

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.И. Бохонский, А.И. Рыжков

МАТЕМАТИКА В КУРСЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Методические указания
по выполнению самостоятельных работ

Севастополь
СевГУ
2023

УДК

51-72:539.3/.6(076.1)

ББК 22.251я73

Б863

Р е ц е н з е н т:

А.М. Поляков - канд. техн. наук, доцент,
доцент кафедры «Цифровое проектирование»

Бохонский, А. И.

Б863 Математика в курсе сопротивления материалов: методические указания по выполнению самостоятельных работ/ А.И. Бохонский, А.И. Рыжков; Севастопольский государственный университет. – Севастополь: СевГУ, 2023. – 31 с.

В методических указаниях представлены темы с иллюстрацией применения элементарной и высшей математики в курсе сопротивления материалов, которые необходимы для подготовки:

- к тестам по заданным темам;
- выполнения РГР и контрольных работ;
- сдачи экзамена;
- сдачи зачета.

Подобраны задачи для самостоятельной работы.

Методические указания предназначены для студентов дневной и заочной форм обучения всех направлений подготовки и специальностей.

УДК 51-72:539.3/.6(076.1)

ББК 22.311я73

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Цифровое проектирование», протокол № 6 от 27 февраля 2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Касательные и нормальные напряжения,	5
их графики	5
1.1. Функция	7
2. Построение эпюр внутренних усилий	8
3. Использование интеграла Мора.....	12
для вычисления перемещения.....	12
4.Вычисление моментов инерции плоских поперечных сечений134.1.	
Интеграл	14
5. Примеры интегрирования дифференциального уравнения	
изогнутой оси балки	14
5.1. Дифференциальные уравнения.....	17
6. Статически неопределимые системы	18
7. Расчет на устойчивость сжатых стержней	19
8. Определение частот колебаний системы с конечным	
числом степеней свободы	24
Заключение	26
Литература	27
Приложение.	28

ВВЕДЕНИЕ

Методическая разработка является естественным продолжением методических указаний «Математика в курсе «Теоретической механики». Успешное освоение курса сопротивления материалов невозможно без твердых знаний по математике и теоретической механике.

Авторы стремились обратить внимание Читателя на связь математики, как языка инженерных дисциплин, с предметом «Сопротивление материалов», на необходимость знания курса высшей математики для успешного освоения методов расчета на прочность, жесткость и устойчивость деталей машин, конструкций и сооружений.

Материал Методических указаний изложен следующим образом: сначала, как правило, приведены характерные примеры из курса сопротивления материалов, а затем – используемые крайне необходимые разделы из высшей математики.

Несмотря на краткость изложения, по мнению авторов, в должной мере показана неразрывная связь математики и сопротивления материалов, а также очерчен узкий круг наиболее характерных задач дисциплины «Сопротивление материалов» для технических вузов.

Методические указания, по у мнению авторов, будут полезны студентам стационарной и заочной форм обучения не только в процессе изучения курса, но и при подготовке к тестированию, зачетам и экзаменам.

1. КАСАТЕЛЬНЫЕ И НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ, ИХ ГРАФИКИ

Касательные напряжения в любой точке круглого поперечного сечения вала при чистом кручении определяются по известной линейной зависимости [7, 8]

$$\tau = \frac{M_{кр}}{J_p} \cdot \rho,$$

где $M_{кр}$ – крутящий момент в рассматриваемом сечении вала; J_p – полярный момент инерции поперечного сечения вала; ρ – расстояние от центра сечения до точки, в которой вычисляется напряжение. Для заданного сечения вала $\frac{M_{кр}}{J_p} = const$. Функция $\tau = \tau(\rho)$ – линейная (рисунок 1).

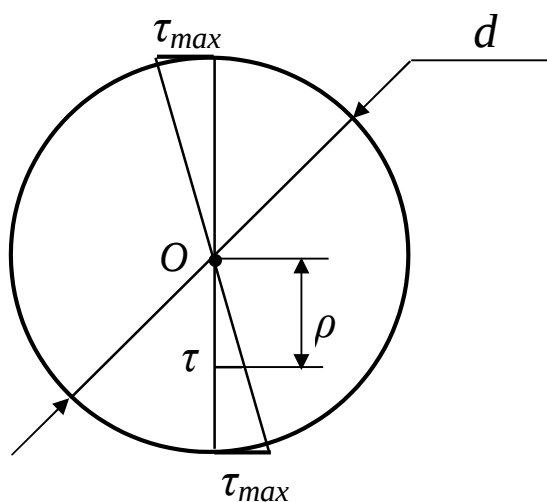


Рисунок 1 – График $\tau = \tau(\rho)$ изменения касательных напряжений по поперечному сечению вала

Важно видеть аналогии. При плоском изгибе прямого стержня нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения вычисляются по формуле

$$\sigma = \frac{M}{J_z} \cdot y,$$

где M – изгибающий момент; J_z – осевой момент инерции площади поперечного сечения стержня; y – расстояние от центральной оси до слоя, в котором определяются напряжения. Здесь $\frac{M}{J_z} = \text{const}$, а $\sigma = \sigma(y)$ – линейная функция (рисунок 2, б).

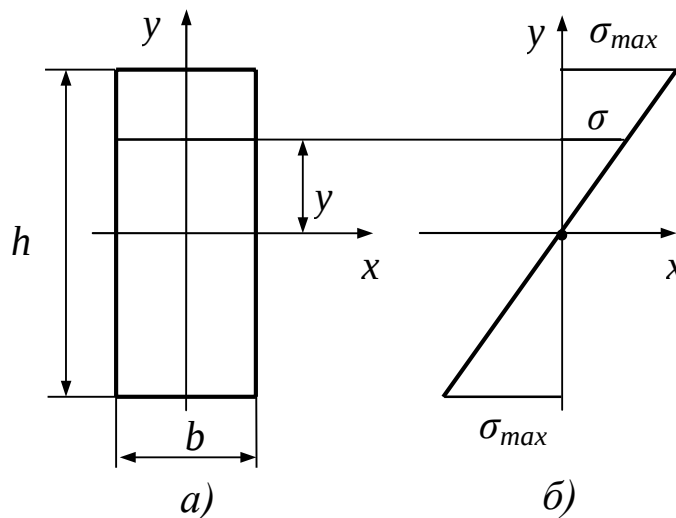
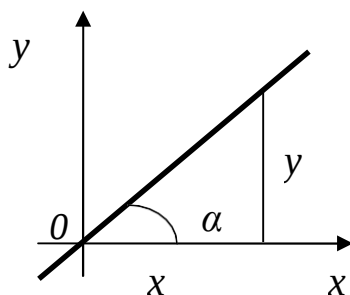


Рисунок 2: а) прямоугольное поперечное сечение стержня; б) график $\sigma = \sigma(y)$ изменения нормальных напряжений

В курсе сопротивления материалов, как правило, функции аналитические, например, часто встречается линейная функция (рисунок 3) вида $y = kx$, где $k = \text{const}$ (угловой коэффициент).



$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Рисунок 3 – График функции $y = kx$

Закон Р. Гука при растяжении-сжатии – пример линейной функции (рисунок 4).

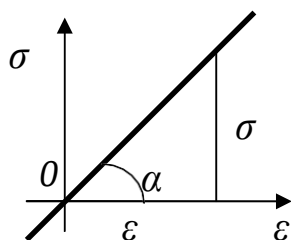


Рисунок 4 – График функции $\sigma = E \cdot \varepsilon$

При чистом сдвиге закон Р. Гука – также линейная функция (рисунок 5).

