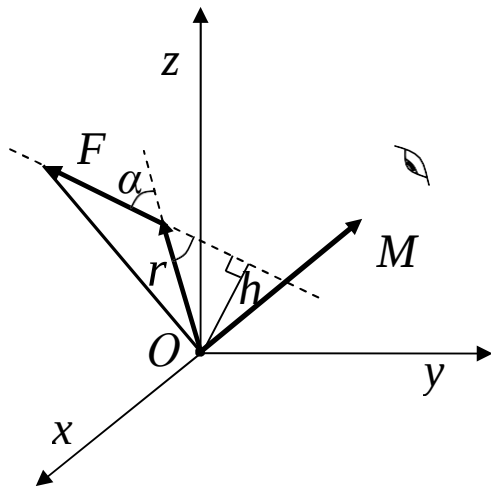


Рисунок 10 – Графическое изображение момента силы относительно точки

Момент силы $M = \vec{r} \times F$ – вектор, направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через выбранную точку и линию действия силы в ту сторону, откуда «вращение», совершаемое силой вокруг точки, происходит против часовой стрелки. С другой стороны момент как скаляр – это модуль векторного произведения: $|M| = |\vec{r}| \cdot |F| \sin(\vec{r}, F) = |\vec{r}| \cdot |F| \sin \alpha = F \cdot h$, где h – перпендикуляр, опущенный из точки на линию действия силы F (рисунок 10).

В теоретической механике (объекты – абсолютно твердые тела) векторы угловой скорости и момента пары сил являются свободными и при необходимости их можно переносить параллельно самим себе в любую точку абсолютно твердого тела.

Самое прекрасное и глубокое переживание, выпадающее на долю человека, – это ощущение таинственности.

А. Эйнштейн

3. ФУНКЦИЯ

(и ее приложение в теоретической механике)

Переменная величина y называется **функцией** переменной величины x (аргумента или независимой переменной), если при заданном значении x величина y принимает одно определенное значение (однозначная функция; например, $y = x^2$) или несколько значений (многозначная функция; например, $y = \pm\sqrt{x}$ – двузначная функция) [5].

Символами $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ обозначают функции переменной x .

Совокупность значений x , для которых функция определена, образует **область определения** функции.

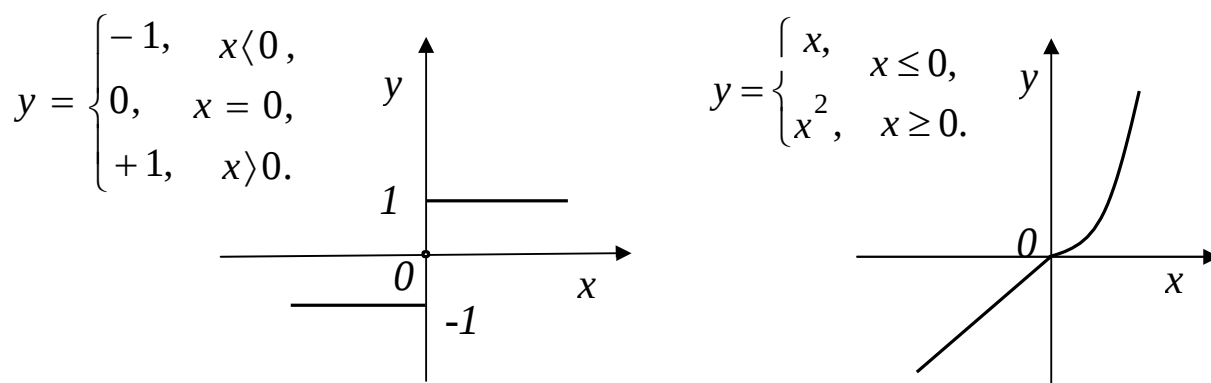


Рисунок 11– Примеры функций, заданных несколькими формулами

Функция может быть задана (определена) различными способами, например, таблицей значений, графиком, одной или несколькими формулами. Примеры функций, заданных несколькими формулами, и их графики представлены на рисунке 11.

