

Б.А Скороход

**ДИФФУЗНЫЕ АЛГОРИТМЫ
ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ И СОСТОЯНИЯ
ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ**

Монография

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ
И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Кафедра «Информатика и управление в технических системах»

Б. А. Скороход

**ДИФФУЗНЫЕ АЛГОРИТМЫ
ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ И СОСТОЯНИЯ
ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ**

Монография

Севастополь
СевГУ
2023

УДК 519.712.3:004.032.26

ББК 22.12:32.813

С447

Р е ц е н з е н т ы:

В. А. Крамарь – д-р техн. наук, профессор кафедры информатики и управления в технических системах СевГУ

А.И. Харланов – д-р техн. наук, доцент кафедры ракетного вооружения надводных кораблей Черноморского высшего военно-морского орденов Нахимова и Красной Звезды училища имени П. С. Нахимова

Скороход Б. А.

С447 Диффузные алгоритмы оценки параметров и состояния динамических объектов : монография / Б. А. Скороход ; Севастопольский государственный университет, Институт радиоэлектроники и интеллектуальных технических систем, кафедра информатики и управления в технических системах. – Севастополь : СевГУ, 2023. – 227 с. – Текст : электронный.

Рассматриваются задачи оценки параметров и состояния математических моделей динамических объектов априорная информация о которых в момент начала наблюдения является неполной или вообще отсутствует. Типичными примерами являются задачи обучения различных нейронных и нейро-фаззи сетей, оценки состояния динамических систем, параметров регрессионных моделей.

УДК 519.712.3:004.032.26

ББК 22.12: 32.813

Рассмотрено и рекомендовано на заседании кафедры «Информатика и управление в технических системах» в качестве монографии, протокол № 4 от 25 января 2023 г.

© Скороход Б. А., 2023

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
ГЛАВА 1 Введение	7
1.1 Сепарабельный метод наименьших квадратов	7
1.2 Персептрон с одним скрытым слоем	9
1.3. Радиально-базисная нейронная сеть	11
1.4 Нейро-фаззи сети	13
1.5 Модели объектов с временными запаздываниями	14
1.6 Системы с частично неизвестной динамикой	15
1.7 Рекуррентная нейронная сеть	17
1.8 Рекуррентный МНК с диффузной и мягкой инициализациями	18
1.9 Диффузная инициализация фильтра Калмана	20
ГЛАВА 2 Диффузные алгоритмы оценивания параметров линейной регрессии	24
2.1 Постановка задачи	24
2.2 Мягкая и диффузная инициализации	27
2.3 Асимптотические свойства оценки параметров ОВЕ алгоритмом при диффузной инициализации	42
2.4 Алгоритмы RLS с нелинейными ограничениями	48
2.5 Примеры применения диффузных алгоритмов	56
ГЛАВА 3 диффузные алгоритмы обучения нейронных и нейро-фаззи сетей	64
3.1 Постановка задачи	64
3.2 Обучение с использованием мягкой и диффузной инициализаций	66
3.3. Обучение при отсутствии априорной информации о параметрах выходного слоя	78
3.4 Сходимость диффузных алгоритмов обучения	85
3.5 Итерационные версии диффузных алгоритмов обучения	105
3.6 Диффузный алгоритм обучения рекуррентной нейронной сети	107
3.7 Анализ алгоритмов обучения при малых шумах измерения	109
3.8 Примеры применения диффузных алгоритмов	111
ГЛАВА 4 Диффузный фильтр Калмана	115
4.1. Постановка задачи	115
4.2 Оценивание при диффузной инициализации	117
4.3 Оценивание при отсутствии или неполной априорной информации о начальных условиях	125
4.4 Задача восстановления состояния системы за конечное число шагов	135
4.5 Фильтрация со скользящим окном	137
4.6 Диффузный аналог расширенного фильтра Калмана	139
4.7 Обучение рекуррентной нейронной сети	140
4.8 Системы с частично неизвестной динамикой	143

4.9 Несмещенные фильтры с конечной импульсной характеристикой	144
4.10 Ковариационный анализ НКИХ фильтра	156
4.11 Адаптивный КИХ фильтр	160
ГЛАВА 5. Применение диффузных алгоритмов	179
5.1 Фильтры с КИХ для слежения за морскими объектами	179
5.2 Мониторинг положения объектов на морской поверхности с помощью монокулярной видеокамеры	188
5.3 Слежения за объектами на морской поверхности по видеонаблюдениям с адаптивным выбором размера скользящего окна	201
5.4 Оценка состояния газотурбинного авиационного двигателя F404	212
5.5. Прогноз угла возвышения движущегося подводного объекта	216
Библиографический список	221

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге рассматриваются задачи оценки параметров и состояния математических моделей динамических объектов априорная информация о которых в момент начала наблюдения является неполной или вообще отсутствует. Общий подход к решению подобных задач состоит в интерпретации неизвестной априорной информации с помощью случайных величин, имеющих матрицу ковариации пропорциональную большому положительному параметру μ (мягкая инициализация с ограничением). Типичными примерами являются задачи обучения различных нейронных и нейро-фаззи сетей, оценки состояния динамических систем, параметров регрессионных моделей и т.д. Вместе с тем, было замечено, что такой подход может не давать желаемого результата из-за расходимости, используемых алгоритмов, при их численной реализации. Кроме того, не ясно как выбирать значение параметра μ в каждом конкретном случае. С учетом этого, представляется важным изучение свойств различных алгоритмов при $\mu \rightarrow \infty$ и разработке на этой основе новых, обладающих робастными свойствами и не требующих выбора μ . Такие алгоритмы принято в литературе называть диффузными. Цель этой книги состоит в разработке и исследовании диффузных алгоритмов предназначенных для решения задач оценивания, возникающих в связи с рассмотрением динамических процессов.

Монография содержит пять глав. Первая глава содержит обзор известных моделей объектов и результатов, относящихся к тематике книги.

В главе 2 рассматривается поведение рекуррентного метода наименьших квадратов (РМНК) с мягкой инициализацией на конечном интервале времени и начальным условием пропорциональным большому положительному параметру μ . Получены асимптотические разложения для решения уравнения Риккати, коэффициента усиления, оценки РМНК по обратным степеням μ . Предложены рекуррентные алгоритмы оценивания (диффузные), не зависящие от большого параметра μ , приводящего к расходимости.

В главе 3 рассматриваются задачи обучения двухслойных нейронных и нейро-фаззи сетей с одновременным оцениванием параметров скрытого и выходного слоев. Для параметров скрытого слоя предполагаются заданными их вероятные значения и возможные отклонения от них. Предлага-

ются алгоритмы обучения, основанные на методе Гаусса-Ньютона с линеаризацией в окрестности последней оценки. Априорная информация о весах выходного слоя отсутствует и они, в одном из вариантов инициализации метода Гаусса-Ньютона, предполагаются диффузными случайными величинами, а в другом – либо неизвестными постоянными, либо случайными величинами с неизвестными статистическими характеристиками.

В главе 4 решаются задачи оценивания состояния и параметров дискретных динамических объектов при отсутствии или неполной априорной статистической информации о начальных условиях. Рассматриваются две постановки задачи. В рамках первой – неизвестные начальные условия интерпретируются как диффузные. В рамках второй – начальные условия интерпретируются, как неизвестные постоянные или случайные величины с неизвестными статистическими характеристиками. При этом не используются, какие-либо предположения статистического характера о природе неизвестных начальных условий. Получены диффузные аналоги фильтра Калмана и расширенного фильтра Калмана. В качестве практических приложений рассмотрены задачи построения фильтров со скользящим окном, наблюдателей восстанавливающих состояние за конечное время, обучения рекуррентных НС, оценивания состояния нелинейных систем с частично неизвестной динамикой, оптимальных несмещенных и адаптивных алгоритмов.

Глава 5 содержит решение прикладных задач, возникающих в различных инженерных приложениях, с помощью разработанных алгоритмов.

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

В этой главе дается обзор моделей объектов, постановок задач и известных результатов относящихся к тематике книги.

1.1 Сепарабельный метод наименьших квадратов

Пусть задана модель наблюдений

$$y_t = \Phi(z_t, \beta)\alpha, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (1.1)$$

где $z_t = (z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{nt})^T \in R^n$ – вектор входов, $y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{mt})^T \in R^m$ – вектор выходов, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)^T \in R^r$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)^T \in R^l$ – векторы неизвестных параметров, $\Phi(z_t, \beta)$ – $m \times r$ матрица известных нелинейных функций, R^l – пространство векторов размерности l , $(.)^T$ – операция транспонирования матрицы, N – объем выборки.

Вектор выходов y_t зависит линейно от α и нелинейно от β . Такая модель называется сепарабельной регрессией (СР) [1]. Если вектор β известен, то (1.1) трансформируется в линейную регрессию.

Пусть задано множество вход-выходных пар $\{z_t, y_t\}$, $t = 1, 2, \dots, N$ и критерий качества

$$\begin{aligned} J_N(\alpha, \beta) &= 1/2 \sum_{k=1}^N (y_k - \Phi(z_k, \beta)\alpha)^T (y_k - \Phi(z_k, \beta)\alpha) = \\ &= 1/2 \|Y - F(\beta)\alpha\|^2 = 1/2 e^T(\alpha, \beta) e(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $Y = (y_1^T, \dots, y_N^T)^T$, $F(\beta) = (\Phi^T(z_1, \beta), \dots, \Phi^T(z_N, \beta))^T$, $e(\alpha, \beta) = Y - F(\beta)\alpha$, $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора.

Требуется найти параметры α и β из условия минимума $J_N(\alpha, \beta)$:

$$(\alpha^*, \beta^*) = \arg \min J_N(\alpha, \beta), \quad \alpha \in R^r, \quad \beta \in R^l.$$

Для решения этой задачи может использоваться любой численный метод оптимизации. Например, итерационный метод Гаусса-Ньютона, ориен-

тированный на решение нелинейных задач с квадратичным критерием качества или его модификация алгоритм Левенберга-Маквардта

$$x_{i+1} = x_i + [J^T(x_i)J(x_i) + \mu I_{r+l}]^{-1} J^T(x_i)e(x_i), i = 1, 2, \dots, M,$$

где $x = (\beta^T, \alpha^T)^T \in R^{l+r}$, $J(x_i)$ – матрица Якоби остатков $e(x) = Y - F(\beta)\alpha$, I_m – единичная $m \times m$ матрица, $\mu > 0$ – параметр, M – количество итераций.

Вместе с тем, методы, учитывающие специфику задачи (линейную зависимость наблюдаемого выхода от части параметров), могут оказаться более эффективными. В [1] предложен сепарабельный метод наименьших квадратов для оценки параметров, входящих в описание (1.1). Идея метода состоит в следующем. Для заданного значения β , параметр α определяется, как решение линейной задачи методом наименьших квадратов (МНК)

$$\alpha = F^+(\beta)Y, \quad (1.3)$$

где $(A)^+$ – псевдообратная матрица Мура-Пенроуза матрицы A , α – решение с минимальной нормой. Подставляя α в (1.2), приходим к новой нелинейной задаче оптимизации, но относительно только β

$$\min \tilde{J}_N(\beta) = 1/2 \min \| (I_{Nm} - F(\beta)F^+(\beta))Y \| = 1/2 \min \| P_F(\beta)Y \|, \beta \in R^l, \quad (1.4)$$

где $P_F(\beta) = I_{Nm} - F(\beta)F^+(\beta)$ – проекционная матрица. Значение α определяется подстановкой, полученного оптимального значения β в (1.3).

Следующее утверждение показывает, что описанный двух шаговый алгоритм, при выполнении определенных условий, действительно минимизирует исходный критерий качества (1.2), позволяя уменьшить количество определяемых параметров с $r+l$ до l .

Теорема 1.1. ([1]). Предположим, что матрица $F(\beta)$ имеет полный ранг на открытом множестве $\Omega \subset R^l$. Тогда

1. Если $\beta^* \in \Omega$ минимизирует $\tilde{J}_N(\beta)$ и $\alpha^* = F^+(\beta^*)Y$, то (α^*, β^*) также минимизирует $J_N(\alpha, \beta)$.

2. Если (α^*, β^*) минимизирует $J_N(\alpha, \beta)$ для $\beta \in \Omega$, то β^* минимизирует $\tilde{J}_N(\beta)$ в Ω и $\tilde{J}_N(\beta^*) = J_N(\alpha^*, \beta^*)$. Более того, если существует единственное α среди пар, минимизирующих $J_N(\alpha, \beta)$, то α должно удовлетворять условию $\alpha = F^+(\beta)Y$.

Для определения β из условия минимума $\tilde{J}_N(\beta)$, как и при минимизации $J_N(\alpha, \beta)$, могут использоваться любые численные методы. Вместе с тем, критерий $\tilde{J}_N(\beta)$ имеет существенно более сложную структуру по сравнению с $J_N(\alpha, \beta)$, поэтому важно иметь эффективную процедуру определения матрицы Якоби для остатков $e(\beta) = P_F(\beta)Y$. В [7] получено следующее аналитическое представление для столбцов матрицы Якоби

$$\{J\}_j = -[P_F(\beta)\partial F(\beta)\partial\beta_j F^-(\beta) + (P_F(\beta)\partial F(\beta)\partial\beta_j F^-(\beta))^T]Y, \quad (1.5)$$

где $F^-(\beta)$ – обобщенная псевдообратная матрица $F(\beta)$, удовлетворяющая условиям

$$F(\beta)F^-(\beta)F(\beta) = F(\beta), \quad (F(\beta)F^-(\beta))^T = F(\beta)F^-(\beta).$$

Хотя критерий $\tilde{J}_N(\beta)$ кажется более сложным по сравнению с $J_N(\alpha, \beta)$, в [8] показано, что по количеству арифметических операций реализация сепарабельного МНК на основе (1.5) не превосходит метод Гаусса-Ньютона, используемый для минимизации $J_N(\alpha, \beta)$.

Помимо сокращения размерности оцениваемого вектора параметров, сепарабельный МНК уменьшает обусловленность матрицы $J^T(x_i)J(x_i)$ в методе Гаусса-Ньютона по сравнению с ее прототипом [9]. Это может приводить к уменьшению количества итераций необходимого для получения решения с заданной точностью. Отметим, также, что при использовании МНК для минимизации $\tilde{J}_N(\beta)$ не требуется априорная информация о линейно входящих параметрах, которые интерпретируются, как неизвестные постоянные.

1.2 Персептрон с одним скрытым слоем

Рассмотрим нейронную сеть (НС) с нелинейными функциями активации (ФА) в скрытом слое и линейными в выходном [10]

$$y_{it} = \sum_{k=1}^p w_{ik} \sigma(\sum_{j=1}^q a_{kj} z_{jt} + b_k), i = 1, 2, \dots, m, t = 1, 2, \dots, N, \quad (1.6)$$

где z_{jt} , $j = 1, 2, \dots, q$, $t = 1, 2, \dots, N$ – входы, y_{it} , $i = 1, 2, \dots, m$, $t = 1, 2, \dots, N$ – выходы, $a_{kj}, b_k, k = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, q$ – веса и смещения скрытого слоя, $w_{ik}, i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, p$ – веса выходного слоя, $\sigma(x)$ – ФА скрытого слоя.

В качестве ФА часто выбираются сигмоидная или гиперболический тангенс функции

$$\sigma(x) = (1 + \exp(-x))^{-1}, \quad \sigma(x) = (\exp(x) - \exp(-x)) / (\exp(x) + \exp(-x)),$$

которые непрерывно дифференцируемы и имеют простые выражения для производных.

В приложениях, связанных с использованием НС, одно из основных предположений состоит в том, что с их помощью может быть описан достаточно широкий класс нелинейных систем. Известно, что если в качестве ФА выбрана сигмоидная или гиперболический тангенс функция, то НС (1.6) обладает универсальным аппроксимирующим свойством [11,12] – способностью аппроксимировать с любой точностью непрерывную функцию на компактном множестве, при условии достаточно большого количества нейронов в скрытом слое.

Используя векторно-матричные обозначения, получим более компактное представление для НС

$$y_t = W(\sigma(a_1 z_t), \dots, \sigma(a_p z_t))^T, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} y_t &= (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{mt})^T \in R^m, \quad z_t = (z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{qt}, 1)^T \in R^{q+1}, \\ W &= (w_1, w_2, \dots, w_m)^T \in R^{m \times p}, \quad w_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{ip})^T, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ a_k &= (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kp}, b_k)^T, \quad k = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

НС (1.6) представляет специальный случай СР, в которую веса выходного слоя входят линейно, а выходного и смещения нелинейно. Вводя обозначения

$$\alpha = (w_1^T, w_2^T, \dots, w_m^T)^T \in R^{mp}, \quad \beta = (a_1^T, a_2^T, \dots, a_p^T)^T \in R^{(q+1)p}, \quad (1.8)$$

$$\Phi(z_t, \beta) = I_m \otimes \Sigma(z_t, \beta) - m \times mp \text{ матрица,}$$

где $\Sigma(z_t, \beta) = (\sigma(a_1 z_t), \sigma(a_2 z_t), \dots, \sigma(a_p z_t))$, $\otimes$ – прямое произведение двух матриц, получим представление НС (1.2) в форме (1.1).

Обучение НС (1.6) рассматривается, как задача минимизации критерия качества, во многих случаях – среднеквадратической ошибки относительно неизвестных параметров, входящих в ее описание (весов и смещений) при заданном обучающем множестве $\{z_t, y_t\}$, $t = 1, 2, \dots, N$. Известны два режима обучения – пакетный (off-line) и последовательный (on-line). При использовании пакетных алгоритмов, значения параметров определяются по-

сле поступления всего множества данных. Последовательных – значения параметров корректируются с учетом поступления каждой новой пары наблюдений.

В многочисленных публикациях, посвященных изучению многослойного персептрона, предложены различные алгоритмы обучения, превосходящие алгоритм обратного распространения ошибки по скорости сходимости и получаемой точности аппроксимации. Так в [13, 14] применяются алгоритм Левенберга-Маквардта и квазиньютоновские методы, использующие информацию о матрице производных второго порядка критерия качества. В [15–18] алгоритмы обучения основываются на расширенном фильтре Калмана, использующего аппроксимационную ковариационную матрицу ошибки оценивания. В [18] исследована асимптотика расширенного ФК с диффузной инициализацией линейно входящих параметров и предложены алгоритмы обучения персептрона. Для персептрона с линейной функцией активации в выходном слое в [3, 4, 19–21] представлены алгоритмы, учитывающие сепарабельную структуру сети. В [19,20] показано, что сепарабельный МНК, применяемый совместно с алгоритмом ЛМ позволяет ускорить процесс обучения по сравнению с алгоритмом Левенберга-Маквардта без сепарабельного МНК. Вместе с тем, такой подход может быть использован только в пакетном режиме. В [6, 22] предложен ELM (extreme learning machine) подход, с помощью которого обучаются только линейно входящие параметры (веса выходного слоя), а нелинейные выбираются случайно, без учета обучающей выборки, что сокращает время обучения, но может приводить к невысокой точности аппроксимации. Показывается, что обученная таким образом НС, которую называют функционально связанной [23], будет универсальным аппроксиматором при $m = 1$.

1.3 Радиально-базисная нейронная сеть

Для радиально-базисной нейронной сети (РБНС) соотношения, связывающие входы и выходы, задаются выражениями [10]

$$y_{it} = \sum_{k=1}^p w_{ik} \varphi(b_k \| z_t - a_k \|^2) + w_{i0}, \quad i=1,2,\dots,m, \quad t=1,2,\dots,N, \quad (1.9)$$

где $z_t = (z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{nt})^T \in R^n$ – вектор входов, y_{it} , $i=1,2,\dots,m$, $t=1,2,\dots,N$ – выходы, $a_k \in R^n$, $b_k \in R^+$, $k=1,2,\dots,p$ – центры и шкалирующие множители, соответственно, R^+ – множество положительных действительных чисел, w_{ik} , $i=1,2,\dots,m$, $k=1,2,\dots,p$ – веса выходного слоя, w_{i0} , $i=1,2,\dots,m$ – смещения, $\varphi(\cdot)$ – базисная функция.

В качестве базисной функции часто выбирается функция Гаусса

$$\varphi(x) = \exp(-(x - a)^2 / b),$$

при которой НС обладает универсальным аппроксимирующим свойством [10].

Под задачей обучения такой НС понимается определение входящих в (1.9) параметров для которых достигается минимума критерий качества на заданном обучающем множестве $\{z_t, y_t\}$, $t = 1, 2, \dots, N$.

Используя векторно-матричные обозначения, получим более компактное представление для НС

$$y_t = W(1, \varphi(b_1 \| z_t - a_1 \|^2), \dots, \varphi(b_p \| z_t - a_p \|^2))^T, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (1.10)$$

где $y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{mt})^T \in R^m$ – вектор входов, $W = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T \in R^{m \times (p+1)}$, $w_i = (w_{i0}, w_{i1}, \dots, w_{ip})^T$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Видно, что персептрон с одним скрытым слоем и РБНС обладают схожей структурой – имеют один скрытый слой и выходной слой. Более того, РБНС является сепарабельной регрессией в которой w_{ik} , $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, p$ – веса выходного слоя и w_{i0} , $i = 1, 2, \dots, m$ – смещения – линейно входящие параметры, а центры a_k и шкалирующие множители b_k , $k = 1, 2, \dots, p$ – нелинейно. Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \alpha &= (w_1^T, w_2^T, \dots, w_m^T)^T \in R^{m(p+1)}, \quad \beta = (b_1, b_2, \dots, b_p, a_1^T, a_2^T, \dots, a_p^T)^T \in R^{(n+1)p}, \\ \Phi(z_t, \beta) &= I_m \otimes \Sigma(z_t, \beta) - m \times m(p+1) \text{ матрица,} \\ \Sigma(z_t, \beta) &= (1, \varphi(b_1 \| z_t - a_1 \|^2), \dots, \varphi(b_p \| z_t - a_p \|^2)), \end{aligned} \quad (1.11)$$

получим представление (1.9) в форме (1.1).

Известны два подхода к решению задачи обучения РБНС [5]. В рамках первого параметры НС находятся, используя методы нелинейной параметрической оптимизации. Такие, например, как алгоритм Левенберга-Маквардта и расширенный ФК, требующие значительных вычислительных затрат. В основе второго подхода лежит раздельное определение параметров. Сначала находятся центры и шкалирующие множители, а затем веса выходного слоя. Это приводит к существенному сокращению времени обучения в сравнении с первым подходом. Действительно, если центры и шкалирующие множители НС уже найдены, то задача обучения весов выходного слоя сводится к линейной задаче МНК. В [10] значения центров выбираются случайно из обучающего множества, а шкалирующие множества полагаются равными максимальному расстоянию между цен-

трами. В [22] предлагается параметры скрытого слоя выбирать случайно из области определения. Показывается, что обученная таким образом НС будет универсальным аппроксиматором при $m=1$ и достаточно общих предположениях относительно базисных функций. В [24] представлены алгоритмы обучения, основанные на расширенном ФК, использующего аппроксимационную ковариационную матрицу ошибки оценивания. Вместе с тем, ускоряя процесс обучения, они могут приводить, как и в случае двухслойного персептрона, к расходимости.

1.4 Нечеткая система Сугено

Один из основных методов конструирования нечетких систем состоит в использовании нейро-фаззи подхода [5]. Его основная идея заключается в том, что помимо знаний экспертов, лежащих в базе знаний (правил, лингвистических переменных, функций принадлежности) используется числовая информация, представляющая собой множество различных значений входов и соответствующих им значений выходов. Вводится критерий (часто квадратичный) определяющий ошибку между экспериментальными данными и значениями выходов нейро-фаззи сети (НФС). Далее функции принадлежности (ФП) и выходы параметризуются и решается тем или иным способом нелинейная оптимизационная задача относительно выбранных параметров. Мотивация использования нечетких правил для построения моделей по экспериментальным данным состоит в том, что в отличие от персептрона, они легко интерпретируются и расширяются. При этом, нечеткие модели, как и НС позволяют аппроксимировать с произвольной точностью любую непрерывную функцию, заданную на компактном множестве. Эффективность решения задачи в значительной степени зависит от используемого алгоритма оптимизации. Рассмотрим более подробно модели НФС и известные алгоритмы их обучения.

Пусть задана база знаний в форме Сугено

$$\text{if } (z_{1t} \text{ is } A_{1j}) \text{ and if } (z_{2t} \text{ is } A_{2j}) \text{ and } \dots \text{ if } (z_{nt} \text{ is } A_{nj}) \text{ then } y_t = a_j^T z_t + b_j, \quad (1.12) \\ j = 1, 2, \dots, m,$$

где A_{ij} , $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ – нечеткие множества с параметризованными ФП $\mu_{ij}(z_{it}, c_{ij})$, c_{ij} , $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ – векторы неизвестных параметров, y_t , $t = 1, 2, \dots, N$ – скалярный выход, $a_j \in R^n$, $b_j \in R^1$, $j = 1, 2, \dots, m$, $z_t = (z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{nt})^T \in R^n$.

Тогда соотношение для выхода, определяемого по m правилам (1.12) дается выражением [25]

$$y_t = \frac{\sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \mu_{ij}(z_{jt}, c_{ij})(a_i^T z_t + b_i)}{\sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \mu_{ij}(z_{jt}, c_{ij})}, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (1.13)$$

представляющее собой сепарабельную регрессию, в которую параметры ФП входят нелинейно, а параметры следствия линейно.

Из (1.13) следует (1.1) с

$$\begin{aligned} \alpha &= (a_1^T, a_2^T, \dots, a_m^T, b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in R^{m(m+1)}, \quad \beta = (c_{11}^T, c_{21}^T, \dots, c_{nm}^T)^T, \\ \Phi(z_t, \beta) &= (q_1(\beta)z_t^T, q_2(\beta)z_t^T, \dots, q_m(\beta)z_t^T, q_1(\beta), q_2(\beta), \dots, q_m(\beta))^T, \\ q_i(\beta) &= \frac{\prod_{j=1}^n \mu_{ij}(z_{jt}, c_{ij})}{\sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \mu_{ij}(z_{jt}, c_{ij})}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Опубликованы различные алгоритмы оценивания параметров ФП и параметров, входящих в следствия правил НФС. Так в [5, 26] предложены алгоритм обратного распространения ошибки и гибридная процедура обучения (ANFYS), интегрирующая алгоритм обратного распространения ошибки и рекуррентный метод наименьших квадратов (РМНК). В [27] используется расширенный ФК для обучения с треугольными ФП. Алгоритмы кластерного анализа и эволюционного программирования предложены в [5, 28]. Во многих случаях, все эти подходы имеют серьезные проблемы, обусловленные отсутствием сходимости, или сходимостью за неприемлемо большое время и, к тому же, только к локальному минимуму. Известно, что сходимость зависит как от используемого алгоритма, так и от того, насколько удачно выбрано начальное приближение. При этом, структура НФС (как и двухслойного персептрона и РБНС) такова, что априорная информация о части оцениваемых параметров отсутствует и, следовательно, неясно, как обоснованно инициализировать выбранный алгоритм.

1.5 Модели объектов с временными запаздываниями

При отсутствии априорной информации о динамической системе стандартный подход к построению ее модели состоит в интерпретации z_t в (1.1), как регрессора, определенного на измеренных значениях входов и выходов до текущего момента времени [10]. Предположим, что в моменты времени $t = 1, 2, \dots, N$ измеряются значения входа $u_t \in R^n$ и выхода $y_t \in R^m$ некоторой системы. Объединим их конечное число в моменты предшествующие t в один вектор (вектор регрессоров)

$$Z_t = (y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-a}, \dots, u_{t-d}, u_{t-d-1}, \dots, u_{t-d-b}),$$

где a, b, d – некоторые положительные целые числа. Нелинейная модель авторегрессии и скользящего среднего, связывающая вход и выход системы может быть представлена в виде

$$y_t = F(Z_t, \theta) + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (1.14)$$

где $F(.,.)$ – заданная нелинейная функция, θ – вектор неизвестных параметров, $\xi_t \in R^m$ – случайный процесс с некоррелированными значениями, нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариации $E[\xi_t \xi_t^T] = V_t$, характеризующей ошибки измерения и аппроксимации выхода.

Модель (1.14) дает прогноз поведения системы на один шаг. Для прогноза на h шагов предлагается использовать оценку $\hat{y}_t$ для получения прогноза $\hat{y}_{t+1}$ и повторить эту процедуру h раз или непосредственно строить модель

$$y_{t+h} = F(Z_t^h, \theta) + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (1.15)$$

для прогноза на h шагов, где

$$Z_t^h = (y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-a}, \dots, u_{t+h-d}, u_{t+h-d-1}, \dots, u_{t-d-b}).$$

Достоинства и недостатки каждого из описанных подходов хорошо известны [29]. При построении модели объектов в форме авторегрессии и скользящего среднего, могут быть использованы НС или НФС. Далее нас будет интересовать модели (1.15), сводящиеся к сепарабельной регрессии (1.1).

1.6 Системы с частично неизвестной динамикой

Рассмотрим случай, когда математическое описание исследуемой системы, заданное в форме модели пространства состояния, не полно. Это может быть, например, если ее правые части определены с точностью до неизвестных параметров, или правые части априорной модели отличаются от реальных.

Пусть модель системы имеет вид

$$x_{t+1} = A_t(\theta)x_t + B_t(\theta)u_t, \quad (1.16)$$

$$y_t = C_t(\theta)x_t + D_t(\theta)u_t, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (1.17)$$

где $x_t \in R^n$ – вектор состояния, $y_t \in R^m$ – вектор измеряемых выходов, $u_t \in R^l$ – вектор измеряемых входных воздействий, $\theta_t \in R^r$ – вектор неизвестных параметров, $A_t(\theta)$, $B_t(\theta)$, $C_t(\theta)$, $D_t(\theta)$ – заданные матричные функции соответствующих размерностей. Требуется по наблюдениям $\{u_t, y_t\}$, $t = 1, 2, \dots, N$ оценить вектор θ .

Эта задача может быть сведена к оценке параметров (x_1, θ) регрессии, в которую x_1 входит линейно, а θ нелинейно. Действительно, из (1.16) находим

$$x_t = H_{t,1}(\theta)x_1 + \sum_{i=1}^{t-1} H_{t,i+1}(\theta)B_i(\theta)u_i, \quad (1.18)$$

где переходная матрица $H_{t,s}(\theta)$ является решением матричного уравнения

$$H_{t+1,s}(\theta) = A_t(\theta)H_{t,s}(\theta), \quad H_{s,s}(\theta) = I_n, \quad t \geq s, \quad t = 1, 2, \dots, N.$$

Подстановка (1.18) в уравнение наблюдений (1.17) дает

$$\begin{aligned} y_t &= C_t(\theta)H_{t,1}(\theta)x_1 + C_t(\theta)\sum_{i=1}^{t-1} H_{t,i+1}(\theta)B_i(\theta)u_i + D_t(\theta)u_t = \\ &= \Phi_t(\theta)x_1 + \varphi_t(\theta), \quad t = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Пусть критерий качества имеет вид

$$J(x_1, \theta) = 1/2 \| Y - \Phi(\theta)x_1 - \varphi(\theta) \|^2, \quad (1.19)$$

где

$$\begin{aligned} Y &= (y_1^T, y_2^T, \dots, y_N^T)^T, \quad \Phi(\theta) = (\Phi_1^T(\theta), \Phi_2^T(\theta), \dots, \Phi_N^T(\theta))^T, \\ \varphi(\theta) &= (\varphi_1^T(\theta), \varphi_2^T(\theta), \dots, \varphi_N^T(\theta))^T. \end{aligned}$$

Для определения вектора (x_1, θ) из условия минимума (1.19) можно воспользоваться идеей сепарабельного МНК, определяя x_1 с помощью линейного МНК при фиксированном значении θ . В результате получим $x_1 = \Phi^+(\theta)(Y - \varphi(\theta))$. Подстановка этого выражения в (1.19) приводит к критерию

$$\tilde{J}(\theta) = 1/2 \| Y - \Phi(\theta)\Phi^+(\theta)(Y - \varphi(\theta)) - \varphi(\theta) \|^2$$

и новой задаче оптимизации, но уже относительно только θ .

В [30, 31] получены условия, при выполнении которых для стационарной системы (1.16) применима теорема 1.1. Отметим, что в этой работе используется другая параметризация, приводящая к сепарабельной регрессии стандартного вида. В [31] предложен, также, рекуррентный алгоритм минимизации $\tilde{J}_N(\beta)$ в (1.4).

Рассмотрим, теперь, нелинейную стохастическую дискретную систему

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t) + w_t, \quad (1.20)$$

$$y_t = h_t(x_t, u_t) + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (1.21)$$

где $x_t \in R^n$ – вектор состояния, $y_t \in R^m$ – вектор измеряемых выходов, $u_t \in R^l$ – вектор измеряемых входных воздействий, $f_t(x_t, u_t)$, $h_t(x_t, u_t)$ – априори заданные векторные функции, w_t , ξ_t – случайные возмущения с известными статистическими характеристиками.

В [32–34] рассматривается задача оценки состояния (1.20) с помощью расширенного ФК в предположении, что $f_t(x_t, u_t)$ и $h_t(x_t, u_t)$ отличаются от действительных

$$\begin{aligned} \tilde{f}_t(x_t, u_t) &= f_t(x_t, u_t) + \varepsilon_t, \\ \tilde{h}_t(x_t, u_t) &= h_t(x_t, u_t) + \eta_t. \end{aligned}$$

Предлагается заменить в этих выражениях ε_t и η_t многослойным персептроном и оценивать его параметры одновременно с состоянием x_t .

1.7 Рекуррентная нейронная сеть

Рассмотрим рекуррентную НС (РНС), заданную моделью пространства состояния [10]

$$x_t = \begin{pmatrix} \sigma(a_1^T x_{t-1} + b_1^T z_t + d_1) \\ \dots \\ \sigma(a_q^T x_{t-1} + b_q^T z_t + d_q) \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

$$y_t = \begin{pmatrix} c_1^T x_t \\ \dots \\ c_m^T x_t \end{pmatrix}, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (1.23)$$

где $x_t \in R^q$ – вектор состояния, $z_t \in R^n$ – вектор измеряемых входных воздействий, $y_t \in R^m$ – вектор измеряемых выходов, $a_i \in R^q$, $b_i \in R^n$, $d_i \in R^1$, $c_i \in R^q$, $\sigma(x)$ – сигмоидная или гиперболический тангенс функции.

Или в более компактной форме

$$x_t = \sigma(Ax_{t-1} + Bz_t + d), \quad (1.24)$$

$$y_t = Cx_t, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (1.25)$$

где $A \in R^{q \times q}$, $B \in R^{q \times n}$, $d \in R^q$, $C \in R^{m \times q}$.

Требуется по наблюдениям $\{z_t, y_t\}$, $t = 1, 2, \dots, N$ оценить A, B, C, d . В [10] приведены три алгоритма обучения РНС: алгоритм обратного распространения ошибки во времени, рекуррентный алгоритм в реальном времени и алгоритм, основанный на ФК.

Отметим два важных для нас свойства РНС. Во-первых, как и персептрон с одним скрытым слоем, РБНС и НФС Сугено, она обладает универсальным аппроксимирующим свойством – способностью аппроксимировать на конечных интервалах и компактных подмножествах пространства состояния решения нелинейных динамических систем [35]. Во-вторых, РНС (1.22), (1.23) относится к классу сепарабельных моделей объекта – матрица W входит в ее описание нелинейно, а C – линейно.

1.8 Рекуррентный МНК с диффузной и мягкой инициализациями

Предположим, что модель наблюдений имеет вид

$$y_t = C_t \alpha + \xi_t \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (1.26)$$

где $y_t \in R^1$ – измеряемый выход, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)^T \in R^r$ – вектор неизвестных параметров, $C_t = (c_{1t}, c_{2t}, \dots, c_{rt}) \in R^{1 \times r}$, c_{it} , $i = 1, 2, \dots, r$ – регрессоры (входы), $\xi_t \in R^1$ – случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, некоррелированными значениями, и дисперсией $E[\xi_t^2] = R_t$, N – объем выборки.

Регрессоры в (1.26) могут быть, как заданными детерминированными функциями, так и случайными. Линейная модель авторегрессии – скользящего среднего

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \dots + a_m y_{t-m} + b_1 z_{t-1} + \dots + b_n z_{t-n} + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (1.27)$$

один из наиболее важных для приложений примеров (1.26) с

$$C_t = (y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-m}, z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-n}), \alpha = (a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n)^T.$$

Пусть задана выборка $\{z_t, y_t\}$, $t = 1, 2, \dots, N$ и квадратичный критерий качества, учитывающий имеющуюся информацию о (1.27) к моменту t

$$J_t(\alpha) = \sum_{k=1}^t \lambda^{t-k} (y_k - C_k \alpha)^2, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (1.28)$$

где, $\lambda \in (0, 1]$ - параметр, позволяющий уменьшить влияние прошлых наблюдений (забывающий множитель). Оценку неизвестного параметра α будем искать из условия минимума (1.28), используя рекуррентный МНК (РМНК), который, как хорошо известно, определяется соотношениями [37, 38]

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + K_t (y_t - C_t \alpha_{t-1}), \quad (1.29)$$

$$P_t = (P_{t-1} - P_{t-1} C_t^T (\lambda + C_t P_{t-1} C_t^T)^{-1} C_t P_{t-1}) / \lambda, \quad (1.30)$$

$$K_t = P_t C_t^T, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (1.31)$$

где α_t - оптимальная оценка α , полученная по всем имеющимся наблюдениям до момента t включительно.

РМНК успешно применяется в самых разных приложениях, связанных с адаптивной фильтрацией, задачами идентификации, распознавания и адаптивным управлением, благодаря высокой скорости сходимости к оптимальному решению и способности работать в условиях меняющихся параметров [38, 39]. Вместе с тем, его использование предполагает задание начальных условий для матрицы P_t (инициализацию алгоритма). Известны несколько способов их задания [38].

Один из вариантов состоит в определении $\alpha_0 = \bar{\alpha}$ и $P_0 = \bar{P}$ с помощью стандартного (не рекуррентного) МНК по начальному блоку данных $\{z_t, y_t\}$, $t = 1, 2, \dots, \bar{N} < N$. Недостатки такого подхода при обработке в реальном времени достаточно очевидны. Это, прежде всего, необходимость запоминания наблюдений, появление дополнительных матричных операций, включающих матричное обращение и необходимость согласования работы РМНК с полученными оценками α_0 и P_0 .