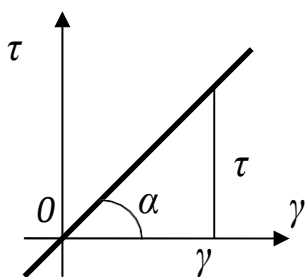


Рисунок 5 – График функции $\tau = G \cdot \gamma$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon; \quad E = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad \text{или} \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E,$$

где σ – напряжение; ε – относительные удлинения; E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга).

$$\tau = G \cdot \gamma; \quad G = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau}{\gamma}; \quad \frac{d\tau}{d\gamma} = G;$$

где τ – касательные напряжения; γ – угол сдвига (относительный сдвиг); G – модуль упругости второго рода.

1.1. Функция

Переменная величина y называется **функцией** переменной величины x (аргумента или независимой переменной), если при заданном значении x величина y принимает одно определенное значение (однозначная функция; например, $y = x^2$) или несколько значений (многозначная функция; например, $y = \pm \sqrt{x}$ – двузначная функция) [5]. Символами $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ обозначают функции переменной x .

Совокупность значений x , для которых функция определена, образует **область определения** функции.

Функция может быть задана (определена) различными способами, например, таблицей значений, графиком, формулами. Аналитически функции могут быть заданы явно, когда известно выражение y через x , т.е. $y = f(x)$ (например, $y = x^3$); неявно, когда x и y связаны между собой уравнением $F(x, y) = 0$ (например, $x^2 + y^2 - 1 = 0$).

Переменная величина u называется функцией n переменных величин $x, y, z, \dots$ (аргументов), если при заданных значениях этих переменных величина u принимает одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) определенных значений.

Обозначение: $u = \varphi(x, y, z, \dots)$. Например, $u = \phi(x, y) = xy^2$.

2. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ

При построении эпюр внутренних усилий в сопротивлении материалов очень важно, особенно при контроле их правильности, уметь учитывать знак производной и находить экстремум функции.

При построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов (при изгибе бруса) контроль их правильности основывается на использовании дифференциальных зависимостей:

$\frac{dM}{dx} = Q$ – производная от изгибающего момента (по продольной координате x) равна поперечной силе;

$\frac{dQ}{dx} = q$ – производная от поперечной силы равна интенсивности равномерно распределенной нагрузки).

Из двух зависимостей следует $\frac{d^2M}{dx^2} = q$.

Проиллюстрируем эти зависимости на примере (рисунок 6).

Для изгибающего момента в сечении балки с координатой x следует выражение $M(x) = \frac{ql}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2}$. Тогда $Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \frac{ql}{2} - qx$;

$\frac{dQ(x)}{dx} = -q$. На участке $\frac{l}{2} \geq x \geq 0$ $M(x)$ – возрастает, ибо $Q(x) > 0$, а

на участке $l \geq x > \frac{l}{2}$ поперечная сила $Q(x) < 0$ и функция $M(x)$ – убывает.

Исследование функции $M(x)$ на экстремум: $\frac{dM}{dx} = 0$; $\frac{ql}{2} - qx_* = 0$;

$$x_* = \frac{l}{2}; \quad M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8}.$$

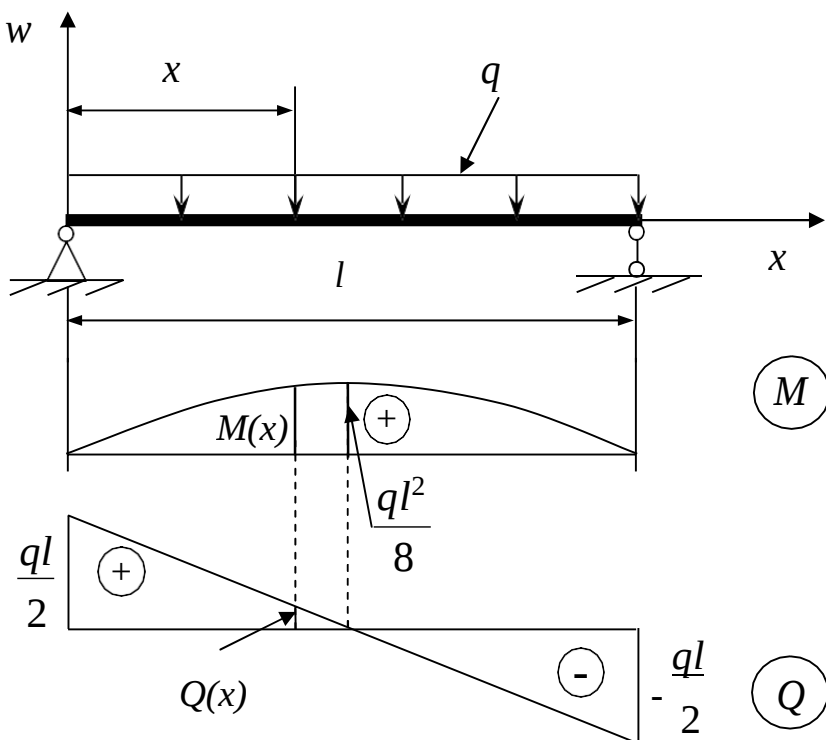


Рисунок 6 – Схема балки и эпюры (графики): изгибающего момента (M) и поперечной силы (Q)

2.1. Дифференциальное исчисление

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx , когда Δx стремится к нулю [1]:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{df}{dx}.$$

Геометрический смысл производной. Если $y = f(x)$ – кривая в декартовой системе координат, то $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол между осью Ox и касательной к кривой в данной точке, отсчитываемый от положительного направления оси Ox против часовой стрелки (рисунок 7).

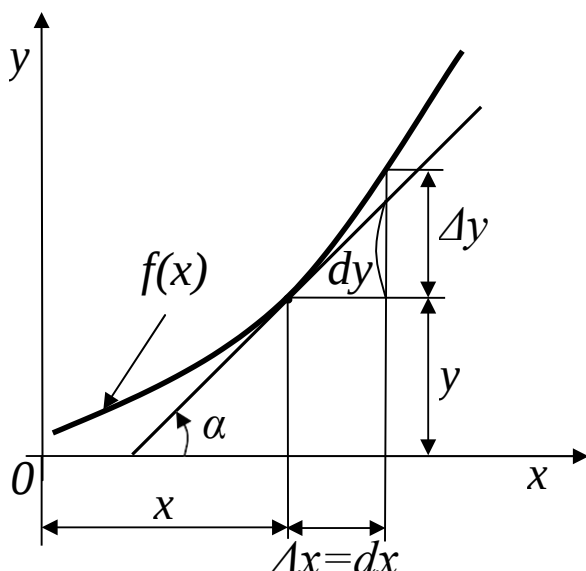


Рисунок 7 – Геометрическая интерпретация производной

Пример 1. Производные функций:

$$y = x^n; \quad y' = \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}. \quad (2x^3)' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2. \quad y = x; \quad y' = 1.$$

$$y = 5 \sin x; \quad y' = 5 \cos x. \quad y = 2 \cos x; \quad y' = -2 \sin x.$$

Производная сложной функции.

Сложную функцию можно представить в виде: $y = F(u)$, $u = \varphi(x)$ или $y = F[\varphi(x)]$, где u – промежуточный аргумент.

