

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Севастопольский государственный университет»

Л. Н. ПИЧУГОВА, Н. К. КОРНЕЕВА

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Методические указания
для самостоятельной работы студентов
строительных и механических
специальностей и направлений
всех форм обучения

Севастополь
СевГУ
2023

УДК 539.3/.6(075.8)
ББК 30.121я73
ПЗ64

Рецензент:

Тараховский А. Ю., канд. техн. наук

Пичугова Л. Н.

ПЗ64 Устойчивость сжатых стержней : методические указания для самостоятельной работы студентов строительных и механических специальностей и направлений всех форм обучения / Л. Н. Пичугова, Н. К. Корнеева ; Севастопольский государственный университет. – Севастополь : СевГУ, 2023. – 30с.

Данные методические указания рекомендуются студентам строительных и механических специальностей и направлений для всех форм обучения для самостоятельной работы при подготовке к экзаменам, практическим занятиям и лабораторным работам, для выполнения учебных заданий и расчетно-графических работ.

УДК 539.3/.6(075.8)
ББК 30.121я73

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании кафедры «Цифровое проектирование» протокол № 7 от 30.03.2023 г.

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет, 2023
© Пичугова Л. Н., Корнеева Н. К., 2023

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данные методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет», обучающихся по направлениям:

- 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»;
- 14.05.02 «Атомные станции, проектирование, эксплуатация и инжиниринг»;
- 18.03.01 «Химическая технология»;
- 14.03.01 «Ядерная энергетика и теплофизика»;
- 16.03.03 «Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения»;
- 26.05.06 «Эксплуатация судовых энергетических установок»;
- 08.03.01 «Строительство»;
- 26.05.07 «Эксплуатация судового электрооборудования и средств автоматики».

Настоящие методические указания содержат теоретический материал по теме «Устойчивость сжатых стержней». Подробно рассмотрены задачи по определению величины допускаемой силы, коэффициента запаса устойчивости и проектированию стержневых элементов. Примеры дополнены справочными материалами. Представлены тестовые задания.

1. УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ. КРИТИЧЕСКАЯ СИЛА

К числу задач курса помимо рассмотренных ранее расчетов на прочность и жесткость относятся также расчеты на устойчивость. Расчет на устойчивость имеет первостепенное значение для тех элементов конструкций, которые представляют собой сравнительно длинные и тонкие стержни, тонкие пластины и оболочки.

Напомним основные понятия о видах равновесия, известные из курса теоретической механики.

Устойчивое равновесие – это равновесие, при котором тело, выведенное из положения равновесия и предоставленное самому себе, возвращается в прежнее положение. Примером может служить шарик, который положен на сферическую поверхность, как показано на рис. 1, а.

Неустойчивое равновесие – это равновесие, при котором тело, выведенное из положения равновесия и предоставленное самому себе, будет еще больше отклоняться от положения равновесия (рис. 1, б).

Безразличное равновесие – это равновесие, при котором тело, выведенное из положения равновесия и предоставленное самому себе, остается в равновесии и в новом положении (рис. 1, в).

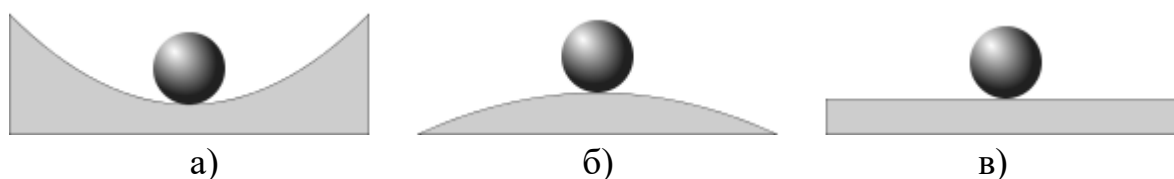
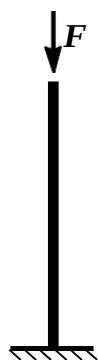


Рис. 1

Для задач теоретической механики характерно, что вид равновесия не зависит от значений действующих на тело сил, в частности в рассматриваемом примере не зависит от веса шарика. В сопротивлении материалов, основным является установление зависимости вида равновесия от сил, действующих на элемент конструкции.

Остановимся на исследовании устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатых стоек, таких, как на рис. 2.



— Стойка —
вертикально ориентированный стержень, работающий
на сжатие

Рис. 2. Стойка

— Устойчивость —

способность технического объекта противостоять усилиям, стремящимся вывести его из исходного состояния статического или динамического равновесия

При эксплуатации конструкция может подвергаться воздействиям, которые стремятся вывести её из состояния равновесия. Эти воздействия называются **возмущениями**.

— Положение равновесия устойчиво —

если после прекращения возмущающих действий система возвращается к исходному состоянию

Если система не возвращается к исходному положению равновесия, то оно (положение равновесия) является неустойчивым.

Одно и то же положение равновесия может быть устойчивым и может быть неустойчивым в зависимости от сочетания параметров системы.

Рассмотрим стойку, изображённую на рис. 3.

Стойка длины l сжата силой F и находится в состоянии равновесия. При возникновении возмущений в поперечном направлении стойка изгибается.

Пусть после прекращения действия возмущений стойка колеблется относительно своего прямолинейного положения равновесия, причём со временем эти колебания затухают, и стойка возвращается к первоначальному состоянию (рис. 3, а). Это значит, что сочетание длины l , формы и размеров поперечного сечения и величины силы F таково, что прямолинейное положение равновесия устойчиво.

Если сделать стойку чрезмерно тонкой (рис. 3, б) или увеличить силу F (рис. 3, в) до некоторого значения, то прямолинейное положение равновесия становится неустойчивым. Стойка изгибается и занимает новое (криволинейное) положение равновесия.

В таких случаях говорят, что при определённом сочетании параметров имеет место потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия.

— Потеря устойчивости —

переход от устойчивого состояния равновесия к неустойчивому

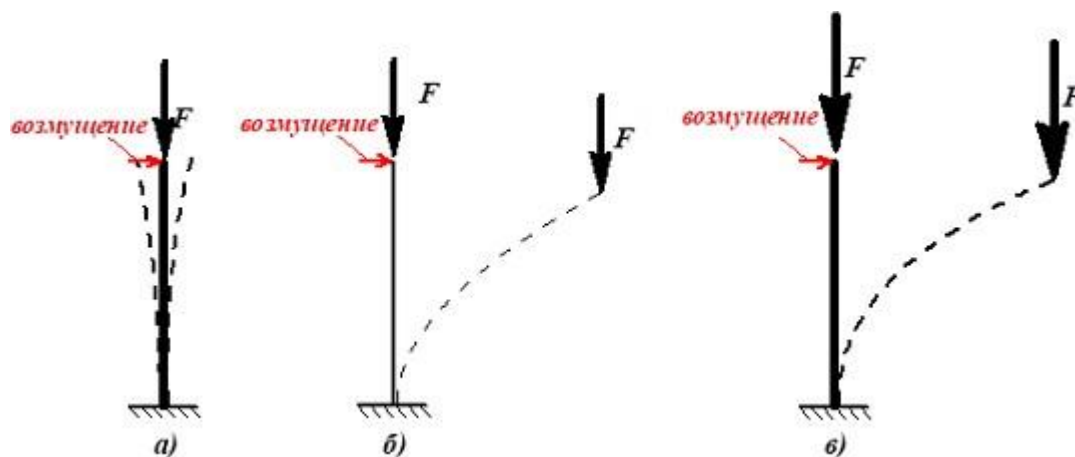


Рис. 3. а – устойчивая форма; б – неустойчивая из-за слишком большой гибкости; в – неустойчивая, из-за слишком большой силы

Параметры, характеризующие переход от устойчивого состояния равновесия к неустойчивому, называются критическими. В частности, если параметром является сила, то

— **Критическая сила** —
сила, превышение которой приводит к потере устойчивости
прямолинейной формы равновесия

При расчёте на устойчивость рабочая нагрузка F назначается как n – я доля критической силы $F_{кр}$, причём коэффициент запаса по устойчивости равен:

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} . \quad (1)$$

2. ЗАДАЧА ЭЙЛЕРА

Итак, для расчёта на устойчивость необходимо знать значение критической силы. Леонард Эйлер в 1744 году впервые решил задачу определения критической силы для двухопорной стойки (рис. 4, а), впоследствии названной эйлеровой стойкой.