Аналитически функции могут быть заданы явно, когда известно выражение y через x , т.е. $y = f(x)$ (например, $y = x^3$); неявно, когда x и y связаны между собой уравнением $F(x, y) = 0$ (например, $x^2 + y^2 - 1 = 0$); параметрически, когда соответствующие друг другу значения x и y выражены через третью переменную величину, называемую параметром $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ (например, $x = a \sin t$, $y = b \cos t$).

Переменная величина u называется функцией n переменных величин $x, y, z, \dots, t$ (аргументов), если при заданных значениях этих переменных величина u принимает одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) определенных значений.

Обозначение: $u = \varphi(x, y, z, \dots, t)$. Например, $u = \varphi(x, y) = xy^2$.

Сила натяжения троса (из раздела «Статика») определяется формулой Л. Эйлера $Q = Pe^{-f\varphi}$, где f – коэффициент трения скольжения, φ – угол охвата цилиндра. Функция $Q(\varphi)$ (при $P = 50$ Н; $f = 0,2$) изображена на рисунке 12.

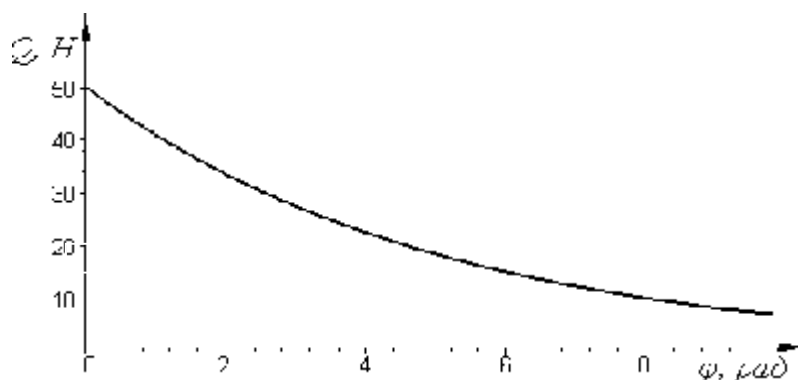


Рисунок 12 – График $Q = Pe^{-f\varphi}$

Условие задачи 1. Найти уравнение траектории движения точки (раздел «Кинематика»), если заданы уравнения движения в параметрическом виде:

$$x = \sin t + 1; \quad y = \cos t + 2,$$

где x, y – в метрах, t – в секундах.

Решение. После преобразований $(x - 1 = \sin t; y - 2 = \cos t)$ при возведении обеих частей уравнений в квадрат, с учетом $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, следует уравнение траектории движения точки (уравнение окружности в каноническом виде):

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1.$$

График изображен на рисунке 13.

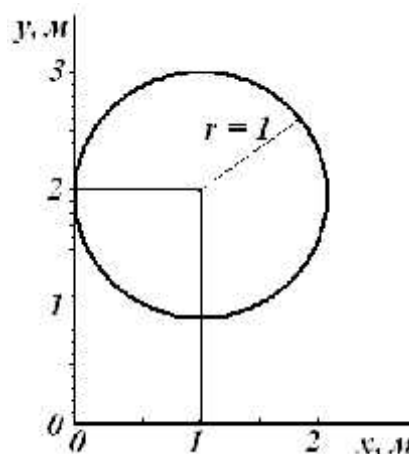


Рисунок 13 – Траектория движения точки

Людей высокого ума ничем нельзя больше привлечь к работе, как указав им трудную и вместе с тем почетную задачу...

И. Бернулли

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ (и его приложение в теоретической механике)

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx , когда Δx стремится к нулю [1]:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{df}{dx}.$$

Геометрический смысл производной. Если $y = f(x)$ – кривая в декартовой системе координат (например, траектория движения точки), то $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол между осью Ox и касательной к кривой в данной точке, отсчитываемый от положительного направления оси Ox против часовой стрелки (рисунок 14).