Если функция $u = \varphi(x)$ имеет в некоторой точке x производную $u'_x = \varphi'(x)$, а функция $y = F(u)$ имеет при соответствующем значении u производную $y'_u = F'(u)$, то сложная функция $y = F[\varphi(x)]$ в указанной точке также имеет производную, которая равна $y'_x = F'(u)\varphi'(x)$ или $y'_x = y'_u u'_x$, т.е. производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента.

Пример 2. Найти производную функции $y = \sin(x^2)$. Представим ее так: $y = \sin u$, $u = x^2$. Находим: $y'_u = \cos u$, $u'_x = 2x$. Следовательно $y'_x = 2x \cos(x^2)$.

Пример 3. Найти производную функции $y = (1 + x^2)^3$. Рассматривая y как сложную функцию, представим: $y = u^3$, $u = 1 + x^2$. Получим: $y'_u = 3u^2$, $u'_x = 2x$. Отсюда: $y'_x = 2x \cdot 3(1 + x^2)^2 = 6x(1 + x^2)^2$.

Производная от произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первой функции на вторую функцию плюс произведение первой функции на производную от второй функции, т.е. если $y = uv$, то $y' = u'v + uv'$.

Пример 4. Если $y = x^2 \sin x$, то $y' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

Производная дроби (т.е. частного от деления двух функций) равна дроби, у которой знаменатель есть квадрат знаменателя данной дроби, а числитель есть разность между произведением знаменателя на производную числителя и произведением числителя на производную знаменателя, т.е.

$$\text{если } y = \frac{u}{v}, \text{ то } y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Пример 5. Если $y = \frac{x^3}{\cos x}$, то $y' = \frac{x^3 \cos x - x \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{3x \cos x + x \sin x}{\cos^2 x}$.

Частная производная функции нескольких переменных $u = f(x, y, z, \dots, t)$ по одной из них, например, по x , определяется равенством [3]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, \dots, t) - f(x, y, z, \dots, t)}{\Delta x}.$$

В этом случае приращение получает лишь одна из независимых переменных. Для функции n переменных n частных производных первого порядка: $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t}$. Частная производная находится по пра-

вилам дифференцирования функции одной переменной, причем остальные переменные рассматриваются в данном случае как постоянные.

Пример 6. Если $u = \frac{x^2 y}{z}$, то $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy}{z}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{z}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{x^2 y}{z^2}$.

Дифференциал функции $y = f(x)$ одной переменной называется главной частью ее приращения, равная произведению производной функции $f'(x)$ на приращение Δx аргумента: $dy = f'(x)\Delta x$.

Так как дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной $dx = \Delta x$, то

$$dy = f'(x)dx.$$

Пример 7. Если $y = \operatorname{tg}^2 x$, то $dy = 2 \operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛА МОРА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

На рисунке 8 изображена арка, к которой приложена горизонтальная сила $P = 1$ кН, и построена эпюра изгибающих моментов. Необходимо найти перемещение по направлению силы.

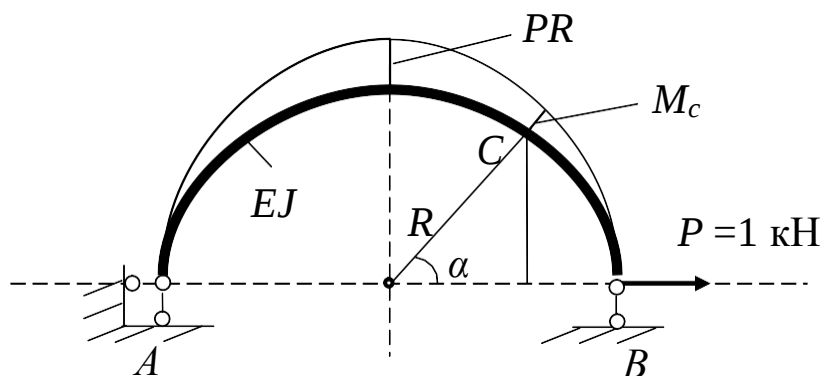


Рисунок 8 – Схема статически определимой арки
(криволинейного бруса)

Изгибающий момент в точке C равен $M_C = P \cdot R \cdot \sin \phi$. Интеграл Мора для вычисления горизонтального перемещения точки B вычисляется так

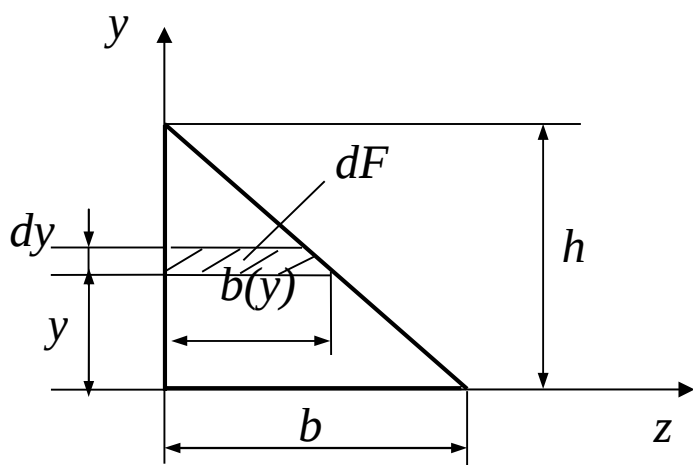
$$\sigma_{11} = \frac{2R^2}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \phi d\phi = \frac{2R^2}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\phi) d\phi = \frac{\pi R^2}{2EJ}.$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

В разделе курса «Геометрические характеристики плоских сечений» для вычисления статических моментов, осевых, полярных и центробежных моментов инерции плоских фигур вычисляются определенные интегралы.

Вычисление осевого момента инерции треугольника относительно оси, проходящей через его основание.

Этапы вычисления:



$$1. dF = b(y) \cdot dy;$$

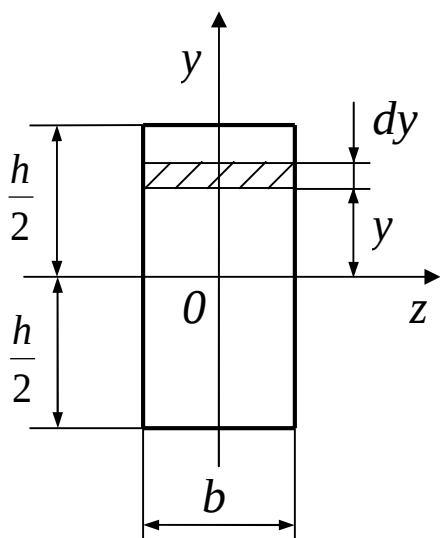
$$2. \frac{h-y}{b(y)} = \frac{h}{b}; \quad b(y) = \frac{b}{h}(h-y);$$

$$3. dF = \frac{b}{h}(h-y)dy;$$

$$4. J_z = \int_F y^2 dF = \frac{b}{h} \int_0^h y^2 (h-y) dy = \frac{bh^3}{12}.$$

$$\text{Следовательно, } J_z = \frac{bh^3}{12}.$$

Вычисление момента инерции прямоугольника относительно центральной оси z .



Выделена элементарная площадка в виде узкого прямоугольника. Ширина элемента b , высота – dy . Следовательно, площадь $dF = b \cdot dy$; момент инерции равен:

$$J_z = \int_F y^2 dF = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}.$$

4.1. Интеграл

Функция $F(x)$ называется **первообразной** [1] от $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. Если функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то выражение $F(x) + C$ называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)dx \quad \text{или} \quad \int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{если} \quad F'(x) = f(x).$$

Пример 8. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1; \quad \int \cos x dx = \sin x + C;$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Интегрирование по частям. Если u, v – дифференцируемые функции от x , то $\int u dv = uv - \int v du$.