Поскольку на стойку действует продольная сила F , то поперечные реакции опор равны нулю.

Допустим, что стойка вследствие потери устойчивости изогнётся и примет форму, показанную на рис.4,а пунктиром.

Рассмотрим равновесие верхней части изогнутой стойки (рис. 4, б).

$$\begin{aligned} \sum Y_i &= 0; \quad Q - R = 0; \Rightarrow Q = 0 \\ \sum Z_i &= 0; \quad F - N = 0; \Rightarrow N = F \\ \sum M_0 &= 0; \quad -M - N \cdot y = 0; \Rightarrow M = -N \cdot y \text{ или } M = -F \cdot y \end{aligned}$$

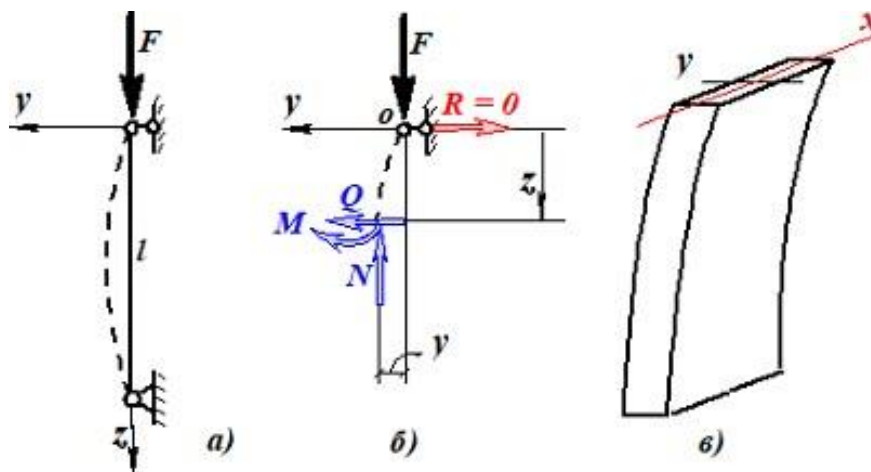


Рис. 4

Для того чтобы выявить форму кривой, которая стала новой формой равновесия после потери устойчивости, рассмотрим решение дифференциального уравнения изогнутой оси балки, полученное на лекции "Изгиб прямого бруса". Поскольку изгиб происходит относительно оси x , то это уравнение имеет вид

$$y'' = \frac{M_x}{EJ_x}$$

Момент в поперечном сечении $M_x = M = -F \cdot y$ подставим в это дифференциальное уравнение.

$$y'' + \frac{F}{EJ_x} \cdot y = 0$$

Все величины, составляющие дробь $F/(EJ_x)$, положительные, поэтому и

$$k^2 = \frac{F}{EJ_x} > 0$$

В результате замены, получим однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + k^2 y = 0,$$

которое имеет решение : $y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz$

Рассмотрим граничные условия.

При $z = 0$; $y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

При $z = l$; $y = 0 \Rightarrow C_1 \sin kl = 0$

$C_1 \neq 0$, потому что при $C_1 = 0$ получаем прямолинейную форму равновесия: $y = 0 \cdot \sin kz + 0 \cdot \cos kz = 0$, а целью наших поисков является криволинейная форма.

Остаётся $\sin kl = 0$, а это возможно при $kl = 0, \pi, 2\pi \dots n\pi$

$kl = 0$ даёт нам прямолинейную форму равновесия. Рассмотрим $kl = \pi$.

Из $k^2 = \frac{F}{EJ_x}$ получим $k = \sqrt{\frac{F}{EJ_x}}$, откуда $kl = \sqrt{\frac{F}{EJ_x}} \cdot l = \pi$.

Тогда значение критической силы:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_x}{\ell^2}.$$

Поскольку изгиб происходит относительно оси с наименьшим моментом инерции (см. рис. 4, в), и не всегда эту ось обозначают "х", то принято в формуле для определения критической силы писать не J_x , а J_{min} .

Итак, мы получили формулу Эйлера.

— Формула Эйлера —

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{\ell^2}$$

(2)

3. ЗАВИСИМОСТЬ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ ОТ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ. ОБОБЩЁННАЯ ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Стержень, шарнирно закреплённый по концам (эйлерова стойка) после потери устойчивости принимает форму полуволны синусоиды. Длина этой полуволны равна l (рис. 5, а).

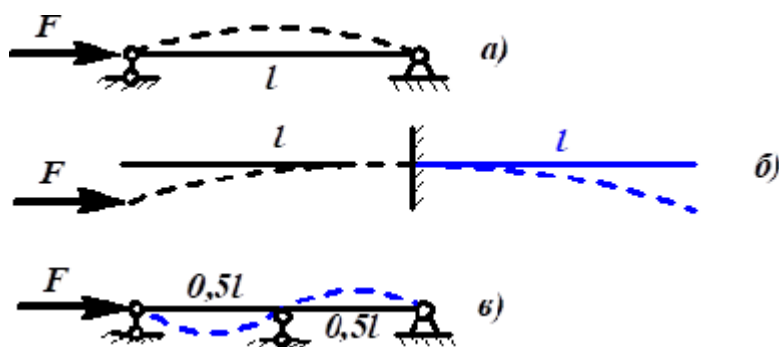


Рис. 5

Консольная стойка (рис. 5, б) при изгибе принимает форму четверти волны синусоиды. Для неё длина полуволны синусоиды равна $2l$. Следовательно, чтобы критическая сила для эйлеровой стойки равнялась критической силе для консольной стойки, необходимо, чтобы длина эйлеровой стойки была бы не l , а $2l$. Для такой стойки

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(2l)^2}.$$

Стойка с дополнительной опорой посередине пролёта изгибается так, что полуволна синусоиды уместается в половине её длины, т.е. для неё полуволна синусоиды равна $0,5l$ (рис. 5, в). Значит, для того, чтобы критическая сила для эйлеровой стойки равнялась критической силе для стойки с промежуточной

опорой, необходимо, чтобы длина эйлеровой стойки была бы не l , а $0,5l$. Для такой стойки

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(0,5l)^2}.$$

Из рассмотренных случаев видно, что вместо фактической длины стержня надо ввести так называемую **приведенную длину** приведенную $l_{прив}$:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(l_{прив})^2}.$$

Приведенную длину удобно выразить через фактическую длину и некоторый коэффициент μ , зависящий от способов закрепления стержня:

$$l_{прив} = \mu \cdot l.$$

— μ —**коэффициент приведения длины**—

показывает, во сколько раз следует увеличить длину эйлеровой стойки, чтобы критическая сила для неё равнялась бы критической силе для стержня с заданным закреплением концов. Он представляет собой величину, обратную числу « n » полуволен синусоиды упругой линии стержня, потерявшего устойчивость: $\mu = \frac{1}{n}$

Тогда обобщённая формула Эйлера, годная для любого вида закрепления концов стойки, принимает вид

— **Обобщённая формула Эйлера**—

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2}$$

(3)

На рис. 6 показаны стойки с различным закреплением концов и соответствующие коэффициенты приведения.