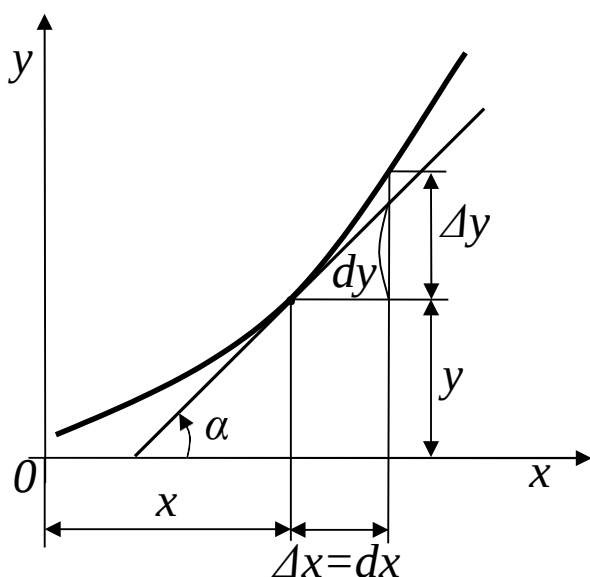


Рисунок 14 – Геометрическая интерпретация производной

Пример 1. Производные функций:

$$y = x^n; \quad y' = \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}. \quad (2x^3)' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2.$$

$$y = x; \quad y' = 1.$$

$$y = 5 \sin x; \quad y' = 5 \cos x.$$

$$y = 2 \cos x; \quad y' = -2 \sin x.$$

Производная сложной функции.

Сложную функцию можно представить в виде: $y = F(u)$, $u = \varphi(x)$ или $y = F[\varphi(x)]$, где u – промежуточный аргумент.

Если функция $u = \varphi(x)$ имеет в некоторой точке x производную $u'_x = \varphi'(x)$, а функция $y = F(u)$ имеет при соответствующем значении u производную $y'_u = F'(u)$, то сложная функция $y = F[\varphi(x)]$ в указанной точке также имеет производную, которая равна $y'_x = F'(u)\varphi'(x)$ или $y'_x = y'_u u'_x$, т.е. производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу u на производную промежуточного аргумента по x .

Пример 2. Найти производную функции $y = \sin(x^2)$. Представим ее следующим образом: $y = \sin u$, $u = x^2$. Находим: $y'_u = \cos u$, $u'_x = 2x$. Следовательно $y'_x = 2x \cos(x^2)$.

Пример 3. Найти производную функции $y = (1+x^2)^3$. Рассматривая y как сложную функцию, представим: $y = u^3$, $u = 1+x^2$. Получим: $y'_u = 3u^2$, $u'_x = 2x$. Отсюда: $y'_x = 2x \cdot 3(1+x^2)^2 = 6x(1+x^2)^2$.

В механике проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени и в соответствии с общепринятыми обозначениями записываются так:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Условие задачи 2. Найти угловую скорость ω при $t = 2$ с, если угол поворота стержня изменяется по закону $\varphi = 3t^2 + 1$ (раздел «Кинематика точки»).

Решение. Известно, что угловая скорость – первая производная от угла поворота [7]; следовательно, $\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = 3 \cdot 2t = 6t$. При $t = 2$ с следует $\omega = 12 \text{ с}^{-1}$.

Условие задачи 3. Задано уравнение движения $x = \sin^2 t$. Найти проекцию скорости точки на ось x .

Решение. $V_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 2 \sin t \cos t = \sin 2t$.

Производная от произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первой функции на вторую функцию плюс произведение первой функции на производную от второй функции, т.е.

$$\text{если } y = uv, \text{ то } y' = u'v + uv'.$$

Пример 4. Если $y = x^2 \sin x$, то $y' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

Пример 5. $y = 4x^4 \cos x$. Представим данную функцию так: $y = uv$, где $u = 4x^4$, $v = \sin x$. Следовательно, $y' = 4 \cdot 4x^3 \cos x + 4x^4 (-\sin x)$.