Пример 9. Найти $\int x \sin x dx$. Положим $u = x, \quad dv = \sin x dx$, тогда $du = dx, \quad v = -\cos x$. Следовательно, $\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$.

Искусство механики – составлять интегрируемые уравнения.

Н.Е. Жуковский

5. ПРИМЕРЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗОГНУТОЙ ОСИ БАЛКИ

Схема балки с жестко защемленным правым концом и свободным левым изображена на рисунке 9.

Дано: l, EJ_z – жесткость балки при изгибе (E – модуль упругости первого рода; J_z – момент инерции относительно оси z); P – сосредоточенная сила. Найти: f – максимальный прогиб балки.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси (упругой линии) балки имеет вид:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_z}$$

где $w(x)$ – перемещение сечения балки с координатой x ; $M(x)$ – изгибающий момент в данном сечении, который в данном случае равен $M(x) = -P(l - x)$.

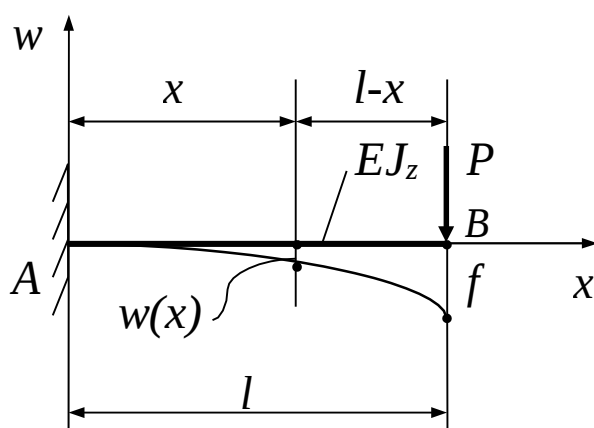


Рисунок 9 – Схема консольной балки

Интегрируя (методом разделения переменных) один раз, получим:

$$\frac{dw}{dx} = \theta(x) = \frac{1}{EJ} \left(-Plx + \frac{Px^2}{2} \right) + C, \quad (1)$$

где $\theta(x)$ – угол поворота сечения балки; C – произвольная постоянная.

Интегрируя уравнение (1) второй раз, находим выражение для прогиба:

$$w(x) = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{Plx^2}{2} + \frac{Px^3}{6} \right) + Cx + D, \quad (2)$$

где D – произвольная постоянная. Постоянные C и D находятся из условия жесткого закрепления левого конца балки (прогиб и угол поворота сечения равны нулю): $x = 0$, $w(0) = 0$, $\theta(0) = 0$.

После подстановки условий закрепления в выражения (1) и (2) получено: $C = 0$, $D = 0$.

Выражение для прогиба балки с координатой x принимает вид

$$w(x) = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{Plx^2}{2} + \frac{Px^3}{6} \right).$$

Максимальный прогиб ($x = l$) равен: $w(l) = f = -\frac{Pl^3}{3EJ}$.

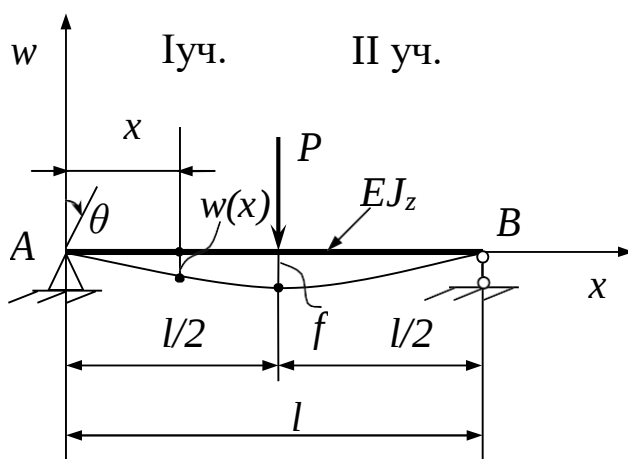
Схема балки с шарнирным закреплением концов и сосредоточенной силой посередине балки изображена на рисунке 10.

Алгоритм решения.

1. Реакции опор при симметричной нагрузке равны: $R_A = R_B = P/2$.

2. На первом участке (I уч.) дифференциальное уравнение изогнутой оси балки $EJ_z \frac{d^2w}{dx^2} = +\frac{P}{2} \cdot x$, которое после интегрирования один раз

$$EJ_z \frac{dw}{dx} = +\frac{P}{4} \cdot x^2 + C.$$



Дано: P, EJ_z, l .

Найти: f .

Рисунок 10 – Схема деформирования балки

Интегрируя полученное выражение второй раз, получим:

$$EJ_z w(x) = \frac{Px^3}{12} + Cx + D.$$

Для определения произвольных постоянных C и D должно использоваться условие: при $x = 0$, $w(0) = 0$. Однако, угол поворота сечения на опоре не равен нулю ($\theta_0 \neq 0$). Поэтому следовало бы записать выражение для прогиба на правой опоре ($w(l) = 0$), но для этого необходимо интегрировать дифференциальное уравнение изогнутой оси

балки на втором участке (II уч.) с последующим вычислением новых произвольных постоянных (с учетом условий сопряжения участков).

Решение задачи упрощается в силу симметрии $\theta(l/2) = 0$, т.е.

$$C = -\frac{Pl^2}{16}; \text{ с учетом } w(0) = 0 \text{ получено } D = 0.$$

Таким образом $EJ_z w(x) = \frac{Px^3}{12} - \frac{Pl^2}{16}x$. При $x = \frac{l}{2}$ выражение для прогиба принимает вид $EJ_z w(\frac{l}{2}) = EJ_z f = \frac{Pl^3}{12 \cdot 8} - \frac{Pl^3}{32} = -\frac{Pl^3}{48}$, т.е. окончательно $f = -\frac{Pl^3}{48EJ_z}$.

5.1. Дифференциальные уравнения

Дифференциальным называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные $y', y'', \dots, y^{(n)}$ [2].

Если искомая неизвестная функция зависит от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**, если от нескольких, то уравнение называется **дифференциальным уравнением с частными производными**. Здесь рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения [2].

Общий вид дифференциального уравнения (ДУ) n -го порядка с одной неизвестной функцией:

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение. Например, дифференциальное уравнение $y'' + y = 0$ – второго порядка.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется его **интегрированием**, а график решения – **интегральной кривой**.

Уравнение, разрешенное относительно y' (т.е. $y' = f(x, y)$), имеет бесчисленное множество решений. Решением уравнения $y' = 3x^2$ является $y = x^3 + C$, где $C = \text{const}$.

Чтобы решение ДУ приобрело конкретный смысл, его подчиняют дополнительным условиям. Условие, что при $x = x_0$ функция y должна быть равна заданному числу y_0 , называется **начальным условием** (задача Коши). Начальное условие записывается в виде: $y(x_0) = y_0$.

Пример 10. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $\frac{dy}{dx} = \cos x$. Умножив обе части уравнения на dx , получим $dy = \cos x dx$. Решение $y = \sin x + C$. Функция $y = \sin x + C$, содержащая произвольную постоянную C , называется общим решением уравнения $y' = \cos x$.

