

УДК 621.313:519.81

Р.В. Иванников, аспирант

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРЕТИКО – ИГРОВОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ЭНЕРГОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрена антагонистическая игра двух условных игроков: энергогенерирующей компании – поставщика электроэнергии и природы – потребительского спроса на электроэнергию. Найдены наилучшие стратегии каждого игрока. Показано, что энергогенерирующая компания может оптимально распределять ресурсы, не имея информации о том, сколько кВт·ч целесообразно выделить для обеспечения электричеством потребителей; при известных потребностях в электроэнергии компании целесообразно распределять ресурсы пропорционально верхним границам этих потребностей.

В природе и обществе часто встречаются ситуации, в которых те или иные участники имеют противодействующие интересы и располагают различными путями для достижения своих целей. Такие ситуации являются предметом изучения теории игр, которая позволяет принять наиболее оптимальное решение. В настоящее время теория игр применяется в экономике, военном деле, технике и других областях человеческой деятельности. Цель данной статьи – применить теорию игр для системы энергораспределения.

Пусть энергогенерирующая компания может вырабатывать N кВт·ч, которые надо распределить между n районами. Однако неизвестно, сколько кВт·ч целесообразно выделить каждому району. Это может выясниться лишь в будущем.

Предположим, что для нормального снабжения электроэнергией всех этих районов целесообразно выделить M кВт·ч, причем на район i необходимо M_i кВт·ч, $\sum M_i = M$. Если энергокомпания отпускает на обеспечение электроэнергией района i количество кВт·ч N_i , то $\sum N_i = N$, а удовлетворенность района i в энергии для оптимального функционирования измеряется коэффициентом M_i/N_i . Цель распределения ресурсов энергогенерирующей компании состоит в том, чтобы минимизировать максимальный коэффициент неудовлетворенности.

Таким образом, приходим к игре $\tilde{\Gamma} = \{\tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{H}\}$ энергогенерирующей компании (игрок II) с природой (игрок I). В этой игре

$$\tilde{M} = \left\{ \tilde{M} = (M_1, M_2, \dots, M_n) \left| \sum_{i=1}^n M_i = M, M_i \geq 0 \right. \right\}, \quad (1)$$

$$\tilde{N} = \left\{ \tilde{N} = (N_1, N_2, \dots, N_n) \left| \sum_{i=1}^n N_i = N, N_i \geq 0 \right. \right\}, \quad (2)$$

функция выигрыша $\tilde{H}$ задается равенством

$$\tilde{H}(\tilde{M}, \tilde{N}) = \max \{M_1/N_1, M_2/N_2, \dots, M_n/N_n\}. \quad (3)$$

После замены переменных $M_i = Mx_i$, $N_i = Ny_i$ получим игру $\Gamma^1 = \{x, y, H^1\}$, где

$$x = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \left| \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right. \right\}, \quad (4)$$

$$y = \left\{ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \left| \sum_{i=1}^n y_i = 1, y_i \geq 0 \right. \right\}, \quad (5)$$

$$H^1 = \frac{M}{N} \max \left\{ \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots, \frac{x_n}{y_n} \right\}. \quad (6)$$

Игра Γ^1 , очевидно изоморфна игре $\tilde{\Gamma}$. Достаточно решить игру Γ^1 , после чего автоматически получим решение игры $\tilde{\Gamma}$ [1]. Наконец, уменьшив функцию H^1 неравенства (6) на N/M , что не меняет множество стратегий игроков, мы сведем нашу задачу к решению игры $\Gamma = \{x, y, H\}$, $H = H^1 N/M$.

Найдем решение игры Γ . Функция выигрыша игры Γ выпукла по y при каждом значении x . Поэтому игра Γ удовлетворяет всем условиям за исключением непрерывности функции H , поскольку на границе симплекса y она не определена [1]. Предположим все-таки, что непрерывность функции H на границе симплекса y определена, т.е. второй игрок имеет чистую оптимальную стратегию. Тогда

$$v = \min_y \max_x H(x, y). \quad (7)$$

Очевидно, что

$$\max_x H(x, y) = \max_x \max \left\{ \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots, \frac{x_n}{y_n} \right\} = \max_x \max \left\{ \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots, \frac{x_n}{y_n} \right\} = \max \left\{ \frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \dots, \frac{1}{y_n} \right\}. \quad (8)$$

Минимум выражения (8) достигается при $y^* = \{1/n, 1/n, \dots, 1/n\}$. Поэтому $v = n$. Также следует, что y^* – оптимальная стратегия второго игрока.