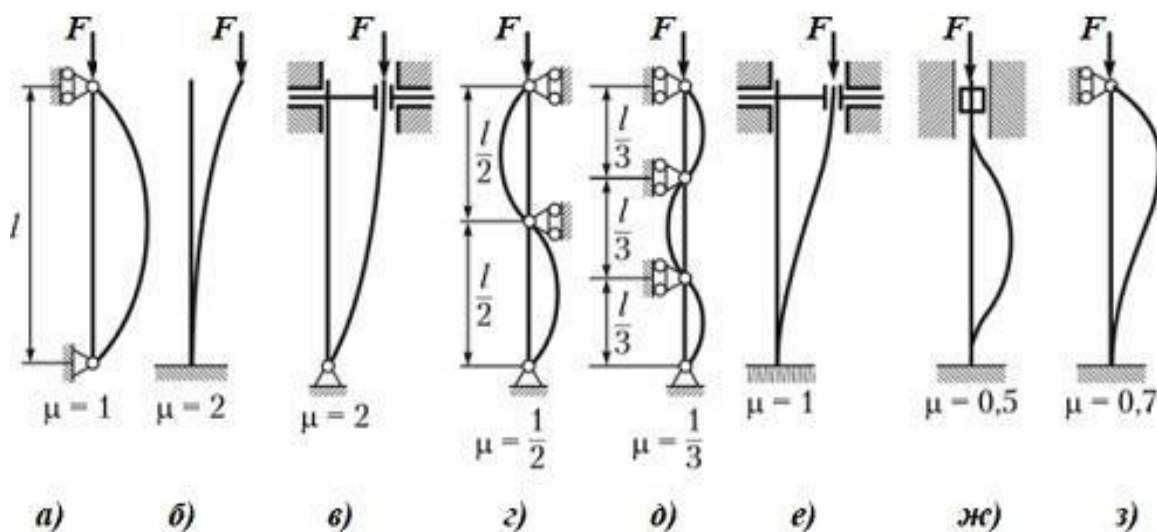


Рис. 6. Криволинейные формы равновесия и коэффициенты приведения длины

4. КРИТИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕНИЕ. ПРЕДЕЛ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА. ФОРМУЛА ЯСИНСКОГО

— Критическое напряжение —

напряжение, возникающее в поперечном сечении стержня при достижении сжимающей силой критического значения

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} \quad (4)$$

Сопоставим критическое напряжение и критическую силу, вычисляемую по формуле Эйлера:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{A \cdot (\mu l)^2} \quad (5)$$

Введём безразмерную величину, называемую *гибкостью стержня*:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} \quad (6)$$

Здесь $i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$ — минимальный радиус инерции сечения.

Тогда для критического напряжения, соответствующего критической силе Эйлера, из (5) получим

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (7)$$

Формула Эйлера получена из дифференциального уравнения изогнутой оси балки $y'' = \frac{M_x}{EJ_x}$, которое составлялось на основании предположения о линейной упругости материала и конструкции, поэтому напряжения, вычисляемые по формуле (5) не могут превышать предел пропорциональности $\sigma_{пц}$, т.е. $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$

Подставляя в это неравенство (7), получим

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц} \quad (8)$$

Обозначив гибкость, соответствующую пределу пропорциональности, и назовём её предельной гибкостью.

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} \quad (9)$$

В качестве примера вычислим значение $\lambda_{пред}$ для углеродистой стали 45, имеющей модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и предел пропорциональности $\sigma_{пц} \approx 270$ МПа:

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{270}} \approx 85 \text{ МПа}$$

из неравенства (8) получим: $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$.

— Предел применимости формулы Эйлера —

Формула Эйлера может быть использована только для стержней **большой гибкости**, причём гибкость стойки λ должна быть больше величины $\lambda_{\text{пред}}$, определяемой механическими свойствами материала:

$$\lambda \geq \lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}}$$

(10)

Эксперименты показывают, что применение формулы Эйлера при $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$, приводит к завышенным величинам критической силы (и критических напряжений) по сравнению с экспериментальными её значениями. Сравнение теоретических (соответствующих эйлеровой критической силе) и экспериментальных напряжений показано на рис. 6.

Для вычисления критических напряжений стержней **средней гибкости**, при $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{\text{пред}}$, (λ_0 — это гибкость при которой критическое напряжение равно пределу текучести или пределу прочности при чистом сжатии), русским инженером Ф.С. Ясинским была предложена простая формула, впрочем, хорошо аппроксимирующая часть кривой зависимости $\sigma_{\text{кр}}(\lambda)$ на рис.7. Для некоторых конструкционных материалов (сталь, дюралюминий, дерево) формула Ф.С. Ясинского имеет вид

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b \lambda, \quad (11)$$

т.е. зависимость критического напряжения от гибкости линейна.

В формулах (11) и (12) **a, b, c** – определяемые опытным путем коэффициенты, постоянные для данного материала, имеют размерность напряжения.

Для стержней из чугунного литья (при $\lambda < \lambda_{\text{пред}} \approx 80$) пользуются параболической зависимостью

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b \lambda + c \lambda^2. \quad (12)$$

Таблица 1 - Материал стойки и его механические характеристики

Материал	E , МПа	$\sigma_{\text{т}}$, МПа	$\sigma_{\text{пц}}$, МПа	Коэффициенты формулы Ясинского a, b, c , МПа			λ_0
				a	b	c	
Сталь Ст2	$2 \cdot 10^5$	225	190	264	0,7	—	60
Сталь Ст3	$2 \cdot 10^5$	240	200	310	1,14	—	60
Сталь 20	$2 \cdot 10^5$	265	240	328	1,15	—	60
Сталь 45	$2 \cdot 10^5$	285	270	449	1,67	—	52
Серый чугун	$1,1 \cdot 10^5$	230	210	776	12	0,05	10
Дюралюмин Д16	$0,73 \cdot 10^5$	320	275	406	1,83	—	30
Сосна вдоль волокон	$0,1 \cdot 10^5$	32	30	29	0,19	—	—

Формула (12) применима при $\sigma_{кр} < \sigma_{пч.с.}$, например, для чугуна СЧ15-12 $\sigma_{пч.с.} \approx 650 \text{ МПа}$ и $\lambda_0 = 10$.

Если не известны коэффициенты a, b, c можно воспользоваться приближенной зависимостью

$$\sigma_{кр} = \sigma_{пред} - (\sigma_{пред} - \sigma_{пц}) \frac{\lambda^2}{\lambda_{пред}^2}, \quad (13)$$

где $\sigma_{пред}$ — предельное напряжение материала при сжатии (для хрупкого материала — предел прочности $\sigma_{Всж}$; для пластичного материала — предел текучести $\sigma_{Тсж}$), λ — гибкость стержня, $\lambda_{пред}$ — предельная гибкость.

Таким образом, способ вычисления критических напряжений зависит от величины гибкости стойки.

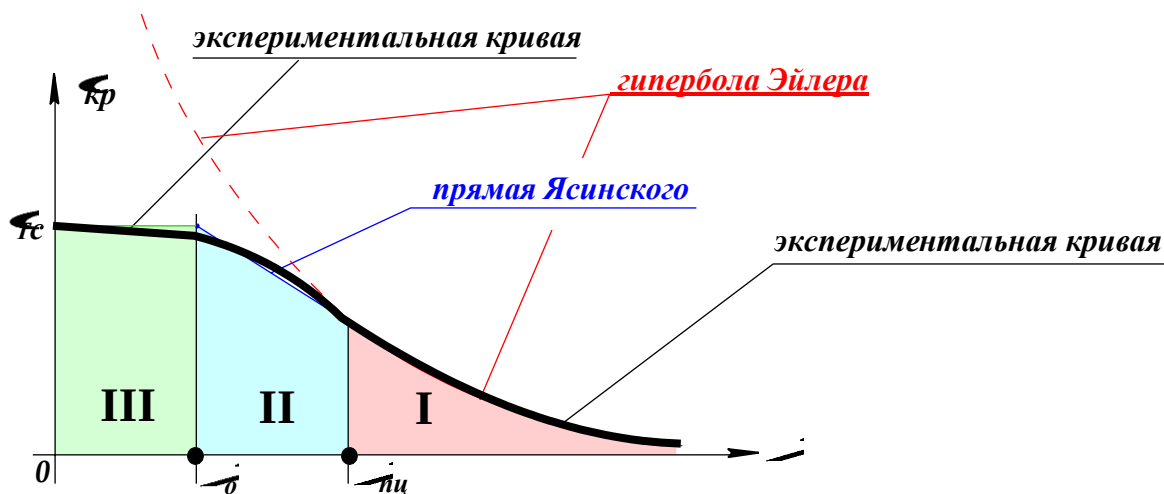


Рис. 7. Экспериментальные и расчётные зависимости $\sigma_{кр}(\lambda)$

I. Если гибкость большая $\lambda \geq \lambda_{пц}$, стойка теряет устойчивость при критических напряжениях, вычисляемых по формуле Эйлера: $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$. При этом напряжения не превышают предела пропорциональности.