При другом подходе (мягкой инициализации) полагают $\alpha_0 = 0$ и $P_0 = \mu I_r$, где $\mu > 0$ - параметр, выбираемый пользователем. Предельный случай мягкой инициализации с $\mu \rightarrow \infty$ мы будем далее называть диффузной инициализацией РМНК. В процессе моделирования было обнаружено

[40, 41], что оценки РМНК подвержены сильным флуктуациям в период инициализации (в переходной стадии) при

$$t \leq tr = \min_t \{t : \sum_{k=1}^t C_k^T C_k > 0, t = 1, 2, \dots, N\},$$

произвольно малых шумах, любом порядке регрессии и больших значениях $\mu > 0$. Кроме того, большие значения μ могут приводить к расходимости алгоритма при $t > tr$ [41]. Исследованию этого явления посвящены несколько публикаций [42–46]. В [42] приведены теоретические обоснования такого поведения для модели авторегрессии в переходной стадии. В [43] получены условия, при которых величина $\beta_t(\mu) = E[e_t^T(\mu)e_t(\mu)] / \|\alpha\|^2$ не превышает 1 (условия отсутствия перерегулирования) в момент окончания переходной фазы, где $e_t(\mu) = \alpha_t - \alpha$. В [46] рассмотрено поведение $\beta_t(\mu)$ при $\lambda = 1$ и диффузной инициализации, с помощью асимптотических разложений характеристик РМНК по обратным степеням μ , полученных в [45]. В их основе лежит формула обращения возмущенных матриц, использующая матричную псевдоинверсию [47]. Результаты моделирования, приведенные в [40, 41] показывают, также, что выбор относительно небольших значений μ может приводить к увеличению времени переходного процесса. Таким образом, неясно как выбирать μ .

И, наконец, последний из известных способов задания начальных условий для РМНК, это алгоритм точной инициализации для регрессии со скалярным выходом, полученный в [47–49]. Алгоритм позволяет получить оценку РМНК, совпадающую с оценкой не рекуррентного МНК и при этом отпадает необходимость задания μ . Вывод алгоритма основан на использовании формулы Гревия.

1.9 Диффузная инициализация фильтра Калмана

Рассмотрим линейную дискретную систему

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t w_t, y_t = C_t x_t + D_t \xi_t, t \in T = \{a, a+1, \dots, N\}, \quad (1.32)$$

где $x_t \in R^n$ – вектор состояния системы, $y_t \in R^m$ – измерение, $w_t \in R^r$ и $\xi_t \in R^l$ – некоррелированные случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и матрицами ковариации $E(w_t w_t^T) = I_r, E(\xi_t \xi_t^T) = I_l$, A_t, B_t, C_t, D_t – известные матрицы соответствующих размерностей.

Требуется оценить x_t при отсутствии статистической информации относительно произвольных компонент x_0 . В литературе предложен ряд мо-

диффузий ФК, ориентированных на решение такой задачи. Так в [50] неизвестные начальные условия интерпретируются, как случайные величины, имеющие нулевые математические ожидания и матрицу ковариации пропорциональную большому параметру μ и обсуждается использование информационного фильтра, вычисляющего рекуррентно информационную матрицу обратную ковариационной матрице ошибки оценивания. Однако, этот фильтр не может быть использован во многих ситуациях, а работа с ковариационной матрицей ошибки представляется более предпочтительной, чем работа с ее обратной [50]. В [50] предлагается интерпретировать неизвестные начальные условия, как диффузные – случайные величины, имеющие нулевые математические ожидания и произвольно большую матрицу ковариации. В [17, 50–52], в рамках определенных допущений о моделях процессов и структуре диффузного начального вектора, получено решение задачи при $\mu \rightarrow \infty$. Характеристики ФК выражаются в явной форме, как функции μ и затем полагается, что $\mu \rightarrow \infty$ для получения точного решения – диффузного фильтра Калмана (ДФК). В [53] вывод ДФК основывается на использовании информационного фильтра и решении специальной задачи оптимизации. В [54] не используются, какие либо предположения статистического характера о неизвестных начальных условиях. Такое представление логически обосновано в отличие от диффузной инициализации, когда приходится иметь дело с бесконечной матрицей ковариации начальных условий. Предложен алгоритм оценивания при отсутствии информации обо всех начальных условиях для стационарной модели и невырожденной матрице динамики, представляющий собой усложненную версию информационного фильтра. Особенностью алгоритма является возможность получения оценки состояния только после выполнения определенного количества итераций. Показана его эквивалентность алгоритму, полученному в [53], при диффузных начальных условиях. Инициализировать ФК с помощью оценок математического ожидания и матрицы ковариации, полученных по начальной выборке предлагается в [55]. Однако, получение таких оценок с приемлемой точностью в ряде случаев проблематично (например, при наличии пропусков в наблюдениях, оценке параметров нелинейных систем и нестационарных процессов).

В качестве практических приложений в [50 – 52] рассмотрены задачи эконометрики (оценивание, прогноз и сглаживание временных рядов), в [53, 54] конструирования робастных к импульсным возмущениям фильтров со скользящим окном, а в [17] построения наблюдателей восстанавливающих состояние линейной системы за конечное число шагов и обучения нейронных сетей.

ГЛАВА 2

ДИФFUЗНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

В этой главе рассматривается поведение РМНК на конечном интервале. Предполагается, что начальное условие уравнения Риккати пропорционально большому положительному параметру μ . Получены асимптотические разложения решения уравнения Риккати и коэффициента усиления РМНК по обратным степеням μ . Предложены и исследованы предельные при $\mu \rightarrow \infty$ рекуррентные алгоритмы оценивания (диффузные), не зависящие от большого параметра μ , приводящего к расходимости. Полученные теоретические результаты иллюстрируются примерами решения задач обучения НС и обработки сигналов.

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим линейную модель наблюдений вида

$$y_t = C_t \alpha + \xi_t \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1)$$

где $y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{mt})^T \in R^m$ – вектор выходов, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)^T \in R^r$ – вектор неизвестных параметров, $C_t = C_t(z_t) - m \times r$ матрица регрессоров (входов), $z_t = (z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{nt})^T \in R^n$ – вектор входов, $\xi_t \in R^m$ – случайный процесс с некоррелированными значениями, нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариации $E[\xi_t \xi_t^T] = R_t$, N – объем выборки.

Пусть задана выборка $\{z_t, y_t\}$, $t = 1, 2, \dots, N$ и критерий качества, учитывающий имеющуюся информацию о (2.1) к моменту t

$$J_t(\alpha) = \sum_{k=1}^t \lambda^{t-k} (y_k - C_k \alpha)^T (y_k - C_k \alpha) + \lambda^t (\alpha - \bar{\alpha})^T \bar{P}^{-1} (\alpha - \bar{\alpha}) / \mu, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (2.2)$$

где $\bar{\alpha}$, $\bar{P} > 0$, $\mu > 0$ – произвольны, $\lambda \in (0, 1]$ – параметр, позволяющий уменьшить влияние прошлых наблюдений (забывающий множитель).

Вектор параметров α разыскивается из условия минимума $J_t(\alpha)$

$$\partial J_t(\alpha) / \partial \alpha = -2 \sum_{k=1}^t \lambda^{t-k} C_k^T (y_k - C_k \alpha) + 2 \lambda^t \bar{P}^{-1} (\alpha - \bar{\alpha}) / \mu = 0.$$

и должен обновляться после поступления нового измерения. Или, используя обозначение α_t для оптимальной оценки, получим

$$M_t \alpha_t = q_t, t = 1, 2, \dots, N \quad (2.3)$$

где

$$M_t = \sum_{k=1}^t \lambda^{t-k} C_k^T C_k + \lambda^t \bar{P}^{-1} / \mu, \quad q_t = \sum_{k=1}^t \lambda^{t-k} C_k^T y_k + \lambda^t \bar{P}^{-1} \bar{\alpha} / \mu.$$

Найдем рекуррентное представление для α_t . Так как

$$\begin{aligned} M_t &= \lambda M_{t-1} + C_t^T C_t, \quad M_0 = \bar{P}^{-1} / \mu, \\ q_t &= \lambda q_{t-1} + C_t^T y_t, \quad q_0 = \bar{P}^{-1} \bar{\alpha} / \mu, \quad t = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.4)$$

то

$$\begin{aligned} \alpha_t &= M_t^{-1} q_t = M_t^{-1} (\lambda q_{t-1} + C_t^T y_t) = M_t^{-1} (\lambda M_{t-1} \alpha_{t-1} + C_t^T y_t) = \\ &= M_t^{-1} ((M_t - C_t^T C_t) \alpha_{t-1} + C_t^T y_t) = \\ &= \alpha_{t-1} + K_t (y_t - C_t \alpha_{t-1}), \quad \alpha_0 = \bar{\alpha}, \quad t = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$K_t = M_t^{-1} C_t^T = P_t C_t^T. \quad (2.6)$$

Для рекуррентного определения $P_t = M_t^{-1}$, воспользуемся матричным тождеством

$$A^{-1} = (B^{-1} + CD^{-1}C^T)^{-1} = B - BC(D + C^T BC)^{-1}C^T B, \quad (2.7)$$

полагая в котором $B = M_{t-1}^{-1}, D = \lambda I_r, C = C_t^T$, получим

$$\begin{aligned} P_t &= (\lambda P_{t-1}^{-1} + C_t^T C_t)^{-1} = \\ &= (P_{t-1} - P_{t-1} C_t^T (\lambda I_m + C_t P_{t-1} C_t^T)^{-1} C_t P_{t-1}) / \lambda, \quad P_0 = \bar{P} \mu, \quad t = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Соотношения (2.4)–(2.6), (2.8) описывают РМНК с критерием качества (2.2) и мягкой инициализацией, определяемой $\bar{\alpha}$, $\bar{P}$, μ . Требуется исследовать поведение РМНК в зависимости от $\bar{\alpha}$, $\bar{P}$, $\mu \rightarrow \infty$ и значений t , принадлежащих конечному множеству.

Пусть, теперь, в критерии качества вместо забывающего множителя используется ковариационная матрица шумов наблюдения R_t , которая, как правило, в инженерных приложениях известна [56]

$$J_t(\alpha) = \sum_{k=1}^t (y_k - C_k \alpha)^T R_k^{-1} (y_k - C_k \alpha) + (\alpha - \bar{\alpha})^T \bar{P}^{-1} (\alpha - \bar{\alpha}) / \mu, \\ t = 1, 2, \dots, N. \quad (2.9)$$

Проделав выкладки аналогичные приведенным при выводе (2.4) – (2.6), (2.8), нетрудно получить следующие соотношения для рекуррентного алгоритма оценивания α в этом случае (ФК, если используется статистическая интерпретация α , $\bar{\alpha}$, $\bar{P}$)

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + K_t (y_t - C_t \alpha_{t-1}), \quad \alpha_0 = \bar{\alpha}, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (2.10)$$

где

$$K_t = M_t^{-1} C_t^T R_t^{-1} = P_t C_t^T R_t^{-1}, \quad (2.11)$$

$$M_t = M_{t-1} + C_t^T R_t^{-1} C_t, \quad M_0 = \bar{P}^{-1} / \mu, \quad (2.12)$$

$$P_t = P_{t-1} - P_{t-1} C_t^T (R_t + C_t P_{t-1} C_t^T)^{-1} C_t P_{t-1}, \quad P_0 = M_0^{-1} = \bar{P} \mu. \quad (2.13)$$

Требуется исследовать поведение РМНК с критерием качества (2.9) в зависимости от $\bar{\alpha}$, $\bar{P}$, $\mu \rightarrow \infty$ и значений t , принадлежащих конечному множеству.

В этой главе предполагается, что C_t – заданные детерминированные функции, $T = \{1, 2, \dots, N\}$ – ограниченное множество, $N > t_{tr}$ – произвольное целое число, а μ – большой положительный параметр. Будут получены асимптотические разложения характеристик РМНК – матричных функций P_t , K_t по обратным степеням μ . В основе лежит формула обращения возмущенных матриц, использующая псевдоинверсию [47]. Это позволит представить в аналитической форме P_t , K_t при $\mu \rightarrow \infty$; объяснить причину расходимости РМНК, наблюдаемую в процессе моделирования при больших μ ; предложить предельные при $\mu \rightarrow \infty$ диффузные алгоритмы оценивания, не зависящие от большого параметра μ , приводящего к расходимости.

2.2 Мягкая и диффузная инициализации

Докажем два вспомогательных утверждения, которые понадобятся нам далее.

Лемма 2.1. Пусть матрица Ω_t определена выражением

$$\Omega_t = \Omega_0 / \mu + \sum_{s=1}^t F_s^T F_s, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (2.14)$$

где $\Omega_0 > 0$ – $n \times n$ матрица, F_t , $t = 1, 2, \dots, N$ – произвольные $m \times n$ матрицы. Тогда Ω_t^{-1} представима при достаточно больших значениях μ равномерно сходящимся при $t = 1, 2, \dots, N$ степенным рядом

$$\begin{aligned} \Omega_t^{-1} &= \Omega_0^{-1} (I_n - \Xi_t \Xi_t^+) \mu + \Xi_t^+ + \\ &+ \sum_{i=1}^q (-1)^i \Omega_0^{-1/2} (\Omega_0^{1/2} \Xi_t^+ \Omega_0^{1/2})^{i+1} \Omega_0^{-1/2} \mu^{-i} + O(\mu^{-q-1}), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $\Xi_t = \sum_{s=1}^t F_s^T F_s$.

Доказательство. Имеем

$$\Omega_t = \Omega_0^{1/2} (I_n + \mu \Omega_0^{-1/2} \Xi_t \Omega_0^{-1/2}) \Omega_0^{1/2} / \mu.$$

Откуда, с помощью формулы обращения возмущенных матриц [47]

$$(I_n + \mu V)^{-1} = (I_n - VV^+) + V^+ (V^+ + \mu I_n)^{-1}, \quad (2.16)$$

где V – произвольная симметрическая матрица, полагая $V = \Omega_0^{-1/2} \Xi_t \Omega_0^{-1/2}$, находим

$$\begin{aligned} \Omega_t^{-1} &= \Omega_0^{-1/2} (I_n + \mu \Omega_0^{-1/2} \Xi_t \Omega_0^{-1/2})^{-1} \Omega_0^{-1/2} \mu = \\ &= \Omega_0^{-1/2} [(I_n - \Omega_0^{-1/2} \Xi_t \Omega_0^{-1/2}) + \Omega_0^{1/2} \Xi_t^+ \Omega_0^{1/2} (\Omega_0^{1/2} \Xi_t^+ \Omega_0^{1/2} + \mu I_n)^{-1}] \Omega_0^{-1/2} \mu. \end{aligned}$$

Воспользуемся спектральными разложениями матриц V и V^+ для анализа этого выражения

$$\Omega_0^{-1/2} \Xi_t \Omega_0^{-1/2} = T_t \Lambda_t T_t^T, \quad \Omega_0^{1/2} \Xi_t^+ \Omega_0^{1/2} = T_t \Lambda_t^+ T_t^T.$$

Здесь $\Lambda_t = \text{diag}(\lambda_t(1), \lambda_t(2), \dots, \lambda_t(n))$, $\lambda_t(i)$, $t = 1, 2, \dots, N$, $i = 1, 2, \dots, n$ – собственные числа матрицы $\Omega_0^{-1/2} \Xi_t \Omega_0^{-1/2}$, $\Lambda_t^+ = \text{diag}(\lambda_t^+(1), \lambda_t^+(2), \dots, \lambda_t^+(n))$,

$$\lambda_t^+(i) = \begin{cases} 0, & \lambda_t(i) = 0 \\ 1/\lambda_t(i), & \lambda_t(i) \neq 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

T_t – ортогональная матрица, столбцами, которой являются собственные вектора матрицы $\Omega_0^{-1/2} \Xi_t \Omega_0^{-1/2}$.

Если $\mu > 1/\lambda_{\min}$ и $\lambda_t(i) \neq 0$, то ряд

$$(\lambda_t^+(i) + \mu)^{-1} \mu = 1 + \sum_{i=1}^q (-1)^i [\lambda_t(i) \mu]^{-i} + O(\mu^{-q-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

равномерно сходится по $t = 1, 2, \dots, N$, где

$$\lambda_{\min} = \min\{\lambda_t(i) > 0, t = 1, 2, \dots, N, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Так как $(\lambda_t^+(i) + \mu)^{-1} \mu = 1$ при $\lambda_t(i) = 0$, то использование матричных обозначений дает

$$\begin{aligned} (\Omega_0^{1/2} \Xi_t^+ \Omega_0^{1/2} + \mu I_n)^{-1} \mu &= T_t (\Lambda_t^+ + \mu I_n)^{-1} T_t^T \mu = \\ &= I_n + \sum_{i=1}^q (-1)^i (\Omega_0^{1/2} \Xi_t^+ \Omega_0^{1/2})^i \mu^{-i} + O(\mu^{-q-1}), \mu \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Откуда следует (2.15).

Лемма 2.2. Для любых $m \times n$ матриц $F_t, t = 1, 2, \dots, N$ справедливы равенства

$$(I_n - \Xi_t \Xi_t^+) F_s^T = 0, \quad s \leq t, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (2.17)$$

где $\Xi_t = \sum_{k=1}^t F_k^T F_k - n \times n$ матрица.

Доказательство. Введем обозначение для $n \times mt$ матрицы $\tilde{F}_t = (F_1^T, F_2^T, \dots, F_t^T)$. Пусть ранг этой матрицы равен k_t и $l_t(1), l_t(2), \dots, l_t(k_t)$ любые линейно независимые ее столбцы. Использование скелетного разложения [57] дает $\tilde{F}_t = L_t \Gamma_t$, где $L_t = (l_t(1), l_t(2), \dots, l_t(k_t)) - n \times k_t$, $\Gamma_t = (\Gamma_t(1), \Gamma_t(2), \dots, \Gamma_t(t)) - k_t \times mt$ матрицы ранга k_t , $\Gamma_t(i), i = 1, 2, \dots, t - k_t \times t$ матрицы.

Покажем вначале, что

$$I_n - \Xi_t \Xi_t^+ = I_n - L_t (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T.$$

Имеем $\Xi_t = \tilde{F}_t \tilde{F}_t^T = L_t \tilde{\Gamma}_t L_t^T$, где $\tilde{\Gamma}_t = \Gamma_t \Gamma_t^T$. Так как $\tilde{\Gamma}_t > 0$ (матрица Грама, построенная по линейно независимым строкам матрицы Γ_t),

$rank(L_t) = rank(\tilde{\Gamma}_t L_t^T)$ и L_t – матрица полного ранга по столбцам, то [47]

$$\Xi_t^+ = (L_t \tilde{\Gamma}_t L_t^T)^+ = (L_t^T)^+ \tilde{\Gamma}_t^{-1} L_t^+, \quad L_t^+ = (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} I_n - \Xi_t \Xi_t^+ &= I_n - L_t \tilde{\Gamma}_t L_t^T (L_t \tilde{\Gamma}_t L_t^T)^+ = I_n - L_t \tilde{\Gamma}_t L_t^T (L_t^T)^+ \tilde{\Gamma}_t^{-1} L_t^+ = \\ &= I_n - L_t \tilde{\Gamma}_t L_t^T L_t (L_t^T L_t)^{-1} \tilde{\Gamma}_t^{-1} (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T = I_n - L_t (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T. \end{aligned}$$

Так как $F_s^T = L_t \Gamma_t(s)$, то

$$(I_n - \Xi_t \Xi_t^+) F_s^T = (I_n - L_t (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T) L_t \Gamma_t(s) = 0, \quad s = t, \quad t = 1, 2, \dots, n.$$

Мы начнем с анализа РМНК с забывающим множителем.

Теорема 2.1. Матрицы P_t и K_t представимы при достаточно больших значениях μ равномерно сходящимися при $t = 1, 2, \dots, N$ степенными рядами

$$\begin{aligned} P_t &= M_t^{-1} = \lambda^{-t} \bar{P} (I_r - W_t W_t^+) \mu + W_t^+ + \\ &+ \sum_{i=1}^q (-1)^i \lambda^{ti} \bar{P}^{-1/2} (\bar{P}^{1/2} \Xi_t^+ \bar{P}^{1/2})^{i+1} \bar{P}^{-1/2} \mu^{-i} + O(\mu^{-q-1}), \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$K_t = \begin{cases} \tilde{K}_t + O(\mu^{-q-1}), & C_t \neq 0 \\ 0, & C_t = 0 \end{cases}, \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (2.19)$$

и для любого $\varepsilon > 0$

$$P(\|\alpha_t - \tilde{\alpha}_t\| \geq \varepsilon) = O(\mu^{-q-1}), \quad \mu \rightarrow \infty, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (2.20)$$

где

$$W_t = \lambda W_{t-1} + C_t^T C_t, \quad W_0 = 0_{r \times r}, \quad (2.21)$$

$$\tilde{K}_t = [W_t^+ + \sum_{i=1}^q (-1)^i \lambda^{ti} \bar{P}^{-1/2} (\bar{P}^{1/2} \Xi_t^+ \bar{P}^{1/2})^{i+1} \bar{P}^{-1/2} \mu^{-i}] C_t^T, \quad (2.22)$$

$$\tilde{\alpha}_t = \tilde{\alpha}_{t-1} + \tilde{K}_t (y_t - C_t \tilde{\alpha}_{t-1}), \quad \tilde{\alpha}_0 = \bar{\alpha} \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (2.23)$$

Доказательство. Так как

$$M_t = \sum_{k=1}^t \lambda^{t-k} C_k^T C_k + \lambda^t \bar{P}^{-1} / \mu = \lambda^t (\bar{P}^{-1} / \mu + \sum_{k=1}^t \lambda^{-k} C_k^T C_k), \quad (2.24)$$

то полагая в лемме 2.1

$$\Omega_t = M_t, \Omega_0 = \bar{P}^{-1}, F_t = \lambda^{-t/2} C_t,$$

получим (2.18). Представление (2.19) следует из (2.18), леммы 2.2 и равенства

$$K_t = M_t^{-1} C_t^T = P_t C_t^T.$$

Вводя обозначение $e_t = E(\alpha_t - \tilde{\alpha}_t)$ и используя (2.5), (2.23), получим

$$\begin{aligned} e_t &= e_{t-1} + (K_t - \tilde{K}_t) E(y_t) - K_t C_t E(\alpha_{t-1}) + \tilde{K}_t C_t E(\tilde{\alpha}_{t-1}) = \\ &= (I_r - \tilde{K}_t C_t) e_{t-1} + (K_t - \tilde{K}_t) E(y_t) + (\tilde{K}_t - K_t) C_t E(\tilde{\alpha}_{t-1}). \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} \|e_t\| &\leq \sum_{s=1}^{t-1} \|H_{t,s+1}\| (\|K_s - \tilde{K}_t\| (\|E(y_s)\| + \|C_s\| \|E(\tilde{\alpha}_{s-1})\|)) \leq \\ &\leq \eta(N) \max_{s=1, \dots, t-1} \|\tilde{K}_s - K_s\|, \end{aligned}$$

где $H_{t,s}$ – матричная функция, удовлетворяющая системе

$$H_{t,s} = (I_r - K_t C_t) H_{t-1,s}, t = s+1, s+2, \dots, H_{t,t} = I_r,$$

а $\eta(N)$ определяется выражением

$$\eta(N) = \sum_{s=1}^{N-1} \|H_{t,s+1}\| (\|E(y_s)\| + \|C_s\| \|E(\tilde{\alpha}_{s-1})\|).$$

Так как величина $\eta(N)$ ограничена при $t = 1, 2, \dots, N$, а из (2.19) следует, что

$$\|K_s - \tilde{K}_t\| = O(\mu^{-q-1}), t = 1, 2, \dots, N \text{ и } \mu \rightarrow \infty,$$

то $\|e_t\| = O(\mu^{-q-1}), t = 1, 2, \dots, N, \mu \rightarrow \infty$.

Использование неравенства Маркова дает для любого $\varepsilon > 0$

$$P(\|\alpha_t - \tilde{\alpha}_t\| \geq \varepsilon) \leq \|e_t\| / \varepsilon = O(\mu^{-q-1}), \mu \rightarrow \infty, t = 1, 2, \dots, N.$$

Пренебрегая в (2.18), (2.19) слагаемыми начиная с первого порядка малости $O(\mu^{-1})$, получим

$$P_t = M_t^{-1} = \lambda^{-t} \bar{P} (I_r - W_t W_t^+) \mu + W_t^+ + O(\mu^{-1}), \quad (2.25)$$

$$\alpha_t^{dif} = \alpha_{t-1}^{dif} + K_t^{dif} (y_t - C_t \alpha_{t-1}^{dif}), \quad \alpha_0^{dif} = \bar{\alpha}, \quad (2.26)$$

где

$$K_t^{dif} = W_t^+ C_t^T, \quad (2.27)$$

$$W_t = \lambda W_{t-1} + C_t^T C_t, \quad W_0 = 0_{r \times r}, \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (2.28)$$

Соотношения (2.25) – (2.28) будем называть диффузным алгоритмом оценивания (ДАО) параметров линейной регрессии (2.1).

Сохраняя в разложениях (2.18), (2.19) слагаемые более высокого порядка малости, можно получить различные алгоритмы оценивания. Так учет слагаемых порядка $O(\mu^{-1})$ дает

$$P_t = M_t^{-1} = \lambda^{-t} \bar{P} (I_r - W_t W_t^+) \mu + W_t^+ - \lambda^t (W_t^+)^2 \bar{P}^{-1} \mu^{-1} + O(\mu^{-2}), \quad (2.29)$$

$$\alpha_t^\mu = \alpha_{t-1}^\mu + K_t^\mu (y_t - C_t \alpha_{t-1}^\mu), \quad \alpha_0^\mu = \bar{\alpha}, \quad (2.30)$$

где

$$K_t^\mu = [W_t^+ - \lambda^t (W_t^+)^2 \mu^{-1}] C_t^T. \quad (2.31)$$

Отметим, что в отличие от диффузного алгоритма эти соотношения зависят от $\bar{P}$.

Следствие 2.1.1. Диффузная составляющая

$$P_t^{dif} = \lambda^{-t} \bar{P} (I_r - W_t W_t^+) \mu$$

– компонента в разложении P_t пропорциональная большому параметру – равна нулю, начиная с момента

$$tr = \min_t \{t : \Pi_t > 0, t = 1, 2, \dots, N\},$$

где $\Pi_t = \sum_{k=1}^t C_k^T C_k$. Имеем

$$\Pi_t = \tilde{C}_t^T \tilde{C}_t, \quad W_t = \sum_{k=1}^t \lambda^{t-k} C_k^T C_k = \tilde{C}_t^T \Lambda_t \tilde{C}_t,$$

где $\tilde{C}_t = (C_2^T, C_1^T, \dots, C_t^T)^T \in R^{m \times r}$, $\Lambda_t = \text{block diag}(\lambda^{t-1} I_m, \lambda^{t-2} I_m, \dots, I_m) \in R^{m \times r}$.

Так как $\det \Lambda_t \neq 0$, то

$$\text{rank}(\Pi_t) = \text{rank}(W_t) = \text{rank}(\tilde{C}_t)$$

и, следовательно $P_{tr}^{dif} = 0$.

Следствие 2.1.2. K_t (матричный коэффициент усиления) не зависит от диффузной составляющей и в отличие от P_t , как функция μ , равномерно ограничен по норме при $t = 1, 2, \dots, N$ и $\mu \rightarrow \infty$.

Следствие 2.1.3. Ошибки численной реализации могут приводить к расходимости РМНК при больших μ . Действительно, пусть δW_t^+ ошибка, связанная с вычислением псевдообратной матрицы W_t^+ . Тогда использование теоремы 2.1 дает

$$\begin{aligned} K_t &= M_t^{-1} C_t^T = P_t C_t^T = \\ &= [\bar{P}(I_r - \lambda^{-1} W_t (W_t^+ + \delta W_t^+)) \mu + O(1)] C_t^T = \\ &= [-\lambda^{-1} W_t \delta W_t^+ \mu + O(1)] C_t^T, \quad \mu \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Т.е., при $\delta W_t^+ \neq 0$ матричная функция K_t становится зависимой от диффузной составляющей. Причем, так как операция псевдообращения, вообще говоря, не является непрерывной, то вызванное ею изменение K_t может быть существенным и приводить к расходимости. Более того, поскольку матрица K_t пропорциональна большому параметру μ , то даже, если и выполнено условие непрерывности операции псевдообращения

$$\text{rank}(W_t) = \text{rank}(W_t + \delta W_t),$$

для, достаточно малых по норме матриц δW_t , диффузная составляющая по-прежнему может приводить к потере точности. От указанных особенностей численной реализации свободен ДАО. Это следует из отсутствия в его конструкции диффузных компонент – величин пропорциональных большому параметру. Причем характеристики диффузного алгоритма не зависят также от неизвестной ковариационной матрицы $\bar{P}$.

Проиллюстрируем различия свойств оценок параметров регрессии (2.1), полученных с помощью РМНК с мягкой инициализацией при больших, но конечных значениях μ и его предельным случаем – диффузным алгоритмом, используя численный пример.

Пример 2.1. Рассмотрим задачу оценивания параметра α в модели наблюдений (2.1) при $m = 1$, $r = 100$, $R = 0.05^2$. Входы модели генерируются с помощью двух блоков, заданных каскадным соединением оператора `gallery('randsvd', 100, 105)` пакета Matlab с 64 разрядной сеткой. Элементы

вектора α имеют нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и среднеквадратичным отклонением 10^4 .

На рисунке 2.1 приведены зависимости ошибок оценивания от времени с использованием РМНК и ДАО: $q_t = \|\alpha - \alpha_t\|$, $p_t = \|\alpha - \alpha_t^{dif}\|$, соответственно. В обоих случаях забывающий множитель полагался равным 1. Кривые 1, 2, 3 соответствуют РМНК с $\mu = 10^6, 10^9, 10^{10}$, соответственно, а с номером 4 – ДАО при $\bar{\alpha} = 0$, $\bar{P} = I_r$. Видно, что при $\mu = 10^6$ не удается заметно уменьшить q_t за время обработки. Для $\mu = 10^9$ величина q_t убывает, однако остается примерно в два раза больше p_t при $t > 100$. Дальнейшее увеличение μ приводит к расходимости РМНК – росту q_t , что соответствует следствию 2.1.3.

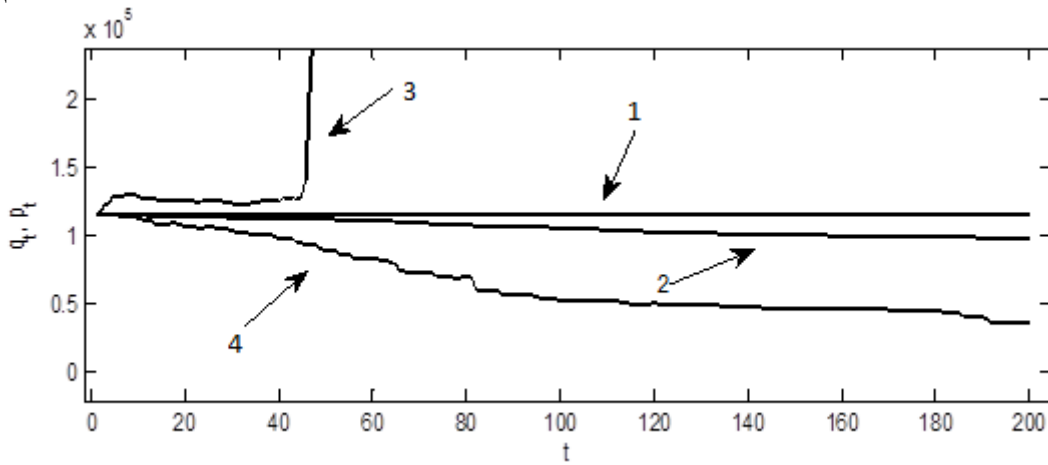


Рисунок 2.1 – Ошибки оценивания РМНК и ДАО

Установим некоторые свойства ДАО. Покажем вначале, что оценки стандартного МНК совпадают с оценками, полученными с помощью диффузного алгоритма, начиная с момента tr .

Рассмотрим задачу минимизации взвешенной суммы квадратов

$$\begin{aligned} \tilde{J}_t(\alpha) &= \sum_{k=1}^t \lambda^{t-k} (y_k - C_k \alpha)^T (y_k - C_k \alpha) = \\ &= \lambda^t (Y_t - \tilde{C}_t \alpha)^T \tilde{R}_t^{-1} (Y_t - \tilde{C}_t \alpha), \quad t = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_t &= (C_1^T, C_2^T, \dots, C_t^T)^T \in R^{mt \times r}, \quad Y_t = (y_1^T, y_2^T, \dots, y_t^T)^T \in R^{mt}, \\ \tilde{R}_t &= \text{block diag}(\lambda I_m, \lambda^2 I_m, \dots, \lambda^t I_m) \in R^{mt \times mt}. \end{aligned}$$

Минимальное значение α должно удовлетворять системе уравнений

$$\partial J_t(\alpha) / \partial \alpha = -2\lambda^t \tilde{C}_t^T \tilde{R}_t^{-1} (Y_t - \tilde{C}_t \alpha) = 0.$$

Если ранг матрицы $\tilde{C}_t$ равен r , то решением ее после t наблюдений будет линейная несмещенная оценка вида

$$\alpha_t = (\tilde{C}_t^T \tilde{R}_t^{-1} \tilde{C}_t)^{-1} \tilde{C}_t^T \tilde{R}_t^{-1} Y_t. \quad (2.33)$$

Мы хотим показать, что начиная с момента tr , оценки, определяемые выражением (2.33) и РМНК с диффузной инициализацией, совпадают. Нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2.3. Для любых $t = 2, 3, \dots$ справедливы тождества

$$(I_r - W_t^+ C_t^T C_t)(I_r - W_{t-1}^+ W_{t-1}) = (I_r - W_t^+ W_t)(I_r - W_{t-1}^+ W_{t-1}), \quad (2.34)$$

$$W_t^+ W_t W_s^+ W_s = W_s^+ W_s, \quad s = 1, 2, \dots, t. \quad (2.35)$$

Доказательство. Докажем (2.34). При $t \geq tr$ утверждение очевидно. Пусть $t < tr$. Имеем

$$I_r - W_t^+ C_t^T C_t = I_r - \lambda^{-t} \Lambda_t^+ C_t^T C_t, \quad (2.36)$$

где Λ_t определяется матричным уравнением

$$\Lambda_t = \Lambda_{t-1} + \lambda^{-t} C_t^T C_t, \quad \Lambda_0 = 0, \quad t = 1, 2, \dots, N.$$

Преобразовывая левую часть (2.34), с помощью (2.36), получим

$$\begin{aligned} & (I_r - W_t^+ C_t^T C_t)(I_r - W_{t-1}^+ W_{t-1}) = \\ & = (I_r - \lambda^{-t} \Lambda_t^+ C_t^T C_t)(I_r - \Lambda_{t-1}^+ \Lambda_{t-1}) = \\ & = I_r - \lambda^{-t} \Lambda_t^+ C_t^T C_t - \Lambda_{t-1}^+ \Lambda_{t-1} + \lambda^{-t} \Lambda_t^+ C_t^T C_t \Lambda_{t-1}^+ \Lambda_{t-1} = \\ & = I_r - \Lambda_t^+ \Lambda_t + \Lambda_t^+ \Lambda_{t-1} - \Lambda_{t-1}^+ \Lambda_{t-1} + \Lambda_t^+ \Lambda_t \Lambda_{t-1}^+ \Lambda_{t-1} - \Lambda_t^+ \Lambda_{t-1} \Lambda_{t-1}^+ \Lambda_{t-1} = \\ & = (I_r - \Lambda_t^+ \Lambda_t) - (I_r - \Lambda_t^+ \Lambda_t) \Lambda_{t-1}^+ \Lambda_{t-1} + \Lambda_t^+ \Lambda_{t-1} (I_r - \Lambda_{t-1}^+ \Lambda_{t-1}). \end{aligned}$$

Так как псевдоинверсия любой матрицы удовлетворяет условию $AA^+A = A$ [47], то

$$\Lambda_t^+ \Lambda_{t-1} (I_r - \Lambda_{t-1}^+ \Lambda_{t-1}) = 0$$

и, следовательно

$$(I_r - W_t^+ C_t^T C_t)(I_r - W_{t-1}^+ W_{t-1}) =$$

$$\begin{aligned}
&= (I_r - \Lambda_t^+ \Lambda_t) - (I_r - \Lambda_t^+ \Lambda_t) \Lambda_{t-1}^+ \Lambda_{t-1} = \\
&= (I_r - \Lambda_t^+ \Lambda_t)(I_r - \Lambda_{t-1}^+ \Lambda_{t-1}) = (I_r - W_t^+ W_t)(I_r - W_{t-1}^+ W_{t-1}).
\end{aligned}$$

Докажем (2.35). При $t \geq tr$ утверждение очевидно. Предположим теперь, что $t < tr$. Пусть $L_i - r \times k_i$ матрица ранга k_i , составленная из всех линейно независимых столбцов матрицы $\bar{C}_i^T = (\lambda^{-1/2} C_1^T, \lambda^{-1} C_2^T, \dots, \lambda^{-i/2} C_i^T)$ размерности $r \times mi$ для $i = 1, 2, \dots, t$. Причем L_i выбирается таким образом, что $L_i = (L_{i-1}, \Delta_i)$, где $\Delta_i - r \times (k_i - k_{i-1})$ матрица ранга $k_i - k_{i-1}$, составленные из всех линейно независимых столбцов матрицы $\lambda^{-i/2} C_i^T$ для каждого $i = 2, 3, \dots, t$.

Использование скелетного разложения дает $\bar{C}_t^T = L_t \Gamma_t$, где $\Gamma_t = (\Gamma_t(1), \Gamma_t(2), \dots, \Gamma_t(t)) - k_t \times mt$ матрица ранга $k_t, \Gamma_t(i), i = 1, 2, \dots, t - k_t \times m$ матрицы. Имеем

$$\begin{aligned}
\Lambda_t &= \sum_{k=1}^t \lambda^{-k} C_k^T C_k = C_t^T C_t = L_t \tilde{\Gamma}_t^T L_t^T, \\
\Lambda_t^+ &= (L_t \tilde{\Gamma}_t^T L_t^T)^+ = (L_t^T)^+ \tilde{\Gamma}_t^{-1} L_t^+, \quad L_t^+ = (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T, \\
W_t^+ W_t &= (L_t \tilde{\Gamma}_t^T L_t^T)^+ L_t \tilde{\Gamma}_t^T L_t^T = L_t (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T,
\end{aligned} \tag{2.37}$$

где $\tilde{\Gamma}_t = \Gamma_t \Gamma_t^T > 0$ — как матрица Грама.