Далее,

$$H(x, y^*) = \max_x \max\{nx_1, nx_2, \dots, nx_n\}. \quad (9)$$

Из этого равенства следует, что $H(x, y^*) = n = v$ лишь для стратегии x^i , $x_j^i = 0$, $i \neq j$, $x_i^i = 1$. Следовательно, точками спектра оптимальной стратегии первого игрока [1] могут быть только точки x^i . Соображения симметрии делают вероятным предположение о том, что эти точки выбирают с равными вероятностями. Обозначим такую стратегию через X^* .

Все наши рассуждения основывались на более или менее правдоподобных предположениях. Поэтому для доказательства оптимальности стратегий необходимо проверить следующие неравенства [2]. Проверим их. Действительно,

$$H(X^*, y^*) = n, \quad (10)$$

$$H(x, y^*) = \max\{nx_1, nx_2, \dots, nx_n\} \leq n, \quad (11)$$

$$H(X^*, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i} \geq \sqrt[n]{\left(\prod_{i=1}^n y_i \right)^{-1}} \geq n. \quad (12)$$

Последнее неравенство следует из того, что произведение чисел, в сумме дающих константу, максимально при равных значениях этих чисел, а предпоследнее – из того, что среднее арифметическое не меньше среднего геометрического.

Таким образом, вышестоящие неравенства справедливы и поэтому X^* и y^* – оптимальные стратегии игроков. Заметим, что стратегии y^* соответствует стратегия $\tilde{N}^* = (N/n, N/n, \dots, N/n)$ игры $\tilde{G}$. Эта стратегия не зависит от M . Следовательно, энергогенерирующая компания может оптимально распределять ресурсы, не имея информации о том, сколько кВт·ч целесообразно выделить для обеспечения электричеством n районов.

Рассмотрим другую ситуацию, в которой можно оценить границы изменяется M_i . Моделью такой ситуации будет игра $\tilde{\Gamma}^1 = \{\tilde{M}^1, \tilde{N}, \tilde{H}\}$,

$$\text{где } \tilde{M}^1 = \left\{ \tilde{M} = (M_1, M_2, \dots, M_n) \left| \sum_{i=1}^n M_i = M, M_i^H \leq M_i \leq M_i^B \right. \right\}. \quad (13)$$

Пусть $0 < M_i^H$, $M_i^B < 1$. Прделавав такие же преобразования, которые мы совершили над игрой $\tilde{G}$, получим игру $\Gamma^1 = \{x^1, y, H\}$, где

$$x_1 = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \left| \sum_{i=1}^n x_i = 1, \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i \right. \right\}, \quad (14)$$

$$\alpha_i = M_i^H / M, \beta_i = M_i^B / M. \quad (15)$$

Игра Γ^1 удовлетворяет всем необходимым условиям, поэтому второй игрок имеет чистую оптимальную стратегию y^* . Эта стратегия определяется из равенств

$$\max_x H(x, y^*) = v \quad (16)$$

$$v = \min_y \max_x H(x, y). \quad (17)$$

Очевидно, что

$$\max_x H(x, y) = \max_x \max_i \{x_i / y_i\} = \max_i \{\beta_i / y_i\}. \quad (18)$$

Минимум последнего выражения достигается, когда все числа равны между собой, откуда

$$y_i^* = \beta_i / \sum_{k=1}^n \beta_k, \quad v = \sum_{i=1}^n \beta_i. \quad (19)$$

Стратегии $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$ соответствует стратегия

$$\bar{N}^* = \left(\frac{\beta_1 N}{\sum_{k=1}^n \beta_k}, \frac{\beta_2 N}{\sum_{k=1}^n \beta_k}, \dots, \frac{\beta_n N}{\sum_{k=1}^n \beta_k} \right) = \left(\frac{M_1^B N}{\sum_{k=1}^n M_k^B}, \frac{M_2^B N}{\sum_{k=1}^n M_k^B}, \dots, \frac{M_n^B N}{\sum_{k=1}^n M_k^B} \right) \quad (20)$$

игры $\tilde{\Gamma}^1$.

Эта стратегия не зависит от нижних границ M_i . Поэтому энергогенерирующая компания может оптимально распределять электроэнергию, не имея информации о том, сколько кВт·ч целесообразно выделить на нормальное снабжение электроэнергией n районов, и не зная нижних границ этих потребностей. Электроэнергию необходимо распределять пропорционально верхним границам потребностей.

Задачей дальнейшего исследования в данном направлении может быть рассмотрение игры Γ , для которой не определена непрерывность функции H на границе симплекса y , т.е. игрок II не имеет чистой оптимальной стратегии.

Библиографический список

1. Дюбин Г.Н. Введение в прикладную теорию игр / Г.Н. Дюбин, В.Г. Суздаль. — М.: Наука, 1981. — 336 с.

2. Крушевский А.В. Теория игр: Учеб. пособие / А.В. Крушевский. — К.: Выща шк., 1977. — 216 с.

Поступила в редакцию 12.09.2005 г.