II. Если гибкость средняя ($\lambda_0 < \lambda < \lambda_{пред}$), то стойка теряет устойчивость при критических напряжениях, вычисляемых Ясинского: $\sigma_{кр} = a - b\lambda$. При этом напряжения выходят за предел пропорциональности и даже за предел упругости, поэтому могут наблюдаться упруго-пластические деформации.

III. Если гибкость малая ($\lambda \leq \lambda_0$), стойка не теряет устойчивость; прежде чем это произойдёт, она разрушится из-за достижения напряжениями предельных величин. Поэтому критические напряжения могут быть приравнены к предельным напряжениям. Для пластичных материалов предельным напряжением является предел текучести при сжатии, и $\sigma_{кр} = \sigma_{Тсж}$, а для хрупких материалов — предел прочности при сжатии, и $\sigma_{кр} = \sigma_{пч.с.}$.

В зависимости от постановки задачи различают следующие виды расчетов на устойчивость.

Проверочный, при котором определяется фактический коэффициент запаса устойчивости n_y и сравнивается с требуемым или нормативным его значением $[n_y]$:

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} \geq [n_y]. \quad (14)$$

Определение допускаемой нагрузки:

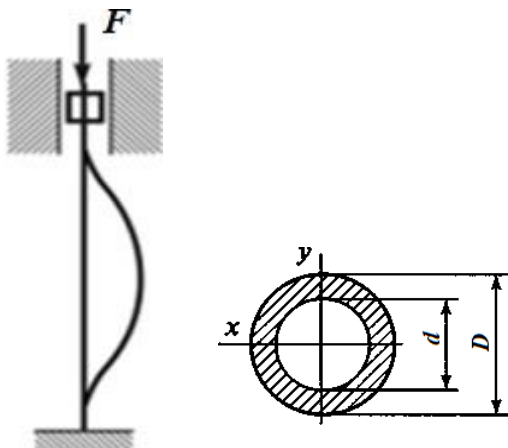
$$[F] = \frac{F_{кр}}{[n_y]}. \quad (15)$$

Проектный расчет :

$$J_{min} = \frac{F[n_y](\mu l)^2}{\pi^2 E}. \quad (16)$$

Пример 1.

Проверить на устойчивость сжатую стойку, длиной $l = 4\text{ м}$, трубчатого сечения из хромомолибденовой стали $\sigma_{пц} = 540\text{ МПа}$; $E = 2,15 \cdot 10^5\text{ МПа}$, если требуемый коэффициент запаса устойчивости $[n_y] = 3,5$. Размеры поперечного сечения : $D = 76\text{ мм}$, $d = 64\text{ мм}$. Сжимающая нагрузка 120 кН.



Решение. По формуле (9) определяем предельную гибкость материала стойки

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2,15 \cdot 10^5}{540}} = 62,7.$$

Для определения гибкости стойки вычисляем момент инерции ее поперечного сечения (в данном случае любая центральная ось главная и все центральные моменты инерции равны между собой):

$$J_{min} = \frac{\pi D^4}{64} \cdot (1 - \alpha^4) = \frac{3,14 \cdot 7,6^4}{64} (1 - 0,842^4) = 81,4 \text{ см}^4 ;$$

$$\alpha = \frac{d}{D} = \frac{64}{76} = 0,842$$

затем площадь поперечного сечения

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \cdot (1 - \alpha^2) = \frac{3,14 \cdot 7,6^2}{4} (1 - 0,842^2) = 13,19 \text{ см}^2;$$

и радиус инерции сечения:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{81,4}{13,19}} = 2,48 \text{ см} .$$

Коэффициент приведения длины $\mu = 0,5$ (см. рис. 6)

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{0,5 \cdot 4 \cdot 10^2}{2,48} = 80,6 .$$

Таким образом, $\lambda = 80,6 > \lambda_{пред} = 62,7$, т.е. применима формула Эйлера.

Значение критической силы определяем по формуле Эйлера (3):

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2,15 \cdot 10^{11} \cdot 81,4 \cdot 10^{-8}}{(0,5 \cdot 4)^2} = 431,4 \cdot 10^3 \text{ Н} .$$

Определяем действительный (расчетный) коэффициент запаса устойчивости и сравниваем с заданным:

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{431,4}{120} = 3,59 > [n_y] = 3,5 .$$

Коэффициент устойчивости стойки достаточен.

Пример 2. Определить допускаемую величину сжимающей силы для стержня круглого поперечного сечения $d = 8 \text{ см}$, длиной $l = 1,8 \text{ м}$. Концы стержня закреплены шарнирно $\mu = 1$, при $[n_y] = 2$. Материал сталь Ст3, для неё $\sigma_{пц} = 100 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Решение.

Определяем предельную гибкость:

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} \approx 100 .$$

Минимальный радиус инерции круглого сечения:

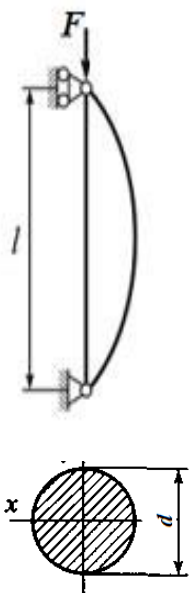
$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4 \cdot 4}{64 \pi d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{8}{4} = 2 \text{ см} ,$$

расчетную гибкость, с учётом заданного закрепления:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1 \cdot 180}{2} = 90 .$$

Т.к $\lambda = 90 < \lambda_{пред} = 100$.

Следовательно, формула Эйлера здесь не применима, стержень средней гибкости.



По формуле Ясинского (11) определяем критические напряжения, приняв по табл.1 для материала стойки Ст3 : $a = 310$ МПа и $b = 1,14$ МПа.

$$\sigma_{кр} = a - b \lambda = 310 - 1,14 \cdot 90 = 207,4 \text{ МПа.}$$

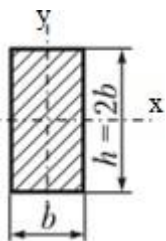
Из формулы (5) находим критическую силу для стойки:

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A = 207,4 \cdot 10^6 \cdot \frac{3,14 \cdot 8^2}{4} \cdot 10^{-4} = 1041978 \text{ Н} \approx 1042 \text{ кН.}$$

По формуле (15) находим допускаемое значение нагрузки:

$$[F] = \frac{F_{кр}}{[n_y]} = \frac{1042}{2} = 521 \text{ кН.}$$

Пример 3. Определить размеры прямоугольного сечения, до которого расчет можно вести по формуле Эйлера. Концы закреплены шарнирно $\mu = 1$. Принять $\sigma_{пц} = 190$ МПа; $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа. Длина стойки $l = 2$ м.



Решение.

Для использования формулы Эйлера необходимо, чтобы выполнялось условие: $\lambda > \lambda_{пред}$.