Так как

$$(L_t^T L_t)^{-1} L_t^T L_s = I_{k_t, k_s}, \quad L_t I_{k_t, k_s} = L_s,$$

где $I_{k_t, k_s} = (e_1, e_2, \dots, e_{k_s})$, $e_i \in R^r - i$ -ый единичный вектор, $i = 1, 2, \dots, k_s$, то

$$W_t^+ W_t W_s^+ W_s = \Lambda_t^+ \Lambda_t \Lambda_s^+ \Lambda_s = L_t (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T L_s (L_s^T L_s)^{-1} L_s^T = W_s^+ W_s.$$

Рассмотрим систему уравнений, которой удовлетворяет математическое ожидание ошибки $e_t = E(\alpha - \alpha_t^{diff})$

$$e_t = (I_r - K_t^{dif} C_t) e_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, N. \tag{2.38}$$

Установим вид нормированной переходной матрицы

$$H_{t,s} = \begin{cases} A_t, \dots, A_{s+1}, & t = s+1, s+2, \dots, s \geq 0 \\ I_r, & t = s \end{cases}$$

этой системы, где $A_t = I_r - K_t^{dif} C_t = I_r - W_t^+ C_t^T C_t$.

Лемма 2.4. Для любых $t = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} H_{t,0} &= (I_r - W_t^+ W_t)(I_r - W_{t-1}^+ W_{t-1}) \dots (I_r - W_1^+ W_1) = \\ &= I_r - W_t^+ W_t. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Доказательство. Имеем

$$H_{t,0} = A_t A_{t-1} \dots A_1, \quad t = 1, 2, \dots$$

Докажем первое равенство в (2.39). Так как

$$H_{1,0} = I_r - W_1^+ W_1,$$

то оно выполняется при $t = 1$. Из леммы 2.3 следует, что

$$\begin{aligned} H_{2,0} &= (I_r - W_2^+ C_2^T C_2)(I_r - W_1^+ W_1) = \\ &= (I_r - W_2^+ W_2)(I_r - W_1^+ W_1). \end{aligned}$$

Т.е., и при $t = 2$ первое равенство в (2.39) справедливо. Пусть оно выполняется для некоторого t . Покажем, что тогда оно будет выполняться и для значения $t + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} H_{t+1,0} &= (I_r - W_{t+1}^+ C_{t+1}^T C_{t+1}) H_{t,0} = \\ &= (I_r - W_{t+1}^+ C_{t+1}^T C_{t+1})(I_r - W_t^+ W_t) q_{t-1}, \end{aligned}$$

где $q_{t-1} = (I_r - W_{t-1}^+ W_{t-1}) \dots (I_r - W_1^+ W_1)$. Использование леммы 2.3 дает

$$H_{t+1,0} = (I_r - W_{t+1}^+ W_{t+1}) q_t,$$

что влечет первое равенство в (2.39).

Покажем, что

$$H_{t,0} = I_r - W_t^+ W_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.40)$$

Воспользуемся индукцией. Имеем

$$H_{1,0} = I_r - W_1^+ C_1^T C_1 = I_r - W_1^+ W_1 .$$

Т.е., при $t = 1$ (2.40) выполняется. Пусть оно выполняется для некоторого t . Покажем, что оно будет справедливо для $t + 1$. Использование леммы 2.3 дает

$$\begin{aligned} H_{t+1,0} &= (I_r - W_{t+1}^+ C_{t+1}^T C_{t+1})(I_r - W_t^+ W_t) = \\ &= (I_r - W_{t+1}^+ W_{t+1})(I_r - W_t^+ W_t) = \\ &= I_r - W_{t+1}^+ W_{t+1} - W_t^+ W_t + W_{t+1}^+ W_{t+1} W_t^+ W_t = I_r - W_{t+1}^+ W_{t+1} . \end{aligned}$$

Следствие. Любое решение системы уравнений (2.38) удовлетворяет условию $e_t = 0$ для любых начальных условий и $t \geq tr$. Т.е. оценка параметра α , полученная с помощью РМНК с диффузной инициализацией, является несмещенной при $t \geq tr$.

Отметим, также, что при отсутствии шумов РМНК с диффузной инициализацией восстанавливает вектор неизвестных параметров за конечное число шагов tr .

Лемма 2.5. Для любых $t \geq tr$

$$H_{t,s} = \lambda^{t-s} W_t^{-1} W_s , \quad s = 1, 2, \dots, t-1. \quad (2.41)$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией. Для $s = t-1$ имеем

$$\begin{aligned} H_{t,t-1} &= A_t = I_r - W_t^{-1} C_t^T C_t = \\ &= W_t^{-1} (W_t - C_t^T C_t) = \lambda W_t^{-1} W_{t-1} . \end{aligned}$$

Пусть $s = t-2$, тогда

$$\begin{aligned} H_{t,t-2} &= A_t A_{t-1} = \\ &= (I_r - W_t^{-1} C_t^T C_t) (I_r - W_{t-1}^+ C_{t-1}^T C_{t-1}) . \end{aligned}$$

Преобразовывая это выражение, получим

$$\begin{aligned} H_{t,t-2} &= W_t^{-1} (W_t - C_t^T C_t) (I_r - W_{t-1}^+ C_{t-1}^T C_{t-1}) = \\ &= \lambda W_t^{-1} W_{t-1} (I_r - W_{t-1}^+ C_{t-1}^T C_{t-1}) . \end{aligned}$$

Пусть L_t матрица ранга k_t , составленная из всех линейно независимых столбцов матрицы $\bar{C}_t^T = (\lambda^{-1/2} C_1^T, \lambda^{-1} C_2^T, \dots, \lambda^{-t/2} C_t^T)$. Использование (2.37) и скелетного разложения

$$\bar{C}_t^T = L_t \Gamma_t, \lambda^{-t/2} C_t^T = L_t \Gamma_t(t)$$

где L_t и $\Gamma_t = (\Gamma_t(1), \Gamma_t(2), \dots, \Gamma_t(t)) - m \times k_t$, $k_t \times r$ матрицы ранга k_t , $\Gamma_t(i)$, $i = 1, 2, \dots, t - k_t \times m$ матрицы, дает

$$W_t W_t^+ C_t^T = C_t^T. \quad (2.42)$$

Откуда следует, что $H_{t,t-2} = \lambda^2 W_t^{-1} W_{t-2}$. Т.е., при $s = t - 2$ (2.41) справедливо.

Пусть (2.41) выполняется для $s = t - i$. Покажем, что оно будет справедливо также для $s = t - i - 1$. Имеем

$$\begin{aligned} H_{t,t-i-1} &= (I_r - W_t^{-1} C_t^T C_t) \dots (I_r - W_{t-i+1}^+ C_{t-i+1}^T C_{t-i+1}) (I_r - W_{t-i}^+ C_{t-i}^T R_{t-i}^{-1} C_{t-i}) = \\ &= \lambda^i W_t^{-1} W_{t-i} (I_r - W_{t-i}^+ C_{t-i}^T C_{t-i}) = \lambda^{i+1} W_t^{-1} W_{t-i-1}. \end{aligned}$$

Теорема 2.2. Оценка РМНК с диффузной инициализацией, начиная с момента $t = tr$, определяется выражением $\alpha_t^{dif} = (\tilde{C}_t^T \tilde{R}_t^{-1} \tilde{C}_t)^{-1} \tilde{C}_t^T \tilde{R}_t^{-1} Y$ для любого начального вектора $\bar{\alpha}$, где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_t &= (C_1^T, C_2^T, \dots, C_t^T)^T \in R^{m \times r}, Y_t = (y_1^T, y_2^T, \dots, y_t^T)^T \in R^{mt}, \\ \tilde{R}_t &= \text{block diag}(\lambda I_m, \lambda^2 I_m, \dots, \lambda^t I_m) \in R^{m \times mt}. \end{aligned}$$

Доказательство. Итерируя (2.26) и используя леммы 2.4, 2.5 и (2.41), получим

$$\begin{aligned} \alpha_t^{dif} &= H_{t,0} \bar{\alpha} + \sum_{s=1}^t H_{t,s} K_s^{dif} y_s = \\ &= \sum_{s=1}^t H_{t,s} K_s^{dif} y_s = W_t^{-1} \sum_{s=1}^t \lambda^{t-s} W_s W_s^+ C_s^T y_s = \\ &= W_t^{-1} \sum_{s=1}^t \lambda^{t-s} C_s^T y_s = (\tilde{C}_t^T \tilde{R}_t^{-1} \tilde{C}_t)^{-1} \tilde{C}_t^T \tilde{R}_t^{-1} Y_t. \end{aligned}$$

Покажем, что оценки диффузного алгоритма совпадают с МНК с минимальной нормой. Обратимся еще раз к задаче минимизации взвешенной суммы квадратов (2.32). Известно [47], что если ранг матрицы $\tilde{C}_t$ меньше r , то ее решение не единственно, а решение с минимальной нормой определяется выражением

$$\alpha_t = \tilde{C}_t^+ \tilde{R}_t^{-1/2} Y_t, \quad (2.43)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{C}_t &= (C_1^T R_1^{-1/2}, C_2^T R_2^{-1/2}, \dots, C_t^T R_t^{-1/2})^T \in R^{mt \times r}, Y_t = (y_1^T, y_2^T, \dots, y_t^T)^T \in R^{mt}, \\ \tilde{R}_t &= \text{block diag}(\lambda I_m, \lambda^2 I_m, \dots, \lambda^t I_m) \in R^{mt \times mt}, R_i = \lambda^i I_m, i = 1, 2, \dots, t.\end{aligned}$$

Мы хотим установить связь между этой оценкой и оценкой РМНК с диффузной инициализацией. Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2.6. Справедливо тождество

$$M_t^+ \tilde{C}_t^T = [(I_r - K_t C_t) M_{t-1}^+ \tilde{C}_{t-1}^T, K_t R_t^{1/2}], \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (2.44)$$

где $M_t = \tilde{C}_t^T \tilde{C}_t$, $K_t = M_t^+ C_t^T R_t^{-1}$.

Доказательство. Так как $M_t^+ \tilde{C}_t^T = M_t^+ (\tilde{C}_{t-1}^T, C_t^T R_t^{-1/2})$, то последние r столбцов в левой и правой частях (2.44) совпадают. Покажем, что

$$M_t^+ \tilde{C}_{t-1}^T = (I_r - K_t C_t) M_{t-1}^+ \tilde{C}_{t-1}^T.$$

Должно быть

$$\begin{aligned}& [M_t^+ - (I_r - M_t^+ M_t + M_t^+ M_{t-1}) M_{t-1}^+] \tilde{C}_{t-1}^T = \\ & = [M_t^+ (I_r - M_{t-1}^+ M_{t-1}) - (I_r - M_t^+ M_t) M_{t-1}^+] \tilde{C}_{t-1}^T = 0.\end{aligned} \quad (2.45)$$

Покажем, вначале что

$$(I_r - M_t^+ M_t) M_{t-1}^+ = 0. \quad (2.46)$$

Пусть матрица $\tilde{C}_t$ имеет ранг k_t и $l_t(1), l_t(2), \dots, l_t(k_t)$ ее линейно-независимые столбцы, выбранные по той же схеме, что и столбцы матрицы $\bar{C}_t$, используемой при доказательстве леммы 2.3. Линейное пространство $C(l_t(1), l_t(2), \dots, l_t(k_t))$, определяемое ими, совпадает с пространством, образованного столбцами M_t . Отсюда следует, что $C(M_{t-1}) \subseteq C(M_t)$. Использование скелетного разложения матриц

$$\tilde{C}_t^T = L_t \Gamma_t, \quad L_t = (l_t(1), l_t(2), \dots, l_t(k_t)), \quad \Gamma_t = (\Gamma_t(1), \Gamma_t(2), \dots, \Gamma_t(t)), \quad \text{rank}(\Gamma_t) = k_t$$

дает $M_t = \tilde{C}_t^T \tilde{C}_t = L_t \tilde{\Gamma}_t L_t^T$, где $\tilde{\Gamma}_t = \Gamma_t \Gamma_t^T$. Так как L_t матрица полного ранга по столбцам, то $L_t^+ = (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T$ и

$$M_t^+ = (L_t \tilde{\Gamma}_t L_t^T)^+ = (L_t^T)^+ \tilde{\Gamma}_t^{-1} (L_t)^+, \quad M_t^+ M_t = L_t (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T.$$

Подставляя эти выражения в (2.46) получим

$$(I_r - L_t (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T) L_{t-1} (L_{t-1}^T L_{t-1})^{-1} \tilde{\Gamma}_{t-1}^{-1} L_{t-1}^+ = 0.$$

Но так как

$$(I_r - L_t (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T) L_{t-1} = 0,$$

то (2.46) действительно выполняется.

Тождество

$$M_t^+ (I_r - M_{t-1} M_{t-1}^+) \tilde{C}_{t-1}^T = 0 \quad (2.47)$$

следует из равенства

$$(I_r - L_{t-1} (L_{t-1}^T L_{t-1})^{-1} L_{t-1}^T) L_{t-1} \Gamma(t-1) = 0.$$

Теорема 2.3. Для любых $t = 1, 2, \dots$ решение задачи оптимизации (2.32) определяемое выражением (2.43) может быть получено с помощью РМНК с диффузной инициализацией и начальным условием $\alpha_0 = 0$.

Доказательство. Покажем, используя индукцию, что

$$\alpha_t = \alpha_t^{dif}, \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (2.48)$$

При $t = 1$, сделанное утверждение следует из выражений

$$\begin{aligned} \alpha_1^{dif} &= K_1^{dif} y_1 = (C_1^T C_1)^+ C_1^T y_1, \\ \alpha_1 &= \tilde{C}_1^+ \tilde{R}_1^{-1/2} Y_1 = (R_1^{-1/2} C_1)^+ R_1^{-1/2} y_1 = (C_1^T C_1)^+ C_1^T y_1. \end{aligned}$$

Предположим, что (2.48) выполняется для некоторого $t-1$. Покажем, что оно будет, также выполняться и для значения t . Так как [47] $\tilde{C}_t^+ = M_t^+ \tilde{C}_t^T$, то использование тождества (2.44) дает

$$\begin{aligned}\alpha_t &= \tilde{C}_t^+ \tilde{R}_t^{-1/2} Y_t = [(I_r - K_t^{dif} C_t) M_{t-1}^+ \tilde{C}_{t-1}, K_t^{dif} R_t^{1/2}] \times \\ &\times (Y_{t-1}^T \tilde{R}_{t-1}^{-1/2}, y_t^T R_t^{-1/2})^T = (I_r - K_t^{dif} C_t) M_{t-1}^+ \tilde{C}_{t-1} \tilde{R}_{t-1}^{-1/2} Y_{t-1} + K_t^{dif} y_t = \\ &= (I_r - K_t^{dif} C_t) \alpha_{t-1} + K_t^{dif} y_t = \alpha_{t-1} + K_t^{dif} (y_t - C_t \alpha_{t-1}).\end{aligned}$$

Таким образом, оценка МНК (2.43) с минимальной нормой может быть найдена рекуррентно, на основе использования РМНК с диффузной инициализацией.

Определение K_t^{dif} связано с необходимостью вычисления псевдоинверсий матриц высокого порядка. Покажем, как этого можно избежать при $m=1$, вычисляя рекуррентно псевдоинверсию матрицы $\tilde{C}_t^T = (\lambda^{-1/2} C_1^T, \lambda^{-1} C_2^T, \dots, \lambda^{-t/2} C_t^T)^T$ и используя формулу Гревия [47]

$$(\tilde{C}_t^+)^T = \begin{pmatrix} (\tilde{C}_{t-1}^+)^T (I_r - \lambda^{-t/2} C_t^T k_t^T) \\ k_t^T \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

где

$$k_t = \begin{cases} \frac{\lambda^{-t/2} (I_r - \tilde{C}_{t-1}^T (\tilde{C}_{t-1}^+)^T) C_t^T}{\| (I_r - \tilde{C}_{t-1}^T (\tilde{C}_{t-1}^+)^T) C_t^T \|^2}, & (I_r - \tilde{C}_{t-1}^T (\tilde{C}_{t-1}^+)^T) C_t^T \neq 0 \\ \frac{\lambda^{-t/2} \tilde{C}_{t-1}^+ (\tilde{C}_{t-1}^+)^T C_t^T}{1 + \lambda^{-t} \| C_{t-1}^+ C_t^T \|^2}, & (I_r - \tilde{C}_{t-1}^T (\tilde{C}_{t-1}^+)^T) C_t^T = 0 \end{cases}. \quad (2.50)$$

Из (2.49) следует, что $k_t = \tilde{C}_t^+ e_r = (\tilde{C}_t^T \tilde{C}_t)^+ C_t^T$ и поэтому $K_t^{dif} = k_t$.

Покажем, что в переходной стадии ($t \leq tr$) при выполнении условия

$$\text{rank}(\tilde{C}_t) = mt, \quad \bar{\alpha} = 0 \quad (2.51)$$

ДАО не зависит от забывающего множителя λ .

Покажем вначале, что

$$H_{t,s} K_s^{dif} = \lambda^{t-s} W_t^+ C_s^T, \quad t > s, \quad (2.52)$$

где $H_{t,s}$ – переходная матрица системы (2.38). Обозначим $X_{t,s}$ нормированную переходную матрицу вспомогательной системы

$$x_t = (I_r - K_t C_t) x_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (2.53)$$

Установим вид $X_{t,s}$. Использование (2.4) дает

$$I_r = M_t^{-1} M_t = \lambda M_t^{-1} M_{t-1} + M_t^{-1} C_t^T C_t .$$

Так как $I_r - M_t^{-1} C_t^T C_t = \lambda M_t^{-1} M_{t-1}$, то $X_{t,s}$ удовлетворяет системе

$$X_{t,s} = \lambda M_t^{-1} M_{t-1} X_{t-1,s} .$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} M_t X_{t,s} &= \lambda M_{t-1} X_{t-1,s} = \lambda^2 M_{t-2} X_{t-2,s} = \dots = \lambda^{t-s} M_s X_{s,s}, \\ X_{t,s} &= \lambda^{t-s} M_t^{-1} M_s . \end{aligned} \quad (2.54)$$

Использование лемм 2.1, 2.2 дает

$$H_{t,s} K_s^{dif} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} X_{t,s} M_s^{-1} C_s^T = \lambda^{t-s} \lim_{\mu \rightarrow \infty} M_t^{-1} C_s^T = \lambda^{t-s} W_t^+ C_s^T, \quad (2.55)$$

$$H_{t,0} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} X_{t,0} = \lambda^t \lim_{\mu \rightarrow \infty} M_t^{-1} M_0 = \bar{P} (I_r - W_t W_t^+). \quad (2.56)$$

Так как

$$\begin{aligned} H_{t,0} &= \bar{P} (I_r - W_t W_t^+) = \bar{P}^{1/2} (I_r - (\bar{P}^{1/2} W_t) (\bar{P}^{1/2} W_t)^+) \bar{P}^{1/2} = \\ &= (I_r - W_t W_t^+) \bar{P}, \end{aligned}$$

то отсюда следует, что системы (2.38) имеет нормированную переходную матрицу (2.39).

Отметим, что, доказывая лемму 2.4, мы не использовали степенное разложение (2.18), которое, например, для случайных входных сигналов, вообще говоря, не верно.

Имеем при $t \leq tr$

$$\begin{aligned} \alpha_t^{dif} &= H_{t,0} \bar{\alpha} + \sum_{s=1}^t H_{t,s} K_s^{dif} y_s = \\ &= (I_r - W_t W_t^+) \bar{\alpha} + W_t^+ \sum_{s=1}^t \lambda^{t-s} C_s^T y_s . \end{aligned} \quad (2.57)$$

Так как

$$\begin{aligned} W_t &= \sum_{s=1}^t \lambda^{t-s} C_s^T C_s = \lambda^t \bar{C}_t^T \tilde{R}_t^{-1} \bar{C}_t = \lambda^t \tilde{C}_t^T \tilde{C}_t, \\ W_t^+ &= \lambda^{-t} (\tilde{C}_t^T \tilde{C}_t)^+, \sum_{s=1}^t \lambda^{t-s} C_s^T y_s = \lambda^t \tilde{C}_t^T \tilde{R}_t^{-1/2} Y_t, \tilde{C}_t = \tilde{R}_t^{-1/2} \bar{C}_t, \end{aligned}$$

где $\tilde{C}_t = (C_1^T R_1^{-1/2}, C_2^T R_2^{-1/2}, \dots, C_t^T R_t^{-1/2})^T \in R^{mt \times r}$, $Y_t = (y_1^T, y_2^T, \dots, y_t^T)^T \in R^{mt}$,
 $\tilde{R}_t = \text{block diag}(\lambda I_m, \lambda^2 I_m, \dots, \lambda^t I_m) \in R^{mt \times mt}$, $\bar{C}_t = (C_2^T, C_1^T, \dots, C_t^T)^T$
и для любой матрицы $A - A^+ = (A^T A)^+ A^T$ [47], то подстановка этих выражений в (2.57) дает

$$\begin{aligned}\alpha_t^{dif} &= (I_r - W_t W_t^+) \bar{\alpha} + W_t^+ \bar{C}_t^T \tilde{R}_t^{-1/2} Y_t = \\ &= (I_r - W_t W_t^+) \bar{\alpha} + (\tilde{C}_t^T \tilde{C}_t)^+ \tilde{C}_t^T \tilde{R}_t^{-1/2} Y_t = \\ &= (I_r - W_t W_t^+) \bar{\alpha} + \bar{C}_t^+ Y_t.\end{aligned}$$

Откуда следует сделанное утверждение.

Дополним этот результат. Покажем, что если $\text{rank}(\tilde{C}_t) = mt$, то оценка МНК с минимальной нормой (2.43) не зависит от забывающего множителя λ . Пусть $A - n \times p$, $B - p \times m$ произвольные матрицы. Тогда $(AB)^+ = B^+ A^+$, если $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = p$ [47]. Поэтому $\tilde{C}_t^+ = (\tilde{R}_t^{-1/2} \bar{C}_t)^+ = \bar{C}_t^+ \tilde{R}_t^{1/2}$. Подстановка этого выражения в (2.43) дает $\alpha_t = \bar{C}_t^+ Y_t$.

В заключение этого раздела приведем аналоги некоторых из полученных результатов для случая, когда матрица интенсивностей шумов измерения R_t используется в критерии качества вместо забывающего множества.

Теорема 2.4. Справедливы равномерные по t асимптотические представления

$$P_t = M_t^{-1} = \bar{P}(I_r - W_t W_t^+) \mu + W_t^+ + O(\mu^{-1}), \quad (2.58)$$

$$K_t = \begin{cases} K_t^{dif} + O(1/\mu), & C_t \neq 0 \\ 0, & C_t = 0 \end{cases}, \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (2.59)$$

и для любого $\varepsilon > 0$

$$P(\|\alpha_t - \alpha_t^{dif}\| \geq \varepsilon) = O(\mu^{-1}), \quad \mu \rightarrow \infty, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (2.60)$$

где

$$W_t = W_{t-1} + C_t^T R_t^{-1} C_t, \quad W_0 = 0_{r \times r}, \quad (2.61)$$

$$K_t^{dif} = W_t^+ C_t^T R_t^{-1}, \quad (2.62)$$

$$\alpha_t^{dif} = \alpha_{t-1}^{dif} + K_t^{dif} (y_t - C_t \alpha_{t-1}^{dif}), \quad \alpha_0^{dif} = \bar{\alpha}, \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (2.63)$$

Доказательство. Так как

$$M_t = \bar{P}^{-1} / \mu + \sum_{k=1}^t C_k^T R_k^{-1} C_k ,$$

то полагая в лемме 2.1 $\Omega_t = M_t$, $\Omega_0 = \bar{P}^{-1}$, $F_t = R_t^{-1/2} C_t$, получим (2.58).

(2.59) следует из (2.58), леммы 2.2 и равенства $K_t = M_t^{-1} C_t^T R_t^{-1} = P_t C_t^T R_t^{-1}$.

Мы опускаем доказательство (2.60), которое аналогично доказательству, приведенному при выводе оценки (2.21) в теореме 2.1.

Отметим, что аналоги следствий 2.1.1 – 2.1.3 сохраняются и в этом случае. Следствие 2.1.3 может быть дополнено: из выражения

$$K_t = [W_t \delta W_t^+ \mu + O(1)] C_t^T R_t^{-1}, \quad \mu \rightarrow \infty$$

вытекает, что эффект расходимости может усиливаться при измерениях высокой точности (малых значениях $\| R_t \|$).

Отметим, также, что при выполнении условия (2.51), где

$$\tilde{C}_t = (C_1^T R_1^{-1/2}, C_2^T R_2^{-1/2}, \dots, C_t^T R_t^{-1/2})^T \in R^{mt \times r}$$

ДАО не зависит от R_t при $t \leq tr$.

Теорема 2.5. 1. Для переходной матрицы системы

$$e_t = (I_r - K_t^{dif} C_t) e_{t-1} = (I_r - W_t^+ C_t^T R_t^{-1} C_t) e_{t-1}, \quad (2.64)$$

справедливы представления

$$H_{t,0} = I_r - W_t^+ W_t, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (2.65)$$

$$H_{t,s} = W_t^{-1} W_s, \quad t \geq tr, \quad s = 1, 2, \dots, t-1. \quad (2.66)$$

2. Оценка α_t^{dif} совпадает с оценкой МНК с минимальной нормой.

Доказательство теоремы аналогично, приведенному выше доказательству для ДАО с забывающим множителем и мы его опускаем.

2.3 Асимптотические свойства оценки параметров ОВЕ алгоритмом при диффузной инициализации

Проблемы оценки параметров авторегрессионных моделей с экзогенными входами (ARX) возникают в различных приложениях, таких как системы идентификации, обработки сигналов и управления. Традиционные подходы к их решению зависят от используемых допущений относительно

природы возмущений (шумов). В рамках статистической интерпретации рекурсивный алгоритм наименьших квадратов (RLS) обычно используется для обеспечения высокой скорости сходимости к оптимальным значениям параметров модели и робастности при обработке данных в изменяющейся среде [58]. Однако во многих случаях использование статистики не совсем оправдано и может привести к ошибочным решениям. В таких ситуациях хорошей альтернативой может быть подход, основанный на рекуррентных алгоритмах оптимального ограничивающего эллипсоида (ОБЕ) [58-63]. В рамках этого подхода предполагается, что шумы неизвестны, но ограничены определенными границами. В отличие от алгоритма RLS, который ищет точечные оценки неизвестных параметров, алгоритмы ОБЕ позволяют получить их таким образом, что они совместимы только с предположениями модели. Важным преимуществом алгоритмов ОБЕ по сравнению с алгоритмом RLS является то, что они обновляют оценку, когда новые данные могут улучшить ее. Алгоритмы ОБЕ производят последовательность гиперэллипсоидов в некоторые моменты времени, характеризующиеся их центрами, которые дают оценки неизвестных параметров, их размеров (аналоги ковариационных матриц) и скалярных значений (аналоги доверительных интервалов). Все известные алгоритмы ОБЕ различаются выбором критерия оптимальности, по которому определяются эти величины [63]. Нас будут интересовать свойства алгоритма ОБЕ, разработанного в работе [64], при отсутствии априорной информации о неизвестных параметрах моделей ARX. Часть из приведенных далее результатов было получено в [65].

Рассмотрим ARX модель

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \dots + a_m y_{t-m} + b_1 u_{t-1} + \dots + b_k u_{t-k} + \xi_t, \quad t=1,2,\dots,N, \quad (2.67)$$

где $y_t, u_t \in R^1$ - измеримые выходные и входные данные соответственно, $a_i, i=1,2,\dots,m, b_i, i=1,2,\dots,k$ - неизвестные параметры и шум ξ_t удовлетворяет ограничениям

$$\xi_t^2 \leq \gamma^2, \quad t=1,2,\dots,N \quad (2.68)$$

с заданной постоянной γ^2 . Вводя обозначения

$$\alpha = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_k)^T, \quad C_t = (y_{t-1}, \dots, y_{t-m}, u_{t-1}, \dots, u_{t-k}),$$

представим (1) в более удобной для нас форме

$$y_t = C_t \alpha + \xi_t, \quad t=1,2,\dots,N. \quad (2.69)$$

ОВЕ алгоритм оценки параметров описывается соотношениями [62, 64]

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + K_t \delta_t, \alpha_0 = 0, \quad (2.70)$$

где

$$K_t = \lambda_t M_t^{-1} C_t^T = \lambda_t P_t C_t^T, \quad (2.71)$$

$$M_t = (1 - \lambda_t) M_{t-1} + \lambda_t C_t^T C_t, \quad (2.72)$$

$$\delta_t = y_t - C_t \alpha_{t-1}, \quad (2.73)$$

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda_t) \sigma_{t-1}^2 + \lambda_t \gamma^2 + f_t, \sigma_0^2 = 1, \quad (2.74)$$

$$f_t = \lambda_t (1 - \lambda_t) \delta_t^2 / (1 - \lambda_t + \lambda_t G_t),$$

$$\lambda_t = \begin{cases} 0, \sigma_{t-1}^2 + \delta_t^2 \leq \gamma^2 \\ (1 - \beta_t) / 2, G_t = 1, \sigma_{t-1}^2 + \delta_t^2 > \gamma^2 \\ (1 - G_t / (1 + \beta_t (G_t - 1)))^{1/2} / (1 - G_t) \end{cases}, \quad (2.75)$$

$$\beta_t = (\sigma_{t-1}^2 + \gamma^2) / \delta_t^2, \quad (2.76)$$

$$P_t = (P_{t-1} - \lambda_t P_{t-1} C_t^T C_t P_{t-1} / (1 - \lambda_t + \lambda_t G_t)) / (1 - G_t), P_0 = \tilde{P}, \quad (2.77)$$

$$G_t = C_t P_{t-1} C_t^T. \quad (2.78)$$

Для оценки α с помощью этого алгоритма необходимо задать начальное условие для матрицы P_t . Учитывая, что априорной информации об α нет, стандартный подход заключается в использовании мягкой инициализации $P_0 = \mu I$, где предполагающей, что пользователь выбирает большой параметр $\mu > 0$, характеризующий степень начальной неопределенности. Предельные случаи $\mu \rightarrow \infty$ мы будем называть диффузной инициализацией. Требуется изучить алгоритм ОВЕ, описываемый соотношениями (4) – (12), при $\mu \rightarrow \infty$. Более точно мы рассмотрим свойства α_t , P_t , K_t , σ_t^2 при $\mu \rightarrow \infty$ и разработаем на их этой основе предельный алгоритм, который назовем диффузной версией ВТО (алгоритм ДОВЕ).

Доказательство теоремы 1 основано на следующем вспомогательном утверждении.

Лемма 1. Пусть Ω_t - $n \times n$ матрица вида

$$\Omega_t = I / \mu + \sum_{k=1}^t F_{t,k}^T F_{t,k} = I / \mu + \Lambda_t, \quad (2.79)$$

где $F_{t,k}$ - любая $m \times n$ матрица, $k=1,2,\dots,t$, $t=1,2,\dots,N$.

Тогда:

1. Матричная функция Ω_t^{-1} имеет равномерное асимптотическое разложение на любом конечном множестве $T = \{1, 2, \dots, N\}$

$$\Omega_t^{-1} = (I - \Lambda_t \Lambda_t^+) \mu + \Lambda_t^+ + O(1/\mu), \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (2.80)$$

Справедливы следующие равенства

$$(I - \Lambda_t \Lambda_t^+) F_{t,k}^T = 0, \quad k=1, 2, \dots, t, \quad t=1, 2, \dots, N. \quad (2.81)$$

Теорема 1. Пусть $0 < \lambda_t < 1$. Тогда P_t и K_t имеют равномерное асимптотическое разложение на любом конечном множестве $T = \{1, 2, \dots, N\}$

$$P_t = g_t^{-1} (I - W_t W_t^+) \mu + W_t^+ + O(1/\mu), \quad \mu \rightarrow \infty, \quad (2.82)$$

$$K_t = \lambda_t W_t^+ C_t^T + O(1/\mu) = \tilde{K}_t + O(1/\mu), \quad \mu \rightarrow \infty, \quad (2.83)$$

где

$$W_t = (1 - \lambda_t) W_{t-1} + \lambda_t C_t^T C_t, \quad W_0 = 0, \quad (2.84)$$

$$g_t = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \dots (1 - \lambda_t). \quad (2.85)$$

Следствие 1. Пренебрежение членами порядка малости в (2.83) дает

$$\tilde{\alpha}_t = (1 - \lambda_t) \tilde{\alpha}_{t-1} + \tilde{K}_t \tilde{\delta}_t, \quad \tilde{\alpha}_0 = 0, \quad (2.86)$$

где

$$\tilde{\delta}_t = y_t - C_t \tilde{\alpha}_{t-1}, \quad (2.87)$$

Обозначим $e_t = \alpha_t - \tilde{\alpha}_t$. Функция $\|e_t\|$ имеют равномерное асимптотическое разложение на любом конечном множестве $T = \{1, 2, \dots, N\}$

$$\|e_t\| = O(1/\mu), \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (2.88)$$

Следствие 2. Функция имеет равномерное асимптотическое разложение на любом конечном множестве $T = \{1, 2, \dots, N\}$

$$f_t = \begin{cases} O(1/\mu) \text{ as } \mu \rightarrow \infty, & 0 \leq t \leq T^* \\ \lambda_t (1 - \lambda_t) \delta_t^2 / (1 - \lambda_t + \lambda_t \tilde{G}_t) + O(1/\mu) \text{ as } \mu \rightarrow \infty, & t \geq T^* + 1 \end{cases}, \quad (2.89)$$

где

$$T^* = \min_t \{t : W_t > 0, t = 1, 2, \dots, N\} =$$

$$\min_t \{t : \sum_{k=1}^t q_{t,k} C_t^T C_t > 0, t=1,2,\dots,N\} < N, \\ \tilde{G}_t = C_t W_{t-1}^+ C_t^T. \quad (2.90)$$

Пренебрежение членами порядка малости $O(1/\mu)$ in (2.74) дает при $0 \leq t \leq T^*$

$$\tilde{\sigma}_t^2 = (1 - \lambda_t) \tilde{\sigma}_{t-1}^2 + \lambda_t \gamma^2 + \tilde{f}_t, \quad \tilde{\sigma}_0^2 = 1, \quad (2.91)$$

$$\tilde{f}_t = \lambda_t (1 - \lambda_t) \tilde{\sigma}_t^2 / (1 - \lambda_t + \lambda_t \tilde{G}_t). \quad (2.92)$$

Следствие 3. Из разложения (2.82) следует, что член в P_t пропорциональный большому параметру μ (диффузная компонента) исчезает при $t \geq T^*$ и

$$P_t^{dif} = g_t^{-1} (I - W_t W_t^+) \mu$$

В то же время разложение (2.83) подразумевает, что K_t не содержит диффузной составляющей.

Следствие 4. Покажем, что численная реализация алгоритма может привести к дивергенции при больших значениях μ . Действительно, пусть δW_t^+ будет погрешность вычислений. Тогда из (2.71), (2.82), (2.83) следует

$$K_t = \lambda_t P_t C_t^T = \lambda_t \{g_t^{-1} [I - W_t (W_t^+ + \delta W_t^+)] \mu + W_t^+ + O(1/\mu)\} C_t^T = \\ \lambda_t [-g_t^{-1} W_t \delta W_t^+] \mu + O(1) C_t^T \text{ as } \mu \rightarrow \infty. \quad (2.93)$$

Рассмотрим систему для матрицы перехода состояний однородной части (2.86)

$$X_{t,s} = (I - \tilde{K}_t C_t) X_{t-1,s} = (I - \lambda_t W_t^+ C_t^T C_t) X_{t-1,s} = \\ A_t X_{t-1,s}, \quad X_{s,s} = I. \quad (2.94)$$

При доказательстве теоремы 2 используется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Справедливы представления

$$X_{t,s} = \tilde{g}_{t,s} W_t^{-1} W_s, \quad t \geq T^*, s < t, \quad (2.95)$$

$$X_{t,0} = I - W_t W_t^+, \quad t \in T, \quad (2.96)$$

$$X_{t,s} \tilde{K}_s = \lambda_s \tilde{g}_{t,s} W_t^+ C_s^T, \quad t \geq T^*, s < t \quad (2.97)$$

где $\tilde{g}_{t,s} = (1 - \lambda_t)(1 - \lambda_{t-1}) \dots (1 - \lambda_{s+1})$.

Теорема2. Пусть $\lambda_t, t=1,2,...,N^*$ - последовательность чисел, удовлетворяющая условию $0 < \lambda_t < 1$. Тогда оценка $\tilde{\alpha}_t$ из(20), (21) не зависит от λ_t при $0 \leq t \leq T^*$.

Подводя итог, запишем предельные соотношения для величин $\alpha_t, P_t, K_t, \sigma_t^2$, которые описывают DOBE алгоритм:

$$\tilde{\alpha}_t = (1 - \lambda_t)\tilde{\alpha}_{t-1} + \tilde{K}_t\tilde{\delta}_t, \tilde{\alpha}_0 = 0, \quad (2.98)$$

$$\tilde{\delta}_t = y_t - C_t\tilde{\alpha}_{t-1}, \quad (2.99)$$

$$\tilde{K}_t = \lambda_t W_t^+ C_t^T, \quad (2.100)$$

$$W_t = (1 - \lambda_t)W_{t-1} + \lambda_t C_t^T C_t, W_0 = 0, \quad (2.101)$$

$$\tilde{\sigma}_t^2 = (1 - \lambda_t)\tilde{\sigma}_{t-1}^2 + \lambda_t \gamma^2 + \tilde{f}_t, \tilde{\sigma}_0^2 = 1, \quad (2.102)$$

$$\tilde{f}_t = \lambda_t (1 - \lambda_t) \tilde{\delta}_t^2 / (1 - \lambda_t + \lambda_t \tilde{G}_t), \quad (2.103)$$

$$\tilde{G}_t = C_t W_{t-1}^+ C_t^T, \quad (2.104)$$

где λ_t определяется выражениями (2.75), (2.76) с точностью до замены $\sigma_t^2, \delta_t, G_t$ на $\tilde{\sigma}_t^2, \tilde{\delta}_t, \tilde{G}_t$, соответственно.

Проиллюстрируем DOBE алгоритм, используя модель вида [62]

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_1 y_{t-1} + a_1 y_{t-1} + a_1 y_{t-1} + \xi_t, \quad (2.105)$$

где $a_1 = 0.34, a_2 = -0.28, a_3 = 0.46, a_4 = -0.14, \xi_t$ - некоррелированный равномерно распределенный случайный процесс с нулевым средним и известной ковариацией $E(\xi_t \xi_t^T) = 1$. Предположим, что каждый параметр претерпевает десятипроцентное ступенчатое изменение величины через каждые 200 точек выборки. На рис. 1 показаны траектории фактических параметров, их оценки по DOBE, DRLS и алгоритмам конечной импульсной характеристики (алгоритм DFIRLS). Видно, что алгоритм DOBE может обеспечить превосходную способность отслеживания по сравнению с алгоритмами DRLS и DFIRLS. Обратите внимание, что номер образца обновления DOBE был 1585. Используемый алгоритм DRLS описывается соотношениями

$$\alpha_t^{dif} = \alpha_{t-1}^{dif} + K_t^{dif} (y_t - C_t \alpha_{t-1}^{dif}), \alpha_0^{dif} = 0, \quad (2.106)$$

где

$$K_t^{dif} = R_t^+ C_s^T, \quad (2.107)$$

$$R_t = \lambda R_{t-1} + C_t^T C_t, \quad 0 < \lambda \leq 1, R_0 = 0. \quad (2.108)$$

Алгоритм DFIRLS использует отношения эти выражения в режиме скользящего окна с размером 250 образцов. Заметим, что реализация алгоритма DFIRLS требует значительно больших вычислительных ресурсов по сравнению с алгоритмом DOBE.