Если дифференциальное уравнение имеет вид $P(x)dx + Q(y)dy = 0$ (коэффициент P зависит только от x , коэффициент Q – только от y), то говорят, что **переменные разделены**.

Пример 11. Решить уравнение $\frac{dy}{dx} = 1$. Умножим на dx , получим уравнение с разделенными переменными: $dy = dx$. Интегрируя $\int dy = \int dx$, находим $y = x + C$.

6. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

В курсе сопротивления материалов при изучении методов расчета статически неопределимых систем (балок, рам, ферм) возникает необходимость решения систем линейных алгебраических уравнений. Вполне естественно в этом случае применение ЭВМ.

Рассмотрим пример раскрытия трижды статической неопределимости рамы, показанной на рисунке 11.

Основная система, выбранная путем отбрасывания левой жесткой заделки, при нагружении внешней силой и реакциями называется эквивалентной (рисунок 12).

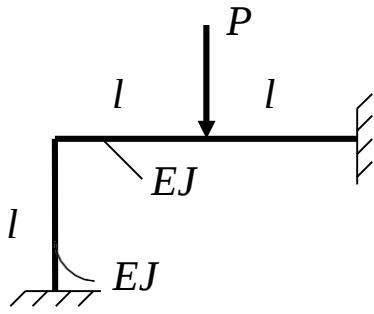


Рисунок 11 – Схема статически неопределимой рамы

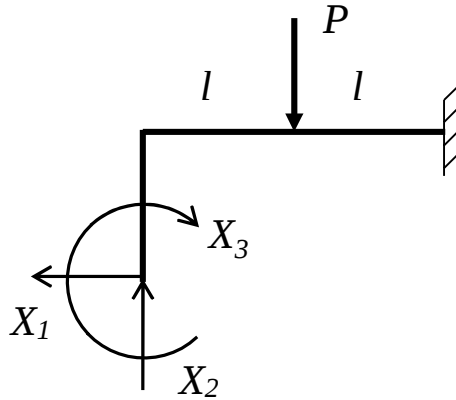


Рисунок 12 – Эквивалентная система

Система канонических уравнений метода сил, после вычисления коэффициентов по соответствующим правилам и сокращений, записывается так:

$$\begin{aligned} \frac{7}{3} l x_1 + 2 l x_2 + \frac{5}{2} x_3 &= -\frac{Pl}{2}, & 2 l x_1 + \frac{8}{3} l x_2 + 2 x_3 &= \frac{5}{6} Pl, \\ \frac{5}{2} l x_1 + 2 l x_2 + 3 x_3 &= \frac{Pl}{2}. \end{aligned}$$

Решение: $x_1 = -\frac{1}{4} P$, $x_2 = \frac{7}{16} P$, $x_3 = \frac{7}{12} Pl$.

7. РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖЕНЕЙ

Определение критической силы $P_{кр}$, при которой сжатый продольной силой стержень теряет устойчивость (выпучивается), связано с раскрытием определителей.

Примечание. Определителем второго порядка $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ называется выражение $a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Определителем третьего порядка $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ называется выра-

жение $a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + b_1 c_2 a_3 - b_1 c_3 a_2 + c_1 a_2 b_3 - c_1 a_3 b_2$.

Схема стержня изображена на рисунке 13. Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня

$$EJ_{\min} w''(x) = Pf - Pw(x) \quad \text{или} \quad w'' + k^2 w = k^2 f, \quad \text{где} \quad k^2 = \frac{P}{EJ_{\min}}.$$

Решение $w(x)$ уравнения и производная $w'(x)$ имеют вид:

$$w(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + f; \quad w'(x) = C_1 k \cos kx - C_2 k \sin kx.$$

Из условий закрепления концов следует: $w(0) = 0$; $w'(0) = 0$; $w(l) = f$.

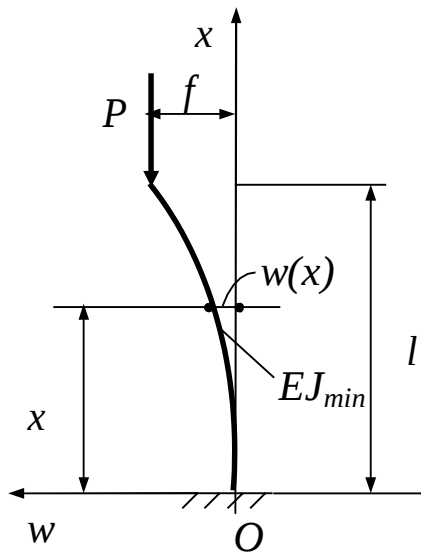


Рисунок 13 – Схема стержня

С учетом условий закрепления определитель системы однородных уравнений, составленный из коэффициентов при неизвестных (C_1, C_2, f):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & 0 \\ \sin kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия определителя получено $\cos kl = 0$, т.е. $kl = (2n+1) \frac{\pi}{2}$. Принимая $n = 0$, получим $k^2 = \frac{\pi^2}{(2l)^2}$. С учетом выраже-

ния для k^2 получено выражение для критической силы $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(2l)^2}$.

В расчетах на устойчивость сжатых стержней обычно используется процедура линейной интерполяции. Для функции $y(x)$ нахождение промежуточных значений функции находится по формуле линейной интерполяции:

$$y(x) \approx y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0), \quad \text{где } h = x_1 - x_0.$$

Эта формула следует из графика, изображенного на рисунке 14.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad y \approx y_0 + (x - x_0) \operatorname{tg} \alpha = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0).$$

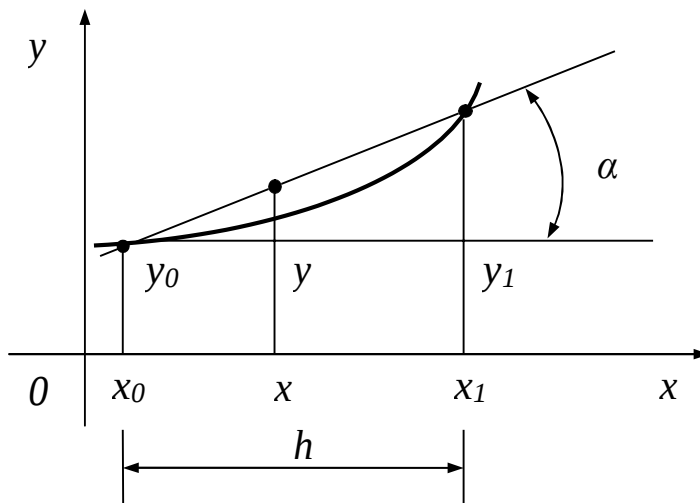


Рисунок 14 – Схема, иллюстрирующая процедуру линейной интерполяции

При традиционном расчете на устойчивость сжатых стержней коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения ϕ задан таблично в зависимости от гибкости стержня λ с шагом $\Delta\lambda = 10$.

В итерационной процедуре необходимо вычислять промежуточные значения ϕ для λ , находящегося внутри интервала. График $\phi(x)$ для получения интерполяционной формулы показан на рисунке 15. По формуле при известных ϕ_1 , ϕ_2 , λ_1 , λ_2 , которые берутся по таблице [7], и найденном в предыдущем значении λ_* находится ϕ_* :

$$\phi_* = \phi_1 - \frac{\phi_1 - \phi_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot (\lambda_* - \lambda_1).$$

Пример: материал – сталь Ст 3, расчетная гибкость $\lambda_* = 121,224$.