Определяем предельную гибкость:

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{190}} = 104,4;$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} > 104,4.$$

Потеря устойчивости происходит в плоскости минимальной жесткости, в нашем случае относительно оси y .

$$J_y = J_{min} = \frac{hb^3}{12} = \frac{2b \cdot b^3}{12} = \frac{b^4}{6};$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{b^4}{6 \cdot 2b^2}} = \frac{b}{\sqrt{12}};$$

$$\lambda = \frac{\mu l \sqrt{12}}{b} > 104,4;$$

$$b \geq \frac{\mu l \sqrt{12}}{104,4} = \frac{1 \cdot 200 \cdot \sqrt{12}}{104,4} = 6,63 \text{ см.}$$

5. РАСЧЕТ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПО КОЭФФИЦИЕНТАМ ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА

Для стержней малой гибкости $\lambda \leq \lambda_o$ расчет производят не на устойчивость, а на прочность. Для них критическое напряжение считается постоянным:

$$\sigma_{кр} = \sigma_T \quad \text{или} \quad \sigma_{кр} = \sigma_{пч.с}.$$

При расчёте сжатой стойки на устойчивость применяется практическая формула, согласно которой допускаемая нагрузка определяется

$$[F] = \varphi[\sigma]A,$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение на сжатие для материала стержня, коэффициент снижения основного допускаемого напряжения или коэффициент продольного изгиба, зависящий от материала стержня и его гибкости. Для строительных конструкций значения этих коэффициентов включены в строительные нормы и правила проектирования (СНиП), некоторые значения коэффициента φ в СНиПу указаны в табл.2.

Таблица 2 - Значения коэффициента продольного изгиба

Гибкость $\lambda = \frac{\mu l}{i}$	φ для				
	сталей Ст 2,3,4	стали Ст 5	стали СПК	чугуна	дерева
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,37	0,30	—	0,22
130	0,40	0,32	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08
220	0,16	0,15	0,12	—	0,07

Произведение $\varphi[\sigma]$ называют допускаемым напряжением при расчете сжатых стержней на устойчивость и обозначают $[\sigma_y]$.

Расчет по коэффициенту φ лишь по форме аналогичен расчету на простое сжатие, по существу это расчет на устойчивость, обеспечивающий работу стержня с тем коэффициентом запаса устойчивости, который предусмотрен при составлении таблиц коэффициента φ

Достоинством рассматриваемого метода расчета является его универсальность в том смысле, что он применим для всех значений гибкости, указанных в таблице коэффициентов φ т.е. независимо от области применимости формулы Эйлера.

Расчет по нормам строительного проектирования может быть:

а) Проверочный расчет:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma]. \quad (17)$$

б) Определение допускаемой нагрузки:

$$[F] = \varphi[\sigma]A. \quad (18)$$

в) Проектный расчет:

$$A = \frac{F}{\varphi[\sigma]}. \quad (19)$$

При проектном расчете необходимо пользоваться методом последовательных приближений, так как в начале расчета значение коэффициента φ , зависящего от гибкости, а следовательно, и от размеров поперечного сечения стержня, неизвестно.

Можно рекомендовать такой ход подбора. Задавшись предварительно произвольным значением φ (от 0,4 до 0,6), определить необходимую площадь. Задавшись далее формой и размерами сечения, определить действительную гибкость стержня λ и соответствующее ей значение φ а затем проверить устойчивость стержня по формуле (17). Если принятое сечение не удовлетворяет условию устойчивости, следует изменить сечение. Последовательными попытками можно добиться близкого совпадения σ_y и $\varphi[\sigma]$; различие между ними не должно превосходить 5 %. Сказанное поясним на примере.

Пример 4. Подобрать квадратное сечение деревянной стойки длиной 3м, сжатой силой $F = 60$ кН, принимая основное допускаемое напряжение $[\sigma] = 9$ МПа. Концы стойки закреплены шарнирно $\mu = 1$.

Решение. Задаемся ориентировочно значением $\varphi_1 = 0,5$. Тогда необходимая площадь сечения :

$$A_1 = \frac{F}{\varphi[\sigma]} = \frac{60 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 9 \cdot 10^6} = 13,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 133 \text{ см}^2.$$

Сторона сечения должна составлять

$$a = \sqrt{A} = \sqrt{133} = 11,53 \text{ см}.$$

Примем брус сечением $11,6 \times 11,6$ см. Момент инерции такого сечения

$$J_{min} = \frac{a^4}{12} = \frac{11,6^4}{12} = 1509 \text{ см}^4.$$

Площадь сечения

$$A = a^2 = 11,6^2 = 134,56 \text{ см}^2.$$

Радиус инерции

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{1509}{134,56}} = 3,35 \text{ см}.$$

Гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1 \cdot 300}{3,35} = 89,5$

По табл.2 (для дерева), интерполируя, получаем

- при $\lambda = 80$; $\varphi_1' = 0,48$;

- при $\lambda = 90$; $\varphi_1' = 0,38$;

Тогда при $\lambda = 89,5$; $\varphi_1' = 0,48 - \frac{0,48-0,38}{10} \cdot 9,5 = 0,385$.

Допускаемое напряжение $[\sigma_y] = \varphi[\sigma] = 0,385 \cdot 9 = 3,465$ МПа.

Действительное напряжение

$$\sigma_y = \frac{F}{A} = \frac{60 \cdot 10^3}{134,56 \cdot 10^{-4}} = 445,9 \cdot 10^4 \text{ Па} = 4,46 \text{ МПа},$$

т.е. больше допускаемого. Следует увеличить размеры сечения.

Второе приближение.

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,385}{2} = 0,443.$$

Тогда

$$A_2 = \frac{F}{\varphi[\sigma]} = \frac{60 \cdot 10^3}{0,443 \cdot 9 \cdot 10^6} = 15 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 150 \text{ см}^2.$$

Сторона сечения должна составлять $a = \sqrt{A} = \sqrt{150} = 12,3$ см.

Примем брус сечением $12,3 \times 12,3$ см. Момент инерции такого сечения

$$J_{min} = \frac{a^4}{12} = \frac{12,3^4}{12} = 1907 \text{ см}^4.$$

Площадь сечения $A = a^2 = 12,3^2 = 151,3 \text{ см}^2$

Радиус инерции $i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{1907}{151,3}} = 3,55 \text{ см}$

Гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1 \cdot 300}{3,55} = 84,5$

По табл. 2 (для дерева), интерполируя, получаем

при $\lambda = 80$; $\varphi_2' = 0,48$;

при $\lambda = 90$; $\varphi_2' = 0,38$;

Тогда при $\lambda = 84,5$; $\varphi_2' = 0,48 - \frac{0,48-0,38}{10} \cdot 4,5 = 0,435$

Допускаемое напряжение $[\sigma_y] = \varphi[\sigma] = 0,435 \cdot 9 = 3,92$ МПа

Действительное напряжение

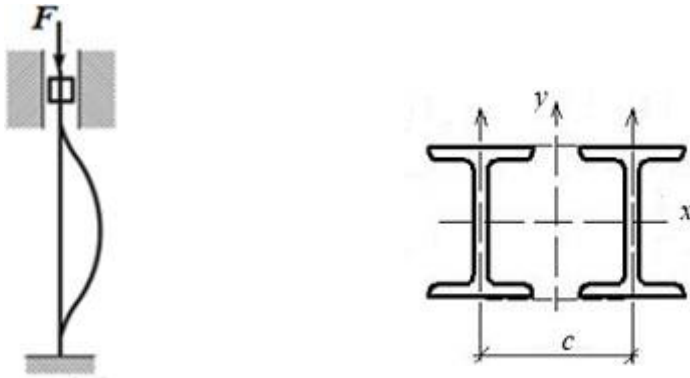
$$\sigma_y = \frac{F}{A} = \frac{60 \cdot 10^3}{151,3 \cdot 10^{-4}} = 396,6 \cdot 10^4 \text{ Па} = 3,96 \text{ МПа},$$

В процентном отношении перенапряжение составляет :

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_y - [\sigma_y]}{[\sigma_y]} \cdot 100\% = \frac{3,96 - 3,92}{3,92} \cdot 100\% = 1\%, \text{ что допустимо.}$$

Окончательно принимаем сечение $12,3 \times 12,3$ см.