Производная дроби (т.е. частного от деления двух функций) равна дроби, у которой знаменатель есть квадрат знаменателя данной дроби, а числитель есть разность между произведением знаменателя на производную числителя и произведением числителя на производную знаменателя, т.е.

$$\text{если } y = \frac{u}{v}, \text{ то } y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Пример 6. Если $y = \frac{x^3}{\cos x}$, то $y' = \frac{(x^3)' \cos x - x^3 (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{3x^2 \cos x + x^3 \sin x}{\cos^2 x}$.

Пример 7. Пусть $y = \frac{2x+1}{x^2+1}$. Тогда $y' = \frac{(2x+1)'(x^2+1) - (2x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$

$$= \frac{2(x^2+1) - 2x(2x+1)}{(x^2+1)^2}.$$

Частная производная функции нескольких переменных $u = f(x, y, z, \dots, t)$ по одной из них, например, по x , определяется равенством [3]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, \dots, t) - f(x, y, z, \dots, t)}{\Delta x}.$$

В этом случае приращение получает лишь одна из независимых переменных. Для функции n переменных n частных производных первого порядка: $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t}$. Частная производная находится по правилам дифференцирования функции одной переменной, причем остальные переменные рассматриваются в данном случае как постоянные.

Пример 8. Если $u = \frac{x^2 y}{z}$, то $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy}{z}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{z}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{x^2 y}{z^2}$.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ одной переменной называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции $f'(x)$ на приращение Δx аргумента: $dy = f'(x)\Delta x$.

Так как дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной $dx = \Delta x$, то

$$dy = f'(x)dx.$$

Пример 9. Если $y = tg^2 x$, то $dy = 2tgx \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

Полный дифференциал функции трех переменных $u = f(x, y, z)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Интересно, что при выводе уравнений Лагранжа второго рода в разделе «Динамика» радиус-вектор r_k некоторой точки системы выражается через обобщенные координаты $q_1, q_2, \dots, q_s$ и время t : $r_k = r_k(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$. Тогда изохронная вариация δr_k радиус-вектора через вариации $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ обобщенных координат записывается следующим образом

$$\delta \vec{r}_k = \frac{\partial r_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial r_k}{\partial q_s} \delta q_s, \text{ т.е. по аналогии с дифференциалом.}$$

Аналогично для проекции радиуса-вектора $x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$ его изохронная вариация записывается как

$$\delta x_k = \frac{\partial x_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial x_k}{\partial q_s} \delta q_s.$$

Если бы математика сама по себе не приносила никакой пользы, то и тогда нельзя было бы назвать ее бесполезной, лишь бы только она изощряла ум и заводила в нем порядок.

Ф. Бэкон

5. ИНТЕГРАЛ

(и его приложение в теоретической механике)

Функция $F(x)$ называется **первообразной** [1] от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Если функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то выражение $F(x) + C$ называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)dx \quad \text{или} \quad \int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{если} \quad F'(x) = f(x).$$

Пример 10. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1; \quad \int \cos x dx = \sin x + C;$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Интегрирование по частям. Если u и v – дифференцируемые функции от x , то $\int u dv = uv - \int v du$.

Пример 11. Найти $\int x \sin x dx$. Положим $u = x, \quad dv = \sin x dx$, тогда $du = dx, \quad v = -\cos x$. Следовательно, $\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$.

Интегрирование методом замены переменных или способом подстановки. Требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ не удается; известно, что первообразная существует. Положив $x = \varphi(t)$, тогда $dx = \varphi'(t)dt$. В этом случае доказано [1], что

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример 12. Вычислить $\int \sin^3 x \cos x dx$. Сделаем подстановку $z = \sin x$, тогда

$$dz = \cos x dx. \text{ Следовательно, } \int \sin^3 x \cos x dx = \int z^3 dz = \frac{z^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

В разделе «Статика» вычисление центра тяжести линии, площади, объема осуществляется путем интегрирования соответствующих функций.

Условие задачи 4. Найти центр тяжести дуги окружности радиуса R с центральным углом 2α (рисунок 15).