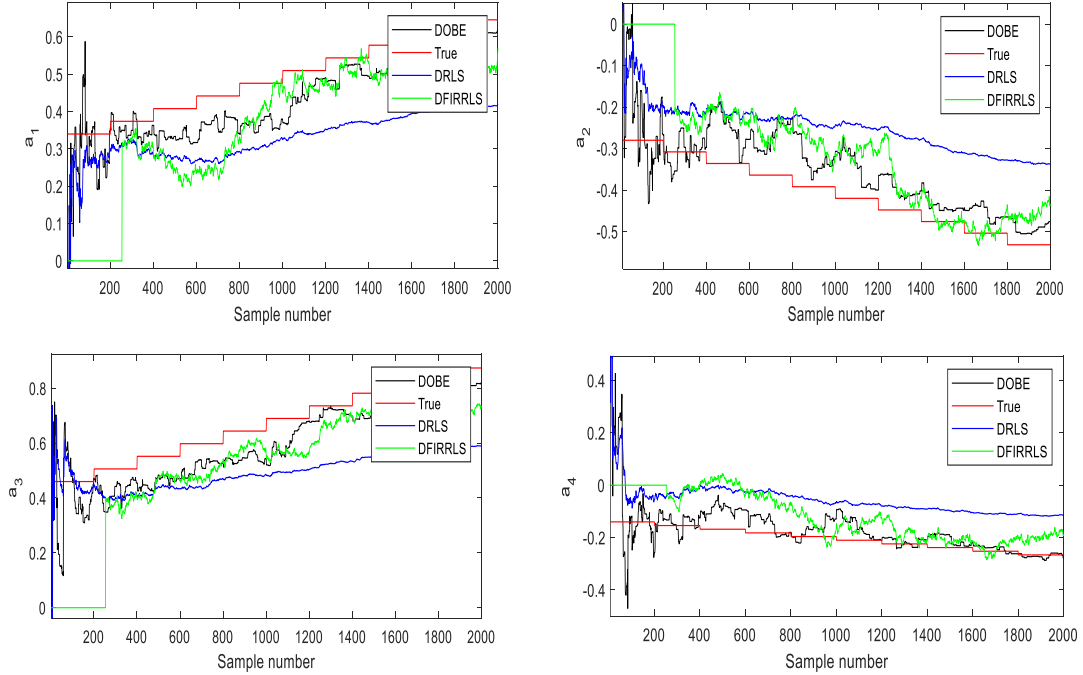


Рисунок 2.2 – Слежение за параметрами a_1, a_2, a_3, a_4

2.4 Алгоритмы RLS с нелинейными ограничениями

Предположим, что модель наблюдения имеет вид

$$y_t = c_t \alpha + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (2.109)$$

где $\alpha \in R^1$ – измеряемый выход, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)^T \in R^r$ – вектор неизвестных параметров, $c_t = (c_{1t}, c_{2t}, \dots, c_{rt}) \in R^{1 \times r}$, c_{it} , $i = 1, 2, \dots, r$ – регрессоры (входы), $\xi_t \in R^1$ – центрированный случайный процесс с некоррелированными значениями и дисперсией $R_t = E[\xi_t^2]$, N – размер выборки. Регрессоры в (2.109) могут быть детерминированными функциями или случайными. Пусть выборка $\{z_t, y_t\}$, $t = 1, 2, \dots, N$ и критерий качества заданы

$$J_t(\alpha) = \sum_{k=1}^t \lambda^{t-k} (y_k - c_k \alpha)^2, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (2.110)$$

где $\lambda \in (0, 1]$.

Требуется найти оценку неизвестного параметра из условия минимума (2.109) с учетом ограничения

$$h_t(\alpha) = q, t = 1, 2, \dots, N, \quad (2.111)$$

где $h_t(\alpha) \in C_\alpha^1$, q – заданное значение. Оценка должна быть обновлена после получения нового наблюдения. Для решения этой задачи мы используем метод Гаусса-Ньютона с линеаризацией в окрестности последней оценки.

Рассмотрим следующую вспомогательную линейную задачу. Мы ищем оценку неизвестного параметра α из условия минимума

$$J_t(\alpha) = ||Y_t - C_t \alpha||^2 \quad (2.112)$$

среди оценок, минимизирующих

$$I_t(\alpha) = \sum_{k=1}^t (f_k - g_k \alpha)^2 = ||F_t - G_t \alpha||^2, t = 1, 2, \dots, N, \quad (2.113)$$

где

$$Y_t = (y_1, y_2, \dots, y_t)^T, C_t = (c_1^T, c_2^T, \dots, c_t^T)^T, \\ F_t = (f_1, f_2, \dots, f_t)^T, G_t = (g_1^T, g_2^T, \dots, g_t^T)^T.$$

Lemma 1. (Не рекуррентная форма). Справедливы следующие представления

$$\alpha_t = \beta_t + \gamma_t, \quad (2.114)$$

где

$$\beta_t = G_t^+ F_t, \quad (2.115)$$

$$\gamma_t = V_t^+ (Y_t - C_t G_t^+ F_t), \quad (2.116)$$

$$V_t = C_t (I_n - G_t^+ G_t). \quad (2.117)$$

Proof. Все минимальные точки (2.113) определяются выражением

$$\alpha_t = G_t^+ F_t + (I_n - G_t^+ G_t) u_t, \quad (2.118)$$

где $u_t \in R^n$ произвольная функция. Подстановка этого выражения в (2.112) дает

$$J_t(\alpha_t) = ||Y_t - C_t G_t^+ F_t - C_t (I_n - G_t^+ G_t) u_t||^2.$$

Отсюда вытекает соотношение для функции u_t минимальной нормы

$$u_t = V_t^+(Y_t - C_t G_t^+ F_t). \quad (2.119)$$

Подстановка (2.119) в (2.118) дает решение задачи (2.112), (2.113)

$$\alpha_t = G_t^+ F_t + (I_n - G_t^+ G_t)(Y_t - C_t G_t^+ F_t). \quad (2.120)$$

Упростим это выражение. Предположим, что $\text{rank}(G_t) = k_t, t = 1, 2, \dots, n$. Так как $G_t^+ G_t$ матрица проекции, то с помощью теоремы диагонализации находим

$$G_t^+ G_t = D_t \Lambda_t D_t^T,$$

где D_t is $n \times n$ ортогональная матрица, Λ_t $n \times n$ диагональная матрица вида

$$\Lambda_t = \begin{pmatrix} I_{k_t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Имеем

$$\begin{aligned} I_n - G_t^+ G_t &= D_t D_t^T - D_t \Lambda_t D_t^T = \\ &= D_t D_t^T - D_{1t} D_{1t}^T = D_{2t} D_{2t}^T, \\ V_t^+ &= (C_t (I_n - G_t^+ G_t))^+ = \\ &= (C_t D_{2t} D_{2t}^T)^+. \end{aligned} \quad (2.121)$$

где $D_t = (D_{1t}, D_{2t})$.

Пусть A $n \times k_t$, B $r \times m$ матрицы и $BB^T = I_r$. Тогда

$$(AB)^+ = B^+ A^+.$$

Полагая в (2.121)

$$\begin{aligned} A &= C_t D_{2t}, \\ B &= D_{2t} (D_{2t}^T D_{2t})^+ \end{aligned}$$

и принимая во внимание, что $D_{2t}^T D_{2t} = I_{k_t}$ находим

$$V_t^+ = (D_{2t}^T)^+ (C_t D_{2t})^+.$$

Использование соотношения

$$(D_{2t}^T)^+ = D_{2t} (D_{2t}^T D_{2t})^+ = D_{2t}$$

дает

$$(I_n - G_t^+ G_t) V_t^+ = D_{2t} D_{2t}^T D_{2t} (C_t D_{2t})^+ = \\ D_{2t} (C_t D_{2t})^+ = V_t^+,$$

что влечет (2.115) – (2.117).

Lemma 2. (Рекурсивная форма). Справедливо следующее представление

$$\beta_t = \beta_{t-1} + L_t(f_t - g_t \beta_{t-1}), \beta_0 = 0, \quad (2.122)$$

$$\gamma_t = \gamma_{t-1} - K_t c_t \beta_{t-1} + K_t(y_t - v_{tt} \gamma_{t-1}) - \\ K_t c_t L_t(f_t - g_t \beta_{t-1}), \gamma_0 = 0, \quad (2.123) \\ t = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$L_t = S_t^+ g_t^T, \quad (2.124)$$

$$S_t = S_{t-1} + g_t^T g_t, S_0 = 0, \quad (2.125)$$

$$K_t = P_t^+ v_{tt}^T, \quad (2.126)$$

$$P_t = P_{t-1} + v_{tt}^T v_{tt}, P_0 = 0, \quad (2.127)$$

$$V_t = (v_{1t}, v_{2t}, \dots, v_{tt})^T.$$

Proof. Рассмотрим проблему минимизации суммы квадратов

$$\bar{I}_t(\beta) = \|F_t - G_t \beta\|^2, t = 1, 2, \dots, N.$$

Линейная оценка β дается выражением (2.115). Отсюда следует, что β с минимальной нормой может быть получена с помощью (2.122), (2.124), (2.15).

Получим (2.123), (2.166), (2.127). Находим из (2.115), (2.116)

$$\gamma_t = V_t^+(Y_t - C_t \beta_t). \quad (2.128)$$

Рассмотрим проблему минимизации суммы квадратов

$$\bar{J}_t(\gamma) = \|Y_t - C_t \beta_t - V_t \gamma\|^2, t = 1, 2, \dots, N. \quad (2.129)$$

Линейная оценка γ дается выражениями (2.128). Отсюда следует, что оценка γ с минимальной нормой $t < tr$ может быть получена рекуррентно

$$\gamma_t = \gamma_{t-1} + K_t(y_t - c_t \beta_t - v_{tt} \gamma_{t-1}), \gamma_0 = 0, \quad (2.130)$$

где K_t дается выражением (2.126), (2.127) и

$$tr = \min_t \{ t: \sum_{k=1}^t c_k^T c_k > 0, t = 1, 2, \dots, N \}.$$

При $t \geq tr$ диффузный алгоритм дает оценку, совпадающую с алгоритмом, который минимизирует (2.129). Уравнение (2.123) получается заменой (2.121) в (2.130).

Вернемся теперь к исходной нелинейной задаче (2.109) (2.111). Разложив левую часть (2.11) в окрестности последней оценки по формуле Тейлора, получим

$$h_t(\alpha) = h_t(\alpha_t) + h'_t(\alpha_{t-1})(\alpha - \alpha_{t-1}) = q, \quad (2.130) \\ t = 1, 2, \dots, N.$$

Обозначим

$$g_t = h'_t(\alpha_{t-1}), \quad f_t = q - h_t(\alpha_t) + h'_t(\alpha_{t-1})\alpha_{t-1}. \quad (2.131)$$

Подстановка (2.131) в (2.122) – (2.127) дает

$$\beta_t = \beta_{t-1} + L_t(q - h_t(\beta_{t-1} + \gamma_{t-1}) + h'_t(\beta_{t-1} + \gamma_{t-1})\gamma_{t-1}), \quad \beta_0 = 0, \quad (2.132)$$

$$\gamma_t = \gamma_{t-1} - K_t c_t \beta_{t-1} + K_t(y_t - v_{tt}\gamma_{t-1}) - K_t c_t L_t(q - h_t(\beta_{t-1} + \gamma_{t-1}) + h'_t(\beta_{t-1} + \gamma_{t-1})\gamma_{t-1}), \quad \gamma_0 = 0, \quad (2.133) \\ t = 1, 2, \dots, N.$$

Комментарий 1. Соотношения (2.122) – (2.127) представляют самостоятельный интерес в задаче оценки параметров в (2.109) с линейным ограничением вида

$$g_t \alpha = q, \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (2.134)$$

Обобщение на случай нескольких линейных ограничений очевидно.

Комментарий 2. При отсутствии ограничений, диффузный алгоритм имеет вид

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + K_t(y_t - c_t \alpha_{t-1}), \quad \gamma_0 = 0, \quad (2.135) \\ t = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$K_t = P_t^+ c_t^T, \quad (2.136)$$

$$P_t = P_{t-1} + c_t^T c_t, \quad P_0 = 0. \quad (2.137)$$

Основное свойство этого алгоритма заключается в следующем. Оценка α_t несмещенна при $t \geq tr$. Т.е.,

$$e_t = E(\alpha_t - \alpha) = 0$$

при $t \geq tr$ и любого α .

Чтобы охарактеризовать статистические свойства RLS (2.135), (2.137), мы будем использовать вектор смещения и нормированное значение среднеквадратичной ошибки оценки соответственно

$$a_t = E[\alpha_t] - \alpha = E[e_t], \quad (2.138)$$

$$\beta_t = E[e_t^T e_t] / \|\alpha\|^2, \quad (2.139)$$

где $e_t = \alpha_t - \alpha$. Так как $e_0 = -\alpha$ and $\Psi_0(\mu) = \alpha\alpha^T$ то $\beta_0(\mu) = 1$. Функция $\beta_t(\mu)$ определяет величину перерегулирования RLS при $t \in T$ и фиксированном $\mu > 0$: если $\beta_t(\mu) \leq 1$, то перерегулирование отсутствует и наблюдается, если $\beta_t(\mu) > 1$.

Рассмотрим флуктуации RLS со случайными входами, предполагая, что c_{it} , $i = 1, 2, \dots, r$, полагая, что для любого $t = 1, 2, \dots, N$

$$E[c_{it}] = 0, \quad E[c_{it}^2] = \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Определим величину отношения сигнала к шуму (SNR) как

$$SNR = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 \|\alpha\|^2 / R. \quad (2.140)$$

Условие отсутствия перерегулирования в момент окончания переходного этапа tr определяется выражением [9]

$$SNR \geq \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 \sum_{i=1}^r 1/\sigma_i^2. \quad (2.141)$$

Для $\sigma_i^2 = \sigma^2$, оно принимает особенно простую форму

$$SNR \geq r^2. \quad (2.142)$$

Пусть имеется дополнительная информация $SNR \approx q$ и мы хотим ее учесть при оценивании. Полагая

$$h_t(\alpha) = SNR(\alpha) = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 \|\alpha\|^2 / R = q, t = 1, 2, \dots, N,$$

находим, используя (2.131)

$$g_t = h'_t(\alpha_{t-1}) = 2 \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 (\alpha_{t-1})^T / R,$$

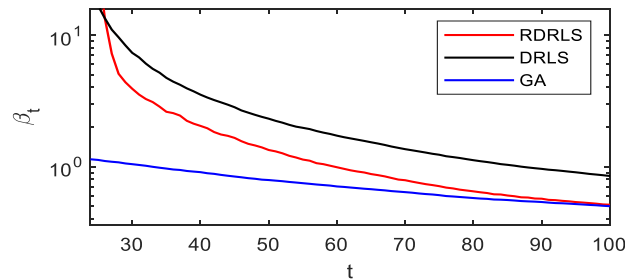
$$f_t = q + SNR(\alpha_t).$$

Проиллюстрируем, полученные результаты численным моделированием. Рассмотрим вначале возможности уменьшения флуктуаций RLS в течение конечного интервала времени, используя дополнительную информацию о SNR и предложенных алгоритмах. Здесь сравниваются три следующих алгоритма; 1. Диффузный RLS (DRLS) описывается соотношениями (2.135) - (2.137). 2. Диффузный RLS с ограничениями (RDRLS) описываемый соотношениями (2.122) - (2.127). 3. Алгоритм, предложенный в [66], непосредственно минимизирующий (2.110) с ограничением, $\|\alpha\|^2 = q$ (GA). В отличие от первых двух он не рекуррентный.

Рассмотрим модель наблюдения (2.109) с взаимно независимыми случайными величинами $c_{it}^2 \sim N(0, \sigma^2)$ которые не зависят ξ_t и $\alpha_i = 0.1i$, $i = 1, 2, \dots, r$ и зависимости β_t, α_t от t и

$$SNR_t(j) = E[\sum_{i=1}^r c_i^2 \|\alpha_t\|^2 / R], j = 1, 2, \dots, M.$$

При $M = 500$ реализаций, $t = 50$ и $SNR = 7 \text{ dB}$, результаты статистического моделирования показаны на рисунке 2.3. Видно, что для RDRLS и GA β_t значительно меньше, чем для DRLS. Это достигается с помощью дополнительной информации о SNR. В то же время они имеют большее смещение по сравнению с RLS.



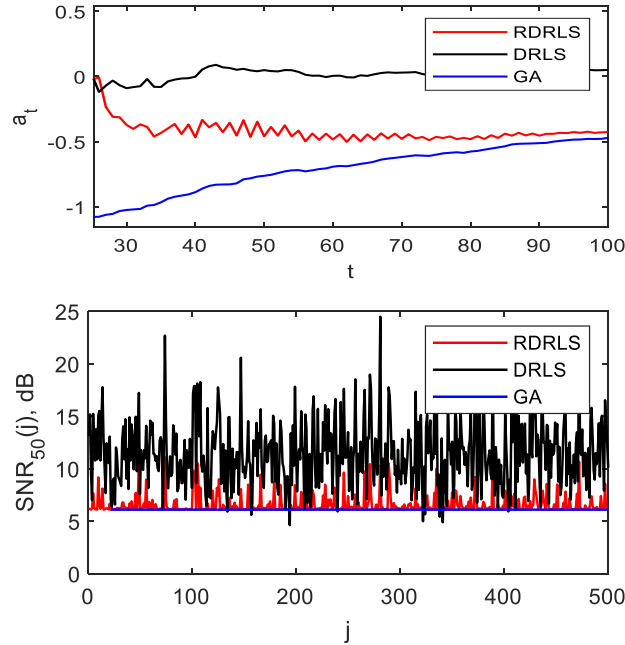


Рисунок 2.3 – Зависимости β_t , a_t и $SNR_{50}(j)$ от t и j при $SNR = 7dB$

Рисунки 2.4 – 2.6 иллюстрируют поведение в случаях, если условие (33) выполняется и нарушается, соответственно в момент $t = r + 2$, когда с вероятностью 1 $tr = r + 2$ [9].

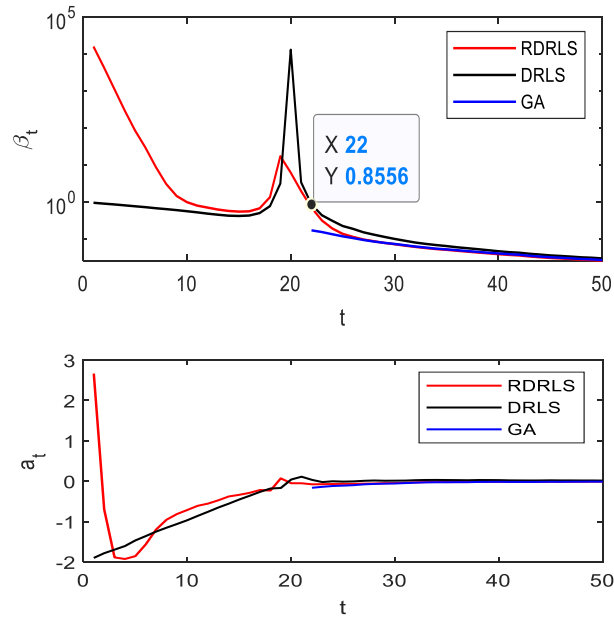


Рисунок 2.4 – Зависимости β_t , a_t от t и j при $SNR = 26.5dB$

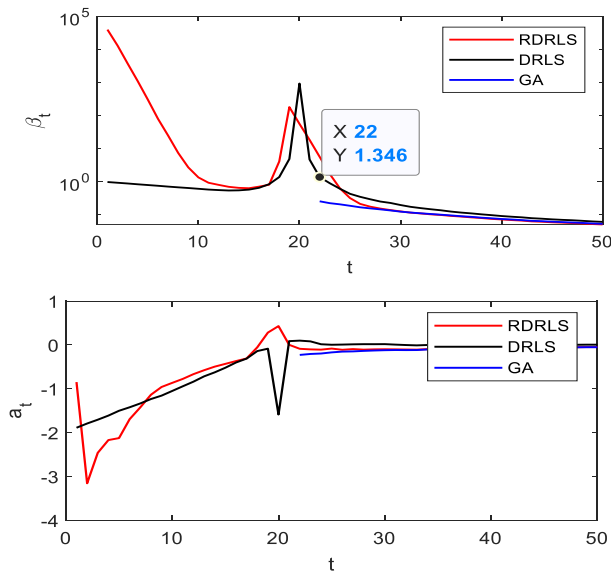


Рисунок 2.5 – Зависимости β_t, a_t от t при $SNR = 23.6dB$

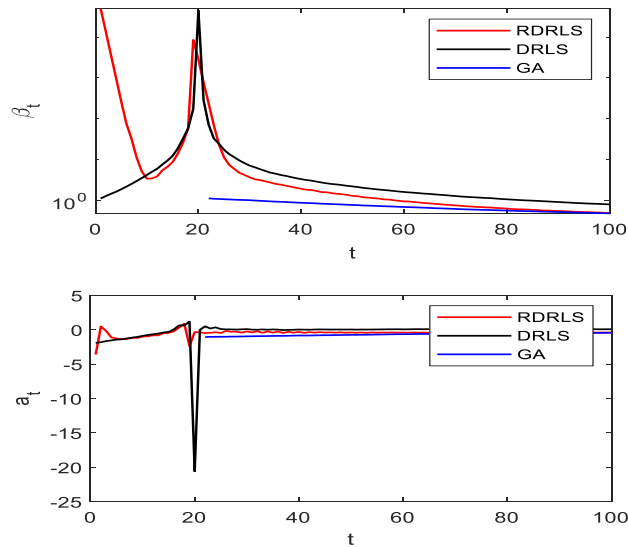


Рисунок 2.6 – Зависимости β_t, a_t от t при $SNR = 7dB$

Часть из приведенных в этой секции результатов было получено в [67].

2.5 Примеры применения диффузных алгоритмов

2.5.1 Идентификация нелинейных динамических объектов

Проиллюстрируем применение ДАО для построения функционально-связанных НС.

Предположим, что объект описывается нелинейной моделью авторегрессии и скользящего среднего вида

$$y_t = \Phi(z_t, \beta)\alpha + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (2.143)$$

где $z_t = (y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-a}, u_{t-d}, u_{t-d-1}, \dots, u_{t-d-b}) \in R^{a+b}$ – вектор входов, $y_t \in R^1$ – выход, $\alpha \in R^r$, $\beta \in R^l$ – векторы параметров, $\Phi(z_t, \beta)$ – известная, нелинейная относительно z_t, β функция, N – объем обучающей выборки, $\xi_t \in R^1$ – центрированный случайный процесс с некоррелированными значениями и дисперсией R_t , $a, b, d > 0$ – целые числа.

Требуется найти оценки β_t , α_t по заданным к моменту t наблюдениям вход - выходных пар $\{z_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \dots, t$.

Мы используем предложенный в разделе 2.2 ДАО и подход, основанный на функционально-связанных НС. Значения β выбираются малыми случайными числами, а вектор α неизвестен и требуется найти его оценку α_t по заданным к моменту t наблюдениям вход-выходных пар $\{z_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \dots, t$. Таким образом, задача сводится к оценке α по линейной модели наблюдений

$$y_t = C_t \alpha + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (2.144)$$

где $C_t = \Phi(z_t, \beta)$.

Если мы используем персептрон с одним скрытым слоем (1.6) и скалярным выходом, то элементы C_t определяются выражениями

$$C_t = (\sigma(a_1 z_t + b_1), \sigma(a_2 z_t + b_2), \dots, \sigma(a_r z_t + b_r)), \\ a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{k(a+b)}), \quad k = 1, 2, \dots, r,$$

где a_k , b_k , $k = 1, 2, \dots, r$ – веса и смещения, соответственно, $\sigma(\cdot)$ – сигмоидная или гиперболический тангенс функции.

Для РБНС с одним скрытым слоем (1.9) и скалярным выходом C_t определяется выражением

$$C_t = (1, \varphi(b_1 \| z_t - a_1 \|^2), \varphi(b_2 \| z_t - a_2 \|^2), \dots, \varphi(b_p \| z_t - a_r \|^2)), \\ a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{k(a+b)}), \quad k = 1, 2, \dots, r,$$

где a_k , b_k , $k = 1, 2, \dots, r$ – центры и шкалирующие множители, соответственно, $\sigma(\cdot)$ – базисная функция.

Пример 2.2. Объект описывается нелинейным разностным уравнением [68]

$$y_t = y_{t-1}y_{t-2}(y_{t-1} + 2.5)/(1 + y_{t-1}^2 + y_{t-2}^2) + u_{t-1}. \quad (2.145)$$

Для обучения используется выборка u_t из равномерного распределения на интервале $[-2, 2]$, а для тестирования – сигнал $u_t = \sin(2\pi / 250)$. Модель объекта разыскивается в форме

$$y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, u_{t-1}), \quad (2.146)$$

где $f(\cdot)$ – многослойный персептрон (1.6) с сигмоидной ФА. Оцениваются только веса выходного слоя. Веса скрытого слоя и смещений выбираются из равномерных распределений на интервалах $[-1, 1]$ и $[0, 1]$, соответственно. Размер обучающей выборки $N = 2000$, тестирующей – $N = 500$, $\lambda = 1$, $R_t = 1$.

На рисунках 2.7, 2.8 показаны выходы объекта и его моделей с десятью нейронами скрытого слоя (кривые 1, 2, соответственно) для некоторых реализаций обучающей и тестирующей выборок. Видно, что при использовании 10 нейронов в скрытом слое, выходы системы и его моделей визуально практически неразличимы.

В таблице 2.1 приведены значения 90-ой процентиля ошибки аппроксимации выхода системы на обучающем и тестирующем множествах с $N = 2000$ и $N = 500$. Видно, что если количество нейронов скрытого слоя и размер обучающей выборки невелики, то результаты идентификации с помощью функционально связанной модели могут оказаться неудовлетворительными.

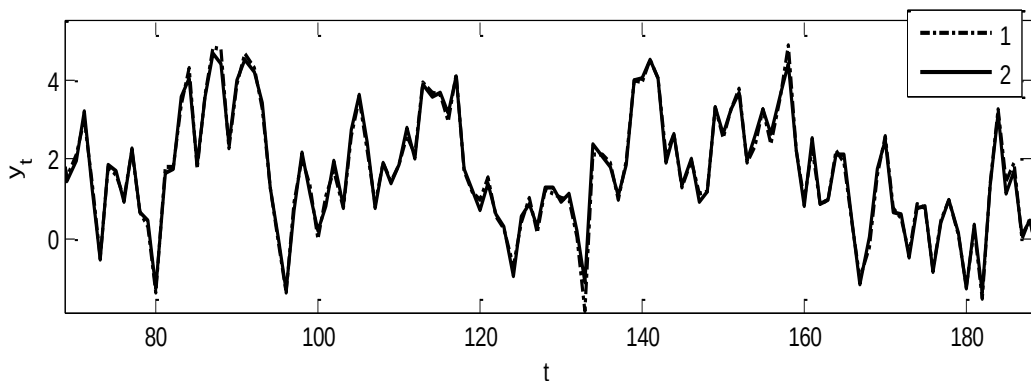


Рисунок 2.7 – Значения выходов системы и моделей для обучающего множества

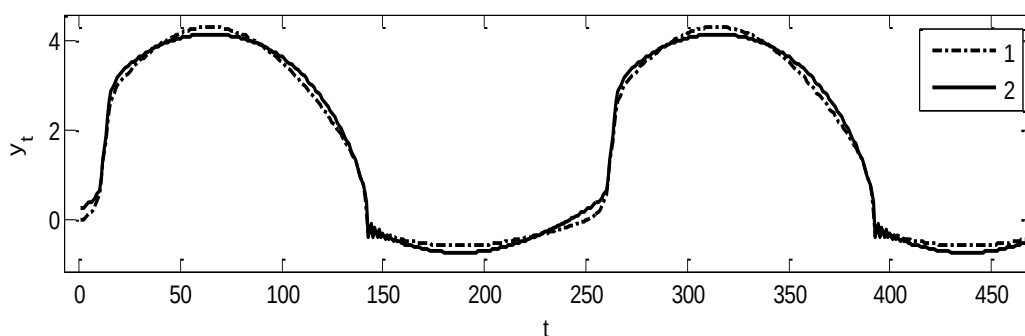


Рисунок 2.8 – Значения выходов системы и моделей для тестирующего множества

Таблица 2.1. Ошибки аппроксимации выхода системы

Размеры обучающего множества (N)	Количество нейронов скрытого слоя	Ошибки	
		Обучающая выборка	Тестирующая выборка
$N = 2000$	5	0.58	0.6
	10	0.23	0.23
	15	0.14	0.08
	20	0.12	0.044
$N = 500$	4	0.82	0.9
	5	0.57	0.6
	6	0.46	0.46

Пример 2.3. Воспользуемся РБНС и диффузным алгоритмом для идентификации объекта [69]

$$y_t = u_t^3 + \frac{y_{t-1}}{1 + y_{t-1}^2}. \quad (2.147)$$

В качестве базисной функции выберем функцию Гаусса, $z_{t1} = u_t$, $z_{t2} = y_t$, $r = 5$,

$$a_1 = (-1, -1), a_2 = (-0.5, -0.5), a_3 = (0, 0), a_4 = (0.5, 0.5), \\ b_j = 3.0, j = 1, 2, \dots, 5, u_t = \sin(Tt), T = 0.001.$$

На рисунках 2.9 и 2.11, 2.10 и 2.12 показаны выходы объекта и диффузного алгоритма оценивания, ошибки аппроксимации выхода $e_t = y_t - C_t \alpha_{t-1}^{dif}$ с $\lambda = 0.98$ и $\lambda = 1$, соответственно. Видно, что использование параметра забывания позволяет существенно уменьшить ошибку.

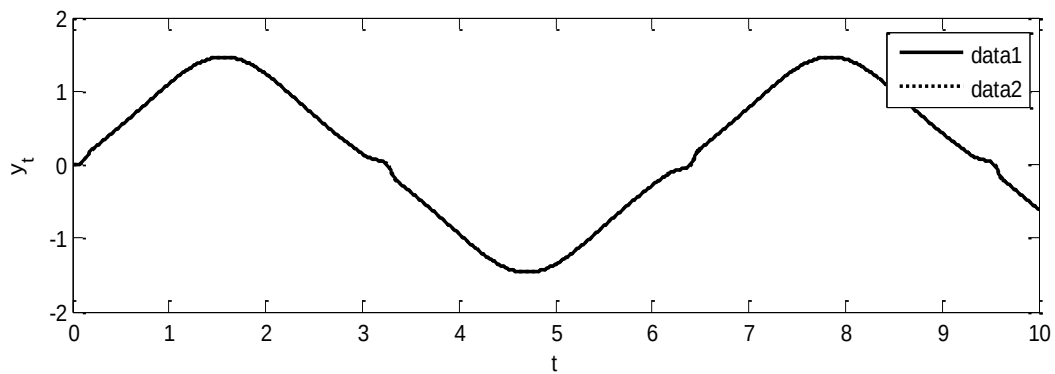


Рисунок 2.9. Выходы объекта и диффузного алгоритма оценивания с $\lambda = 0.98$

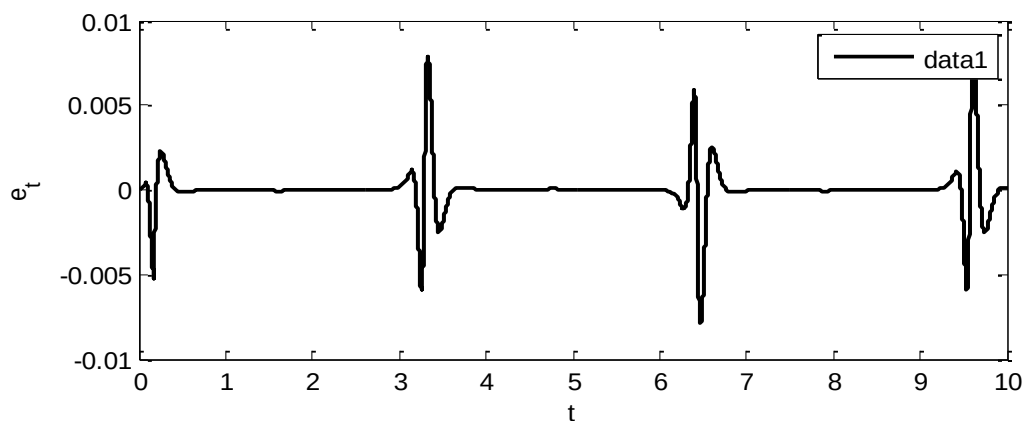


Рисунок 2.10. Ошибка аппроксимации выхода с $\lambda = 0.98$

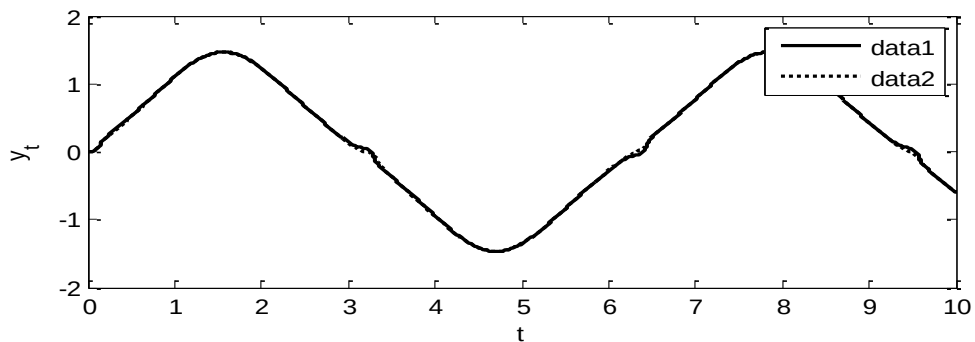


Рисунок 2.11. Выходы объекта и диффузного алгоритма оценивания с $\lambda = 1$

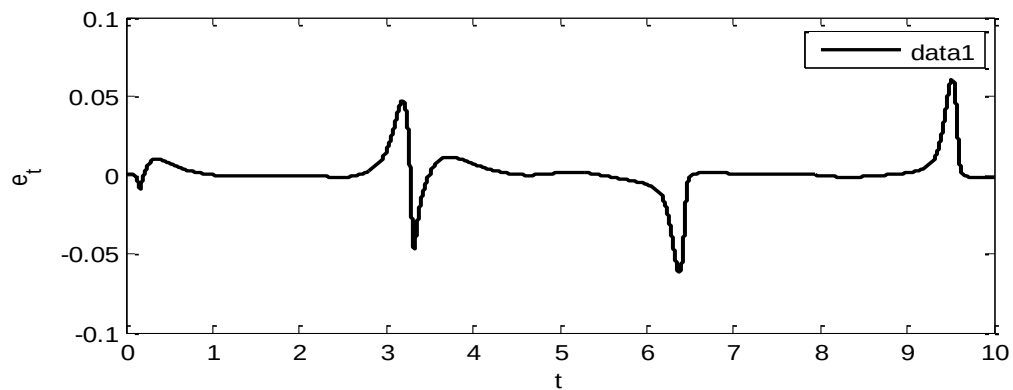


Рисунок 2.12. Ошибка аппроксимации выхода с $\lambda = 1$

2.5.2 Оценивание со скользящим окном

Один из известных подходов для получения робастных к возмущениям алгоритмов оценивания, состоит в использовании скользящего окна [69–72]. Основное допущение, лежащее в его основе – адекватность модели системы только на интервале скользящего окна, а не на всем рассматриваемом промежутке наблюдения. В этих работах, для предотвращения расходимости алгоритма и повышения точности оценивания, предлагаются два пути:

1. Уменьшение влияния или отказ от использования данных вне пределов текущего скользящего окна.

2. Тестирование гипотез о соответствии значений оценок параметров, полученных по прошлым данным и текущему скользящему окну и повторная инициализация при необходимости алгоритма оценивания.

В обоих случаях можно воспользоваться РМНК с диффузной инициализацией, который обладает свойством давать несмещенную оценку после обработки конечного числа наблюдений. Если шумы наблюдения отсутствуют, такой алгоритм позволяет точно восстановить вектор неизвестных параметров за конечное число шагов в отличие от ФК.

Рассмотрим интервалы наблюдения $[t - M, t], t = 1, 2, \dots, N$ (скользящие окна), где $M > tr$ и предположим, что в момент $t - M$ априорная информация о векторе α_{t-M} отсутствует. Используя теорему 2.4, нетрудно выписать следующие соотношения для оценки α_t в момент t , основанную на скользящем окне последних M наблюдений

$$\alpha_s = \alpha_{s-1} + K_s^{dif} (y_s - C_s \alpha_s), \quad \alpha_{t-M} = \bar{\alpha}, \quad (2.148)$$

где

$$K_s^{dif} = W_s^+ C_s^T R_s^{-1}, \quad (2.149)$$

$$W_s = W_{s-1} + C_s^T R_s^{-1} C_s, W_{t-M} = 0, \quad (2.150)$$

$$s = t - M + 1, t - M + 2, \dots, t, t = M, M + 1, \dots$$

Пример 2.4. Проиллюстрируем эффект использования РМНК с диффузной инициализацией в режиме скользящего окна в условиях параметрической неопределенности. Пусть задана линейная модель авторегрессии и скользящего среднего [73] вида

$$y_t + a_t y_{t-1} = b_t u_{t-1} + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (2.151)$$

где $a_t = a - \delta_t$, $b_t = b - \delta_t$, $a = 0.98$, $b = -0.005$, $R = 0.003$,

$$u_t = \sin(0.1t) + 50 \cos(200t), \quad (2.152)$$

δ_t – импульсная помеха, определяемая выражением

$$\delta_t = \begin{cases} 0.05, & 200 \leq t \leq 205 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Результаты моделирования приведены на рисунках 2.13, 2.14. Здесь $e1(t)$, $e2(t)$ – ошибки оценивания параметров a и b соответственно, кривые 1, 2 – оценки с инициализацией при $t = 0$ и оценки, полученные с использованием скользящего окна при горизонте прогноза $N = 50$, соответственно. Видно, что скорость сходимости оценок со скользящим окном существенно выше по сравнению со скоростью с инициализацией при $t = 0$.