Пример 5. Определить допускаемую нагрузку для стойки длиной $l = 7$ м, из стали Ст3, $[\sigma] = 160$ МПа. Принять, что двутавры №10, из которых состоит стойка, надежно связаны между собой и сечение работает как монолитное. Расстояние c между швеллерами выбрать из условия равноустойчивости стойки во всех направлениях. С каким коэффициентом запаса устойчивости работает стойка при нагрузке, равной допускаемой?



Решение. Равноустойчивость стойки во всех направлениях будет обеспечена при равенстве моментов инерции относительно осей x и y . Момент инерции сечения относительно оси x не зависит от расстояния c и определяется непосредственно на основе табличных данных:

$$J_x = J_{x1} + J_{x2} = 198 + 198 = 396 \text{ см}^4,$$

где $J_{x1} = 198 \text{ см}^4$ — момент инерции одного двутавра по ГОСТ 8239–72.

Момент инерции относительно оси y :

$$J_y = 2 \left(J_{y1} + \left(\frac{c}{2} \right)^2 \cdot A_1 \right),$$

где $J_{y1} = 17,9 \text{ см}^4$ — момент инерции двутавра относительно собственной главной центральной оси y_1 ; $A_1 = 12 \text{ см}^2$ — площадь сечения одного двутавра.

Условие равноустойчивости :

$$J_x = J_y,$$

подставляя числовые значения, получаем

$$396 = 2 \left(17,9 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 \cdot 12 \right),$$

откуда $c = 7,75$ см.

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 700}{4,06} = 86,2,$$

где радиус инерции $i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{396}{2 \cdot 12}} = 4,06$ см (т.к. стойка составная, то принимаем удвоенное значение момента инерции и площади)

При $\lambda = 80$; $\varphi = 0,75$;

При $\lambda = 90$; $\varphi = 0,69$;

Тогда при $\lambda = 86,2$; $\varphi = 0,75 - \frac{0,75-0,69}{10} \cdot 6,2 = 0,713$.

Определяем допускаемую нагрузку:

$$[F] = \varphi[\sigma]A = 0,713 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot 24 \cdot 10^{-4} = 274 \cdot 10^3 \text{ Н} = 274 \text{ кН}.$$

Так как гибкость стойки меньше предельной (для СтЗ $\lambda_{\text{пред}} = 100$), то критическую силу определяем по эмпирическому соотношению

$$F_{\text{кр}} = A(a - b \lambda) = 24 \cdot 10^{-4} \cdot (310 - 1,14 \cdot 86,2) \cdot 10^6 = 508 \cdot 10^3 \text{ Н} = 508 \text{ кН}.$$

Определяем коэффициент запаса устойчивости:

$$[n_y] = \frac{F_{\text{кр}}}{[F]} = \frac{508}{274} = 1,85.$$

6. ТЕСТОВЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Если гибкость стойки $\lambda = 90$, а $\lambda_{\text{пред}} = 70$, то по какой формуле будут определяться критические напряжения?

А) $\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$; Б) $\sigma_{\text{кр}} = a - b \lambda$; В) $\sigma_{\text{кр}} = a - b \lambda + c \lambda^2$; Г) верны ответы А и Б.

2. Чему равен осевой момент инерции круглого сечения?

А) $\frac{\pi D^3}{32}$; Б) $\frac{\pi D^4}{64}$; В) $\frac{\pi D^3}{12}$; Г) $\frac{\pi D^3}{16}$.

3. Какая величина отсутствует в формуле Эйлера для определения критической нагрузки $F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot ?}{l^2}$

А) $J_{\min}$; Б) $J_{\max}$; В) μ ; Г) λ .

4. Искривление длинных стержней, сжимаемых продольными силами, называется:

А) поперечным изгибом; Б) продольным изгибом; В) нет правильного ответа

5. Коэффициент приведения длины зависит от:

А) физико-механических свойств материала; Б) вида закреплений концов стержня; В) размеров поперечного сечения; Г) длины стержня.

6. Для стержней средней гибкости значение критической силы определяется:

А) $F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} \cdot A$; Б) $F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}$; В) $F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2}$.

7. Коэффициент запаса по устойчивости определяется:

А) $n_y = \frac{F}{F_{\text{кр}}}$; Б) $n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F}$; В) $n_y = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}$.

8. Как изменится $F_{\text{кр}}$ у сжатого стального стержня длиной l если его изготовить из материала с модулем Юнга в два раза меньшим (например, из меди) и длиной $l/2$?

А) не изменится; Б) увеличится в два раза; В) уменьшится в два раза; Г) увеличится в четыре раза.

9. В каком из случаев произойдёт потеря устойчивости?

А) $F > F_{\text{кр}}$; Б) $F < F_{\text{кр}}$; В) $F = F_{\text{кр}}$.

10. Осевой момент инерции кольца с размерами $d \times D$ равен:

А) $\frac{\pi D^3}{32} \cdot (1 - \alpha^4)$; Б) $\frac{\pi D^4}{64} \cdot (1 - \alpha^4)$; В) $\frac{\pi D^4}{32} \cdot (1 - \alpha^4)$; Г) $\frac{\pi D^3}{16} \cdot (1 - \alpha^4)$.

11. Обобщённая формула Эйлера для определения критической силы имеет вид:

А) $F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{\ell^2}$; Б) $F_{кр} = [\sigma]A$; В) $F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu \ell)^2}$.

12. Минимальный радиус инерции сечения определяется:

А) $\sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$; Б) $\sqrt{\frac{A}{J_{min}}}$; В) $\sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$; Г) $\pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$.

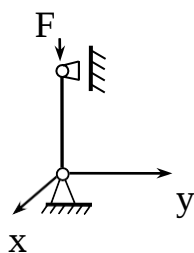
13. Валопровод расположен на пяти равноудалённых друг от друга опорах скольжения. Чему равен коэффициент его приведения длины – μ ?

А) 0,2; Б) 0,25; В) 4; Г) 0,4.

14. Единицы измерения критических напряжений:

А) кН; Б) $\frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$; В) МПа; Г) верны ответы Б и В.

15. Для заданной стойки коэффициент приведения длины равен:



А) 0,7; Б) 1; В) 0,5; Г) 2.

16. Критические напряжения для стоек малой гибкости определяются по формуле

А) $\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A}$; Б) $\sigma_{кр} = a - b \lambda$; В) $\sigma_{кр} = a - b \lambda + c \lambda^2$; Г) верны ответы Б и В.

17. Условие применимости формулы Эйлера для определения критической силы:

А) $\lambda \leq \lambda_{пред}$; Б) $\lambda \geq \lambda_{пред}$; В) нет правильного ответа.

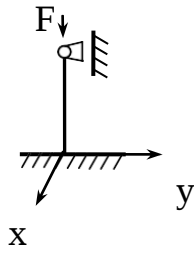
18. У сжатого стержня увеличили длину в $\sqrt{2}$ раза. Из какого материала его нужно изготовить (с каким модулем Юнга), чтобы $F_{кр}$ не изменилась?

А) с модулем в $\sqrt{2}$ большим; Б) с модулем в 4 раза большим;
В) с модулем в 2 раза большим; Г) с модулем в 2 раза меньшим.

19. Формула Эйлера для определения критической силы имеет вид:

А) $F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{\ell^2}$; Б) $[F] = \frac{F_{кр}}{[n_\gamma]}$; В) $F_{кр} = \frac{\pi^2 J_{min}}{\ell^2}$.

20. Для заданной стойки коэффициент приведения длины равен:



- А) 0,7; Б) 1; В) 0,5; Г) 2.

21. Критические напряжения для стоек большой гибкости определяются по формуле:

- А) $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$; Б) $\sigma_{кр} = a - b \lambda$; В) $\sigma_{кр} = a - b \lambda + c \lambda^2$; Г) верны ответы Б и В.

22. Расчетная гибкость стержня определяется:

- А) $\sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$; Б) $\frac{\mu l}{i_{min}}$; В) $\pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$; Г) нет правильного ответа.