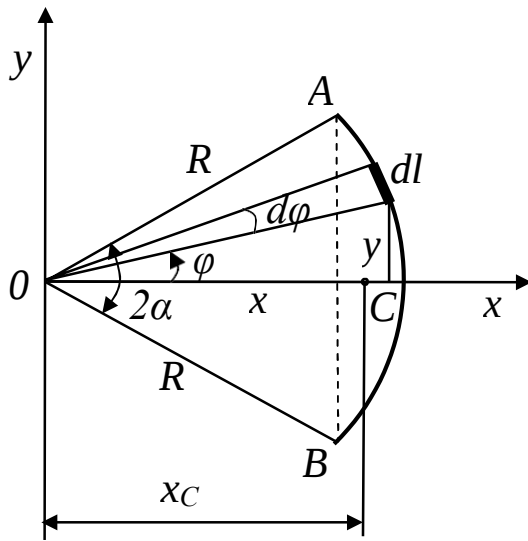


Рисунок 15 – Дуга окружности

Решение. Вследствие симметрии фигуры относительно оси x центр тяжести будет лежать на этой оси, т.е. $y_C = 0$.

Для определения x_C воспользуемся формулой $x_C = \frac{1}{L} \int_L x dl$ [7], в которой криволинейный интеграл, в результате подстановок $x = R \cos \varphi$, $dl = R d\varphi$, $L = 2R\alpha$, преобразуется к виду

$$x_C = \frac{1}{2R\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos \varphi d\varphi = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

Условие задачи 5. Задан закон изменения угловой скорости стержня $\omega = 2t$. Найти угол поворота стержня через 2 с (раздел «Кинематика»).

Решение. Известно, что $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Следовательно, $d\varphi = \omega dt = 2t dt$. Интегри-

руем обе части уравнения, получаем $\varphi = \int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^2 2t dt = \left. \frac{2t^2}{2} \right|_0^2 = t^2 \Big|_0^2 = 4 \text{ рад}.$

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

(и их приложение в теоретической механике)

Дифференциальным называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные $y', y'', \dots, y^{(n)}$ [2]. Вместо производных могут входить дифференциалы.

Если искомая неизвестная функция зависит от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**, если от нескольких, то уравнение называется **дифференциальным уравнением с частными производными**. Здесь рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения [10].

Общий вид дифференциального уравнения (ДУ) n -го порядка с одной неизвестной функцией:

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

Например, уравнения $xy' = y^2$ и $y'' = x^3$ есть дифференциальные уравнения первого порядка, а дифференциальное уравнение $y'' + y = 0$ – второго порядка. Общий вид ДУ первого порядка: $\Phi(x, y, y') = 0$.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Так, решением уравнения $y' = f(x)$ является функция $y = F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$.

Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется его **интегрированием**, а график решения – **интегральной кривой**.

Уравнение, разрешенное относительно y' (т.е. $y' = f(x, y)$), имеет бесчисленное множество решений. Решением уравнения $y' = 3x^2$ является функция $y = x^3$, а также $y = x^3 + 1$ или $y = x^3 - 3$ и вообще $y = x^3 + C$, где $C = \text{const}$.

Чтобы решение ДУ приобрело конкретный смысл, его подчиняют дополнительным условиям. Условие, что при $x = x_0$ функция y должна быть равна заданному числу y_0 , называется **начальным условием** (задача Коши). Начальное условие записывается в виде: $y(x_0) = y_0$ или $y|_{x=x_0} = y_0$.

Общим решением ДУ первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

1. Функция $y = \varphi(x, C)$ является решением ДУ при каждом фиксированном значении C .

2. Каково бы ни было начальное условие $y|_{x=x_0} = y_0$, можно найти такое значение постоянной $C = C_0$, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Частным решением ДУ первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении постоянной $C = C_0$.

Если общее решение ДУ найдено в неявном виде, т.е. в виде уравнения $\Phi(x, y, C) = 0$, то оно называется общим интегралом ДУ. Уравнение $\Phi(x, y, C_0) = 0$ в этом случае называется частным интегралом уравнения.

С геометрической точки зрения $y = \varphi(x, C)$ есть семейство интегральных кривых на плоскости Oxy , а частное решение $y = \varphi(x, C_0)$ – одна кривая из этого семейства, проходящая через точку (x_0, y_0) .