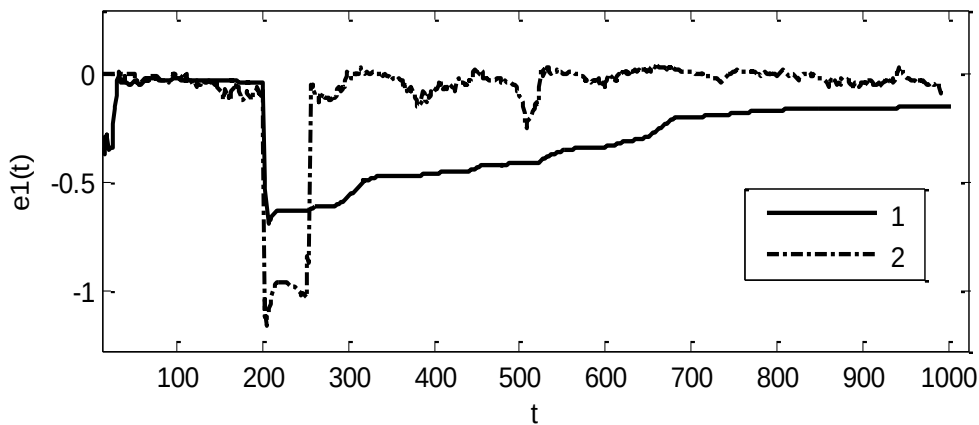


Рисунок 2.13 – Ошибки оценивания параметра a

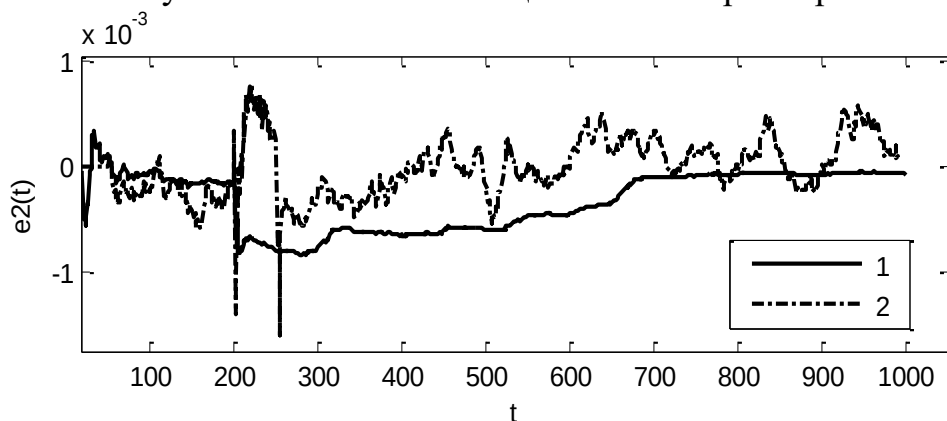


Рисунок 2.14 – Ошибки оценивания параметра b

Покажем, что РМНК с диффузной инициализацией может быть использован совместно с процедурами оценки момента начала скачкообразного изменения параметров модели системы t_a (момента разладки). После его

обнаружения проводится повторная инициализация алгоритма. Для иллюстрации воспользуемся моделью сигнала (2.76). Будем полагать, что

$$a_t = \begin{cases} a, t \leq 200 \\ -a, t > 200 \end{cases}, \quad b_t = \begin{cases} b, t \leq 200 \\ -b, t > 200 \end{cases}.$$

В этом примере изменения в модели сигнала оцениваются с помощью статистического теста CUSUM [73] в соответствии с которым вычисляется статистика

$$g_t = g_{t-1} + e_t - \nu, \quad g_0 = 0, \quad t = 1, 2, \dots, N,$$

если $-h < g_t < h$, в противном случае $g_t = 0$ и $t_a = t$, где h и ν параметры, выбираемые пользователем, $e_t = y_t - C_t \alpha_t$. Результаты моделирования приведены на рисунках 2.15, 2.16. Здесь кривые 1, 2 – оценки параметров, полученные при использовании CUSUM при $h = 100$, $\nu = 0.5$ и оценки параметров алгоритмом с инициализацией при $t = 0$, соответственно.

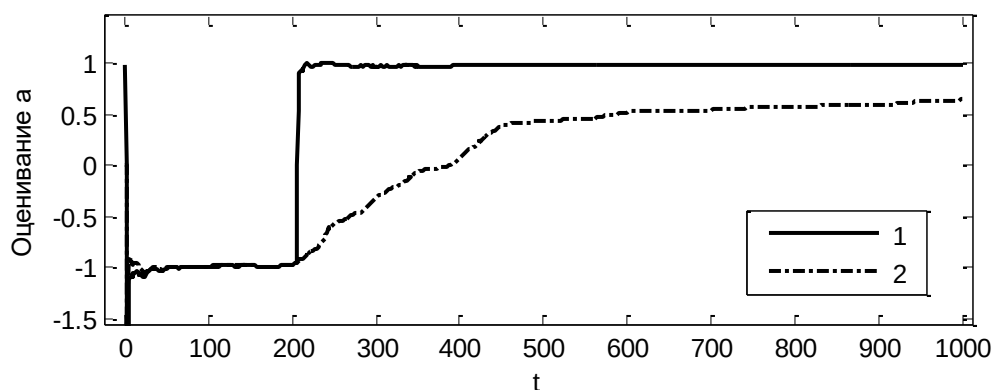


Рисунок 2.15 – Оценивание параметра a

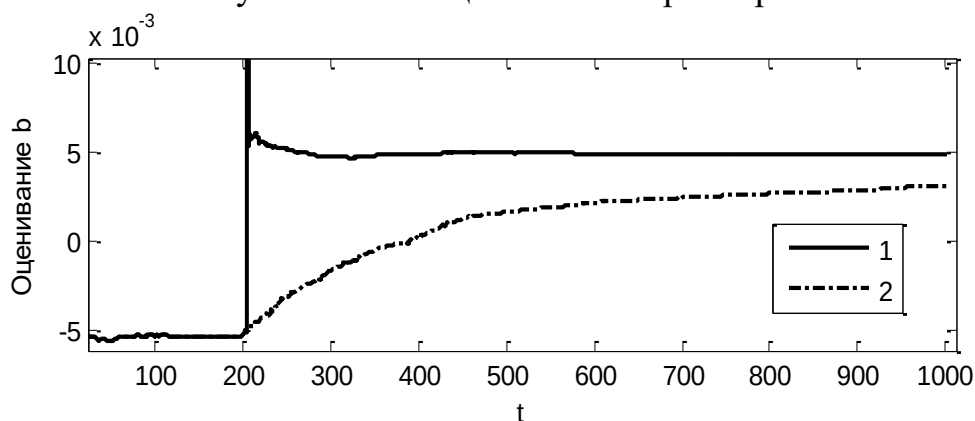


Рисунок 2.16 – Оценивание параметра b

ГЛАВА 3

ДИФFUЗНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОБУЧЕНИЯ НЕЙРОННЫХ И НЕЙРО-ФАЗЗИ СЕТЕЙ

В этой главе рассматриваются задачи обучения двухслойных нейронных сетей и нечетких системс одновременным оцениванием параметров скрытого и выходного слоев. Для параметров скрытого слоя предполагаются заданными их вероятные значения и возможные отклонения от них. Априорная информация о весах выходного слоя отсутствует и они, в одном из вариантов инициализации метода Гаусса-Ньютона (ГН), предполагаются диффузными случайными величинами, а в другом либо неизвестными постоянными, либо случайными величинами с неизвестными статистическими характеристиками. Предлагаются и исследуются алгоритмы обучения, основанные на методе ГН с линеаризацией в окрестности последней оценки. Полученные результаты иллюстрируются примерами решения задач идентификации динамических нелинейных объектов.

3.1 Постановка задачи

Предположим, что задана модель наблюдений

$$y_t = \Phi(z_t, \beta)\alpha + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (3.1)$$

где $z_t \in R^n$ – вектор входов, $y_t \in R^m$ – вектор выходов, $\alpha \in R^r$, $\beta \in R^l$ – векторы неизвестных параметров, $\Phi(z_t, \beta) - m \times r$ матрица заданных нелинейных функций, N – размер обучающей выборки, $\xi_t \in R^m$ – случайный процесс с некоррелированными значениями, нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариации R_t .

Будем предполагать выполненными следующие условия относительно параметров α и β , входящих в описание (3.1):

А1. Для вектора β известно вероятное значение $\bar{\beta}$, а возможные отклонения от $\bar{\beta}$ характеризуются функцией

$$\Gamma(\beta) = (\beta - \bar{\beta})^T \bar{P}^{-1} (\beta - \bar{\beta}), \quad (3.2)$$

где $\bar{P} > 0$ – заданная, положительно определенная матрица.

А2. Априорная информация относительно компонент вектора α отсутствует, и они интерпретируются, как случайные величины, имеющие нулевые математические ожидания и матрицу ковариации пропорциональную большому параметру $\mu > 0$, т.е.

$$E(\alpha) = 0, E(\alpha\alpha^T) = \mu\bar{P}_\alpha, \quad (3.3)$$

где $\bar{P}_\alpha > 0$ – произвольная, положительно определенная $r \times r$ матрица, не зависящая от μ .

А3. Вектор параметров α случаен и не коррелирован с ξ_t , $t = 1, 2, \dots, N$.

Предполагается, что $\bar{\beta}$ и $\bar{P}_\beta$ могут быть получены по распределению генерирующей выборки, обучающему множеству или лингвистической информации.

Пусть задано обучающее множество $\{z_t, y_t\}$, $t = 1, 2, \dots, N$ и критерий качества в момент t определяется выражением

$$J_t(x) = \sum_{k=1}^t \lambda^{t-k} (y_k - \Phi(z_k, \beta)\alpha)^T (y_k - \Phi(z_k, \beta)\alpha) + \\ + \lambda^t \Gamma(\beta) + \alpha \bar{P}_\alpha^{-1} \alpha / \mu, \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (3.4)$$

Вектор параметров $x = (\beta^T, \alpha^T)^T \in R^{l+r}$ разыскивается из условия минимума $J_t(x)$ и должен обновляться после поступления нового наблюдения. Мы используем метод ГН с линеаризацией в окрестности последней оценки для решения этой задачи и исследуем его поведение при больших μ (мягкая инициализация) и $\mu \rightarrow \infty$ (диффузная инициализация).

Рассмотрим альтернативный подход к задаче обучения в отсутствии априорной информации относительно α . В рамках этого подхода предполагается, что неизвестные параметры в (3.1) удовлетворяют следующим условиям:

В1. Для вектора β , известно его вероятное значение $\bar{\beta}$, а возможные отклонения от $\bar{\beta}$ характеризуются функцией (3.2).

В2. Априорная информация относительно элементов вектора α отсутствует и они могут быть либо неизвестными постоянными, либо случайными величинами, статистические характеристики которых неизвестны.

Пусть задано обучающее множество $\{z_t, y_t\}$, $t = 1, 2, \dots, N$ и критерий качества в момент t определяется выражением

$$J_t(x) = \sum_{k=1}^t \lambda^{t-k} (y_k - \Phi(z_k, \beta)\alpha)^T (y_k - \Phi(z_k, \beta)\alpha) + \lambda^t \Gamma(\beta). \quad (3.5)$$

Вектор параметров $x = (\beta^T, \alpha^T)^T \in R^{l+r}$ разыскивается из условия минимума $J_t(x)$ и должен обновляться после поступления нового наблюдения. Как и выше, мы используем метод ГН с линеаризацией в окрестности последней оценки для решения этой задачи.

3.2 Обучение с использованием мягкой и диффузной инициализаций

Пусть неизвестные параметры (3.1) удовлетворяют условиям А1, А2, А3 и критерий качества в момент t определяется выражением (3.4).

Лемма 3.1. Решение задачи минимизации критерия (3.4) с помощью метода ГН и мягкой инициализацией может быть получено рекуррентно

$$x_t = x_{t-1} + K_t (y_t - h_t(x_{t-1})), \quad x_0 = (\bar{\beta}^T, 0_{l \times r})^T, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (3.6)$$

где $x_t = (\beta_t^T, \alpha_t^T)^T$, $h_t(x_{t-1}) = \Phi(z_t, \beta_{t-1})\alpha_{t-1}$,

$$K_t = ((K_t^\beta)^T, (K_t^\alpha)^T)^T = P_t C_t^T, \quad (3.7)$$

$$K_t^\beta = (S_t + V_t L_t V_t^T)(C_t^\beta)^T + V_t L_t (C_t^\alpha)^T, \quad (3.8)$$

$$K_t^\alpha = L_t V_t^T (C_t^\beta)^T + L_t^+ (C_t^\alpha)^T, \quad (3.9)$$

$$P_t = \tilde{S}_t + \tilde{V}_t L_t \tilde{V}_t^T, \quad (3.10)$$

$$\tilde{S}_t = \begin{pmatrix} S_t & 0_{l \times r} \\ 0_{r \times l} & 0_{r \times r} \end{pmatrix}, \quad \tilde{V}_t = \begin{pmatrix} V_t \\ I_r \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

$$S_t = S_{t-1} / \lambda - S_{t-1} (C_t^\beta)^T (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\beta S_{t-1} / \lambda, \quad S_0 = \bar{P}_\beta, \quad (3.12)$$

$$V_t = (I_l - S_{t-1} (C_t^\beta)^T (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\beta) V_{t-1} - S_{t-1} (C_t^\beta)^T (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\alpha, \quad V_0 = 0_{l \times r}, \quad (3.13)$$

$$L_t^{-1} = \lambda L_{t-1}^{-1} + \lambda (C_t^\alpha V_t + C_t^\alpha)^T (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} \times \\ \times (C_t^\alpha V_t + C_t^\alpha), \quad L_0^{-1} = \bar{P}_\alpha^{-1} / \mu, \quad (3.14)$$

$$C_t = (C_t^\beta, C_t^\alpha),$$

$$C_t^\beta = C_t^\beta(x_{t-1}) = \partial[\Phi(z_t, \beta_{t-1})\alpha_{t-1}] / \partial \beta_{t-1}, \quad C_t^\alpha = C_t^\alpha(x_{t-1}) = \Phi(z_t, \beta_{t-1}). \quad (3.15)$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную модель наблюдений

$$y_k = C_k^\beta \beta + C_k^\alpha \alpha + \xi_k, \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (3.16)$$

и задачу оптимизации

$$(\alpha^*, \beta^*) = \arg \min J_t(\alpha, \beta), \quad \alpha \in R^r, \quad \beta \in R^l, \quad (3.17)$$

где

$$\begin{aligned}
J_t(x) &= \sum_{k=1}^t \lambda^{t-k} (y_k - C_k^\beta \beta - C_k^\alpha \alpha)^T (y_k - C_k^\beta \beta - C_k^\alpha \alpha) + \\
&+ \lambda^t \Gamma(\beta) + \alpha \bar{P}^{-1} \alpha / \mu, \quad t=1,2,\dots,N, \\
y_t &\in R^m, \quad C_t^\beta \in R^{m \times l}, \quad C_t^\alpha \in R^{m \times r}, \quad \xi_t \in R^m.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Используя обозначение x_t для (α^*, β^*) , находим

$$x_t = x_{t-1} + K_t (y_t - C_t x_{t-1}), \quad x_0 = (\bar{\beta}^T, 0_{1 \times r})^T, \quad t=1,2,\dots,N, \tag{3.19}$$

где $C_t = (C_t^\beta, C_t^\alpha)$,

$$K_t = P_t C_t^T, \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
P_t &= (P_{t-1} - P_{t-1} C_t^T (\lambda I_m + C_t P_{t-1} C_t^T)^{-1} C_t P_{t-1}) / \lambda, \\
P_0 &= \text{block diag}(\bar{P}_\beta, \bar{P}_\alpha \mu).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Покажем, что выражения (3.6) – (3.15) определяют решение задачи (3.17), (3.18) для произвольных C_t^β, C_t^α и $\mu > 0$.

Рассмотрим два решения $\tilde{P}_t$ и $\tilde{S}_t$ матричного уравнения

$$P_t = (P_{t-1} - P_{t-1} C_t^T (\lambda I_m + C_t P_{t-1} C_t^T)^{-1} C_t P_{t-1}) / \lambda, \tag{3.22}$$

с начальными условиями

$$\tilde{P}_0 = \text{block diag}(\bar{P}_\beta, \bar{P}_\alpha \mu), \quad \tilde{S}_0 = \text{block diag}(\bar{P}_\beta, 0_{r \times r}).$$

Обозначим $\bar{A} = I_{r+l} / \lambda^{1/2}$, $\bar{C}_t = C_t / \lambda^{1/2}$. Тогда (3.22) примет вид

$$P_t = \bar{A} P_{t-1} \bar{A} - \bar{A} P_{t-1} \bar{C}_t^T (I_m + \bar{C}_t P_{t-1} \bar{C}_t^T)^{-1} \bar{C}_t P_{t-1} \bar{A}. \tag{3.23}$$

Поскольку

$$\tilde{S}_0 C_1^T = \begin{pmatrix} \bar{P}_\beta (C_1^\beta)^T \\ 0 \end{pmatrix},$$

то первое блочное представление в (3.11) выполняется.

Разность

$$Q_t = \tilde{P}_t - \tilde{S}_t, \quad t=1,2,\dots,N$$

удовлетворяет матричному уравнению [69]

$$Q_t = \tilde{A}_t Q_{t-1} \tilde{A}_t^T - \tilde{A}_t Q_{t-1} \bar{C}_t^T (I_m + \bar{C}_t \tilde{P}_{t-1} \bar{C}_t^T)^{-1} \bar{C}_t Q_{t-1} \tilde{A}_t^T, \quad (3.24)$$

$$Q_0 = \tilde{P}_0 - \tilde{S}_0 = \tilde{P}_0 = \text{block diag}(0_{l \times l}, \bar{P}_\alpha \mu), \quad t = 1, 2, \dots, N,$$

где $\tilde{A}_t = \bar{A} - \bar{A} \tilde{S}_{t-1} \bar{C}_t^T (I_m + \bar{C}_t \tilde{S}_{t-1} \bar{C}_t^T)^{-1} \bar{C}_t$.

Возвращаясь к исходному обозначению, получим

$$Q_t = (A_t Q_{t-1} A_t^T - A_t Q_{t-1} C_t^T (\lambda I_m + C_t \tilde{P}_{t-1} C_t^T)^{-1} C_t Q_{t-1} A_t^T) / \lambda, \quad (3.25)$$

$$Q_0 = \tilde{P}_0 - \tilde{S}_0 = \tilde{P}_0 = \text{block diag}(0_{l \times l}, \bar{P}_\alpha \mu), \quad t = 1, 2, \dots, N,$$

где $A_t = I_{r+l} - \tilde{S}_{t-1} C_t^T (\lambda I_m + C_t \tilde{S}_{t-1} C_t^T)^{-1} C_t$.

Покажем, что

$$Q_t = \tilde{V}_t L_t \tilde{V}_t^T. \quad (3.26)$$

Подставляя это выражение в (3.25), получим

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t L_t \tilde{V}_t^T &= (A_t \tilde{V}_{t-1} L_{t-1} \tilde{V}_{t-1}^T A_t^T - A_t \tilde{V}_{t-1} L_{t-1} \tilde{V}_{t-1}^T C_t^T \times \\ &\times (\lambda I_m + C_t \tilde{P}_{t-1} C_t^T)^{-1} C_t \tilde{V}_{t-1} L_{t-1} \tilde{V}_{t-1}^T A_t^T) / \lambda. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Это соотношение будет выполняться, если L_t и $\tilde{V}_t$ удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{V}_t = A_t \tilde{V}_{t-1}, \quad \tilde{V}_0 = (0_{l \times r}, I_r)^T, \quad (3.28)$$

$$L_t = (L_{t-1} - L_{t-1} \tilde{V}_{t-1}^T C_t^T (\lambda I_m + C_t \tilde{P}_{t-1} C_t^T)^{-1} C_t \tilde{V}_{t-1} L_{t-1}) / \lambda, \quad L_0 = I_r / \varepsilon. \quad (3.29)$$

Так как

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{t-1} C_t^T &= \begin{pmatrix} S_{t-1} (C_t^\beta)^T \\ 0_{r \times l} \end{pmatrix}, \quad C_t \tilde{S}_{t-1} C_t^T = C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T, \\ A_t &= I_{r+l} - \begin{pmatrix} S_{t-1} (C_t^\beta)^T N_t^{-1} C_t^\beta & S_{t-1} (C_t^\beta)^T N_t^{-1} C_t^\alpha \\ 0_{r \times l} & 0_{r \times r} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $N_t = \lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T$, то второе выражение в (3.11) и уравнение (3.14) следуют отсюда и (3.28).

Преобразуем (3.29), используя матричное тождество (2.7) для

$$B = L_{t-1}, \quad C = \tilde{V}_{t-1}^T C_t^T, \quad D = \lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T.$$

Принимая во внимание, что

$$\tilde{P}_t = Q_t + \tilde{S}_t = \tilde{V}_t L_t \tilde{V}_t^T + \tilde{S}_t,$$

Находим

$$\begin{aligned} L_t^{-1} &= (L_{t-1} - L_{t-1} \tilde{V}_{t-1}^T C_t^T (\lambda I_m + C_t \tilde{P}_{t-1} C_t^T)^{-1} C_t \tilde{V}_{t-1} L_{t-1})^{-1} \lambda = \\ &= (L_{t-1} - L_{t-1} \tilde{V}_{t-1}^T C_t^T (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T + C_t \tilde{V}_{t-1} L_{t-1} \tilde{V}_{t-1}^T C_t^T)^{-1} C_t \tilde{V}_{t-1} L_{t-1})^{-1} \lambda = \\ &= \lambda L_{t-1}^{-1} + \lambda \tilde{V}_{t-1}^T C_t^T (\lambda I_m + C_t \tilde{S}_{t-1} C_t^T)^{-1} C_t \tilde{V}_{t-1}. \end{aligned}$$

Но так как $C_t \tilde{V}_{t-1} = C_t^\beta V_{t-1} + C_t^\alpha$, то отсюда следует (3.14).

Обратимся к решению исходной нелинейной задачи минимизации с критерием (3.4). Линеаризация остатков $e_t = y_t - \Phi(z_t, \beta) \alpha$ в окрестности точки x_{t-1} дает

$$\begin{aligned} e_t &= y_t - \Phi(z_t, \beta_{t-1}) \alpha_{t-1} - \Phi(z_t, \beta_{t-1}) (\alpha - \alpha_{t-1}) - \\ &\quad - \partial[\Phi(z_t, \beta_{t-1}) \alpha_{t-1}] / \partial \beta_{t-1} (\beta - \beta_{t-1}) = \tilde{y}_t - C_t x, \end{aligned}$$

где $x = (\alpha^T, \beta^T)^T$,

$$\begin{aligned} \tilde{y}_t &= y_t + \partial[\Phi(z_t, \beta_{t-1}) \alpha_{t-1}] / \partial \beta_{t-1} \beta_{t-1} = \\ &= y_t - \Phi(z_t, \beta_{t-1}) \alpha_{t-1} + C_t x_{t-1}. \end{aligned}$$

Подстановка этого выражения в критерий (3.4) приводит к линейной задаче оптимизации, решение которой, как было показано, определяется выражениями (3.19), (3.7) – (3.15), что влечет утверждение леммы.

Лемма 3.2. Матрицы P_t и K_t в (3.20), (3.21) могут быть разложены в равномерно сходящиеся при $t \in T = \{1, 2, \dots, N\}$ и достаточно больших значениях μ степенные ряды

$$\begin{aligned} P_t &= \lambda^{-t} \tilde{V}_t \bar{P}_\alpha (I_r - W_t W_t^+) \tilde{V}_t^T \mu + \tilde{S}_t + \tilde{V}_t W_t^+ \tilde{V}_t^T + \\ &\quad + \sum_{i=1}^q (-1)^i \lambda^i \tilde{V}_t (W_t^+ \bar{P}_\alpha^{-1})^{i+1} \bar{P}_\alpha \tilde{V}_t^T \mu^{-i} + O(\mu^{-q-1}), \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} K_t &= [\tilde{S}_t + \tilde{V}_t W_t^+ \bar{P}_\alpha^{-1} (I_r + \bar{P}_\alpha^{-1} W_t^+ / \mu)^{-1} \tilde{V}_t^T] \bar{P}_\alpha C_t^T R_t^{-1} = \\ &= K_t^{dif} + \sum_{i=1}^q (-1)^i \lambda^i \tilde{V}_t (W_t^+ \bar{P}_\alpha^{-1})^{i+1} \bar{P}_\alpha \tilde{V}_t^T C_t^T R_t^{-1} \mu^{-i} + O(\mu^{-q-1}), \end{aligned} \quad (3.31)$$

где T – ограниченное множество,

$$W_t = \lambda W_{t-1} + \lambda (C_t^\beta V_{t-1} + C_t^\alpha)^T (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} (C_t^\beta V_{t-1} + C_t^\alpha), \quad W_0 = 0_{r \times r}, \quad (3.32)$$

$$K_t^{dif} = (\tilde{S}_t + \tilde{V}_t W_t^+ \tilde{V}_t^T) C_t^T. \quad (3.33)$$

Доказательство. Из (3.14) следует, что

$$\begin{aligned} L_t^{-1} &= \sum_{k=1}^t \lambda^{t-k+1} (C_t^v V_t + C_t^\alpha)^T (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} (C_t^v V_t + C_t^\alpha) + \lambda^t \bar{P}_\alpha^{-1} / \mu = \\ &= \lambda^t (\sum_{k=1}^t \lambda^{-k+1} (C_t \tilde{V}_t)^T (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t \tilde{V}_t + \bar{P}_\alpha^{-1} / \mu). \end{aligned}$$

Используя лемму 2.1 для

$$\Omega_t = L_t^{-1}, \quad \Omega_0 = \bar{P}_\alpha^{-1}, \quad F_t = \lambda^{-(t+1)/2} (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1/2} C_t \tilde{V}_t,$$

получим степенной ряд

$$\begin{aligned} L_t &= \lambda^{-t} \bar{P}_\alpha (I_r - W_t W_t^+) \mu + W_t^+ + \\ &+ \sum_{i=1}^q (-1)^i \bar{P}_\alpha^{1/2} \lambda^{ti} (\bar{P}_\alpha^{-1/2} W_t^+ \bar{P}_\alpha^{-1/2})^{i+1} \bar{P}_\alpha^{1/2} \mu^{-i} + O(\mu^{-q-1}), \end{aligned}$$

который сходится равномерно при $t \in T$ и $\mu > 1/\lambda_{\min}$, где

$$\lambda_{\min} = \min\{\lambda_t(i) > 0, t \in T, i = 1, 2, \dots, r\},$$

$\lambda_t(i)$, $t \in T, i = 1, 2, \dots, r$ – собственные числа матрицы $\bar{P}_\alpha^{1/2} W_t \bar{P}_\alpha^{1/2}$. Подстановка этого выражения в $P_t = \tilde{S}_t + \tilde{V}_t L_t \tilde{V}_t^T$ дает (3.30).

Покажем, что

$$\tilde{V}_t \bar{P}_\alpha (I_r - W_t W_t^+) \tilde{V}_t^T C_t^T = 0. \quad (3.34)$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} W_t &= \sum_{k=1}^t \lambda^{t-k+1} (C_k^\beta V_{k-1} + C_k^\alpha)^T (\lambda I_m + C_k^\beta S_{k-1} (C_k^\beta)^T)^{-1} (C_k^\beta V_{k-1} + C_k^\alpha) = \\ &= \sum_{k=1}^t \lambda^{t-k+1} (C_k \tilde{V}_{k-1})^T (\lambda I_m + C_k^\beta S_{k-1} (C_k^\beta)^T)^{-1} C_k \tilde{V}_{k-1} \end{aligned}$$

и используя лемму 2.2 с

$$F_t = \lambda^{-(t+1)/2} (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1/2} C_t \tilde{V}_{t-1},$$

получим

$$\bar{P}_\alpha (I_r - W_t W_t^+) (C_t \tilde{V}_{t-1})^T (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1/2} = 0.$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t \bar{P}_\alpha (I_r - W_t W_t^+) \tilde{V}_{t-1}^T A_t^T C_t^T &= \tilde{V}_t \bar{P}_\alpha (I_r - W_t W_t^+) \tilde{V}_{t-1}^T C_t^T - \\ - \tilde{V}_t \bar{P}_\alpha (I_r - W_t W_t^+) \tilde{V}_{t-1}^T C_t^T (\lambda I_m + C_t \tilde{S}_{t-1} C_t^T)^{-1} C_t \tilde{S}_{t-1} C_t^T &= 0. \end{aligned}$$

Теорема 3.1. Решение задачи минимизации критерия (3.4) с помощью метода ГН и диффузной инициализации может быть получено рекуррентно

$$x_t^{dif} = x_{t-1}^{dif} + K_t^{dif} (y_t - h_t(x_{t-1}^{dif})), \quad x_0^{dif} = (\bar{\beta}^T, 0_{1 \times r})^T, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (3.35)$$

где

$$x_t^{dif} = ((\beta_t^{dif})^T, (\beta_t^{dif})^T)^T, \quad K_t^{dif} = ((K_t^\beta)^T, (K_t^\alpha)^T)^T, \quad h_t(x_{t-1}) = \Phi(z_t, \beta_{t-1}) \alpha_{t-1}, \quad (3.36)$$

$$K_t^\beta = (S_t + V_t W_t^+ V_t^T) (C_t^\beta)^T + V_t W_t^+ (C_t^\alpha)^T, \quad (3.36)$$

$$K_t^\alpha = W_t^+ V_t^T (C_t^\beta)^T + W_t^+ (C_t^\alpha)^T, \quad (3.37)$$

$$S_t = S_{t-1} / \lambda - S_{t-1} (C_t^\beta)^T (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\beta S_{t-1} / \lambda, \quad S_0 = \bar{P}_\beta, \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} V_t &= (I_l - S_{t-1} (C_t^\beta)^T (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\beta) V_{t-1} - \\ - S_{t-1} (C_t^\beta)^T (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\alpha, \quad V_0 &= 0_{l \times r}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} W_t &= \lambda W_{t-1} + \lambda (C_t^\beta V_{t-1} + C_t^\alpha)^T (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} (C_t^\beta V_{t-1} + C_t^\alpha), \\ W_0 &= 0_{r \times r}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$C_t^\beta = C_t^\beta(x_{t-1}) = \partial[\Phi(z_t, \beta_{t-1}) \alpha_{t-1}] / \partial \beta_{t-1}, \quad C_t^\alpha = C_t^\alpha(x_{t-1}) = \Phi(z_t, \beta_{t-1}). \quad (3.41)$$

Утверждение теоремы будет следовать из лемм 3.1, 3.2 если пренебречь в (3.31) членами первого порядка малости $O(\mu^{-1})$.

Мы будем называть этот алгоритм диффузным алгоритмом обучения (ДАО) для модели (3.1) с сепарабельной структурой.

Сформулируем следствия, вытекающие из полученных результатов.

Следствие 3.1.1. Диффузная составляющая $P_t^{dif} = \tilde{V}_t (I_r - W_t W_t^+) \tilde{V}_t^T$ — компонента в разложении P_t пропорциональная большому параметру равна нулю при $t \geq tr$, где

$$tr = \min_t \{t : W_t > 0, t = 1, 2, \dots, N\}$$

Следствие 3.1.2. Матрица K_t^{dif} не зависит от диффузной составляющей и в отличие от P_t , как функция μ равномерно ограничена при $t \in T$ и $\mu \rightarrow \infty$.

Следствие 3.1.3. Ошибки численной реализации могут приводить к расходимости метода ГН при больших μ . Действительно, пусть δW_t^+

ошибка, связанная с вычислением псевдообратной матрицы W_t . Тогда с помощью леммы 3.2 устанавливаем, что

$$K_t = (\tilde{S}_t + \tilde{V}_t L_t^{-1} \tilde{V}_t^T) C_t^T = \\ = [\tilde{S}_t + \tilde{V}_t (I_r - W_t (W_t^+ + \delta W_t^+) \mu + O(1)) \tilde{V}_t^T] C_t^T, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad \mu \rightarrow \infty.$$

При $\delta W_t^+ \neq 0$ матрица K_t становится зависимой от диффузной составляющей. Более того, из этого следует, что даже когда $t \geq tr$ переход к использованию представления

$$P_t = (P_{t-1} - P_{t-1} C_t^T (\lambda I_m + C_t P_{t-1} C_t^T)^{-1} C_t P_{t-1}) / \lambda$$

может оказаться неоправданным, из-за плохой обусловленности матрицы P_{tr} .

От указанных особенностей численной реализации свободен ДАО. Это следует из отсутствия в его конструкции диффузных компонент – величин пропорциональных большому параметру.

Отметим еще одно важное преимущество ДАО по сравнению с алгоритмом мягкой инициализации, состоящее в том, что нет необходимости подбирать величину μ .

Получим условия, при выполнении которых оценка $x = (\alpha^T, \beta^T)^T$, полученная с помощью метода ГН с ограниченным значением μ асимптотически приближается к x_t^{dif} при $\mu \rightarrow \infty$.

Перейдем к более компактной форме представления алгоритмов обучения. Введем вектор u_t , компонентами которого являются упорядоченные по столбцам элементы x_t, S_t, V_t, L_t , определяемый системой уравнений

$$u_t = f_t(u_{t-1}, 1/\mu), \quad t \in T \quad (3.42)$$

С начальным условием $u_0 = \bar{u}$. С использованием этих обозначений ДАО может быть описан системой уравнений

$$u_t^{dif} = f_t(u_{t-1}^{dif}, 0), \quad t \in T \quad (3.43)$$

с начальным условием $u_0 = \bar{u}$, где u_t^{dif} состоит из упорядоченных по столбцам элементов $x_t^{dif}, S_t^{dif}, V_t^{dif}, W_t^{dif}$.

Теорема 3.2. Пусть выполняются условия:

1. $P(\|\xi_t\| < \infty) = 1, t \in T = \{1, 2, \dots, N\}$, где T – ограниченное множество.
 2. Решение системы (3.43) принадлежит области $\tilde{U} = \{t \in T, \|u_t^{dif}\| \leq h\}$, где $h > 0$ – некоторое число.
 3. $\|\Phi(z_t, \beta)\| \leq k_1, \|\partial\Phi(z_t, \beta)/\partial\beta\| \leq k_2, \|\partial^2\Phi(z_t, \beta)/\partial\beta_i\partial\beta_j\| \leq k_3$, $i, j = 1, 2, \dots, l$ для $t \in T$ и $\|\beta\| \leq h$, где k_1, k_2, k_3 – некоторые положительные числа.
 3. $rank(W_t)$ постоянен для каждого фиксированного $t \in T$, $\|W_t\| \leq h$ и $\mu > \bar{\mu}$, где $\bar{\mu}$ – некоторое достаточно большое число.
- Тогда с вероятностью 1 в области $U = \{t \in T, \|u_t\| \leq h, \mu > \bar{\mu}\}$ справедливо равномерное по $t \in T$ асимптотическое представление

$$x_t = x_t^{dif} + O(1/\mu), \mu \rightarrow \infty, t \in T, \quad (3.44)$$

где

$$x_t^{dif} = x_{t-1}^{dif} + K_t^{dif}(y_t - h_t(x_{t-1}^{dif})), x_0^{dif} = (\bar{\beta}^T, 0_{1 \times r})^T. \quad (3.45)$$

Доказательство. Вводя новую переменную $e_t = u_t - u_t^{dif}$, получим

$$\begin{aligned} e_t &= e_{t-1} + f_t(u_{t-1}, 1/\mu) - f_t(u_{t-1}^{dif}, 0) = \\ &= e_{t-1} + f_t(e_{t-1} + u_{t-1}^{dif}, 1/\mu) - f_t(u_{t-1}^{dif}, 0) = \\ &= e_{t-1} + [f_t(e_{t-1} + u_{t-1}^{dif}, 1/\mu) - f_t(u_{t-1}^{dif}, 1/\mu)] + [f_t(u_{t-1}^{dif}, 1/\mu) - f_t(u_{t-1}^{dif}, 0)] = \\ &= e_{t-1} + \psi_t(e_{t-1}, 1/\mu) + \varphi_t(u_{t-1}^{dif}, 1/\mu), e_0 = 0, t \in T, \end{aligned}$$

или эквивалентно

$$e_t = \sum_{i=0}^{t-1} \psi_i(e_i, 1/\mu) + \tilde{\varphi}_t(1/\mu), e_0 = 0, t \in T, \quad (3.46)$$

где $\tilde{\varphi}_t(1/\mu) = \sum_{i=0}^{t-1} \varphi_i(u_i^{dif}, 1/\mu)$.

Использование теоремы о среднем в U дает

$$f_t(e_{t-1} + u_{t-1}^{dif}, 1/\mu) - f_t(u_{t-1}^{dif}, 1/\mu) = \int_0^1 \frac{\partial f_t(z, 1/\mu)}{\partial z} \Big|_{z=u_{t-1}^{dif} + \tau e_{t-1}} d\tau e_{t-1}, \quad (3.47)$$

$$f_t(u_{t-1}^{dif}, 1/\mu) - f_t(u_{t-1}^{dif}, 0) = \int_0^1 \frac{\partial f_t(u_{t-1}^{dif}, z)}{\partial z} \Big|_{z=\tau/\mu} d\tau / \mu \quad (3.48)$$

при условии, что производные в этих выражениях существуют.