По таблице [7] выбираются значения $\varphi_1 = 0,45$ для $\lambda_1 = 120$ и $\varphi_2 = 0,40$ для $\lambda_2 = 130$.

$$\varphi_* = \varphi_1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_* - \lambda_1) = 0,45 - \frac{0,45 - 0,40}{130 - 120} \cdot (121,224 - 120) = 0,444.$$

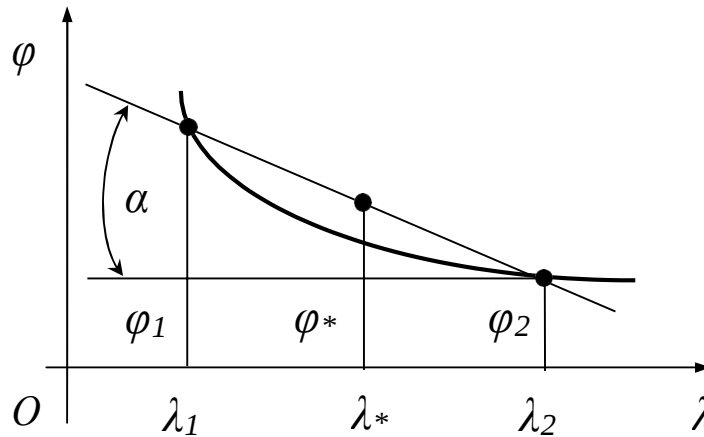


Рисунок 15 – График, иллюстрирующий вычисление φ_*

Метод итераций решения конечного уравнения.

Для поиска корня уравнение $f(x) = 0$ переписывается в равносильной форме $x = \phi(x)$, в качестве нулевого приближения выбирается некоторое значение $x = x_0$. Последующее приближение вычисляется по формуле $x_1 = \phi(x_0)$ и т.д. $x_{n+1} = \phi(x_n)$. Процесс итераций может сходиться к некоторому пределу $\bar{x}$.

В курсе сопротивления материалов при реализации процедуры проекторочного расчета на устойчивость сжатого стержня (подбора площади поперечного сечения стержня), обеспечивающей его устойчивость при заданной продольной силе, используется метод итераций.

Пример. Подобрать по сортаменту двутавровое поперечное сечение стержня длиной 4 м, находящегося под действием центральной сжимающей нагрузки 200 кН. Концы стержня зашечлены. Материал – Ст3. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение. Коэффициент приведения длины ν зависит от характера закрепления стержня; так как оба конца стержня зашечлены, то $\nu = 0,5$.

Расчетная длина стержня $l_{np} = \nu l = 0,5 \cdot 4 = 2$ м.

Поперечное сечение подбирается путем последовательных приближений.

Первое приближение. Коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения $\phi_1 = 0,5$. Площадь поперечного сечения стержня рассчитывается из условия прочности

$$F = \frac{P}{\phi[\sigma]} = \frac{200 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 25 \text{ см}^2.$$

По сортаменту выбирается двутавр №18а с $F = 25,4 \text{ см}^2$ и минимальным радиусом инерции $i_{\min} = i_y = 2,12 \text{ см}$.

$$\text{Гибкость стержня } \lambda_* = \frac{l_{np}}{i_{\min}} = \frac{2}{2,12 \cdot 10^{-2}} = 94,34.$$

По таблице [11,12] с использованием процедуры линейной интерполяции вычисляется фактическое значение коэффициента уменьшения основного допускаемого напряжения ϕ_1' :

$$\phi_1' = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{100 - 90} (94,34 - 90) = 0,65.$$

ϕ_1' значительно отличается от ϕ_1 , следовательно, и напряжение отличается от допускаемого, т.е. необходимо второе приближение.

Второе приближение. Коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения ϕ_2 вычисляется по формуле $\phi_2 = (0,5 + 0,65) / 2 = 0,575$. Площадь поперечного сечения

$$F = \frac{P}{\phi[\sigma]} = \frac{200 \cdot 10^3}{0,575 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2,17 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 21,7 \text{ см}^2.$$

Выбирается двутавр №18 с $F = 23,4 \text{ см}^2$ и минимальным радиусом инерции $i_{\min} = 1,88 \text{ см}$.

$$\text{Гибкость стержня } \lambda_* = \frac{l_{np}}{i_{\min}} = \frac{2}{1,88 \cdot 10^{-2}} = 106,38.$$

По таблице [7] найден коэффициент ϕ_2'

$$\phi_2' = 0,60 - \frac{0,60 - 0,52}{110 - 100} (106,38 - 100) = 0,54.$$

Напряжение $\sigma = \frac{P}{\phi F} = \frac{200 \cdot 10^3}{0,54 \cdot 23,4 \cdot 10^{-4}} = 158,28 \text{ МПа.}$

Недогрузка составляет $\left| \frac{158,28 - 160}{160} \right| \cdot 100\% \approx 1,1\% \leq 5\%.$ Оконча-

тельно для стержня принят двутавр № 18.

8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Определение частот собственных колебаний упругих систем с конечным числом степеней свободы связано с составлением систем дифференциальных уравнений, поиском их решений, раскрытием определителя для нахождения корней полинома, которые являются квадратами частот собственных колебаний.

Для изучения процедуры определения частот достаточно рассмотреть систему с двумя степенями свободы (рисунок 16).

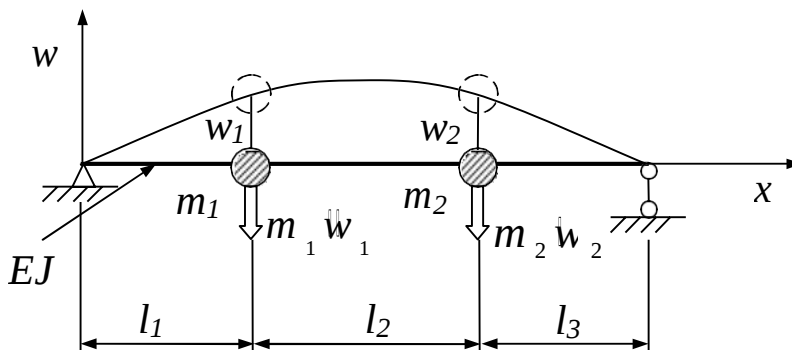


Рисунок 16 – Схема невесомой деформируемой балки с сосредоточенными параметрами

На основании принципа независимости действия сил и принципа Даламбера система уравнений записывается следующим образом:

$$w_1 = -m_1 \ddot{w}_1 \delta_{11} - m_2 \ddot{w}_2 \delta_{12}, \quad w_2 = -m_2 \ddot{w}_2 \delta_{21} - m_2 \ddot{w}_2 \delta_{22},$$

где w_1, w_2 – перемещения сосредоточенных масс m_1 и m_2 ; $\ddot{w}_1, \ddot{w}_2$ – ускорение масс; $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}$ – удельные перемещения, которые вычисляются с использованием интеграла Мора.