Пример 13. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $y' = \cos x$.

$\frac{dy}{dx} = \cos x$. Умножив обе части уравнения на dx , получим $dy = \cos x dx$. Решение $y = \sin x + C$. Функция $y = \sin x + C$, содержащая произвольную постоянную C , называется общим решением уравнения $y' = \cos x$; функция $y = \sin x$ (или, например, $y = \sin x + \frac{1}{2}$, $y = \sin x - 1$ и т.д.) – частное решение.

Если дифференциальное уравнение имеет вид $P(x)dx + Q(y)dy = 0$ (коэффициент P зависит только от x , коэффициент Q – только от y), то говорят, что **переменные разделены**.

Общий интеграл уравнения с разделенными переменными представляется как $\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$, где C – постоянная.

Пример 14. Решить уравнение $\frac{dy}{dx} = 1$. Умножим на dx , получим уравнение с разделенными переменными: $dy = dx$. Интегрируя $\int dy = \int dx$, находим $y = x + C$.

Пример 15. Рассмотрим уравнение $y dx - x dy = 0$. Разделив на xy , получаем $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$, переменные разделены. Интегрируя, находим: $\ln|x| - \ln|y| = C$ или $\ln\left|\frac{x}{y}\right| = C$.

Условие задачи 6 (кинематика). Стержень вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 0,5 \text{ рад/с}^2$. Найти закон изменения угла поворота стержня $\varphi(t)$, если в на-

начальный момент времени ($t_0 = 0$) угол поворота $\varphi_0 = \pi/4$ рад, а угловая скорость $\omega_0 = 1$ рад/с.

Решение. При вращательном движении угловое ускорение есть вторая производная от угла поворота по времени или первая производная от угловой скорости, запишем [7]: $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon$; $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$. Разделяя переменные в уравнении $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ и интегрируя, получим: $\omega = \varepsilon t + C_1$. Учитывая, что $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, интегрируем еще раз, получим: $\varphi = \varepsilon t^2/2 + C_1 t + C_2$. Получено общее решение.

Подставляя начальные условия в выражения для $\varphi(t)$ и $\omega(t)$, определим значения C_1 и C_2 : $C_2 = \varphi_0 = \pi/4$; $C_1 = \omega_0 = 1$. Окончательно закон движения $\varphi = t^2/4 + t + \pi/4$. Это – частное решение.

Линейное уравнение первого порядка – уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной [2]: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, где $P(x)$, $Q(x)$ – заданные непрерывные функции от x (или постоянные). Искомая функция y и ее производная y' входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

В курсе математики должно обращать внимание на решение линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Например, в теоретической механике такая необходимость возникает при исследовании свободных и вынужденных колебаний материальной точки с учетом линейно-вязкого сопротивления, при изучении колебаний систем с конечным числом степеней свободы.

Уравнение движения точки переменной массы (уравнение Мещерского) имеет вид

$$m(t)\vec{a} = F^e + R,$$

где $m(t)$ – переменная масса материальной точки; $\vec{a} = \frac{dV}{dt}$ – ускорение; F^e –

равнодействующая всех активных сил; $\vec{R} = \frac{dm}{dt}\vec{V}_r$ – реактивная сила; V_r – относительная скорость отделяющейся частицы.

Использование уравнения Мещерского иллюстрируется на примере 45.4 [9].

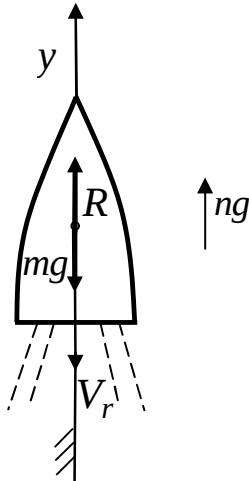
Условие задачи 7. Ракета с начальной массой m_0 поднимается вертикально вверх с постоянным ускорением ng (g – ускорение земного тяготения). Пренебрегая сопротивлением атмосферы и считая эффективную скорость V_r истечения газа постоянной, определить закон изменения массы ракеты.

Решение.