Из вида правых частей систем (3.12), (3.13) следует, что при выполнении условий 1, 2 теоремы частные производные от них по u_t ограничены в

U . Существование и ограниченность частных производных от функций, входящих в правые части систем (3.6), (3.45) определяются свойствами матричных функций

$$K_t = P_t C_t^T R_t^{-1} = (\tilde{S}_t + \tilde{V}_t L_t \tilde{V}_t^T) C_t^T, \quad (3.49)$$

$$K_t^{dif} = (\tilde{S}_t^{dif} + \tilde{V}_t^{dif} (W_t^{dif})^+ (\tilde{V}_t^{dif})^T) C_t^T. \quad (3.50)$$

Имеем

$$\begin{aligned} L_t^{-1} &= \lambda^t (\sum_{k=1}^t \lambda^{-k+1} (C_t \tilde{V}_t)^T (\Lambda_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t \tilde{V}_t + \bar{P}_\alpha^{-1} / \mu) = \\ &= \lambda^t \bar{P}_\alpha^{-1/2} (\sum_{k=1}^t \lambda^{-k+1} \bar{P}_\alpha^{1/2} (C_t \tilde{V}_t)^T (\Lambda_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t \tilde{V}_t \bar{P}_\alpha^{1/2} + I_r / \mu) \bar{P}_\alpha^{-1/2} = \\ &= \lambda^t \bar{P}_\alpha^{-1/2} (\Lambda_t + I_r / \mu) \bar{P}_\alpha^{-1/2}. \end{aligned}$$

Используя тождество [47]

$$(I_n + \mu V)^{-1} = (I_n - VV^+) + V^+ (V^+ + \mu I_n)^{-1},$$

где V – произвольная симметрическая матрица и полагая $V = \Lambda_t$, получим

$$\begin{aligned} L_t &= \lambda^{-t} \bar{P}_\alpha^{1/2} (I_r + \mu \Lambda_t)^{-1} \bar{P}_\alpha^{1/2} \mu = \\ &+ \lambda^{-t} \bar{P}_\alpha (I_r - \Lambda_t \Lambda_t^+) \mu + \lambda^{-t} \bar{P}_\alpha^{1/2} \Lambda_t^+ (\Lambda_t^+ + \mu I_r)^{-1} \bar{P}_\alpha^{1/2} \mu. \end{aligned} \quad (3.51)$$

С помощью (3.34), (3.51) находим

$$\begin{aligned} K_t &= \tilde{S}_t C_t^T + \lambda^{-t} \tilde{V}_t \bar{P}_\alpha^{1/2} (I_r + \mu \Lambda_t)^{-1} \bar{P}_\alpha^{1/2} \tilde{V}_t^T C_t^T \mu = \\ &= \tilde{S}_t C_t^T + \bar{P}_\alpha^{1/2} W_t^+ (\lambda^t \bar{P}_\alpha^{-1/2} W_t^+ \bar{P}_\alpha^{-1/2} / \mu + I_r)^{-1} \bar{P}_\alpha^{1/2} C_t^T. \end{aligned} \quad (3.52)$$

При выполнении условия 4 теоремы матричная функция $W_t^+(W_t)$ непрерывна и имеет непрерывную производную относительно W_t в $U_w = \{t \in T, \|W_t\| \leq h\}$ [1] и поэтому $\|W_t^+\|$ ограничена в этой области. Так как

$$\begin{aligned} &\| (I_r + \lambda^t \bar{P}_\alpha^{-1/2} W_t^+ \bar{P}_\alpha^{-1/2} / \mu)^{-1} \| = \\ &= \| T_t \text{diag}((1 + \lambda_t(1)/\mu)^{-1}, (1 + \lambda_t(2)/\mu)^{-1}, \dots, (1 + \lambda_t(r)/\mu)^{-1}) T_t^T \| \leq \\ &\leq \| T_t \|^2 (\sum_{i=1}^r (1 + \lambda_t(i)/\mu)^{-2})^{1/2} \leq r \| T_t \|^2, \quad \mu > \bar{\mu}, \end{aligned}$$

где $\lambda_t(i)$, $T_t(i)$ $t \in T, i = 1, 2, \dots, r$ – собственные числа и соответствующие им собственные вектора матрицы $\lambda^t \bar{P}_\alpha^{-1/2} W_t^+ \bar{P}_\alpha^{-1/2}$, $T_t = (T_t(1), T_t(2), \dots, T_t(r))$, то норма матричной функции

$$\Psi(W_t, \mu) = (I_r + \lambda^t \bar{P}_\alpha^{-1/2} W_t^+ \bar{P}_\alpha^{-1/2} / \mu)^{-1}$$

также ограничена.

Дифференциалы $\Psi(W_t, \mu)$ относительно W_t^+ и μ определяются выражениями

$$\begin{aligned} d_{W^+} \Psi(W_t, \mu) &= -\lambda^t (I_r + \lambda^t \bar{P}_\alpha^{-1/2} W_t^+ \bar{P}_\alpha^{-1/2} / \mu)^{-1} \bar{P}_\alpha^{-1/2} dW_t^+ \bar{P}_\alpha^{-1/2} \\ &\times (I_r + \lambda^t \bar{P}_\alpha^{-1/2} W_t^+ \bar{P}_\alpha^{-1/2} / \mu)^{-1} / \mu \\ d_\mu \Psi(W_t, \mu) &= \lambda^t (I_r + \lambda^t \bar{P}_\alpha^{-1/2} W_t^+ \bar{P}_\alpha^{-1/2} / \mu)^{-1} \bar{P}_\alpha^{-1/2} W_t^+ \bar{P}_\alpha^{-1/2} \\ &\times (I_r + \lambda^t \bar{P}_\alpha^{-1/2} W_t^+ \bar{P}_\alpha^{-1/2} / \mu)^{-1} / \mu^2 d\mu \end{aligned}$$

которые являются непрерывными функциями W_t и μ при $t \in T$, $\mu > \bar{\mu}$ и $\|W_t\| \leq h$. Таким образом, производные в (3.47) (3.48) существуют и ограничены в U и поэтому существуют постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ такие, что

$$\|\psi_t(e_{t-1}, 1/\mu)\| = \|f_t(e_{t-1} + u_{t-1}^{dif}, 1/\mu) - f_t(u_{t-1}^{dif}, 1/\mu)\| \leq c_1 \|e_{t-1}\| \quad (3.53)$$

$$\|\varphi_t(u_{t-1}^{dif}, 1/\mu)\| = \|f_t(u_{t-1}^{dif}, 1/\mu) - f_t(u_{t-1}^{dif}, 0)\| \leq c_2 / \mu. \quad (3.54)$$

Итерируя (3.46), мы получаем

$$\begin{aligned} \|e_1\| &\leq b_1 / \mu, \quad \|e_2\| \leq c_1^2 \|e_1\| + b_2 / \mu \leq (b_1 c_1^2 + b_2) / \mu, \dots, \\ \|e_t\| &\leq c_1^t \|e_1\| + c_2^t \|e_2\| + \dots + c_{t-1}^t \|e_{t-1}\| + b_t / \mu = O(1/\mu), \end{aligned}$$

где c_i^t , $i = 1, 2, \dots, t-1$, b_i , $i = 1, 2, \dots, t$ – некоторые положительные числа.

Поскольку $u_t^{dif} \in \tilde{U}$, то отсюда следует, что $u_t = u_t^{dif} + e_t \in U$ при $\mu > \bar{\mu}$ и одновременно асимптотическое представление (3.44).

Пусть теперь в критерии качества вместо забывающего множителя используется ковариационная матрица шумов наблюдения R_t

$$\begin{aligned} J_t(x) &= \sum_{k=1}^t (y_k - \Phi(z_k, \beta)\alpha)^T R_k^{-1} (y_k - \Phi(z_k, \beta)\alpha) + \\ &+ \Gamma(\beta) + \alpha \bar{P}_\alpha^{-1} \alpha / \mu, \quad t = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Решение в этом случае нетрудно получить, используя теорему 3.1. Действительно, с помощью замены

$$\tilde{y}_k = R_k^{-1/2} y_k, \quad \tilde{\Phi}(z_k, \beta) = R_k^{-1/2} \Phi(z_k, \beta) \quad (3.56)$$

(3.55) преобразуется к (3.4) с $\lambda = 1$

$$J_t(x) = \sum_{k=1}^t (\tilde{y}_k - \tilde{\Phi}(z_k, \beta) \alpha)^T (\tilde{y}_k - \tilde{\Phi}(z_k, \beta) \alpha) + \Gamma(\beta) + \alpha \bar{P}_\alpha^{-1} \alpha / \mu, \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (3.57)$$

Отсюда следует следующее утверждение:

Теорема 3.3. Решение задачи минимизации задачи (3.55) с помощью метода ГН и диффузной инициализации может быть получено рекуррентно

$$x_t^{dif} = x_{t-1}^{dif} + K_t^{dif} (y_t - h_t(x_{t-1}^{dif})), \quad x_0^{dif} = (\bar{\beta}^T, 0_{1 \times r})^T, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (3.58)$$

где

$$x_t^{dif} = ((\beta_t^{dif})^T, (\beta_t^{dif})^T)^T, \quad K_t^{dif} = ((K_t^\beta)^T, (K_t^\alpha)^T)^T, \quad h_t(x_{t-1}) = \Phi(z_t, \beta_{t-1}) \alpha_{t-1} \quad (3.59)$$

$$K_t^\beta = (S_t + V_t W_t^+ V_t^T) (C_t^\beta)^T R_t^{-1} + V_t W_t^+ (C_t^\alpha)^T R_t^{-1}, \quad (3.59)$$

$$K_t^\alpha = W_t^+ V_t^T (C_t^\beta)^T R_t^{-1} + W_t^+ (C_t^\alpha)^T R_t^{-1}, \quad (3.60)$$

$$S_t = S_{t-1} - S_{t-1} (C_t^\beta)^T (R_t + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\beta S_{t-1}, \quad S_0 = \bar{P}_\beta, \quad (3.61)$$

$$V_t = (I_l - S_{t-1} (C_t^\beta)^T (R_t + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\beta) V_{t-1} - S_{t-1} (C_t^\beta)^T (R_t + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\alpha, \quad V_0 = 0_{l \times r}, \quad (3.62)$$

$$W_t = W_{t-1} + (C_t^\beta V_{t-1} + C_t^\alpha)^T (R_t + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} (C_t^\beta V_{t-1} + C_t^\alpha), \quad W_0 = 0_{r \times r}, \quad (3.63)$$

$$C_t^\beta = C_t^\beta(x_{t-1}) = \partial[\Phi(z_t, \beta_{t-1}) \alpha_{t-1}] / \partial \beta_{t-1}, \quad C_t^\alpha = C_t^\alpha(x_{t-1}) = \Phi(z_t, \beta_{t-1}). \quad (3.64)$$

При удачном выборе априорной информации для β , можно ожидать быструю сходимость, предложенных ДАО, к одной из приемлемых точек минимума критерия качества. Возможны различные формализации того, что понимать под удачным выбором β . Самый простой получается в предположении, что $\bar{P}_\beta = 0_{r \times r}$. В этом предельном случае из теоремы 3.1 следует, что в (3.1) оценивается только параметр α с помощью соотношений

$$\alpha_t^{dif} = \alpha_{t-1}^{dif} + K_t^{dif} (y_t - C_t^\alpha \alpha_{t-1}^{dif}), \quad \alpha_0^{dif} = 0_{r \times 1}, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (3.65)$$

где

$$K_t^{dif} = W_t^+ (C_t^\alpha)^T, \quad (3.66)$$

$$W_t = \lambda W_{t-1} + (C_t^\alpha)^T C_t^\alpha, W_0 = 0_{r \times r}. \quad (3.67)$$

Т.е., модель наблюдения 3.1 вырождается в линейную регрессию. Если $\xi_t = 0$, то система уравнений для ошибки $e_t = \alpha_t - \alpha$ имеет вид

$$e_t = (I_r - K_t C_t^\alpha) e_{t-1} = A_t e_t, e_0 = -\alpha, t = 1, 2, \dots, N,$$

а ее переходная матрица определяется выражением $H_{t,0} = I_r - W_t^+ W_t$ (лемма 2.4). Откуда следует, что ошибка оценивания e_t обращается в ноль при $t \geq tr$, где

$$tr = \min_t \{t : \Pi_t > 0, t = 1, 2, \dots, N\}, \Pi_t = \sum_{k=1}^t (C_k^\alpha)^T C_k^\alpha.$$

Если $\xi_t \neq 0$, то это означает, что оценка ДАО будет несмещенной при $t \geq tr$.

Рассмотренный предельный случай иллюстрирует еще одну важную особенность алгоритма – начальный этап обучения ($t \leq tr$) может оказывать существенное влияние на количество итераций необходимое для сходимости нелинейной задачи обучения. Процесс обучения с помощью ДАО напоминает быстрые и медленные движения, которые могут наблюдаться в динамических системах. В нашем случае, β_t^{dif} является медленной переменной, а α_t^{dif} – быстрой. Благодаря этому, точка $((\beta_t^{dif})^T, (\beta_t^{dif})^T)^T$ достигает окрестности приемлемого минимума за конечное число шагов $t \geq tr$. Это свойство ДАО будет рассмотрено более подробно в разделе 3.3.2.

Ситуация, в которой значения нормы $\bar{P}_\beta$ отличаются от нуля, но относительно малы, кажется более интересной. В этом случае возможны различные варианты конструкций упрощенных алгоритмов обучения. Пусть, например, $\bar{P}_\beta = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда $S_t = O(\varepsilon)$, $V_t = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по t для ограниченного множества T . Пренебрегая членами $V_t W_t^+ V_t^T (C_t^\beta)^T$, $V_t W_t^+ (C_t^\alpha)^T W_t^+ V_t^T (C_t^\beta)^T$ в (3.36), (3.37) and $C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T$, $C_t^\beta V_{t-1}$ в (3.40), мы получаем из теоремы 3.1 упрощенную версию ДАО

$$K_t^\beta = S_t (C_t^\beta)^T, K_t^\alpha = W_t^+ (C_t^\alpha)^T, \quad (3.68)$$

$$S_t = S_{t-1} / \lambda - S_{t-1} (C_t^\beta)^T (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\beta S_{t-1} / \lambda, S_0 = \bar{P}_\beta, \quad (3.69)$$

$$W_t = \lambda W_{t-1} + (C_t^\alpha)^T C_t^\alpha, W_0 = 0_{r \times r}. \quad (3.70)$$

Аналогично, для ДАО из теоремы 3.3

$$K_t^\beta = S_t (C_t^\beta)^T R_t^{-1}, K_t^\alpha = W_t^+ (C_t^\alpha)^T R_t^{-1}, \quad (3.71)$$

$$S_t = S_{t-1} - S_{t-1} (C_t^\beta)^T (R_t + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\beta S_{t-1}, S_0 = \bar{P}_\beta, \quad (3.72)$$

$$W_t = W_{t-1} + (C_t^\alpha)^T R_t^{-1} C_t^\alpha, \quad W_0 = 0_{r \times r}. \quad (3.73)$$

К этим же соотношениям можно прийти, опираясь на другие соображения. Действительно, решая задачу оптимизации и поочередно фиксируя параметры β и α , получим соотношения (3.68) – (3.73). Отсюда название – двух этапный алгоритм обучения.

3.3 Обучение при отсутствии априорной информации о параметрах выходного слоя

Пусть теперь неизвестные параметры в (3.1) удовлетворяют условиям В1, В2 и критерий качества в момент t определен выражением (3.5). Нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений для того, чтобы установить основной результат этого раздела – теорему 3.3.

Лемма 3.3. Справедливо тождество:

$$\Lambda_t^+ \tilde{C}_t^T = [(I_{l+r} - \lambda^{-t/2} K_t C_t) \Lambda_{t-1}^+ \tilde{C}_{t-1}^T, K_t], \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (3.74)$$

где

$$\begin{aligned} C_t &\in R^{m \times (l+r)}, \quad \tilde{C}_t = (\lambda^{-1/2} C_1^T, \lambda^{-1} C_2^T, \dots, \lambda^{-t/2} C_t^T)^T \in R^{mt \times (l+r)}, \\ \Lambda_t &= (\tilde{C}_t^T \tilde{C}_t + M) \in R^{(l+r) \times (l+r)}, \\ K_t &= \lambda^{-t/2} \Lambda_t^+ C_t^T \in R^{(l+r) \times m}, \quad M = \begin{pmatrix} \bar{P}_\beta^{-1} & 0_{l \times r} \\ 0_{r \times l} & 0_{r \times r} \end{pmatrix} \in R^{(l+r) \times (l+r)}, \quad \bar{P}_\beta \in R^{l \times l}, \end{aligned}$$

$0_{p \times q}$ – $p \times q$ матрица с нулевыми элементами.

Доказательство. Так как $\Lambda_t^+ \tilde{C}_t^T = \Lambda_t^+ (\tilde{C}_{t-1}^T, \lambda^{-t/2} C_t^T)^T$, то последние $l+r$ столбцов в правой и левой частях тождества (3.74) совпадают. Покажем, что

$$\Lambda_t^+ \tilde{C}_{t-1}^T = (I_{l+r} - \lambda^{-t/2} K_t C_t) \Lambda_{t-1}^+ \tilde{C}_{t-1}^T.$$

Используя рекуррентную формулу

$$\Lambda_t = \Lambda_{t-1} + \lambda^{-t} C_t^T C_t, \quad \Lambda_0 = M, \quad t = 1, 2, \dots, N$$

для определения матрицы Λ_t , представим это выражение в следующей эквивалентной форме

$$(\Lambda_t^+ - (I_{l+r} - \lambda^{-t/2} K_t C_t) \Lambda_{t-1}^+) \tilde{C}_{t-1}^T =$$

$$\begin{aligned}
&= [\Lambda_t^+ - (I_{r+l} - \Lambda_t^+ \Lambda_t + \Lambda_t^+ \Lambda_{t-1}) \Lambda_{t-1}^+] \tilde{C}_{t-1}^T = \\
&= [\Lambda_t^+ (I_{r+l} - \Lambda_{t-1} \Lambda_{t-1}^+) - (I_{r+l} - \Lambda_t^+ \Lambda_t) \Lambda_{t-1}^+] \tilde{C}_{t-1}^T = 0.
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Покажем, что

$$(I_{l+r} - \Lambda_t^+ \Lambda_t) \Lambda_{t-1}^+ = 0, \tag{3.76}$$

$$\Lambda_t^+ (I_{l+r} - \Lambda_{t-1} \Lambda_{t-1}^+) \tilde{C}_{t-1}^T = 0. \tag{3.77}$$

Пусть матрица $Q_t = (\tilde{C}_t^T, M^{1/2})$ имеет ранг $q(t)$ и $l_t(1), l_t(2), \dots, l_t(q(t))$, ее произвольные линейно-независимые столбцы. Линейное пространство $C(Q_t)$ определенное ими совпадает с пространством, образованным столбцами Λ_t , что влечет $C(\Lambda_{t-1}) \subseteq C(\Lambda_t)$.

Использование скелетного разложения матриц дает

$$(\tilde{C}_t^T, M^{1/2}) = L_t \Gamma_t,$$

где $L_t = (l_t(1), l_t(2), \dots, l_t(q(t)))$, $rank(\Gamma_t) = q(t)$.

Имеем $\Lambda_t = L_t \tilde{\Gamma}_t^T L_t^T$, где $\tilde{\Gamma}_t = \Gamma_t \Gamma_t^T$. Так как L_t матрица полного ранга по столбцам, то $L_t^+ = (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T$ и, таким образом

$$\begin{aligned}
\Lambda_t^+ &= (L_t \tilde{\Gamma}_t^T L_t^T)^+ = (L_t^T)^+ \tilde{\Gamma}_t^{-1} (L_t)^+, \Lambda_t^+ \Lambda_t = L_t (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T, \\
&(I_{l+r} - L_t (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T) L_{t-1} = 0,
\end{aligned}$$

что влечет (3.76).

Рассмотрим (3.77). Так как существует матрица $\bar{\Gamma}_t$ такая, что $\tilde{C}_{t-1}^T = L_{t-1} \bar{\Gamma}_t$, то мы получаем

$$\Lambda_t^+ (I_{l+r} - \Lambda_{t-1} \Lambda_{t-1}^+) \tilde{C}_{t-1}^T = \Lambda_t^+ (I_{l+r} - L_{t-1} (L_{t-1}^T L_{t-1})^{-1} L_{t-1}^T) L_{t-1} \bar{\Gamma}_t = 0, \quad t = 1, 2, \dots, N.$$

Лемма 3.3. Существует равномерное по $t \in T = \{1, 2, \dots, N\}$ асимптотическое представление

$$(\varepsilon U_t + M_t)^{-1} = 1/\varepsilon A_{-1} + A_0 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad t = 1, 2, \dots, N, \tag{3.78}$$

где

$$A_0 = M_t^+ = (\tilde{C}_t^T \tilde{C}_t + \lambda^t M)^+, U_t = \begin{pmatrix} 0_{l \times l} & 0_{l \times r} \\ 0_{r \times l} & \lambda^t I_r \end{pmatrix} \in R^{(l+r) \times (l+r)},$$

$$M = \begin{pmatrix} \bar{P}_\beta^{-1} & 0_{l \times r} \\ 0_{r \times l} & 0_{r \times r} \end{pmatrix} \in R^{(l+r) \times (l+r)}, \bar{P}_\beta \in R^{l \times l},$$

$C_t \in R^{m \times (l+r)}$, $\tilde{C}_t = (\lambda^{(t-1)/2} C_1^T, \lambda^{(t-2)/2} C_2^T, \dots, C_t^T)^T \in R^{m \times (l+r)}$, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, T – ограниченное множество.

Доказательство. Существование (3.78) следует из асимптотического разложения [47]

$$(H^T H + 1/\varepsilon G^T G)^+ = (\bar{H} \bar{H})^+ + \varepsilon (I - \bar{H}^+ H)(G^T G)^+ (I - \bar{H}^+ H)^T + O(\varepsilon^2), \quad (3.79)$$

где H и G – произвольные матрицы соответствующих размерностей,

$$\bar{H} = H(I - G^+ G) = H(I - (G^T G)^+ G^T G),$$

если $H = U_t^{1/2}$, $G = M_t^{1/2}$.

Это утверждение будет выполняться при условии, что

$$M_t^+ = (I_{l+r} - \bar{H}_t^+ U_t) M_t^+ (I_{l+r} - \bar{H}_t^+ U_t)^T,$$

где $\bar{H}_t = U_t (I_{l+r} - M_t^+ M_t)$ или, эквивалентно

$$\bar{H}_t^+ U_t M_t^+ = 0, \quad (3.80)$$

Найдем сначала представление для $\bar{H}_t^+$. Пусть $T_t = (t_t(1), t_t(2), \dots, t_t(l+r))$ – ортогональная матрица такая, что $M_t = T_t \Lambda_t T_t^T$, где $\Lambda_t = \text{diag}(\lambda_t(1), \lambda_t(2), \dots, \lambda_t(l+r))$, $\lambda_t(i)$, $i = 1, 2, \dots, l+r$ – собственные числа матрицы M_t . Так как $M_t^+ = T_t \Lambda_t^+ T_t^T$, то $\bar{H}_t = U_t T_t (I_{l+r} - \Lambda_t^+ \Lambda_t) T_t^T$.

Определим структуру матрицы T_t . Имеем

$$\begin{aligned} \text{rank}(M_t) &= \text{rank}(\lambda^t M + \begin{pmatrix} (\tilde{C}_t^\beta)^T \tilde{C}_t^\beta & (\tilde{C}_t^\beta)^T \tilde{C}_t^\alpha \\ (\tilde{C}_t^\alpha)^T \tilde{C}_t^\beta & (\tilde{C}_t^\alpha)^T \tilde{C}_t^\alpha \end{pmatrix}) = \\ &= \text{rank}(\lambda^t M + (\tilde{C}_t^\beta)^T \tilde{C}_t^\beta) + \text{rank}(S_t), \end{aligned}$$

где

$$S_t = (\tilde{C}_t^\alpha)^T \tilde{C}_t^\alpha - (\tilde{C}_t^\beta)^T \tilde{C}_t^\alpha (I_l + (\tilde{C}_t^\beta)^T \tilde{C}_t^\beta)^{-1} (\tilde{C}_t^\alpha)^T \tilde{C}_t^\beta,$$

$$\tilde{C}_t = (\tilde{C}_t^\beta, \tilde{C}_t^\alpha), \tilde{C}_t^\beta \in R^{m \times l}, \tilde{C}_t^\alpha \in R^{m \times r}.$$

Отсюда следует, что $q(t) = \text{rank}(M_t) \geq l$. Если $\text{rank}(M_t) = l + r$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $l \leq q(t) < l + r$. Собственные векторы матрицы M_t (столбцы матрицы T_t), соответствующие нулевым собственным числам определяются из системы $M_t x_t = 0$. Используя блочное представление $x_t = (x_t^T(1), x_t^T(2))^T$, получаем

$$\begin{pmatrix} \lambda^t \bar{P}_\beta^{-1} + (\tilde{C}_t^\beta)^T \tilde{C}_t^\beta & (\tilde{C}_t^\beta)^T \tilde{C}_t^\alpha \\ (\tilde{C}_t^\alpha)^T \tilde{C}_t^\beta & (\tilde{C}_t^\alpha)^T \tilde{C}_t^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t(1) \\ x_t(2) \end{pmatrix} = 0$$

или, эквивалентно

$$\lambda^t \bar{P}_\beta^{-1} x_t(1) + (\tilde{C}_t^\beta)^T \tilde{C}_t x_t = 0, (\tilde{C}_t^\alpha)^T \tilde{C}_t x_t = 0.$$

Решение этой системы определяется выражениями

$$x_t(1) = 0, x_t(2) = (I_r - (\tilde{C}_t^\alpha)^+ \tilde{C}_t^\alpha) f,$$

где $f \in R^r$ – произвольный вектор. Откуда, полагая без ограничения общности, что

$$\Lambda_t = \text{diag}(\lambda_t(1), \lambda_t(2), \dots, \lambda_t(q(t)), 0, 0, \dots, 0), \lambda_t(i) > 0, i = 1, 2, \dots, q(t)$$

Получаем

$$T_t = \begin{pmatrix} T_{1t} & 0_{l \times (l+r-q(t))} \\ T_{2t} & T_{3t} \end{pmatrix}, T_{1t} \in R^{l \times q(t)}, T_{2t} \in R^{r \times q(t)}, T_{3t} \in R^{r \times (l+r-q(t))}.$$

Так как матрица $I_{l+r} - M_t^+ M_t$ идемпотентна, то

$$\begin{aligned} \bar{H}_t^+ &= \lambda^{-t} (I_{l+r} - M_t^+ M_t) = \\ &= \lambda^{-t} T_t (I_{l+r} - \Lambda_t^+ \Lambda_t) T_t^T = \lambda^{-t} \begin{pmatrix} 0_{l \times l} & 0_{l \times r} \\ 0_{r \times l} & T_{3t} T_{3t}^T \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из ортогональности T_t следует, что $T_{3t}^T T_{2t} = 0_{(l+r-q(t)) \times q(t)}$. Поэтому

$$\bar{H}_t^+ U_t M_t^+ = T_t (I_{l+r} - \Lambda_t^+ \Lambda_t) T_t^T U_t^+ U_t T_t \Lambda_t^+ T_t^T = 0.$$

Лемма 3.5. Справедливо представление:

$$M_t^+ = (\tilde{C}_t^T \tilde{C}_t + \lambda^t M)^+ = \tilde{S}_t + \tilde{V}_t W_t^+ \tilde{V}_t^T, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (3.81)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} \bar{P}_\beta^{-1} & 0_{l \times r} \\ 0_{r \times l} & 0_{r \times r} \end{pmatrix} \in R^{(l+r) \times (l+r)}, \bar{P}_\beta \in R^{l \times l},$$

$$\tilde{S}_t = \begin{pmatrix} S_t & 0_{l \times r} \\ 0_{r \times l} & 0_{r \times r} \end{pmatrix}, \tilde{V}_t = \begin{pmatrix} V_t \\ I_r \end{pmatrix}, S_t \in R^{l \times l}, V_t \in R^{l \times r}, \quad (3.82)$$

S_t, V_t, W_t – определяются матричными уравнениями (3.38) – (3.40) для произвольных $C_t^\beta \in R^{m \times l}$, $C_t^\alpha \in R^{m \times r}$.

Доказательство. Матрица

$$P_t^{-1} = \varepsilon U_t + M_t = \varepsilon \begin{pmatrix} 0_{l \times l} & 0_{l \times r} \\ 0_{r \times l} & \lambda^t I_r \end{pmatrix} + M_t$$

может быть получена рекуррентно

$$P_t^{-1} = \lambda P_{t-1}^{-1} + C_t^T C_t, \quad P_0^{-1} = \text{block diag}(\bar{P}_\beta^{-1}, \varepsilon I_r), \quad t = 1, 2, \dots, N,$$

где $C_t = (C_t^\beta, C_t^\alpha)$.

Воспользуемся матричным тождеством (2.7) для того, чтобы определить P_t . Полагая в (2.7) $B = P_{t-1}$, $D = \lambda I_m$, $C = C_t^T$, получим

$$P_t = (\lambda P_{t-1}^{-1} + C_t^T C_t)^{-1} = (P_{t-1} - P_{t-1} C_t^T (\lambda I_m + C_t P_{t-1} C_t^T)^{-1} C_t P_{t-1}) / \lambda,$$

$$= P_{t-1} / \lambda - 1 / \lambda^2 P_{t-1} C_t^T (I_m + 1 / \lambda C_t P_{t-1} C_t^T)^{-1} C_t P_{t-1}, \quad (3.83)$$

$$P_0 = \text{block diag}(\bar{P}_\beta, I_r / \varepsilon), \quad t = 1, 2, \dots, N.$$

Из леммы 3.1 следует, что $P_t = \tilde{S}_t + \tilde{V}_t L_t \tilde{V}_t^T$, где матрицы $\tilde{S}_t, \tilde{V}_t, L_t$ определены соотношениями (3.11) – (3.14). Используя лемму 2.1, находим из (3.14)

$$L_t = 1 / \varepsilon \lambda^{-t} \bar{P}_\alpha (I_r - W_t W_t^+) + W_t^+ + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Так как

$$P_t = (\varepsilon U_t + M_t)^{-1} = Q_t + \tilde{S}_t = \tilde{V}_t L_t \tilde{V}_t^T + \tilde{S}_t = \\ = 1/\varepsilon \lambda^t \tilde{V}_t \bar{P}_\alpha (I_r - W_t W_t^+) \tilde{V}_t^T + \tilde{V}_t W_t^+ \tilde{V}_t^T + \tilde{S}_t + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.84)$$

то (3.81) следует из леммы 3.3.

Рассмотрим вспомогательную модель наблюдений (3.16) и задачу оптимизации, которая связана с ней

$$(\alpha^*, \beta^*) = \arg \min J_t(\alpha, \beta), \quad \alpha \in R^r, \quad \beta \in R^l, \quad (3.85)$$

где

$$J_t(x) = \sum_{k=1}^t \lambda^{t-k} (y_k - C_k^\beta \beta - C_k^\alpha \alpha)^T (y_k - C_k^\beta \beta - C_k^\alpha \alpha) + \lambda^t \Gamma(\beta), \\ t = 1, 2, \dots, N, \quad (3.86) \\ y_t \in R^m, \quad C_t^\beta \in R^{m \times l}, \quad C_t^\alpha \in R^{m \times r}, \quad \xi_t \in R^m.$$

Лемма 3.6. Решение задачи (3.85), (3.86) может быть представлено в следующей рекуррентной форме

$$\beta_t = \beta_{t-1} + K_t^\beta (y_t - C_t^\beta \beta_{t-1} - C_t^\alpha \alpha_{t-1}), \quad \beta_0 = \bar{\beta}, \quad (3.87)$$

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + K_t^\alpha (y_t - C_t^\beta \beta_{t-1} - C_t^\alpha \alpha_{t-1}), \quad \alpha_0 = 0_{r \times 1}, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (3.88)$$

где

$$K_t^\beta = (S_t + V_t W_t^+ V_t^T) (C_t^\beta)^T + V_t W_t^+ (C_t^\alpha)^T, \quad (3.89)$$

$$K_t^\alpha = W_t^+ V_t^T (C_t^\beta)^T + W_t^+ (C_t^\alpha)^T. \quad (3.90)$$

Доказательство. Предположим, что $x = (\alpha^T, \beta^T)^T$ и перейдем к более компактной форме представления критерия

$$J_t(x) = (Y_t - \tilde{C}_t x)^T (Y_t - \tilde{C}_t x) + \lambda^t (x - \bar{x})^T M (x - \bar{x}), \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (3.91)$$

где $\bar{x} = (\bar{\beta}^T, 0_{1 \times r})^T$, матрица M определена в лемме 3.3,

$$\tilde{C}_t = (\lambda^{(t-1)/2} C_1^T, \lambda^{(t-2)/2} C_2^T, \dots, C_t^T)^T \in R^{mt \times (l+r)}, \\ Y_t = (\lambda^{(t-1)/2} y_1^T, \lambda^{(t-2)/2} y_2^T, \dots, y_t^T)^T \in R^{mt \times 1}.$$

Используя замену $z = x - \bar{x}$, получаем

$$J_t(z + \bar{x}) = \|\tilde{Y}_t - \tilde{C}_t z\|^2 + \lambda^t z^T M z =$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} \tilde{Y}_t \\ 0_{(l+r) \times 1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{C}_t \\ \lambda^{t/2} M^{1/2} \end{pmatrix} z \right\|^2,$$

где $\tilde{Y}_t = Y_t - \tilde{C}_t \bar{x}$. Стационарные точки этой задачи определяются из системы нормальных уравнений

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_t \\ \lambda^{t/2} M^{1/2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{C}_t \\ \lambda^{t/2} M^{1/2} \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} \tilde{C}_t \\ \lambda^{t/2} M^{1/2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{Y}_t \\ 0_{(l+r) \times 1} \end{pmatrix},$$

или в эквивалентной форме:

$$(\tilde{C}_t^T \tilde{C}_t + \lambda^t M) z = \tilde{C}_t^T \tilde{Y}_t. \quad (3.92)$$

Будем рассматривать только ее решение с минимальной нормой, которое определяется выражением

$$z^* = (\tilde{C}_t^T \tilde{C}_t + \lambda^t M)^+ \tilde{C}_t^T \tilde{Y}_t = M_t^+ \tilde{C}_t^T \tilde{Y}_t. \quad (3.93)$$

Покажем, что оно может быть найдено рекуррентно. Обозначим $z_t = z^*$. Использование леммы 3.3 дает

$$\begin{aligned} z_t &= (\tilde{C}_t^T \tilde{C}_t + \lambda^t M)^+ \tilde{C}_t^T (\tilde{Y}_{t-1}^T, \tilde{y}_{t-1}^T)^T = \\ &= [(I_{l+r} - K_t C_t) M_{t-1}^+ \tilde{C}_{t-1}^T, K_t] (\tilde{Y}_{t-1}^T, \tilde{y}_{t-1}^T)^T = \\ &= (I_{l+r} - K_t C_t) z_{t-1} + K_t \tilde{y}_t, \quad z_0 = 0, \quad t = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

где $K_t = M_t^+ C_t^T = (\tilde{C}_t^T \tilde{C}_t + \lambda^t M)^+ C_t^T$.

Возвращаясь к переменной $x_t = z_t + \bar{x}$, получим

$$x_t = x_{t-1} + K_t (y_t - C_t x_{t-1}), \quad x_0 = (\bar{\beta}^T, 0_{1 \times r})^T, \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (3.94)$$

Выражения (3.89) и (3.90) следуют из леммы 3.5.

Теперь, мы можем сформулировать алгоритм для решения нелинейной задачи минимизации с критерием качества (3.5).

Теорема 3.3. Пусть неизвестные параметры в (3.1) удовлетворяют условиям В1, В2. Тогда решение задачи минимизации критерия (3.5) методом ГН совпадает с ДАО.

Доказательство. Это утверждение следует из леммы 3.6.

Сравнивая две постановки задачи оценки параметров, которые были приведены в (3.1) отметим следующее. При решении задачи минимизации с критерием качества (3.5), не используется какая-либо статистическая информация о природе неизвестных начальных условий. Представляется, что этот подход более обоснован по сравнению с диффузной инициализацией, когда нам приходится иметь дело с бесконечной ковариационной матрицей начальных условий. Тем не менее, из теоремы 3.4 следует, что эти два подхода приводят к одним и тем же соотношениям для оценки параметров.

3.4 Сходимость диффузных алгоритмов обучения

В этом разделе изучается поведение ДАО при увеличении размера обучающей выборки. Специфика задачи обусловлена сепарабельным характером модели наблюдения и тем, что нелинейно входящие параметры принадлежат некоторому компактному множеству, а линейно входящие должны рассматриваться, как произвольные числа.

Будем предполагать, что наблюдения генерируются моделью

$$y_t = \Phi(z_t, \beta^*)\alpha^* + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (3.95)$$

для некоторых последовательностей $\xi_t \in R^m$, $z_t \in R^n$, где $\beta^* \in R^l$, $\alpha^* \in R^r$ – неизвестные параметры. Предполагается, что для оценки параметров в (3.95) используется ДАО, полученный в разделе 3.2 и определяемый системой уравнений

$$x_t = x_{t-1} + K_t(y_t - h_t(x_{t-1})), \quad x_0 = (\bar{\beta}^T, 0_{1 \times r})^T, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (3.96)$$

где

$$x_t = (\beta_t^T, \alpha_t^T)^T, \quad h_t(x_{t-1}) = \Phi(z_t, \beta_{t-1})\alpha_{t-1}$$

или в эквивалентной форме

$$\beta_t = \beta_{t-1} + K_t^\beta(y_t - h_t(x_{t-1})), \quad \beta_0 = \bar{\beta}, \quad (3.97)$$

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + K_t^\alpha(y_t - h_t(x_{t-1})), \quad \alpha_0 = 0_{r \times 1}, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (3.98)$$

где $K_t = ((K_t^\beta)^T, (K_t^\alpha)^T)^T$ определяется выражениями (3.36) – (3.41) или (3.59) – (3.64).

Если $\xi_t = 0$, то система (3.96) имеет решение $x_t = x^* = ((\beta^*)^T, (\alpha^*)^T)^T$. Векторная функция $\eta_t = K_t \xi_t$ может быть интерпретироваться как возму-

шение действующее на нее. Мы хотим найти условия при которых величина $\|x_t - x^*\|$ становится малой с увеличением t .

3.3.1 Конечное обучающее множество

Вместе с системой (3.96) рассмотрим систему

$$z_t = z_{t-1} + K_t(h_t(x^*) - h_t(z_{t-1})), \quad z_0 = (\bar{\beta}^T, 0_{1 \times r})^T, \quad t = 1, 2, \dots \quad (3.99)$$

Определение 1. Решение $z_t = x^*$ системы (3.99) конечно устойчиво под действием возмущения ξ_t , если для любого $\varepsilon > 0$, $d > 0$ существуют такие $\delta_1(A_d)$, $\delta_2(A_d)$, $\delta_3(A_d) > 0$, что условия $\|\beta_0 - \beta^*\| < \delta_1(A_d)$, $\alpha_0 = 0$, $\|\xi_t\| < \delta_2(A_d)$, $\|S_0\| < \delta_3(A_d)$ влекут $\|x_t - x^*\| < \varepsilon$ для всех $\alpha^* \in A_d = \{\alpha : \|\alpha\| \leq d\} \subset \mathbb{R}^r$, $t \geq tr = \min\{t : W_t > 0, t \in T\}$, где $t \in T = \{1, 2, \dots, N\}$ – ограниченное множество.

Отметим, что это определение формализует идею быстрых и медленных движений присущих ДАО.

Нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений для того, чтобы получить основной результат этого раздела – теорему 3.5.