После подстановки в систему уравнений частных решений и преобразований получен частотный определитель:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} m_1 \omega^2 - 1 & \delta_{21} m_2 \omega^2 \\ \delta_{21} m_1 \omega^2 & \delta_{22} m_2 \omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Для частного случая с учетом исходных данных $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l_3 = \frac{l}{3}$ и найденных удельных коэффициентов $\delta_{11} = \frac{4l^3}{243EJ}$, $\delta_{12} = \frac{7l^3}{486EJ}$, $\delta_{21} = \delta_{12}$, $\delta_{22} = \delta_{11}$ квадраты частот равны:

$$\omega_1^2 = \frac{162EJ}{5l^3m}, \quad \omega_2^2 = \frac{486EJ}{l^3m}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Курс сопротивления материалов является одной из важнейших дисциплин, формирующих специалиста в области техники. Опираясь на законы теоретической механики, основы математического анализа, лабораторные исследования, сопротивление материалов решает важнейшие вопросы прочности, жесткости и устойчивости деталей, конструкций и сооружений.

Очевидно, что инженер должен свободно владеть материалом из важнейших разделов математики. Понимание физической сущности теории, смысла получаемых расчетных формул должно способствовать их корректному практическому применению.

Методические указания призваны показать, что без освоения курса высшей математики невозможно овладение методами расчета в сопротивлении материалов (механике деформируемого твердого тела)!

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2-х т. Т. 1 / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1976. – 456 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2-х т. Т. 2 / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1978. – 576 с.
3. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
4. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: Наука, 1973. – 872 с.
5. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике / М.Я. Выгодский. – М.: Наука, 1986. – 320 с.
6. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
7. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: в 2-х т. Т.1 / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1979. – 272 с.
8. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: в 2-х т. Т.2 / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1979. – 544 с.
9. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие / И.В. Мещерский. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
10. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 608 с.: ил.
11. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов: Учебник для вузов / Под ред. Г.С. Писаренко. – К.: Выща шк., 1987. – 696 с.
12. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. Учебник для вузов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 512 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Индивидуальные задания

Индивидуальный вариант задания выбирается по последним четырем цифрам зачетной книжки учащегося.

Задание 1. По предложенным данным (таблица 1) постройте в плоской системе ХУ двухопорную балку. Найдите реакции опор.

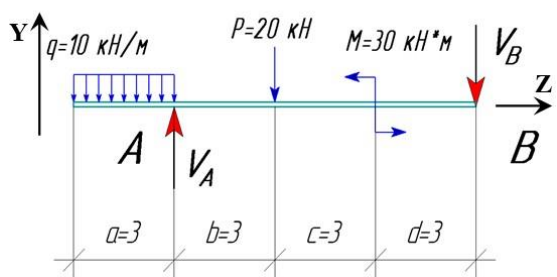
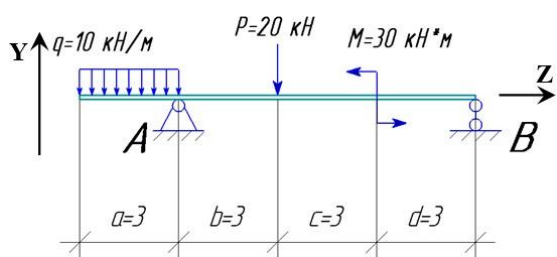
Таблица 1 – Индивидуальное задание

№	l_1	l_2	l_3	l_4	P_1	P_2	P_3	P_4	M_1	M_2	M_3	M_4	q_1	q_2	m
строки	м				кН				кН·м				кН/м		кН·м/м
0	1,1	1,2	1,2	1,1	2,0	3,2	3,2	40	11	10	13	11	2,3	75	2,0
1	1,0	1,0	1,1	0,8	4,4	4,0	2,0	36	9	8	11	10	1,8	115	1,4
2	1,3	1,2	0,8	1,7	2,0	4,8	4,4	16	13	8	13	11	2,0	70	1,8
3	1,1	1,0	1,7	1,4	4,0	2,4	2,0	44	10	11	7	6	1,4	90	1,6
4	1,3	1,0	1,4	1,0	4,0	4,0	3,2	32	12	7	7	9	1,8	75	2,0
5	1,5	1,0	1,0	1,6	4,4	1,6	4,4	36	14	7	7	7	1,8	80	2,1
6	1,1	1,7	0,8	0,9	4,4	3,6	4,8	24	14	6	8	13	1,6	105	2,2
7	1,2	1,4	1,3	1,1	3,2	2,0	4,4	44	14	6	8	13	1,6	105	2,2
8	1,7	1,5	1,7	1,7	4,8	4,8	3,6	36	9	10	8	14	1,7	95	1,5
9	1,7	1,4	1,3	0,9	2,8	4,0	2,4	52	8	8	12	12	1,5	95	1,7
	Ц4	Ц3	Ц2	Ц1	Ц4	Ц3	Ц2	Ц1	Ц4	Ц3	Ц2	Ц1	Ц2	Ц3	Ц4

Задание 2. Постройте эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для данной балки, после чего – подберите двутавр, удовлетворяющий условия прочности.

Задание 3. Используя метод начальных параметров постройте эпюру деформаций и углов закручивания.

Пример.



Определим значения реакций в опорах А и В, составив уравнения:

$$\sum M_A = 0: V_B \cdot 9 - M - q \cdot 3 \cdot 1,5 + P \cdot 3 = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{M + 4,5 \cdot q - 3P}{9} = 1,67 \text{ (кН)}$$

$$\sum M_B = 0: -V_A \cdot 9 + q \cdot 3 \cdot 10,5 + P \cdot 6 + M = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{6 \cdot P + M + 31,5 \cdot q}{9} = 51,67 \text{ (кН)}$$

(!) Выполним проверку: сумма проекций всех сил на ось Y должна быть равна нулю

$$\sum F_{ky} = -30 + V_A - 20 - V_B =$$

$$= -30 + 51,67 - 20 - 1,67 = 0 \text{ (кН)}$$

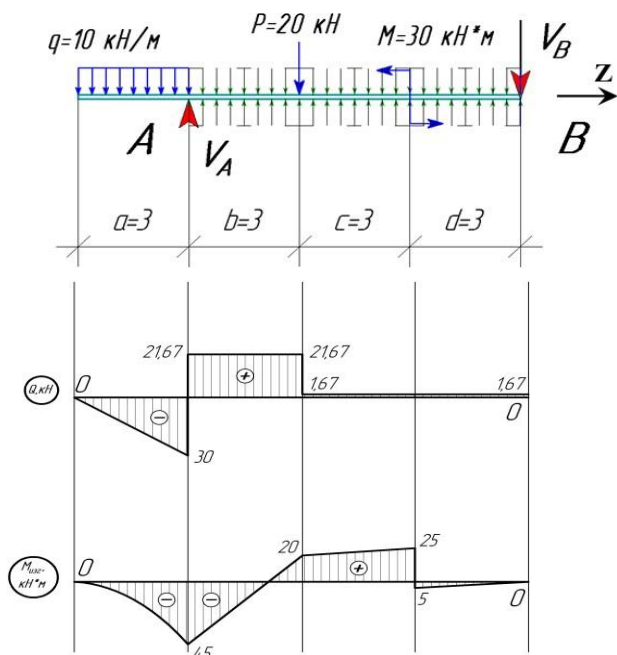
Универсальное уравнение упругой линии имеет вид

$$EJ \cdot y = EJ \cdot y_0 + EJ \cdot \theta_0 \cdot z + \sum_i M \frac{(z - a_M)^2}{2!} + \sum_i P \frac{(z - a_P)^3}{3!} + \sum_i q \frac{(z - a_q)^4}{4!}.$$

Исходя из условий закрепления (отсутствие вертикальных перемещений в опорах А и В), найдем значения:

$$(1) EJ \cdot y(3) = 0;$$

$$(2) EJ \cdot y(12) = 0.$$



Преобразуем для нашей универсальное уравнение упругой линии. При этом знаки "+" и "-" определяем исходя из правила моментов.