Уравнение Мещерского в проекции на неподвижную ось записывается в виде:

$$mng = -V_r \frac{dm}{dt} - mg.$$

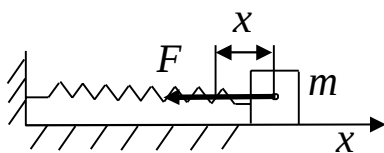
Переменные разделяются: $\frac{dm}{m} = -\frac{g(n+1)}{V_r} dt.$



В результате интегрирования получено $m = e^{-\frac{g(n+1)t}{V_r}} \cdot e^C$ или с учетом значения массы в начальный момент времени ($m|_{t=0} = m_0$) закон изменения массы ракеты имеет вид: $m = m_0 e^{-\frac{g(n+1)t}{V_r}}.$

Условие задачи 8. Составить уравнение свободных незатухающих колебаний груза (раздел «Динамика»), если масса груза m , жесткость пружины c .

Решение. Известно, что свободные незатухающие колебания возникают под действием восстанавливающей силы $F = -cx$. Дифференциальное уравнение движения груза запишется в виде [8]: $m \ddot{x} = -cx$.



Обозначив $c/m = k^2$, получим: $\ddot{x} + k^2 x = 0$. Характеристическое уравнение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид: $r^2 + k^2 = 0$.

Его корни мнимые: $r_1 = ki, r_2 = -ki$, и общее решение $x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$, где C_1, C_2 – постоянные.

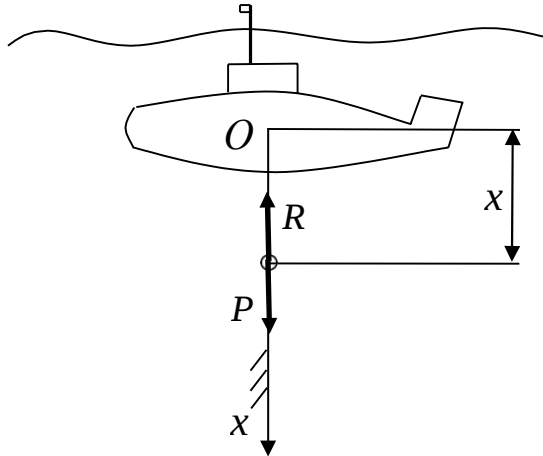
Условие задачи 9. Определить скорость погружения лодки (раздел «Динамика»), получившей в момент времени t_0 небольшую отрицательную плавучесть P . Погружаясь на глубину, лодка движется поступательно. Сопротивление воды при небольшой отрицательной плавучести можно принять пропорциональным первой степени скорости погружения и равной kSV , где k – коэффициент пропорциональности, S – площадь горизонтальной проекции лодки. Масса лодки M . Начальные условия: при $t = 0, V(0) = 0$, т.е. лодка движется из состояния покоя [9].

Решение. Дифференциальное уравнение движения с учетом действующих на лодку сил: $M \frac{d^2 x}{dt^2} = P - R.$

С учетом $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dV}{dt}$ следует: $M \frac{dV}{dt} = P - kSV$.

Разделяя переменные в последнем уравнении и интегрируя, получим:

$$\frac{-M}{kS} \ln|P - kSV| = t + C.$$



После преобразований

$$\ln|P - kSV| = -\frac{kS}{M}t - \frac{kS}{M}C$$

следует

$$P - kSV = e^{-\frac{kS}{M}t} \cdot e^{-\frac{kS}{M}C}.$$

Из начальных условий

(при $t = 0$, $V(0) = 0$) получено

$$P = e^{-\frac{kS}{M}C}.$$

Скорость погружения лодки:

$$V = \frac{P}{kS} \left(1 - e^{-\frac{kS}{M}t} \right).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Без глубокого изучения теоретической механики не представляется возможным должное освоение общеинженерных дисциплин: сопротивление материалов, строительная механика, гидравлика, теория машин и механизмов, детали машин, вибрации и качка корабля, технические средства освоения шельфа, механика промышленных роботов, основы конструирования исполнительных устройств и других дисциплин, призванных успешно формировать специалистов в различных областях техники. ***Без математики немислимо освоение теоретической и прикладной механики, и, следовательно, перечисленных выше дисциплин!***

В курсах физики, теоретической механики, сопротивления материалов необходимо последовательно и настойчиво «напоминать» современным студентам важнейшие разделы математики, которые непосредственно используются для моделирования состояний, взаимодействий и движений механических объектов и систем.