Лемма 3.7. Решение системы уравнений

$$x_t = A_t x_{t-1} + f_t, \quad x_0 = \bar{x}, \quad t = 1, 2, \dots \quad (3.100)$$

определяется выражениями

$$x_t = H_{t,0} x_0 + \sum_{s=1}^t H_{t,s} f_s, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (3.101)$$

где $x_t, f_t \in \mathbb{R}^n$, $A_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$H_{t,s} = \begin{cases} A_t A_{t-1} \dots A_{s+1}, & t = s+1, s+2, \dots \\ I_n, & t = s \end{cases}, \quad (3.102)$$

или в другой форме

$$H_{t,s} = A_t H_{t-1,s}, \quad t = s+1, s+2, \dots, \quad H_{s,s} = I_n. \quad (3.103)$$

Доказательство. Итерируя (3.100) и (3.103) дает, соответственно,

$$\begin{aligned}
x_1 &= A_1 x_0 + f_1, \quad x_2 = A_2 A_1 x_0 + A_2 f_1 + f_2, \quad \dots, \\
x_t &= A_t A_{t-1} \dots A_1 x_0 + A_t A_{t-1} \dots A_2 f_1 + \dots + f_t, \\
H_{s+1,s} &= A_{s+1}, \quad H_{s+2,s} = A_{s+2} A_{s+1}, \quad \dots, \quad H_{t,s} = A_t A_{t-1} \dots A_{s+1},
\end{aligned}$$

что влечет (3.101) и (3.102).

Лемма 3.8. Решение системы уравнений

$$Z_{t-1,s} = B_t Z_{t,s} + F_{t,s}, \quad Z_{s,s} = I_n, \quad t = s-1, s-2, \dots \quad (3.104)$$

определяется выражениями

$$Z_{t,s} = Y_{t,s} + \sum_{j=t}^{s-1} Y_{t,j} F_{j+1,s}, \quad t = s-1, s-2, \dots, \quad (3.105)$$

где $Z_{t,s}, F_{t,s}, A_t \in R^{n \times n}$,

$$Y_{t,s} = \begin{cases} B_{t+1} B_{t+1} \dots B_s, & t = s-1, \dots, \\ I_n, & t = s \end{cases}, \quad (3.106)$$

или в другой форме

$$Y_{t-1,s} = B_t Y_{t,s}, \quad t = s-1, s-1, \dots, \quad Y_{s,s} = I_n. \quad (3.107)$$

Доказательство. Итерируя (3.104) и (3.107) дает, соответственно,

$$\begin{aligned}
Z_{s-1,s} &= B_s + F_{s,s}, \quad Z_{s-2,s} = B_{s-1} B_s + B_{s-1} F_{s,s} + F_{s-1,s}, \quad \dots, \\
Z_{t,s} &= B_{t+1} B_{t+2} \dots B_s + B_{t+1} B_{t+2} \dots B_{s-1} F_{s,s} + B_{t+1} B_{t+2} \dots B_{s-2} F_{s-1,s} + \dots + F_{t+1,s}, \\
Y_{s-1,s} &= B_s, \quad Y_{s-2,s} = B_{s-1} B_s, \dots, \quad Y_{t,s} = B_{t+1} B_{t+1} \dots B_s. \\
Z_{t,s} &= Y_{t,s} + Y_{t,s-1} F_{s,s} + Y_{t,s-2} F_{s-1,s} + \dots + F_{t+1,s} = Y_{t,s} + \sum_{j=t}^{s-1} Y_{t,j} F_{j+1,s},
\end{aligned}$$

что влечет (3.105) и (3.106).

Рассмотрим сначала сходимость ДАО из теоремы 3.3.

Представим выражения ДАО в следующей более компактной и удобной для дальнейшего использования форме

$$K_t = (\tilde{S}_t + \tilde{V}_t \tilde{W}_t^+ \tilde{V}_t^T) C_t^T R_t^{-1} = \tilde{S}_t C_t^T R_t^{-1} + K_t^d, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (3.108)$$

где

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-1} - \tilde{S}_{t-1} C_t^T N_t^{-1} C_t \tilde{S}_{t-1}, \quad (3.109)$$

$$\tilde{V}_t = (I_{l+r} - \tilde{S}_{t-1} C_t^T N_t^{-1} C_t) \tilde{V}_{t-1} = A_t \tilde{V}_{t-1}, \quad (3.110)$$

$$\tilde{W}_t = \tilde{W}_{t-1} + \tilde{V}_{t-1}^T C_t^T N_t^{-1} C_t \tilde{V}_{t-1}, \quad (3.111)$$

$$N_t = R_t + C_t \tilde{S}_{t-1} C_t^T. \quad (3.112)$$

$$\tilde{S}_t = \text{block diag}(S_t, 0_{r \times r}), \quad \tilde{V}_t = (V_t^T, I_r)^T, \quad \tilde{W}_t = W_t, \quad C_t = (C_t^\beta, C_t^\alpha). \quad (3.113)$$

Лемма 3.9. Пусть $S_0 > 0$ и существует целое tr такое, что $tr = \min\{t : W_t > 0, t \in T\}$ для ограниченного множества $T = \{1, 2, \dots, N\}$. Тогда при $t \geq tr$, $t \in T$ справедливы следующие представления

$$H_{t,s} = \Phi_{t,s} - \tilde{V}_t W_t^{-1} \sum_{i=s}^{t-1} \tilde{V}_i^T C_{i+1}^T N_{i+1}^{-1} C_{i+1} \Phi_{i,s}, \quad (3.114)$$

$$H_{t,s} K_s^d = \tilde{V}_t W_t^{-1} \tilde{V}_s^T C_s^T R_s^{-1}, \quad t = s+1, s+2, \dots, \quad (3.115)$$

где $H_{t,s}$, $\Phi_{t,s}$ – решения систем уравнений

$$H_{t,s} = (I_{l+r} - K_t C_t) H_{t-1,s} = A_t H_{t-1,s}, \quad H_{s,s} = I_{l+r}, \quad (3.116)$$

$$\Phi_{t,s} = (I_{l+r} - \tilde{S}_t C_t^T R_t^{-1} C_t) \Phi_{t-1,s} = \tilde{A}_t \Phi_{t-1,s}, \quad \Phi_{s,s} = I_{l+r}, \quad (3.117)$$

K_t , $\tilde{V}_t$, W_t , $\tilde{S}_t$, N_t – определяются выражениями (3.107) – (3.112).

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$G_{t-1,s} = A_t^T G_{t,s}, \quad G_{s,s} = I_{l+r}, \quad t = s-1, s-2, \dots, \quad (3.118)$$

$$Z_{t-1,s} = \tilde{A}_t^T Z_{t,s} - C_t^T N_t^{-1} C_t \tilde{V}_{t-1} W_s^{-1} \tilde{V}_s^T, \quad Z_{s,s} = I_{l+r}, \quad t = s-1, s-2, \dots, \quad s \geq tr. \quad (3.119)$$

Покажем сначала, что

$$G_{t,s} = Z_{t,s}, \quad t = s-1, s-2, \dots, \quad s \geq tr. \quad (3.120)$$

Полагая в (3.103)

$$B_t = \tilde{A}_t^T, \quad F_{t,s} = -C_t^T N_t^{-1} C_t \tilde{V}_{t-1} W_s^{-1} \tilde{V}_s^T,$$

Получим

$$Z_{t,s} = Y_{t,s} - \sum_{j=t}^{s-1} Y_{t,j} C_{j+1}^T N_{j+1}^{-1} C_{j+1} \tilde{V}_j W_s^{-1} \tilde{V}_s^T, \quad t = s-1, s-2, \dots,$$

где

$$Y_{t-1,s} = \tilde{A}_t^T Y_{t-1,s}, Y_{s,s} = I_{l+r}, t = s-1, s-2, \dots$$

Использование лемм 3.7, 3.8 дает

$$Y_{t,s} = \tilde{A}_{t+1}^T \tilde{A}_{t+2}^T \dots \tilde{A}_s^T, \Phi_{t,s} = \tilde{A}_t \tilde{A}_{t+1} \dots \tilde{A}_{s+1}, \Phi_{s,t}^T = \tilde{A}_{t+1}^T \tilde{A}_{t+2}^T \dots \tilde{A}_s^T.$$

Отсюда следует, что $Y_{t,s} = \Phi_{s,t}^T$. Поэтому

$$Z_{t,s} = \Phi_{s,t}^T - \sum_{j=t}^{s-1} \Phi_{j,t}^T C_{j+1}^T N_{j+1}^{-1} C_{j+1} \tilde{V}_j W_s^{-1} \tilde{V}_s^T, t = s-1, s-2, \dots \quad (3.121)$$

Имеем

$$\begin{aligned} G_{t-1,s} &= A_t^T G_{t,s} = (I_{l+r} - K_t C_t)^T G_{t,s} = \\ &= ((I_{l+r} - \tilde{S}_t C_t^T R_t^{-1} C_t) - \tilde{V}_s W_t^+ \tilde{V}_s^T C_t^T R_t^{-1} C_t)^T G_{t,s} = (\tilde{A}_t - K_t^d C_t)^T G_{t,s}. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Из сравнения правых частей (3.119) и (3.122) следует, что (3.120) будет выполняться, если

$$(K_t^d)^T Z_{t,s} = N_t^{-1} C_t \tilde{V}_{t-1} W_s^{-1} \tilde{V}_s^T. \quad (3.123)$$

Использование выражений

$$\tilde{V}_t = \Phi_{t,0} \tilde{V}_0, \Phi_{s,t} \Phi_{t,0} = \Phi_{s,0}$$

Дает

$$\begin{aligned} (K_t^d)^T Z_{t,s} &= R_t^{-1} C_t \tilde{V}_t W_t^+ \tilde{V}_t^T (\Phi_{s,t}^T - \sum_{j=t}^{s-1} \Phi_{j,t}^T C_{j+1}^T N_{j+1}^{-1} C_{j+1} \tilde{V}_j W_s^{-1} \tilde{V}_s^T) = \\ &= R_t^{-1} C_t \tilde{V}_t W_t^+ (I_{l+r} - \sum_{j=t}^{s-1} \tilde{V}_j^T C_{j+1}^T N_{j+1}^{-1} C_{j+1} \tilde{V}_j W_s^{-1}) \tilde{V}_s^T. \end{aligned}$$

Итерируя (3.111), находим

$$W_t = \sum_{j=0}^{t-1} \tilde{V}_j^T C_{j+1}^T N_{j+1}^{-1} C_{j+1} \tilde{V}_j.$$

Поскольку

$$\sum_{j=t}^{s-1} \tilde{V}_j^T C_{j+1}^T N_{j+1}^{-1} C_{j+1} \tilde{V}_j = W_s - W_t,$$

то выражение в левой части (3.123) может быть преобразовано к виду

$$(K_t^d)^T Z_{t,s} = R_t^{-1} C_t \tilde{V}_t W_t^+ (W_s - \sum_{j=t}^{s-1} \tilde{V}_j^T C_{j+1}^T N_{j+1}^{-1} C_{j+1} \tilde{V}_j) W_s^{-1} \tilde{V}_s^T =$$

$$= R_t^{-1} C_t \tilde{V}_t W_t^+ W_t W_s^{-1} \tilde{V}_s^T. \quad (3.124)$$

Покажем, что

$$R_t^{-1} C_t \tilde{V}_t = N_t^{-1} C_t \tilde{V}_{t-1}. \quad (3.125)$$

Отметим вначале, что $\tilde{A}_t = A_{lt}$. Действительно, имеем

$$\tilde{A}_t = I_{l+r} - \tilde{S}_t C_t^T R_t^{-1} C_t = \begin{pmatrix} I_l - S_t (C_t^\beta)^T R_t^{-1} C_t^\beta & 0_{l \times r} \\ 0_{r \times l} & I_r \end{pmatrix}, \quad (3.126)$$

где

$$S_t = S_{t-1} - S_{t-1} (C_t^\beta)^T (R_t + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\beta S_{t-1}, \quad S_0 = \bar{P}_\beta.$$

Так как

$$S_t^{-1} = S_{t-1}^{-1} + (C_t^\beta)^T R_t^{-1} C_t^\beta,$$

то использование тождества

$$P H^T (H P H^T + R)^{-1} = (P^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} H R^{-1}$$

для $P = S_{t-1}$, $H = C_t^\beta$, $R = R_t$ дает

$$S_{t-1} (C_t^\beta)^T (R_t + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} = S_t (C_t^\beta)^T R_t^{-1}.$$

Принимая во внимание (3.126), получаем $\tilde{A}_t = A_{lt}$.

Покажем, что

$$\tilde{A}_t = I_l - S_t C_t^\beta R_t^{-1} (C_t^\beta)^T = (I_l + S_{t-1} C_t^\beta R_t^{-1} (C_t^\beta)^T)^{-1}. \quad (3.127)$$

Преобразуем правую часть этого выражения, используя тождество (2.7).

Полагая в (2.7) $B = S_{t-1}$, $C = C_t^\beta$, $D = R_t$, получим

$$\begin{aligned} (S_{t-1}^{-1} + C_t^\beta R_t^{-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} S_{t-1}^{-1} &= (S_{t-1} - S_{t-1} (C_t^\beta)^T (R_t + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\beta S_{t-1}) S_{t-1}^{-1} = \\ &= I_l - S_{t-1} (C_t^\beta)^T N_t^{-1} C_t^\beta = I_l - S_t (C_t^\beta)^T R_t^{-1}. \end{aligned}$$

Использование (3.109) и (3.127) дает

$$\tilde{V}_{t-1} = A_{lt}^{-1} \tilde{V}_t = (I_{l+r} + \tilde{S}_{t-1} C_t^T R_t^{-1} C_t) \tilde{V}_t. \quad (3.128)$$

При выполнении (3.125) должно быть

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_{t-1} - \tilde{S}_{t-1} C_t^T N_t^{-1} C_t \tilde{V}_{t-1} = \tilde{V}_{t-1} - \tilde{S}_{t-1} C_t^T R_t^{-1} C_t \tilde{V}_t,$$

что совпадает с (3.128). Таким образом, нами показано, что (3.125) выполняется.

Подставляя (3.125) в (3.124), получим

$$(K_t^d)^T Z_{t,s} = N_t^{-1} C_t \tilde{V}_{t-1} W_t^+ W_t W_s^{-1} \tilde{V}_s^T. \quad (3.129)$$

Пусть $\tilde{C}_t = (\tilde{V}_0^T C_1^T N_1^{-1/2}, \tilde{V}_1^T C_2^T N_2^{-1/2}, \dots, \tilde{V}_{t-1}^T C_t^T N_t^{-1/2})$. Предположим, что ранг этой матрицы равен $k(t)$ и $l_t(1), l_t(2), \dots, l_t(k(t))$ – ее линейно-независимые колонки. Использование скелетного разложения дает $\tilde{C}_t = L_t \Gamma_t$, где L_t, Γ_t – $r \times k(t), k(t) \times mt$ – матрицы ранга $k(t)$, $\Gamma_t(i), i = 1, 2, \dots, t - k(t) \times (l + r)$ матрицы.

Имеем

$$W_t = \tilde{C}_t \tilde{C}_t^T = L_t \Gamma_t \Gamma_t^T L_t^T, W_t^+ = (L_t \Gamma_t \Gamma_t^T L_t^T)^+ = (L_t^T)^+ (\Gamma_t \Gamma_t^T)^{-1} (L_t)^+, \\ N_t^{-1/2} \tilde{V}_{t-1}^T C_t^T = L_t \tilde{\Gamma}_t,$$

где $L_t^+ = (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T$, $\tilde{\Gamma}_t$ – некоторая матрица. Подставляя эти выражения в (3.129), получаем выражение

$$(K_t^d)^T Z_{t,s} = N_t^{-1} C_t \tilde{V}_{t-1} W_t^+ W_t W_s^{-1} \tilde{V}_s^T = R_t^{-1} C_t \tilde{V}_t W_s^{-1} \tilde{V}_s^T, \quad (3.130)$$

которое влечет (3.118). И наконец, использование лемм 3.7, 3.8 для $B_t = A_t^T$ дает

$$H_{t,s} = A_t A_{t-1} \dots A_{s+1}, G_{t,s} = B_{t+1} B_{t+1} \dots B_s, G_{s,t}^T = B_t^T B_{t-1}^T \dots B_{s+1}^T.$$

Поэтому $H_{t,s} = G_{s,t}^T = Z_{s,t}$ и мы получаем (3.114). Выражение (3.113) следует из (3.130).

Установим аналогичный результат для ДАО с забывающим множителем, описываемого уравнениями (3.35) – (3.41). Покажем, что в этом слу-

чае мы можем использовать лемму 3.9. Действительно, рассмотрим соотношения описывающие метод ГН с линеаризацией в окрестности последней оценки с критерием (3.4) и мягкой инициализацией

$$x_t = x_{t-1} + K_t(y_t - h_t(x_{t-1})), \quad x_0 = (\bar{\beta}^T, 0_{1 \times r})^T, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (3.131)$$

где $h_t(x_{t-1}) = \Phi(z_t, \beta_{t-1})\alpha_{t-1}$,

$$K_t = M_t^{-1}C_t^T = P_t C_t^T, \quad (3.132)$$

$$M_t = \lambda M_{t-1} + C_t^T C_t, \quad M_0 = \text{block diag}(\bar{P}_\beta^{-1}, \bar{P}_\beta^{-1} / \mu),$$

$$P_t = (P_{t-1} - P_{t-1}C_t^T(\lambda I_r + C_t P_{t-1}C_t^T)^{-1}C_t P_{t-1}) / \lambda,$$

$$P_0 = \text{block diag}(\bar{P}_\beta, \bar{P}_\alpha \mu), \quad (3.133)$$

$$C_t^\beta = C_t^\beta(x_{t-1}) = \partial[\Phi(z_t, \beta_{t-1})\alpha_{t-1}] / \partial \beta_{t-1}, \quad C_t^\alpha = C_t^\alpha(x_{t-1}) = \Phi(z_t, \beta_{t-1}).$$

Преобразовывая K_t с помощью замены $L_t = \lambda^{-t} M_t$, получим

$$K_t = \lambda^{-t} L_t^{-1} C_t^T, \quad (3.134)$$

где матрицы L_t and L_t^{-1} могут быть найдены рекуррентно

$$L_t = L_{t-1} + \lambda^{-t} C_t^T C_t, \quad L_0 = \text{block diag}(\bar{P}_\beta^{-1}, \bar{P}_\beta^{-1} / \mu) / \lambda$$

$$L_t^{-1} = L_{t-1}^{-1} - L_{t-1}^{-1} C_t^T (\lambda^t I_r + C_t L_{t-1}^{-1} C_t^T)^{-1} C_t L_{t-1}^{-1},$$

$$L_0^{-1} = \text{block diag}(\bar{P}_\beta, \bar{P}_\alpha \mu) \lambda. \quad (3.135)$$

С учетом (3.134), (3.135) и теоремы 3.3 получаем для $K_t = ((K_t^\beta)^T, (K_t^\alpha)^T)^T$, где

$$K_t^\beta = (S_t + V_t W_t^+ V_t^T)(C_t^\beta)^T \lambda^{-t} + V_t W_t^+ (C_t^\alpha)^T \lambda^{-t}, \quad (3.136)$$

$$K_t^\alpha = W_t^+ V_t^T (C_t^\beta)^T \lambda^{-t} + W_t^+ (C_t^\alpha)^T \lambda^{-t}, \quad (3.137)$$

$$S_t = S_{t-1} - S_{t-1} (C_t^\beta)^T (\lambda^t I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\beta S_{t-1}, \quad S_0 = \bar{P}_\beta, \quad (3.138)$$

$$V_t = (I_l - S_{t-1} (C_t^\beta)^T (\lambda^t I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\beta) V_{t-1} - S_{t-1} (C_t^\beta)^T (\lambda^t I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\alpha, \quad V_0 = 0_{l \times r}, \quad (3.139)$$

$$W_t = W_{t-1} + (C_t^\beta V_{t-1} + C_t^\alpha)^T (\lambda^t I_m + C_t^\beta S_{t-1} (C_t^\beta)^T)^{-1} (C_t^\beta V_{t-1} + C_t^\alpha), \quad W_0 = 0_{r \times r}. \quad (3.140)$$

Представим эти выражения для ДАО в следующей более компактной и удобной и удобной для использования форме

$$K_t = (\tilde{S}_t + \tilde{V}_t \tilde{W}_t^+ \tilde{V}_t^T) C_t^T \lambda^{-t} = \tilde{S}_t C_t^T \lambda^{-t} + K_t^d, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (3.141)$$

где

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-1} - \tilde{S}_{t-1} C_t^T N_t^{-1} C_t \tilde{S}_{t-1}, \quad (3.142)$$

$$\tilde{V}_t = (I_{l+r} - \tilde{S}_{t-1} C_t^T N_t^{-1} C_t) \tilde{V}_{t-1} = A_t \tilde{V}_{t-1}, \quad (3.143)$$

$$\tilde{W}_t = \tilde{W}_{t-1} + \tilde{V}_{t-1}^T C_t^T N_t^{-1} C_t \tilde{V}_{t-1}, \quad (3.144)$$

$$N_t = \lambda^t I_m + C_t \tilde{S}_{t-1} C_t^T. \quad (3.145)$$

Пусть матричная функция $H_{t,s}$ определяется из системы уравнений

$$H_{t,s} = (I_{l+r} - K_t C_t) H_{t-1,s} = A_t H_{t-1,s}, \quad t = s+1, s+2, \dots, \quad H_{s,s} = I_{l+r}, \quad (3.146)$$

Где

$$K_t = M_t^{-1} C_t^T = (\tilde{S}_t + \tilde{V}_t \tilde{W}_t^+ \tilde{V}_t^T) C_t^T \lambda^{-t} = \tilde{S}_t C_t^T \lambda^{-t} + K_t^d. \quad (3.147)$$

Из леммы 3.9 следует, что

$$H_{t,s} = \Phi_{t,s} - \tilde{V}_t L_t^{-1} \sum_{i=1}^{t-1} \tilde{V}_i^T C_{i+1}^T N_{i+1}^{-1} C_{i+1} \Phi_{i,s}, \quad (3.148)$$

$$H_{t,s} K_s^d = \tilde{V}_t L_t^{-1} \tilde{V}_s^T C_s^T \lambda^{-s}, \quad (3.149)$$

где $\Phi_{t,s}$ является решением системы уравнений

$$\Phi_{t,s} = (I_{l+r} - \lambda^{-t} \tilde{S}_t C_t^T C_t) \Phi_{t-1,s} = \tilde{A}_t \Phi_{t-1,s}, \quad \Phi_{s,s} = I_{l+r}. \quad (3.150)$$

Обратимся теперь собственно к анализу сходимости ДАО.

Теорема 3.5. Пусть выполняются следующие условия:

1. $P(\|\xi_t\| < \infty) = 1$ при $t \in T$, где $T = \{1, 2, \dots, N\}$ – ограниченное множество.

2. $\Phi(z_t, \beta) \in C_{(z, \beta)}^{(0,2)}(Z \times A_\beta)$, $z_t \in Z \subset R^n$ при $t \in T$,
 $\beta \in A_\beta = \{\beta : \|\beta - \beta^*\| \leq \delta_\beta\}$, $\delta_\beta > 0$ – некоторое число, Z – произвольное компактное множество.

3. Существует $tr = \min\{t : W_t > 0, t \in T\}$ и ранг матрицы W_t постоянен для каждого фиксированного $t = 1, 2, \dots, tr-1$.

Тогда, решение $z_t = x^*$ системы уравнений (3.99) конечно устойчиво под действием возмущения ξ_t .

Более того, для каждого $tf \geq tr$, $tf \in T$ найдутся $\rho_0 > 0$, $\chi > 0$, $\varsigma > 0$ такие, что при $t \in Tf = \{tf, tf+1, \dots, N\}$ и $\rho < \rho_0$ будет справедлива равномерная по $\alpha^* \in A_d$ оценка

$$\|e_t\| = \|x_t - x^*\| \leq (\chi \|e_0^\beta\| + \varsigma \max_{t \in \{1, 2, \dots, tr\}} \|\xi_t\|)(1 + \nu(\rho))^{t-1}, \quad (3.151)$$

где $\rho = \max\{\|e_0^\beta\|, \|S_0\|, \max_{t \in \{1, 2, \dots, tr\}} \|\xi_t\|\}$, $\nu(\rho) = O(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала ДАО, учитывающий матрицу шумов R_t . Преобразуем $h_t(x^*)$, используя формулу [74]

$$f(x + y) = f(x) + (\nabla f(x), y) + y^T \nabla^2 f(x + \theta y) y / 2,$$

где $\nabla f(x)$, $\nabla^2 f(x)$ – градиент и матрица Гесса $f(x)$, соответственно, $0 \leq \theta \leq 1$.

Пусть $f(x) = h_{it}(x)$, $x = x_{t-1}$, $y = x^* - x_{t-1} = -e_{t-1}$. Тогда

$$h_{it}(x^*) = h_{it}(x_{t-1}) - C_{it}(x_{t-1})e_{t-1} + \varphi_{it}(x_{t-1}, x^*), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.152)$$

где

$$C_t = C_t(x_{t-1}) = (C_{1t}^T, C_{2t}^T, \dots, C_{mt}^T)^T, \\ \varphi_{it} = \varphi_{it}(x_{t-1}, x^*) = e_{t-1}^T \nabla^2 h_{it}(x_{t-1} - \theta e_{t-1}) e_{t-1} / 2, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Использование (3.152) дает

$$e_t = (I_{l+r} - K_t C_t) e_{t-1} + K_t (\varphi_t + \xi_t), \quad e_0 = -x^*, \quad t \in T, \quad (3.153)$$

где $\varphi_t = (\varphi_{1t}, \varphi_{2t}, \dots, \varphi_{mt})^T$. Отсюда следует, что

$$e_t = H_{t,0} e_0 + \sum_{s=1}^t H_{t,s} K_s (\varphi_s + \xi_s), \quad (3.154)$$

где $H_{t,s}$ – матрица, определяемая системой

$$H_{t,s} = (I_{l+r} - K_t C_t) H_{t-1,s}, \quad t > s, \quad H_{t,t} = I_{l+r}. \quad (3.155)$$

Использование условия 2 теоремы и леммы 3.9 дает при $t \geq tr$, $t \in T$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} C_t = \lim_{\rho \rightarrow 0} C_t(x_{t-1}) = (\partial \Phi(z_t, \beta^*) / \partial \beta^* \alpha^*, \Phi(z_t, \beta^*)), \quad (3.156)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} S_t = 0, \quad (3.157)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} H_{t,s} = \lim_{\rho \rightarrow 0} [\Phi_{t,s} - \tilde{V}_t W_t^{-1} \sum_{i=s}^{t-1} \tilde{V}_i^T C_{i+1}^T N_{i+1}^{-1} C_{i+1} \Phi_{i,s}] =$$

$$= \begin{pmatrix} I_l & 0_{l \times r} \\ 0_{r \times l} & I_r - (W_t^*)^{-1} \sum_{j=s}^{t-1} \Phi^T(z_{j+1}, \beta^*) R_{j+1}^{-1} \Phi(z_{j+1}, \beta^*) \end{pmatrix}, \quad (3.158)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} H_{t,s} K_s^d = \lim_{\rho \rightarrow 0} \tilde{V}_t W_t^{-1} \tilde{V}_s^T C_s^T R_s^{-1} = \begin{pmatrix} 0_{1 \times m} \\ (W_t^*)^{-1} \Phi^T(z_s, \beta^*) R_s^{-1} \end{pmatrix}, \quad (3.159)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} H_{t,s} \tilde{S}_s C_s^T R_s^{-1} = 0, \quad (3.160)$$

где $W_t^* = \sum_{j=0}^{t-1} \Phi^T(z_{j+1}, \beta^*) R_{j+1}^{-1} \Phi(z_{j+1}, \beta^*)$.

Из леммы 3.9 следует, что при $t \geq tr$

$$H_{t,0} (0_{1 \times m}, (e_0^\alpha)^T)^T = H_{t,0} \tilde{V}_0 e_0^\alpha = 0$$

и таким образом

$$H_{t,0} e_0 = H_{t,0} ((e_0^\beta)^T, 0_{1 \times r})^T. \quad (3.161)$$

Поэтому, для любого $tf \geq tr$, $tf \in T$ найдутся положительные постоянные ρ_0 , η_1 , η_2 такие, что при $t \in Tf$, $\rho < \rho_0$ и всех $\alpha^* \in A_d$ будут справедливы следующие равномерные по $\alpha^* \in A_d$ оценки

$$\|H_{t,0} e_0\| \leq \eta_1 \|e_0^\beta\|, \|H_{t,s} K_s\| \leq \eta_2, \|H_{t,s} K_s \xi_s\| \leq \eta_2 \max_{s \in \{1, 2, \dots, tf\}} \|\xi_s\|. \quad (3.162)$$

Использование (3.154) и (3.162) дает

$$\|e_t\| \leq \eta_1 \|e_0^\beta\| + \eta_2 \sum_{s=1}^t \|\varphi_s\| + \eta_2 N \max_{t \in \{1, 2, \dots, tf\}} \|\xi_t\|, \quad t \in Tf. \quad (3.163)$$

Получим оценки для функций $\varphi_{it}, i = 1, 2, \dots, m, t \in \{1, 2, \dots, tf\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{it} &= ((e_{t-1}^\beta)^T, (e_{t-1}^\alpha)^T) \begin{pmatrix} H_{it}^1 & H_{it}^2 \\ (H_{it}^2)^T & 0_{r \times r} \end{pmatrix} ((e_{t-1}^\beta)^T, (e_{t-1}^\alpha)^T)^T / 2 = \\ &= (e_{t-1}^\beta)^T H_{it}^1 e_{t-1}^\beta / 2 + (e_{t-1}^\beta)^T (H_{it}^2)^T e_{t-1}^\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} H_{it}^1 &= \partial^2 \Phi_i(z_t, \beta_{t-1} - \theta e_{t-1}^\beta) / \partial \beta_{t-1}^2 (\alpha_{t-1} - \theta e_{t-1}^\alpha) = \\ &= \partial^2 \Phi_i(z_t, \beta^* - (1-\theta)e_{t-1}^\beta) / \partial \beta_{t-1}^2 (\alpha^* - (1-\theta)e_{t-1}^\alpha) \in R^{l \times l}, \\ H_{it}^2 &= \partial \Phi_i(z_t, \beta_{t-1} - \theta e_{t-1}^\beta) / \partial \beta_{t-1} = \partial \Phi_i(z_t, \beta^* - (1-\theta)e_{t-1}^\beta) / \partial \beta_{t-1} \in R^{l \times r}. \end{aligned}$$

Или, используя более компактную форму записи, получим

$$\varphi_{it} = \zeta_{it}(x_{t-1}, x^*)e_{t-1}^\beta + \psi_{it}(x_{t-1}, x^*)e_{t-1}^\alpha = (\zeta_{it}(x_{t-1}, x^*), \psi_{it}(x_{t-1}, x^*))e_{t-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где

$$\zeta_{it}(x_{t-1}, x^*) = (e_{t-1}^\beta)^T \partial^2 \Phi_i(z_t, \beta^* - (1-\theta)e_{t-1}^\beta) / \partial \beta_{t-1}^2 \alpha^* / 2, \quad (3.164)$$

$$\begin{aligned} \psi_{it}(x_{t-1}, x^*) = & (e_{t-1}^\beta)^T [\partial \Phi_i(z_t, \beta^* - (1-\theta)e_{t-1}^\beta) / \partial \beta_{t-1} - \\ & - \partial^2 \Phi_i(z_t, \beta^* - (1-\theta)e_{t-1}^\beta) / \partial \beta_{t-1}^2 (1-\theta) / 2]. \end{aligned} \quad (3.165)$$

Из условий 2, 3 теоремы следует существование при $t \in T$ пределов

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \partial^2 \Phi_i(z_t, \beta_{t-1} - \theta e_{t-1}^\beta) / \partial \beta_{t-1}^2 \alpha_{t-1} = \partial^2 \Phi_i(z_t, \beta) / \partial \beta^2 |_{\beta=\beta^*} \alpha^*, \quad (3.166)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \partial \Phi_i(z_t, \beta_{t-1} - \theta e_{t-1}^\beta) / \partial \beta_{t-1} = \partial \Phi_i(z_t, \beta^*) / \partial \beta^*, \quad (3.167)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} e_t^\beta = 0. \quad (3.168)$$

Поэтому для любого $\alpha^* \in A_d$ найдется такое $\rho_0 > 0$, что равномерно по $\alpha^* \in A_d$ и $t \in \{1, 2, \dots, tf\}$ будет выполняться неравенство

$$\|\varphi_t\| \leq \nu(\rho) \|e_{t-1}\|, \quad t \in T, \quad (3.169)$$

где $\nu(\rho) = O(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$. Таким образом

$$\|e_t\| \leq \eta_1 \|e_0^\beta\| + \eta_2 \nu(\rho) \sum_{s=1}^t \|e_{s-1}\| + \eta_2 N \max_{t \in \{1, 2, \dots, tf\}} \|\xi_t\|, \quad t \in Tf. \quad (3.170)$$

Воспользуемся леммой Беллмана для получения оценки $\|e_t\|$ [75]: если

$$z_t \leq z_0 + q \sum_{s=1}^{t-1} z_s,$$

где $z_t > 0$, $q > 0$, то

$$z_t \leq z_0 (1+q)^{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, N.$$

Полагая $z_t = \|e_t\|$, $z_0 = \eta_1 \|e_0^\beta\| + \eta_2 N \max_{t \in \{1, 2, \dots, tf\}} \|\xi_t\|$, $q = \eta_2 \nu(\rho)$, получим (3.151).

Доказательство для ДАО с забывающим множителем проводится по той же схеме. Так, в этом случае, вместо леммы 3.9 используются соотношения (3.148), (3.149) для доказательства существования пределов

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \rightarrow 0} H_{t,s} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} [\Phi_{t,s} - \tilde{V}_t L_t^{-1} \sum_{i=s}^{t-1} \tilde{V}_i^T C_{i+1}^T N_{i+1}^{-1} C_{i+1} \Phi_{i,s}] = \\
&= \begin{pmatrix} I_l & 0_{l \times r} \\ 0_{r \times l} & I_r - (W_t^*)^{-1} \sum_{j=s}^{t-1} \lambda^{-j-1} \Phi^T(z_{j+1}, \beta^*) \Phi(z_{j+1}, \beta^*) \end{pmatrix}, \\
\lim_{\rho \rightarrow 0} H_{t,s} K_s^d &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \tilde{V}_t L_t^{-1} \tilde{V}_s^T C_s^T \lambda^{-s} = \begin{pmatrix} 0_{l \times m} \\ (W_t^*)^{-1} \Phi^T(z_s, \beta^*) \lambda^{-s} \end{pmatrix}, \\
\lim_{\rho \rightarrow 0} H_{t,s} \tilde{S}_s C_s^T &= 0,
\end{aligned}$$

и оценок (3.162), где $W_t^* = \sum_{j=0}^{t-1} \lambda^{-j-1} \Phi^T(z_{j+1}, \beta^*) \Phi(z_{j+1}, \beta^*)$.

Рассмотрим двух этапный ДАО, описываемый выражениями (3.35), (3.68) – (3.70). Покажем, что утверждение теоремы 3.5 сохраняется в этом случае. Из (3.97), (3.98), (3.152) следует уравнения для ошибок оценивания

$$\begin{aligned}
e_t^\beta &= (I_l - K_t^\beta C_t^\beta) e_{t-1}^\beta + K_t^\beta (\varphi_t + \xi_t), \quad e_0^\beta = \bar{\beta} - \beta^*, \\
e_t^\alpha &= (I_l - K_t^\alpha C_t^\beta) e_{t-1}^\beta + K_t^\alpha (\varphi_t + \xi_t), \quad e_0^\alpha = -\alpha^*,
\end{aligned}$$

итерируя которые, получим

$$\begin{aligned}
e_t^\beta &= H_{t,0}^\beta e_0^\beta + \sum_{s=1}^t H_{t,s}^\beta K_s^\beta (\varphi_s + \xi_s), \\
e_t^\alpha &= H_{t,0}^\alpha e_0^\alpha + \sum_{s=1}^t H_{t,s}^\alpha K_s^\alpha (\varphi_s + \xi_s),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
H_{t,s}^\beta &= (I_l - K_t^\beta C_t^\beta) H_{t,s-1}^\beta \quad t > s, \quad H_{t,t}^\beta = I_l, \\
H_{t,s}^\alpha &= (I_r - K_t^\alpha C_t^\alpha) H_{t,s-1}^\alpha \quad t > s, \quad H_{t,t}^\alpha = I_r.
\end{aligned}$$

Использование соотношений

$$H_{t,s}^\beta = \lambda^{t-s} S_t S_s^{-1}, \quad H_{t,s}^\alpha K_t^\alpha = \lambda^{t-s} W_t^+ (C_t^\alpha)^T, \quad H_{t,0}^\alpha = l\bar{P} (I_r - W_t W_t^+)$$

и оценок (3.164) – (3.169) дает (3.170). Откуда следует (3.151).

3.3.2 Бесконечное обучающее множество

Получим условия сходимости ДАО при $t \rightarrow \infty$. Сходимость будет интерпретироваться как устойчивость решения $z_t = x^*$ системы (3.99).

Определение 2. Решение системы (3.99) $z_t = x^*$ асимптотически устойчиво, если найдется такое $\delta(A_d) > 0$, что условия $\|\beta_0 - \beta^*\| < \delta(A_d)$,

$\alpha_0 = 0$ влекут $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_t - x^*\| = 0$ для всех $\alpha \in A_d = \{\alpha : \|\alpha - \alpha^*\| \leq d\} \subset \mathbb{R}^r$ и любого заданного $d > 0$.

Определение 3. Решение системы (3.99) $z_t = x^*$ устойчиво под действием возмущения ξ_t если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta(A_d) > 0$, $\delta_2(A_d) > 0$, что выполнение условий $\|\beta_0 - \beta^*\| < \delta_1(A_d)$, $\alpha_0 = 0$, $\|\xi_t\| < \delta_2(A_d)$ влечет $\|x_t - x^*\| < \varepsilon$ при $t \geq tr$ для всех $\alpha \in A_d = \{\alpha : \|\alpha - \alpha^*\| \leq d\} \subset \mathbb{R}^r$ и любого заданного $d > 0$.

Теорема 3.6. Предположим, что:

1. Выполняются условия теоремы 3.5.
2. Существуют положительные постоянные k_1, k_2 такие, что

$$\|\Phi(z_t, \beta)\| \leq k_1, \quad \|\partial\Phi(z_t, \beta)/\partial\beta\| \leq k_2,$$

при $z_t \in Z \subset \mathbb{R}^n$, $\beta \in A_\beta$, $t \in T$, где $A_\beta = \{\beta : \|\beta - \beta^*\| \leq \delta_\beta\}$, $\delta_\beta > 0$ – некоторая постоянная, Z – произвольное компактное множество, $T = \{1, 2, \dots\}$.