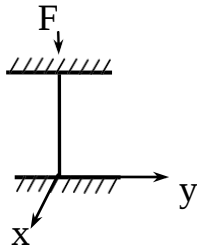
23. Какое дифференциальное уравнение, из теории изгиба, лежит в основе вывода формулы Эйлера?

- А) $y'' = \frac{M_x}{EI_x}$; Б) $y'' = \frac{F}{EI_x}$; В) $y'' = \frac{M_x \cdot y}{I_x}$.

24. Как называется вид равновесия если $F < F_{кр}$?

- А) устойчивое; Б) неустойчивое; В) безразличное.

25. Для заданной стойки коэффициент приведения длины равен:



- А) 0,7; Б) 1; В) 0,5; Г) 2.

26. Укажите формулу Ясинского для определения величины критических напряжений:

- А) $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$; Б) $\sigma_{кр} = a - b \lambda$; В) $\sigma_{кр} = a - b \lambda + c \lambda^2$; Г) верны ответы Б и В.

27. Предельная гибкость определяется:

- А) $\sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$; Б) $\frac{\mu l}{i_{min}}$; В) $\pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$; Г) нет правильного ответа.

28. Шатун из углеродистой стали заменили шатуном из высокоуглеродистой стали. Как изменится $F_{кр}$?

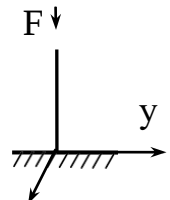
- А) не изменится; Б) увеличится в два раза; В) уменьшится в два раза.

29. Какой вид равновесия наступит если $F > F_{кр}$?

- А) устойчивое; Б) неустойчивое; В) безразличное.

30. Для заданной стойки коэффициент приведения длины равен:

- А) 0,7; Б) 1; В) 0,5; Г) 2.



31. Для стержней средней гибкости значение критической силы определяется:

А) $F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2}$; Б) $F_{кр} = A(a - b \lambda)$; В) $F_{кр} = A(a - b \lambda + c \lambda^2)$;

Г) формулами Б, В (зависит от материала стержня)

32. Предельное значение силы, при которой прямолинейная форма равновесия из устойчивой переходит в неустойчивую называется:

А) поперечной силой; Б) критической силой; В) продольной силой.

33. Гибкость стержня зависит от:

А) верны ответы Б и В; Б) длины и условий закрепления стержня;

В) формы и размеров поперечного сечения; Г) физико-механических свойств материала.

34. Осевой момент инерции квадрата со стороной «а» определяется :

А) $\frac{a^3}{6}$; Б) $\frac{a^4}{12}$; В) $\frac{a^3}{32}$; Г) $\frac{a^4}{6}$.

35. Гвоздь вбит в стену. Чему равен коэффициент приведения длины в первый момент удара ?

А) 0,7; Б) 1; В) 0,5; Г) 2.

36. Если гибкость чугунной стойки $\lambda=70$, а $\lambda_{пред} = 80$, то по какой формуле будут определяться критические напряжения ?

А) $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$; Б) $\sigma_{кр} = a - b \lambda$; В) $\sigma_{кр} = a - b \lambda + c \lambda^2$; Г) верны ответы А и Б.

37. Чему равен коэффициент приведения длины сжатого стержня с одним закреплённым концом, а другим свободным ?

А) 0,7; Б) 1; В) 0,5; Г) 2.

38. В формуле Ясинского $\sigma_{кр} = a - b \lambda$ коэффициенты "а" и "б" имеют размерность :

А) кН; Б) $\frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$; В) МПа; Г) верны ответы Б и В.

39. При каком напряжении справедлива формула Эйлера ?

А) $\sigma_{кр} \geq \sigma_{пц}$; Б) $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$; В) нет правильного ответа.

40. Рейшина прямоугольного сечения имеет размеры $h = 4\text{см}$, $b = 0,4\text{см}$. Во сколько раз её легче изогнуть продольной сжимающей силой плашмя, чем на ребро:

А) 10 раз; Б) 50 раз; В) 5 раз; Г) 100 раз.

41. Используя формулу Эйлера, подобрать по сортаменту на продольную сжимающую нагрузку $F = 125$ кН двутавровое сечение длиной $l = 2,3\text{м}$. Один конец стойки закреплён, второй опёрт шарнирно. Материал стержня – Ст3 ($\sigma_{пц} = 200$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа). Коэффициент запаса устойчивости $[n_y] = 2,5$.

А) двутавр № 10; Б) двутавр № 20; В) двутавр № 18; Г) двутавр № 14 .

42. Два стержня отличаются лишь минимальными моментами инерции сечения : $J_1 = 4J_2$, у какого стержня гибкость больше (меньше) и во сколько раз ?

- А) $\lambda_1 < \lambda_2$ в два раза; Б) $\lambda_1 > \lambda_2$ в два раза;
В) $\lambda_1 < \lambda_2$ в четыре раза; Г) $\lambda_1 > \lambda_2$ в четыре раза.

43. Определить размеры квадратного сечения (сторона квадрата “а”), до которого расчёт на устойчивость можно вести по формуле Эйлера. Концы стержня закреплены шарнирно, $\sigma_{\text{пц}} = 190 \text{ МПа}$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $l = 1,2 \text{ м}$.

- А) $a \approx 4,6 \text{ мм}$; Б) $a \approx 46 \text{ мм}$; В) $a \approx 40 \text{ мм}$; Г) $a \approx 4 \text{ мм}$.

44. Укажите величину предельной гибкости для чугуна, если $E = 1,5 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\sigma_{\text{пц}} = 230 \text{ МПа}$.

- А) 80 ; Б) 70; В) 100 ; Г) 90.

45. Определить диаметр круглого поперечного сечения, до которого расчёт на устойчивость можно вести по формуле Эйлера. Концы стержня закреплены шарнирно. Принять $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\sigma_{\text{пц}} = 190 \text{ МПа}$, $l = 1,2 \text{ м}$.

- А) $D \approx 4,6 \text{ мм}$; Б) $D \approx 46 \text{ мм}$; В) $D \approx 64 \text{ мм}$; Г) $D \approx 6,4 \text{ мм}$.

46. Гибкость стойки $\lambda = 80$, коэффициент приведения длины $\mu = 0,5$, длина $l = 80 \text{ см}$. Определить радиус инерции.

- А) $0,5 \text{ мм}$; Б) $0,5 \text{ см}$; В) 5 см ; Г) $0,05 \text{ см}$.

47. Определить допускаемую величину сжимающей силы для стального стержня круглого поперечного сечения $D = 80 \text{ мм}$, длиной $l = 180 \text{ см}$. Концы стержня закреплены шарнирно $\mu = 1$. Коэффициент запаса $[n_y] = 2$. Материал стержня – Ст3 ($E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\sigma_{\text{пц}} = 200 \text{ МПа}$).

- А) $[F] = 384 \text{ кН}$; Б) $[F] = 104 \text{ кН}$; В) $[F] = 52,1 \text{ кН}$; Г) $[F] = 521 \text{ кН}$.

48. Определить минимальный момент инерции прямоугольного сечения, с размерами $h = 12 \text{ см}$, $b = 3 \text{ см}$:

- А) 432 см^4 ; Б) 27 см^4 ; В) $3,46 \text{ см}$; Г) $0,87 \text{ см}$.

49. Определить запас устойчивости винта домкрата грузоподъёмностью $F = 50 \text{ кН}$, высотой подъёма $l = 500 \text{ мм}$. Резьба упорная самотормозящая, внутренний диаметр резьбы винта $d = 34,116 \text{ мм}$. Материал – сталь 45, принять : $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\sigma_{\text{пц}} = 270 \text{ МПа}$.

- А) $n = 2,2$; Б) $n = 3,6$; В) $n = 0,6$; Г) $n = 2,6$.

50. Определить минимальный радиус инерции круглого сечения, диаметром D

- А) $i_{\text{min}} = D$; Б) $i_{\text{min}} = 0,25D$; В) $i_{\text{min}} = 0,5D$; Г) $i_{\text{min}} = 0,4D$.