Дальнейшая методическая работа на рассмотренную тему должна быть естественным образом связана с созданием методических рекомендаций на тему «Математика в курсе «Сопротивление материалов». Изучение механики деформируемого твердого тела невозможно без разделов математики, которые изложены в данных методических указаниях и проиллюстрированы на характерных примерах из теоретической механики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2-х т. Т. 1 / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1976. – 456 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2-х т. Т. 2 / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1978. – 576 с.
3. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
4. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: Наука, 1973. – 872 с.
5. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике / М.Я. Выгодский. – М.: Наука, 1986. – 320 с.
6. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
7. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: в 2-х т. Т.1 / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1979. – 272 с.
8. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: в 2-х т. Т.2 / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1979. – 544 с.
9. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие / И.В. Мещерский. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
10. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 608 с.: ил.
11. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов: Учебник для вузов / Под ред. Г.С. Писаренко. – К.: Выща шк., 1987. – 696 с.
12. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. Учебник для вузов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 512 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Индивидуальные задания

Индивидуальный вариант задания выбирается по последним двум цифрам зачетной книжки учащегося.

Задание 1. По предложенным по варианту координатам (таблица 1) постройте в плоской системе XY вектор AB , в пространственной системе XYZ – вектор CD . Найдите проекции векторов на оси координат.

Таблица 1 – Координаты векторов AB и CD

Предпоследняя цифра зачетной книжки	Координаты точек вектора AB		Последняя цифра зачетной книжки	Координаты точек вектора CD	
	A	B		C	D
0	(3; 1)	(2; 1)	0	(3; 1; 3)	(2; 1; 0)
1	(2; 2)	(3; 2)	1	(2; 2; 1)	(3; 2; 1)
2	(1; 3)	(3; 1)	2	(1; 3; 2)	(3; 1; 2)
3	(4; 1)	(0; 4)	3	(4; 1; 1)	(0; 4; 3)
4	(3; 4)	(4; 0)	4	(3; 4; 2)	(4; 0; 0)
5	(2; 1)	(1; 3)	5	(2; 1; 0)	(1; 3; 1)
6	(3; 2)	(2; 2)	6	(3; 2; 1)	(2; 2; 2)
7	(4; 0)	(2; 3)	7	(4; 0; 2)	(2; 3; 3)
8	(0; 3)	(2; 2)	8	(0; 3; 3)	(2; 2; 0)
9	(2; 0)	(3; 3)	9	(2; 0; 1)	(3; 3; 1)

Задание 2. Точка A движется в плоскости xOy . Закон движения задан функциями: $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах. Зависимости $x=f_1(t)$ и $y=f_2(t)$ даны в таблице 2.

Найдите: 1) уравнение траектории точки; 2) скорость точки; 3) ускорение точки.

Таблица 2 – Уравнения движения точки A

Предпоследняя цифра зачетной книжки	$x=f_1(t)$	Последняя цифра зачетной книжки	$y=f_2(t)$
0	$t - 2$	0	$12\sin(\pi t / 6)$
1	$4t$	1	$-5\cos(\pi t / 2)$
2	$3t - 3$	2	$4\cos(\pi t / 3)$
3	$5t + 1$	3	$10\sin(\pi t / 6)$
4	$t - 1$	4	$-8\sin(\pi t / 6)$
5	$2t + 3$	5	$-6\cos(\pi t / 8)$
6	$7t - 2$	6	$6\cos(\pi t / 3)$
7	$4t + 1$	7	$3\cos(\pi t / 3)$
8	$t + 7$	8	$6\sin(\pi t / 8)$
9	$8 - 2t$	9	$2\cos(\pi t / 3)$