Мысленно прикладываем на части балки без равномерно распределенной нагрузки интенсивности q идентичную ей, но противоположно направленную.

$$EJ \cdot y = EJ \cdot y_0 + EJ \cdot \theta_0 \cdot z - M \frac{(z-9)^2}{2!} + V_A \frac{(z-3)^3}{3!} - P \frac{(z-6)^3}{3!} - V_B \frac{(z-12)^3}{3!} - q \cdot \frac{z^4}{4!} + q \cdot \frac{(z-3)^4}{4!} \quad (3)$$

- Переписываем выражение (3) с учётом (1) и (2)
- Переписываем **только те элементы**, где выражение в скобках должны быть положительными (**больше нуля**) при подстановке Z

$$y(3): EJ \cdot y_0 + EJ \cdot \theta_0 \cdot 3 - 10 \frac{3^4}{4!} = 0$$

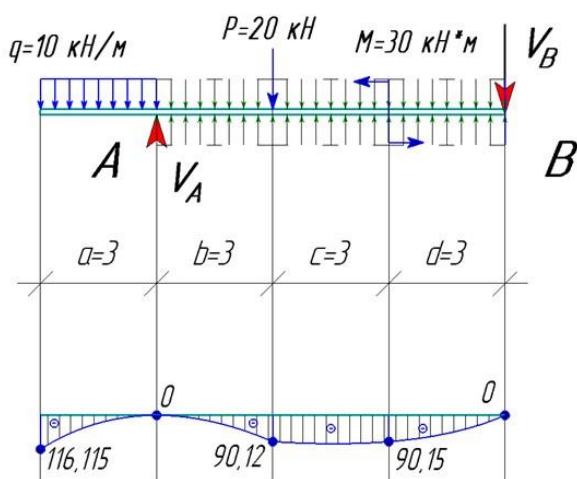
$$y(12): EJ \cdot y_0 + EJ \cdot \theta_0 \cdot 12 - 30 \frac{3^2}{2!} + 51,67 \frac{9^3}{3!} - 20 \frac{6^3}{3!} - 10 \frac{12^4}{4!} + 10 \frac{9^4}{4!} = 0$$

Решив эту систему, найдем начальные параметры:

$$\Rightarrow \begin{aligned} EJ \cdot \theta_0 &= 49,955 \\ EJ \cdot y_0 &= -116,115 \end{aligned}$$

Перепишем (3) с известными начальными параметрами:

$$EJ \cdot y = -116,115 + 49,955 \cdot z - 30 \frac{(z-9)^2}{2!} + 51,67 \frac{(z-3)^3}{3!} - 20 \frac{(z-6)^3}{3!} - 1,67 \frac{(z-12)^3}{3!} - 10 \frac{z^4}{4!} + 10 \frac{(z-3)^4}{4!}.$$



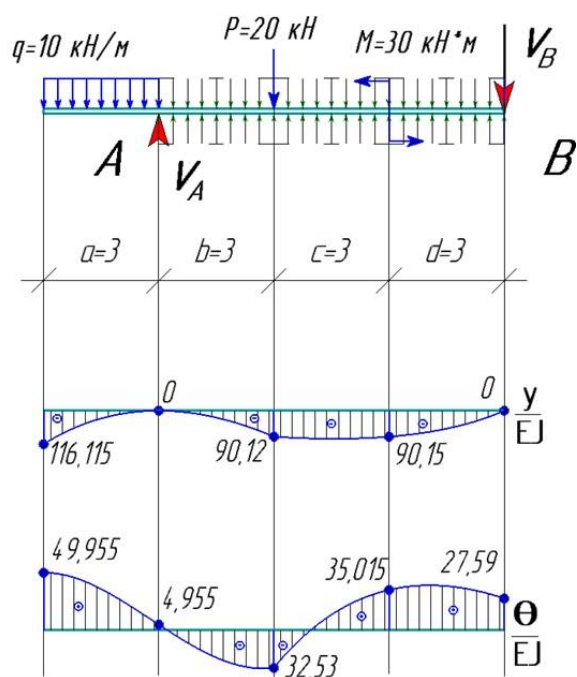
$z = 6:$

$$EJ \cdot y = -116,115 + 49,955 \cdot 6 + 51,67 \frac{(6-3)^3}{3!} - 10 \frac{(6-0)^4}{4!} + 10 \frac{(6-3)^4}{4!} = -90,12;$$

$$y(6) = \frac{-90,12}{EJ};$$

$$z = 9: EJ \cdot y = -116,115 + 49,955 \cdot 9 + 51,67 \frac{(9-3)^3}{3!} - 20 \frac{(9-6)^3}{3!} - 10 \frac{(9-0)^4}{4!} + 10 \frac{(9-3)^4}{4!} = -90,15; \quad y(9) = \frac{-90,15}{EJ};$$

$$z = 12: y(12) = \frac{0}{EJ} = 0;$$



$$\theta(3) = \frac{4,955}{EJ};$$

Вычисляем прогибы на интервалах

$z \in [0;12]$, при этом Перепишем только те элементы, где выражение в скобках должны быть положительными (больше нуля) при подстановке Z

$$z = 0:$$

$$EJ \cdot y = -116,115; \quad y(0) = \frac{-116,115}{EJ};$$

$$z = 3:$$

$$EJ \cdot y = -116,115 + 49,955 \cdot 3 - 10 \frac{3^4}{4!} = 0;$$

Для определения углов поворота про- дифференцируем универсальное уравне- ние упругой линии для нашей балки:

$$EJ \cdot \theta = 49,955 - 30(z-9) + 51,67 \frac{(z-3)^2}{2!} - 20 \frac{(z-6)^2}{2!} - 1,67 \frac{(z-12)^2}{2!} - 10 \frac{z^3}{3!} + 10 \frac{(z-3)^3}{3!}.$$

Аналогичным образом находим θ :

$$z = 0: EJ \cdot \theta = 49,955; \quad y(0) = \frac{49,955}{EJ};$$

$$z = 3: EJ \cdot \theta = 49,955 - 10 \frac{3^3}{3!} = 4,955;$$

$$\underline{z=6:} \quad EJ \cdot \theta = 49,955 + 51,67 \frac{3^2}{2!} - 10 \frac{6^3}{3!} + 10 \frac{3^3}{3!} = -32,53; \quad \theta(6) = \frac{-32,53}{EJ};$$

$$\underline{z=9:} \quad EJ \cdot \theta = 49,955 + 51,67 \frac{6^2}{2!} - 20 \frac{3^2}{2!} - 10 \frac{9^3}{3!} + 10 \frac{6^3}{3!} = 35,015; \quad \theta(9) = \frac{35,015}{EJ};$$

$$\underline{z=12:} \quad EJ \cdot \theta = 49,955 - 30 \cdot 3 + 51,67 \frac{9^2}{2!} - 20 \frac{6^2}{2!} - 10 \frac{12^3}{3!} + 10 \frac{9^3}{3!} = 27,59;$$

$$\theta(12) = \frac{27,59}{EJ}.$$

**МАТЕМАТИКА
В КУРСЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ
МАТЕРИАЛОВ**

*Методические указания
по выполнению самостоятельных работ*

Составители: **Бохонский** Александр Иванович,
Рыжков Александр Игоревич

В авторской редакции

Изд. № 46/2023. Объем 2 п.л. Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 1,96.
РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»