51. Определить допускаемую нагрузку для чугунной полый колонны длиной $l = 6 \text{ м}$, внешний диаметр сечения $D = 200 \text{ мм}$, внутренний диаметр $d = 180 \text{ мм}$, $E = 10^5 \text{ МПа}$. Принять оба её конца шарнирно-опёртыми, $\lambda_{\text{пред}} = 80$, запас устойчивости $[n_y] = 5$.

- А) $73,9 \text{ кН}$; Б) 739 кН ; В) $14,8 \text{ кН}$; Г) 148 кН .

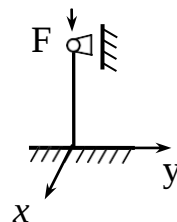
52. У сжатого стержня увеличили длину в $\sqrt{2}$ раза. Из какого материала его нужно изготовить (с каким модулем Юнга), чтобы величина $F_{\text{кр}}$ изменилась?

- А) с модулем в $\sqrt{2}$ раза большим; Б) с модулем в 4 раза большим;

В) с модулем в 2 раза большим; Г) с модулем в $\sqrt{2}$ раза меньшим.

53. Определить величину критических напряжений для данного дюралюминиевого стержня ($E = 0,71 \cdot 10^5$ МПа; $\sigma_{\text{пц}} = 180$ МПа) длиной $l = 1,2$ м, имеющего кольцевое поперечное сечение: наружный диаметр $D = 40$ мм, внутренний диаметр $d = 30$ мм.

- А) 85,3 МПа ; Б) 155 МПа;
В) 155 Па; Г) 15,5 МПа



54. У сжатого стержня увеличили длину в 2 раза. Как следует изменить момент инерции сечения, чтобы величина $F_{\text{кр}}$ не изменилась?

- А) увеличить в четыре раза ; Б) увеличить в два раза ;
В) уменьшить в четыре раза ; Г) уменьшить в два раза .

55. Стержень двутаврового сечения №24 длиной $l = 2$ м закреплён одним концом и нагружен на свободном конце силой F . Определить допускаемую величину сжимающей силы $[F]$, если Коэффициент запаса $[n_y] = 3$, материал стержня – Ст3 ($E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; $\sigma_{\text{пц}} = 200$ МПа).

- А) $[F] = 84,3$ кН; Б) $[F] = 843$ кН; В) $[F] = 52,1$ кН ; Г) $[F] = 521$ кН .

56. Две сжимаемые стойки отличаются лишь материалом , первая выполнена из стали ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа), вторая из меди ($E = 10^5$ МПа). Будет ли отличаться $F_{\text{кр}}$, если да то во сколько раз ?

- А) $F_{\text{кр1}} > F_{\text{кр2}}$ в два раза; Б) $F_{\text{кр1}} < F_{\text{кр2}}$ в два раза ;
В) $F_{\text{кр1}} > F_{\text{кр2}}$ в четыре раза; Г) не отличается.

57. Определить номер двутавра, до которого расчёт на устойчивость можно вести по формуле Эйлера. Концы стержня закреплены шарнирно. Принять $\sigma_{\text{пц}} = 190$ МПа; $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $l = 1,9$ м.

- А) №10; Б) №12; В) №16 ; Г) нет правильного ответа.

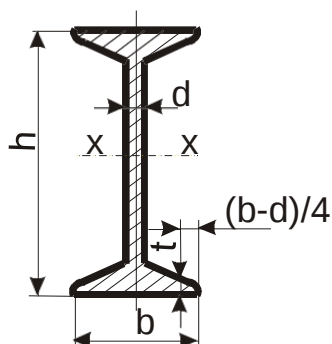
ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] : учебник для вузов / В. И. Феодосьев. - 9-е изд., перераб. - М. : Наука, 1986. - 512 с : рис. - Библиогр.: с. 509-512.
2. Сопротивление материалов / Под ред. Г.С. Писаренко. К: Наукова думка, 1975. – 704 с.
3. Сопротивление материалов / Под ред. А.Ф. Смирнова. М.: Высш. школа, 1975. – 480 с.
4. Гастев В.А. Краткий курс сопротивления материалов / В.А. Гастев. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
5. Степин П.А. Сопротивление материалов / П.А. Степин. – М.: Высш. школа, 1983. – 303 с.
6. Бугаенко, Г. А. Механика : учебник для вузов / Г. А. Бугаенко, В. В. Маланин, В. И. Яковлев. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 368 с. — (Серия : Авторский учебник). — ISBN 978-5-534-02640-5. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/B00C164B-3478-48DF-848B-F587A0A71BBD.
7. Астанин, В.В. Техническая механика: в четырех книгах. Книга вторая. Сопротивление материалов [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.В. Астанин. — Электрон. дан. — Москва : Машиностроение, 2012. — 160 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/5800>. — Загл. с экрана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сортамент прокатной стали

Балки двутавровые (по ГОСТ 8239–72)

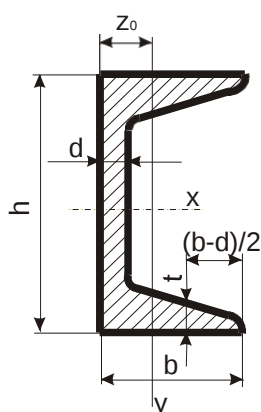


Обозначения:

- h – высота балки;
- b – ширина полки;
- d – толщина стенки;
- t – средняя толщина полки;
- J – момент инерции;
- W – момент сопротивления;
- S – статический момент полусечения

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения A , см ²	J_x , см ⁴	W_x , см ³	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³
	h	b	d	t						
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	23,0	17,9	6,49
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	33,7	27,9	8,72
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	46,8	41,9	11,5
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	62,3	58,6	14,5
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	81,4	82,6	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	89,8	114	22,8
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	104	115	23,1
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	114	155	28,2
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	131	157	28,6
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	143	206	34,3
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	163	198	34,5
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	178	260	41,6
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	210	260	41,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	229	337	50,0
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	268	337	49,9
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	292	436	60,1
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	339	419	59,9
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	423	516	71,1
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	545	667	86,1
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	708	808	101
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	919	1043	123
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	1181	1356	151
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	1491	1725	182

Швеллеры (по ГОСТ 8240–72)



Обозначения:

h – высота швеллера;
 d – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;
 J – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 S – статический момент полусечения;
 z_0 – расстояние от оси y до наружной грани стенки

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения A , см^2	J_x , см^4	W_x , см^3	S_x , см^3	J_y , см^4	W_y , см^3	z_0 , см
	h	b	d	t							
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	5,59	5,61	2,75	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	9,0	8,70	3,68	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	13,3	12,8	4,75	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	20,4	20,4	6,46	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	29,6	31,2	8,52	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	40,8	45,4	11,0	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	45,1	57,5	13,3	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	54,1	63,6	13,8	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	59,4	78,8	16,4	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	69,8	86	17,0	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	76,1	105	20,0	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	87,8	113	20,5	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	95,9	139	24,2	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	110	151	25,1	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	121	187	30,0	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	139	208	31,6	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	151	254	37,2	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	178	262	37,3	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	224	327	43,6	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	281	410	51,8	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10200	601	350	513	61,7	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	444	642	73,4	2,75

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Устойчивость упругого равновесия. Критическая сила	4
2. Задача Эйлера	6
3. Зависимость критической силы от условий закрепления. Обобщенная формула Эйлера	8
4. Критическое напряжение. Предел применимости формулы Эйлера. Формула Ясинского	10
5. Расчет сжатых стержней на устойчивость по коэффициентам продольного изгиба	15
6. Тестовые вопросы и задачи	20
Литература	26
Приложение. Сортамент прокатной стали	27

**Пичугова Луиза Николаевна
Корнеева Надежда Константиновна**

**УСТОЙЧИВОСТЬ
СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ**

Методические указания

В авторской редакции

Изд. № 34/2023. Объем 2 п.л. Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 1,96.
РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