3. Для некоторого s и всех j найдутся p_1, p_2 такие, что

$$0 < p_1 I_{r+l} \leq \sum_{i=j}^{j+s} C_i^T C_i \leq p_2 I_{r+l} < \infty \quad (3.171)$$

для $(\beta_t, \alpha_t) \in A_\beta \times A_\alpha$, где $A_\alpha = \{\alpha : \|\alpha - \alpha^*\| \leq \delta_\alpha\} \subset \mathbb{R}^r$

Тогда: 1. Решение системы (3.99) $z_t = x^*$ с матрицей K_t определяемой выражениями (3.36) – (3.41) асимптотически устойчиво и устойчиво при действии возмущения ξ_t .

2. Найдутся постоянные $\sigma, q_1, q_2, \tau, \rho_0$ такие, что при $t \in T$, $\rho < \rho_0$ будет справедлива равномерная по $\alpha \in A_d$ оценка

$$\|e_t\|^2 \leq (1 - \lambda + \sigma)^t q_2 / q_1 \|e_{tf}\|^2 + \tau / q_1 \sup_{t \geq tf} \|\xi_t\|^2 / (\lambda - \sigma), \quad (3.172)$$

где $tf \geq tr = \min\{t : W_t > 0, t \in T\}$, $\rho = \max\{\|e_0^\beta\|, \|S_0\|, \max_{t \in \{1, 2, \dots, tf\}} \|\xi_t\|\}$, $\|e_{tf}\|$ – удовлетворяет (3.151).

Доказательство. Из теоремы 3.5 следует, что для любых $tf \geq tr$, $N > tf$, $\delta_\beta > 0$, $\delta_\alpha > 0$ найдется такое $\rho_0 > 0$, что если $\rho < \rho_0$ и $t \in \overset{\vee}{T} = \{tf, tf + 1, \dots, N\}$, то тогда $(\beta_t, \alpha_t) \in A_\beta \times A_\alpha$.

Рассмотрим функцию Ляпунова в области $A_\beta \times A_\alpha$

$$V_t = e_t^T P_t^{-1} e_t ,$$

где P_t^{-1} определяется из системы

$$P_t^{-1} = \lambda P_{t-1}^{-1} + (C_t)^T C_t$$

при $t \geq t_f \in T$ с начальным условием $P_{t_f}^{-1} > 0$.

Преобразовывая V_t , используя соотношение для ошибки (3.153), получим

$$\begin{aligned} V_t = e_{t-1}^T P_t^{-1} e_t = e_t^T (I_{l+r} - K_t C_t)^T P_t^{-1} (I_{l+r} - K_t C_t) e_{t-1} + \\ + 2e_{t-1}^T (I_{l+r} - K_t C_t)^T P_t^{-1} K_t \varphi_t - 2e_{t-1}^T (I_{l+r} - K_t C_t)^T P_t^{-1} K_t \xi_t + 2\xi_t^T K_t^T P_t^{-1} K_t \varphi_t + \\ + \xi_t^T K_t^T P_t^{-1} K_t \xi_t + \varphi_t^T K_t^T P_t^{-1} K_t \varphi_t. \end{aligned} \quad (3.173)$$

Найдем оценки для слагаемых, входящих в (3.173). Так как $K_t = P_t C_t$ и P_t удовлетворяет системе уравнений

$$P_t = P_{t-1} / \lambda - P_{t-1} C_t^T (\lambda I_m + C_t P_{t-1} C_t^T)^{-1} C_t P_{t-1} / \lambda$$

при $t \geq t_f \in T$ с начальным условием $P_{t_f}^{-1} > 0$, то

$$\begin{aligned} e_{t-1}^T (I_{l+r} - K_t C_t)^T P_t^{-1} (I_{l+r} - K_t C_t) e_{t-1} = \\ = e_{t-1}^T (I_{l+r} - P_t C_t^T C_t)^T P_t^{-1} (I_{l+r} - P_t C_t^T C_t) e_{t-1} = \\ = e_{t-1}^T (P_t^{-1} - C_t^T C_t)^T (I_{l+r} - P_t C_t^T C_t) e_{t-1} = \\ = \lambda e_{t-1}^T P_{t-1}^{-1} (I_{l+r} - P_t C_t^T C_t) e_{t-1} = \lambda^2 e_{t-1}^T P_{t-1}^{-1} P_t P_{t-1}^{-1} e_{t-1} = \\ = \lambda e_{t-1}^T [P_{t-1}^{-1} - C_t^T (\lambda I_m + C_t P_{t-1} C_t^T)^{-1} C_t] e_{t-1} \leq \lambda e_{t-1}^T P_{t-1}^{-1} e_{t-1}. \end{aligned} \quad (3.174)$$

Из (3.164) – (3.168) следует, что для любого $\nu > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что будет справедлива оценка $\|\varphi_t\| \leq \nu \|\varphi_{t-1}\|$ до тех пор пока $\|\varphi_{t-1}\| \leq \delta$, а из [76] существование $q_1 > 0$ и $q_2 > 0$ таких, что

$$q_1 I_{r+l} \leq P_t^{-1} \leq q_2 I_{r+l}.$$

Поэтому, найдутся $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, $\eta_3 > 0$ такие, что

$$\varphi_t^T K_t^T P_t^{-1} K_t \varphi_t \leq \eta_1 \nu^2 e_{t-1}^T e_{t-1}, \quad (3.175)$$

$$\xi_t^T K_t^T P_t^{-1} K_t \xi_t \leq \eta_2 \xi_t^T \xi_t, \quad (3.176)$$

$$2e_{t-1}^T(I_{l+r} - K_t C_t)^T P_t^{-1} K_t \varphi_t \leq \eta_4 \nu e_{t-1}^T e_{t-1}. \quad (3.177)$$

Используя неравенство Янга

$$2x^T y \leq x^T X x + y^T X^{-1} y,$$

для $x = \xi_t$, $y = P_t^{-1}(I_{l+r} - K_t C_t)e_{t-1}$, $X = I_{l+r} / \vartheta$, $\vartheta > 0$, получим

$$\begin{aligned} 2\xi_t^T P_t^{-1}(I_{l+r} - K_t C_t)e_{t-1} &\leq \xi_t^T \xi_t / \vartheta + \vartheta e_{t-1}^T P_t^{-2}(I_{l+r} - K_t C_t)^2 e_{t-1} \leq \\ &\leq \xi_t^T \xi_t / \vartheta + \eta_4 \vartheta e_{t-1}^T e_{t-1}, \quad \eta_4 > 0. \end{aligned}$$

Полагая в неравенстве Янга $x = \xi_t$, $y = K_t^T P_t^{-1} K_t \varphi_t$, $X = I_{l+r}$ и используя (3.175), находим

$$\begin{aligned} 2\xi_t^T K_t^T P_t^{-1} K_t \varphi_t &\leq \xi_t^T \xi_t + \nu \varphi_{t-1}^T (K_t^T P_t^{-1} K_t)^2 \varphi_{t-1} \cdot \\ &\leq \xi_t^T \xi_t + \eta_4 \nu e_{t-1}^T e_{t-1}, \quad \eta_5 > 0. \end{aligned} \quad (3.178)$$

Использование этих оценок дает

$$\begin{aligned} V_t &\leq \lambda e_{t-1}^T P_{t-1}^{-1} e_{t-1} + ((\eta_1 + \eta_5 \nu^2 + \eta_3 \vartheta + \eta_4 \nu) e_{t-1}^T e_{t-1} + (1 + \eta_2 + 1/\vartheta) \xi_t^T \xi_t) \leq \\ &\leq (\lambda - \sigma) V_{t-1} + \eta_6 \sup_{t \geq t_f} \|\xi_t\|^2 \end{aligned}$$

при $\|e_t\| \leq \delta$ и $(\beta_t, \alpha_t) \in A_\beta \times A_\delta$, где $\sigma = ((\eta_1 + \eta_5 \nu^2 + \eta_3 \vartheta + \eta_4 \nu) / q_1)$, $\eta_6 = 1 + \eta_2 + 1/\vartheta$.

Выбирая ϑ, ν так, чтобы $\lambda > \sigma$, получим

$$\begin{aligned} q_1 \|e_t\|^2 &\leq V_t \leq (1 - \lambda + \sigma)^t V_{t_f} + \eta_6 \sup_{t \geq t_f} \|\xi_t\|^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \lambda + \sigma)^i \leq \\ &\leq (1 - \lambda + \sigma)^t q_2 \|e_{t_f}\|^2 + \eta_6 \sup_{t \geq t_f} \|\xi_t\|^2 / (\lambda + \sigma). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|e_t\|^2 \leq (1 - \lambda + \sigma)^t q_2 / q_1 \|e_{t_f}\|^2 + \eta_6 / q_1 \sup_{t \geq t_f} \|\xi_t\|^2 / (\lambda + \sigma). \quad (3.179)$$

Выберем $\|e_{t_f}\|$ и ограничение на $\sup_{t \geq t_f} \|\xi_t\|^2$ так, чтобы выполнялось условие

$$(1 - \lambda + \sigma)^{t_f} q_2 / q_1 \|e_{t_f}\|^2 + \eta_6 / q_1 \sup_{t \geq t_f} \|\xi_t\|^2 / (\lambda + \sigma) \leq \delta^2.$$

Из теоремы 3.5 следует, что это всегда возможно, если ρ достаточно мало. При таком выборе, неравенство (3.179) будет выполняться для всех $t > tf$.

Из (3.179) следует устойчивость решения $x_t = x^*$ системы (3.99) под действием возмущения ξ_t и если $\xi_t = 0$, то его асимптотическая устойчивость.

Теорема 3.7. Предположим, что:

1. Выполняются условия теоремы 3.5.

2. Существуют положительные постоянные k_1, k_2 такие, что

$$\|\Phi(z_t, \beta)\| \leq k_1, \quad \|\partial\Phi(z_t, \beta)/\partial\beta\| \leq k_2,$$

при $z_t \in Z \subset R^n$, $\beta \in A_\beta$, $t \in T$, где $A_\beta = \{\beta : \|\beta - \beta^*\| \leq \delta_\beta\}$, $\delta_\beta > 0$ – некоторая постоянная, Z – произвольное компактное множество, $T = \{1, 2, \dots\}$.

3. $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=tf+1}^t C_i^T R_i^{-1} C_i / t = P_\infty^{-1}$ при $(\beta_t, \alpha_t) \in A_\beta \times A_\alpha$, где $A_\alpha = \{\alpha : \|\alpha - \alpha^*\| \leq \delta_\alpha\}$, $\delta_\alpha > 0$ – некоторая постоянная, $tf \geq tr$.

3. Существует постоянная $k_4 > 0$ такая, что $R_t \geq k_4 I_m$ при $t \in T$.

Тогда: Решение системы (3.99) $x_t = x^*$ с матрицей K_t определяемой выражениями (3.58) – (3.64) асимптотически устойчиво и устойчиво под действием возмущения ξ_t .

Доказательство. Покажем сначала, что

$$P_t = \tilde{S}_t + \tilde{V}_t W_t^{-1} \tilde{V}_t^T > 0 \quad (3.180)$$

при $t \geq tr \in T$, где

$$\tilde{S}_t = \begin{pmatrix} S_t & 0_{l \times r} \\ 0_{r \times l} & 0_{r \times r} \end{pmatrix}, \quad \tilde{V}_t = \begin{pmatrix} V_t \\ I_r \end{pmatrix}.$$

Представим (3.180) в следующей эквивалентной форме

$$P_t = \begin{pmatrix} S_t + V_t W_t^{-1} V_t^T & V_t W_t^{-1} \\ W_t^{-1} V_t^T & W_t^{-1} \end{pmatrix} > 0.$$

Так как $S_t + V_t W_t^{-1} V_t^T > 0$, то [76]

$$|P_t| = |S_t + V_t W_t^{-1} V_t^T| \times |W_t^{-1} - W_t^{-1} V_t^T (S_t + V_t W_t^{-1} V_t^T)^{-1} V_t W_t^{-1}|.$$

Преобразовывая второй множитель в этом выражении, используя тождество (2.7) для $B = W_t^{-1}$, $C = V_t^T$, $D = S_t$, получим

$$|P_t| = |S_t + V_t W_t^{-1} V_t^T| \times |(W_t + V_t^T S_t^{-1} V_t)^{-1}|.$$

Но так как для любой квадратной матрицы $|A^{-1}| = 1/|A|$, то

$$|P_t| = |S_t + V_t W_t^{-1} V_t^T| / |W_t + V_t^T S_t^{-1} V_t| > 0.$$

Отсюда следует, что P_t удовлетворяет системе

$$P_t = P_{t-1} - P_{t-1} C_t^T (R_t + C_t P_{t-1} C_t^T)^{-1} C_t P_{t-1} \quad (3.181)$$

При $t \geq tf \in T$ с начальным условием $P_{tr} > 0$.

Выражение для ошибки оценивания имеет вид

$$e_t = H_{t,tf} e_{tf} + \sum_{s=tf+1}^t H_{t,s} K_s (\varphi_s + \xi_s),$$

где $H_{t,s}$ – решение системы (3.155), φ_t определяется (3.152), $tf > tr$. Так как

$$H_{t,s} = P_t P_s^{-1}, \quad K_t = P_t C_t^T R_t^{-1}$$

при $t \geq s \geq tr$, то

$$e_t = P_t P_{tf}^{-1} e_{tf} + P_t \sum_{s=tf+1}^t C_s^T R_s^{-1} (\varphi_s + \xi_s). \quad (3.182)$$

Из теоремы 3.5 следует, что для любого $tf \geq tr$, $N > tf$, $\delta_\alpha > 0$ найдется такое $\rho_0 > 0$, что если $\rho < \rho_0$ и $t \in T = \{tf, tf+1, \dots, N\}$, то $(\beta_t, \alpha_t) \in A_\beta \times A_\alpha$, где

$$\rho = \max\{\|e_0^\beta\|, \|S_0\|, \sup_{t \in T} \|\xi_t\|\}.$$

Из (3.164) – (3.168) следует, что для любого $\nu > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\|\varphi_t\| \leq \nu \|e_t\|$$

до тех пор пока $\|e_t\| \leq \delta$ и при этом

$$\|e_t\| \leq \|P_t\| \|P_{tf}^{-1}\| \|e_{tf}\| + \eta_1 \|P_t\| (\nu \sum_{s=tf+1}^t \|e_{s-1}\| + \sup_{t \in T} \|\xi_t\|), \quad (3.183)$$

где $\eta_1 = \sup_{t \in T} \|C_t^T R_t^{-1}\|$, при $(\beta_t, \alpha_t) \in A_\beta \times A_\alpha$.

Использование (3.181) и условия 3 теоремы дает при $(\beta_t, \alpha_t) \in A_\beta \times A_\alpha$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t^{-1}/t = \lim_{t \rightarrow \infty} (P_{tr}^{-1} + \sum_{i=tr+1}^t C_i^T R_i^{-1} C_i)/t = P_\infty^{-1}. \quad (3.184)$$

Таким образом, для достаточно большого $tf \geq tr$ найдется такое $\eta_2 > 0$, что

$$\|P_t\| = \|P_\infty + \Delta P_t\|/t \leq \eta_2/t \quad (3.185)$$

при $(\beta_t, \alpha_t) \in A_\beta \times A_\alpha$, где $\Delta P_t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$. Подстановка (3.185) в (3.183) дает

$$\begin{aligned} \|e_t\| &\leq \eta_2 \|P_{tf}^{-1}\| \|e_{tf}\|/t + \eta_1 \eta_2 (\nu/t \sum_{s=tf+1}^t \|e_{s-1}\| + \sup_{t \geq tf+1} \|\xi_t\|) = \\ &= \eta_3/t + \eta_4/t \sum_{s=tf+1}^t \|e_{s-1}\| + \eta_5, \end{aligned} \quad (3.186)$$

где $\eta_3 = \eta_2 \|P_{tf}^{-1}\| \|e_{tf}\|$, $\eta_4 = \eta_1 \eta_2 \nu$, $\eta_5 = \eta_1 \eta_2 \sup_{t \in T} \|\xi_t\|$.

Из принципа сравнения [77] следует, что $\|e_t\| \leq u_t$, где u_t – решение разностного уравнения

$$u_t = \eta_3/t + \eta_4/t \sum_{s=tf+1}^t u_{s-1} + \eta_5 \quad (3.187)$$

с начальным условием $u_{tf} = \eta_3/tf$.

Имеем

$$u_t = \eta_3/t + \eta_4/t \sum_{s=tf+1}^{t-1} u_{s-1} + \eta_4 u_{t-1}/t + \eta_5, \quad (3.188)$$

$$u_{t-1} = \eta_3/(t-1) + \eta_4/(t-1) \sum_{s=tf+1}^{t-2} u_{s-1} + \eta_5. \quad (3.189)$$

Из (3.189) находим

$$\sum_{s=tf+1}^{t-1} u_{s-1} = (t-1)/\eta_4 (u_{t-1} - \eta_3/(t-1) - \eta_5).$$

Подстановка этого выражения в (3.188) дает

$$\begin{aligned} u_t &= \eta_3 / t + (t-1)/t(u_{t-1} - \eta_3 / (t-1) - \eta_5) + \eta_4 u_s / t + \eta_5 = \\ &= [1 - (1 - \eta_4) / t] u_{t-1} + \eta_5 / t. \end{aligned} \quad (3.190)$$

Отсюда следует, что

$$u_t = h_{t,tf} \eta_3 / tf + \eta_3 \sum_{s=tf+1}^t h_{t,s} / s, \quad (3.191)$$

где $h_{t,s}$ – переходная функция уравнения (3.188), которая определяется уравнением

$$h_{t,s} = [1 - (1 - \eta_4) / t] h_{t,s-1}, \quad h_{s,s} = 1.$$

Имеем

$$h_{t,s} = \prod_{j=s+1}^t [1 - (1 - \eta_4) / j] \leq (1 + q_s)(s/t)^{1-\eta_4} \quad (3.192)$$

для $\eta_4 < 1$ [78], где $q_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Подставляя (3.192) в (3.191), получим

$$u_t \leq \eta_3 (1 + q_{tf}) tf^{-\eta_4} (1/t)^{1-\eta_4} + \eta_5 \sum_{s=tf+1}^t (1 + q_s)(s/t)^{1-\eta_4} / s.$$

Для второго слагаемого в этом выражении, находим

$$\begin{aligned} \eta_5 \sum_{s=tf+1}^t (1 + q_s)(s/t)^{1-\eta_4} / s &\leq \eta_5 \sup_{s \geq tf+1} (1 + q_s) \frac{\sum_{s=tf+1}^t s^{-\eta_4}}{t^{1-\eta_4}} \rightarrow \\ &\rightarrow \eta_5 / (1 - \eta_4) \sup_{s \geq tf+1} (1 + q_s), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|e_t\| \leq \eta_3 (1 + q_{tf}) tf^{-\eta_4} (1/t)^{1-\eta_4} + \eta_5 / (1 - \eta_4) \sup_{t \geq tf+1} (1 + q_t)$$

до тех пор пока $\|e_t\| \leq \delta$.

Таким образом, так как

$$P_{tf}^{-1} = \text{block diag}(S_0^{-1}, 0_{r \times r}) + \sum_{i=1}^{tf} C_i^T R_i^{-1} C_i,$$

то использование (3.151) дает

$$\begin{aligned}
& \|e_t\| \leq \eta_6 \|P_{tf}^{-1}\| \|e_{tf}\| tf^{-\eta_4} (1/t)^{1-\eta_4} + \eta_7 \sup_{t \geq tf+1} \|\xi_t\| \leq \\
& \leq \eta_6 tf^{-\eta_4} (\|S_0^{-1}\| + \|\sum_{i=1}^{tf} C_i^T R_i^{-1} C_i\|) \mathcal{G}(e_0^\beta, \xi_t) \times \\
& \times (1 + \tilde{\nu}\rho)^{tf-1} (1/t)^{1-\eta_4} + \eta_7 \sup_{t \geq tf+1} \|\xi_t\|, \quad (3.193)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(e_0^\beta, \xi_t) &= (\chi \|e_0^\beta\| + \varsigma \sup_{t \in T} \|\xi_t\|), \quad \nu(\rho) \leq \tilde{\nu}\rho, \quad \tilde{\nu} > 0, \quad \rho \rightarrow 0. \\
\eta_6 &= \eta_3 (1 + q_{tf}) \quad \eta_7 = \eta_5 / (1 - \eta_4) \sup_{t \geq tf+1} (1 + q_t).
\end{aligned}$$

Будем предполагать без потери общности, что $\rho = \|S_0\|$, $tf = \|S_0^{-1}\|^{1/\eta_4}$. Тогда, из (3.193) следует существование постоянных $\eta_8 > 0$ и $\eta_9 > 0$ таких, что если $\|e_0^\beta\| < \eta_8$, $\sup_{t \in T} \|\xi_t\| < \eta_9$, то будет $\|e_t\| \leq \delta$ при всех $t \in T$. Поэтому решение системы (3.99) $x_t = x^*$ устойчиво под действием возмущения ξ_t и если $\xi_t = 0$, то оно асимптотически устойчиво.

3.5 Итерационные версии диффузных алгоритмов обучения

Приведем итерационные версии ДАО, ориентированные на пакетную обработку.

Для ДАО, полученного в теореме 3.1:

$$x_t^i = x_{t-1}^i + K_t^i (y_t - h_t(x_{t-1}^i)), \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (3.194)$$

где $K_t^i = ((K_t^{\beta i})^T, (K_t^{\alpha i})^T)^T$, $h_t(x_{t-1}) = \Phi(z_t, \beta_{t-1})\alpha_{t-1}$,

$$K_t^{\beta i} = (S_t^i + V_t^i (W_t^i)^+ (V_t^i)^T) (C_t^\beta)^T + V_t^i (W_t^i)^+ (C_t^\alpha)^T, \quad (3.195)$$

$$K_t^{\alpha i} = (W_t^i)^+ (V_t^i)^T (C_t^\beta)^T + (W_t^i)^+ (C_t^\alpha)^T, \quad (3.196)$$

$$S_t^i = S_{t-1}^i / \lambda - S_{t-1}^i (C_t^\beta)^T (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1}^i (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\beta S_{t-1}^i / \lambda, \quad (3.197)$$

$$\begin{aligned}
V_t^i &= (I_l - S_{t-1}^i (C_t^\beta)^T (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1}^i (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\beta) V_{t-1}^i - \\
&- S_{t-1}^i (C_t^\beta)^T (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1}^i (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\alpha, \quad (3.198)
\end{aligned}$$

$$W_t^i = \lambda W_{t-1}^i + \lambda (C_t^\beta V_{t-1}^i + C_t^\alpha)^T (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1}^i (C_t^\beta)^T)^{-1} (C_t^\beta V_{t-1}^i + C_t^\alpha) \quad (3.199)$$

$$C_t^\beta = C_t^\beta(x_{t-1}^i) = \partial[\Phi(z_t, \beta_{t-1}^i)\alpha_{t-1}^i] / \partial \beta_{t-1}^i, \quad C_t^\alpha = C_t^\alpha(x_{t-1}^i) = \Phi(z_t, \beta_{t-1}^i) \quad (3.200)$$

с инициализацией

$$x_0^1 = (\bar{\beta}^T, 0_{l \times r})^T, \quad S_0^1 = \bar{P}_\beta, \quad V_0^1 = 0_{l \times r}, \quad W_0^1 = 0_{r \times r}, \quad (3.201)$$

$$x_0^i = x_N^{i-1}, S_0^i = S_N^{i-1}, V_0^i = V_N^{i-1}, W_0^i = W_N^{i-1}, i = 2, 3, \dots, M, \quad (3.202)$$

где i – номер итерации, M – количество итераций;

Для ДАО, описываемого выражениями (3.68) – (3.73):

$$x_t^i = x_{t-1}^i + K_t^i (y_t - h_t(x_{t-1}^i)), t = 1, 2, \dots, N, i = 1, 2, \dots, M, \quad (3.203)$$

где $K_t^i = ((K_t^{\beta i})^T, (K_t^{\alpha i})^T)^T$, $h_t(x_{t-1}) = \Phi(z_t, \beta_{t-1})\alpha_{t-1}$,

$$K_t^{\beta i} = S_t^i (C_t^\beta)^T, K_t^{\alpha i} = (W_t^i)^+ (C_t^\alpha)^T, \quad (3.204)$$

$$S_t^i = S_{t-1}^i / \lambda - S_{t-1}^i (C_t^\beta)^T (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1}^i (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\beta S_{t-1}^i / \lambda, \quad (3.205)$$

$$W_t^i = \lambda W_{t-1}^i + \lambda (C_t^\alpha)^T (\lambda I_m + C_t^\beta S_{t-1}^i (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\beta V_{t-1}^i \quad (3.206)$$

с инициализацией

$$x_0^1 = (\bar{\beta}^T, 0_{1 \times r})^T, S_0^1 = \bar{P}_\beta, W_0^1 = 0_{r \times r}, \quad (3.207)$$

$$x_0^i = x_N^{i-1}, S_0^i = S_N^{i-1}, W_0^i = W_N^{i-1}, i = 2, 3, \dots, M. \quad (3.208)$$

Стандартные рекомендации по выбору λ состоят в следующем. На начальном этапе обучения величина λ может быть достаточно малой, обеспечивая высокую скорость сходимости. Далее, рекомендуется постепенно ее увеличивать до 1 для достижения необходимой точности полученного решения. Приведем один из вариантов выбора λ , обеспечивающих сходимость, предложенный в [79]

$$0 \leq 1 - (\lambda_i)^N \leq c/i, c > 0, i = 1, 2, \dots. \quad (3.209)$$

Сформулируем условия сходимости итерационного ДАО. Пусть выполняются условия:

1. Для некоторого $L > 0$ выполняется условие Липшица
- 2.

$$\|\nabla g_t(x)g_t(x) - \nabla g_t(y)g_t(y)\| \leq L \|x - y\|, \forall x, y \in R^{l+r}, t = 1, \dots, N,$$

где $g_t(x) = y_t - h_t(x)$, $\nabla g_t(x) - (l+r) \times m$ матрица градиентов $g_t(x)$.

2. Последовательность векторов x_t^i , $t = 1, \dots, N$, $i = 1, 2, \dots$ ограничена.
3. Существует вектор x_t^i такой, что $W_t = W_t(x_t^i) > 0$.

Теорема 3.8. При выполнении (3.209) и 1 – 3, последовательность

$$J_t(x_N^i) = \sum_{k=1}^N (y_k - h_t(x_N^i))^T (y_k - h_t(x_N^i))$$

сходится и каждая предельная точка последовательности $\{x_N^i\}$ является стационарной точкой $J_t(x)$.

Утверждение будет следовать из [79] и неравенства

$$P_t = P_t(x_t^{i-1}) = \begin{pmatrix} S_t^i + V_t^i (W_t^i)^{-1} (V_t^i)^T & V_t^i (W_t^i)^{-1} \\ (W_t^i)^{-1} (V_t^i)^T & (W_t^i)^{-1} \end{pmatrix} > 0,$$

вытекающего из представления

$$|P_t| = |S_t^i + V_t^i (W_t^i)^{-1} (V_t^i)^T| \cdot |W_t^i + V_t^i (S_t^i)^{-1} (V_t^i)^T|,$$

которое было установлено при доказательстве теоремы 3.7.

3.6 Диффузный алгоритм обучения рекуррентной нейронной сети

Рассмотрим рекуррентную НС (РНС), заданную моделью пространства состояния

$$p_t = \begin{pmatrix} \sigma(a_1^T p_{t-1} + b_1^T z_t + d_1) \\ \dots \\ \sigma(a_q^T p_{t-1} + b_q^T z_t + d_q) \end{pmatrix} = \sigma(Ap_{t-1} + Bz_t + d), \quad (3.210)$$

$$y_t = \begin{pmatrix} c_1^T p_t \\ \dots \\ c_m^T p_t \end{pmatrix} + \xi_t = Cp_t + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (3.211)$$

где $p_t \in R^q$ – вектор состояния, $z_t \in R^n$ – вектор измеряемых входных воздействий, $y_t \in R^m$ – вектор измеряемых выходов, $a_i \in R^q$, $b_i \in R^n$, $d_i \in R^1$, $c_i \in R^q$, $\sigma(x)$ – сигмоидная или гиперболический тангенс функции, $A = (a_1, a_2, \dots, a_q) \in R^{q \times q}$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R^{q \times n}$, $d = (d_1, d_2, \dots, d_q) \in R^q$, $\xi_t \in R^m$ – случайный процесс с некоррелированными значениями, нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариации R_t . Матрицы A, B, C и вектор d неизвестны. Начальное условие для (3.210) p_0 полагаем равным нулю.

Перейдем к модели системы с более удобной для нас параметризацией, включающей (3.210), (3.211) в качестве частного случая

$$p_t = \Psi(z_t, p_{t-1}, \beta), \quad (3.212)$$

$$y_t = \begin{Bmatrix} p_t^T & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & p_t^T \end{Bmatrix} \alpha + \xi_t = \Phi(p_t) \alpha + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (3.213)$$

где

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{qm})^T = (c_1^T, c_2^T, \dots, c_m^T) \in R^{qm},$$

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{qm+q})^T = (a_1^T, a_2^T, \dots, a_q^T, b_1^T, b_2^T, \dots, b_q^T, d^T) \in R^{qm+q}$$

– векторы неизвестных параметров, включающие элементы матриц A , B , C и вектора d $\Psi(z_t, p_{t-1}, \beta) \in R^q$ – вектор заданных нелинейных функций, $\Phi(p_t) \in R^k, k = q^2 + nq + q$.

Будем предполагать, что неизвестные параметры в (3.212), (3.213) удовлетворяют условиям A1, A2, A3, а критерий качества определяется выражением (3.4).

Из (3.212), (3.213) следуют соотношения для матричных функций $C_t^\alpha \in R^{m \times qm}$, $C_t^\beta \in R^{m \times pm}$, входящих в описание ДАО:

$$C_t^\alpha = \begin{Bmatrix} p_t^T & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & p_t^T \end{Bmatrix}, \quad (3.214)$$

$$C_t^\beta = \partial \Phi(p_t) / \partial \beta_{t-1} \alpha_{t-1} = \partial \Phi(p_t) / \partial p_t \partial p_{t-1} / \partial \beta_{t-1} \alpha_{t-1}, \quad (3.215)$$

где

$$\partial p_t / \partial \beta_{t-1} = \partial \Psi(z_t, p_{t-1}, \beta_{t-1}) / \partial p_{t-1} \partial p_{t-1} / \partial \beta_{t-1} + \partial \Psi(z_t, p_{t-1}, \beta_{t-1}) / \partial \beta_{t-1}, \quad (3.216)$$

$$\partial p_0 / \partial \beta_0 = 0.$$

После завершения этапа обучения, система (3.210) может быть использована для прогноза поведения выхода y_t . При этом, прогноз необходимо начинать сразу после завершения обучения, т.е., с момента $t = N + 1$ с начальным условием p_N . В следующей главе будет предложен более эффективный алгоритм обучения свободный от этого недостатка, основанный на диффузном ФК.

3.7 Анализ алгоритмов обучения при малых шумах измерения

Рассмотрим поведение, предложенных ДАО при малых шумах измерения. Матрица интенсивности шумов R_t входит в эти алгоритмы через обратную матрицу $N_{1t}^{-1} = (C_t^\beta S_t (C_t^\beta)^T + R_t)^{-1}$. С учетом этого, важно понимать, как будут они вести себя при $R_t \rightarrow 0$.

Рассмотрим вначале ДАО, описываемый выражениями (3.58) – (3.64).

Теорема 3.9. При заданном N , $R_t = \varepsilon I_m$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon > 0$ и $S_0 > 0$

$$\tilde{K}_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_t^{dif} = \begin{pmatrix} Q_t^+ (C_t^\beta)^T \\ 0_{r \times l} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_t \\ I_r \end{pmatrix} L_t^+ \begin{pmatrix} G_t \\ I_r \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} (C_t^\beta)^T \\ (C_t^\alpha)^T \end{pmatrix}, \quad (3.217)$$

где

$$Q_t = Q_{t-1} + (C_t^\beta)^T C_t^\beta, \quad Q_0 = 0_{l \times l}, \quad (3.218)$$

$$G_t = (I_l - Q_t^+ (C_t^\beta)^T C_t^\beta) G_{t-1} - Q_t (C_t^\beta)^T C_t^\alpha, \quad G_0 = 0_{l \times r}, \quad (3.219)$$

$$L_t = L_{t-1} + (C_t^\beta G_t + C_t^\alpha)^T \bar{H}_t (C_t^\beta G_t + C_t^\alpha), \quad L_0 = 0_{r \times r}. \quad (3.220)$$

$$\bar{H}_t = (I_l - \tilde{H}_t \tilde{H}_t^+) (I_l + C_t^\beta Q_t^+ (C_t^\beta)^T)^{-1}, \quad (3.221)$$

$$\tilde{H}_t = (I_l + C_t^\beta Q_{t-1}^+ (C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\beta H_t (C_t^\beta)^T, \quad (3.222)$$

$$H_t = S_0 (I_l - Q_{t-1} Q_{t-1}^+), \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (3.223)$$

Доказательство. Так как

$$S_t^{-1} = S_0^{-1} + \sum_{k=1}^t (C_k^\beta)^T C_k^\beta / \varepsilon = (S_0^{-1} \varepsilon + \sum_{k=1}^t (C_k^\beta)^T C_k^\beta) / \varepsilon, \quad t = 1, 2, \dots, N,$$

то из леммы 2.1, если положить $\Omega_1 = S_0^{-1}$, $F_t = C_t^\beta$, будет следовать

$$\begin{aligned} S_t &= (S_0^{-1} / \varepsilon + \sum_{k=1}^t (C_k^\beta)^T C_k^\beta) \varepsilon = \\ &= S_0 (I_l - Q_t Q_t^+) + Q_t^+ \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad t = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.224)$$

Используя лемму 2.2 и (2.24), находим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_t (C_t^\beta)^T / \varepsilon = Q_t^+ (C_t^\beta)^T.$$

Покажем, что

$$S_{t-1}(C_t^\beta)^T (R_t + C_t^\beta S_{t-1}(C_t^\beta)^T)^{-1} = S_t (C_t^\beta)^T R_t^{-1}.$$

Домножая (3.61) справа на $(C_t^\beta)^T R_t^{-1}$, получаем

$$\begin{aligned} S_t (C_t^\beta)^T R_t^{-1} &= S_{t-1}(C_t^\beta)^T R_t^{-1} - S_{t-1}(C_t^\beta)^T (R_t + C_t^\beta S_{t-1}(C_t^\beta)^T)^{-1} \times \\ &\quad \times C_t^\beta S_{t-1}(C_t^\beta)^T R_t^{-1} = \\ &= S_{t-1}(C_t^\beta)^T (I_l - (R_t + C_t^\beta S_{t-1}(C_t^\beta)^T)^{-1} C_t^\beta S_{t-1}(C_t^\beta)^T) R_t^{-1} = \\ &= S_{t-1}(C_t^\beta)^T (R_t + C_t^\beta S_{t-1}(C_t^\beta)^T)^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_{t-1}(C_t^\beta)^T (I_m \varepsilon + C_t^\beta S_{t-1}(C_t^\beta)^T)^{-1} &= \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_t (C_t^\beta)^T &= Q_t^+ (C_t^\beta)^T, \end{aligned} \quad (3.225)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_t = G_t. \quad (3.226)$$

Найдем асимптотическое представление для N_t^{-1} при $\varepsilon \rightarrow 0$. С помощью (3.224) находим

$$\begin{aligned} N_t &= I_m \varepsilon + C_t^\beta S_{t-1}(C_t^\beta)^T = I_m \varepsilon + C_t^\beta (S_0(I_l - Q_{t-1}Q_{t-1}^+) + \\ &\quad + Q_{t-1}^+ \varepsilon + O(\varepsilon^2))(C_t^\beta)^T + O(\varepsilon^2) = \\ &= C_t^\beta H_t (C_t^\beta)^T + (I_m + C_t^\beta Q_{t-1}^+ (C_t^\beta)^T) \varepsilon + O(\varepsilon^2) = \\ &= (I_m + C_t^\beta Q_{t-1}^+ (C_t^\beta)^T)(\tilde{H}_t + I_m \varepsilon) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Использование леммы 2.1 дает

$$(\tilde{H}_t + I_m \varepsilon)^{-1} = (I_l - \tilde{H}_t \tilde{H}_t^+) / \varepsilon + \tilde{H}_t^+ + O(\varepsilon^2).$$

Поэтому

$$N_t^{-1} = (I_l - \tilde{H}_t \tilde{H}_t^+)(I_m + C_t^\beta Q_{t-1}^+ (C_t^\beta)^T)^{-1} / \varepsilon + O(1) = \bar{H}_t / \varepsilon + O(1).$$

Имеем

$$\begin{aligned} W_t &= W_{t-1} + (C_t^\beta V_{t-1} + C_t^\alpha)^T (R_t + C_t^\beta S_{t-1}(C_t^\beta)^T)^{-1} (C_t^\beta V_{t-1} + C_t^\alpha) = \\ &= W_{t-1} + (C_t^\beta V_{t-1} + C_t^\alpha)^T N_t^{-1} (C_t^\beta V_{t-1} + C_t^\alpha) = \\ &= W_{t-1} + (C_t^\beta V_{t-1} + C_t^\alpha)^T (\bar{H}_t + O(\varepsilon)) (C_t^\beta V_{t-1} + C_t^\alpha) / \varepsilon. \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$L_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_t \varepsilon =$$

$$= \sum_{k=1}^t (C_k^\beta G_{k-1} + C_k^\alpha)^T \bar{H}_k (C_k^\beta G_{k-1} + C_k^\alpha),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} V_t \\ I_r \end{pmatrix} W_t^+ \begin{pmatrix} V_t \\ I_r \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} (C_t^\beta)^T \\ (C_t^\alpha)^T \end{pmatrix} R_t^{-1} = \begin{pmatrix} G_t \\ I_r \end{pmatrix} L_t^+ \begin{pmatrix} G_t \\ I_r \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} (C_t^\beta)^T \\ (C_t^\alpha)^T \end{pmatrix}.$$

Аналогичный результат справедлив и для двух этапного алгоритма, описываемого выражениями (3.58), (3.71) – (3.73).

Теорема 3.10. При заданном N , $R_t = \varepsilon I_m$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon > 0$ и $S_0 > 0$

$$\bar{K}_t^\beta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_t^{dif, \beta} = Q_t^+ (C_t^\beta)^T, \quad \bar{K}_t^\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_t^{dif, \alpha} = L_e^+ (C_t^\alpha)^T, \quad (3.227)$$

где

$$Q_t = Q_{t-1} + (C_t^\beta)^T C_t^\beta, \quad Q_0 = 0_{l \times l}, \quad (3.228)$$

$$L_t = L_{t-1} + (C_t^\alpha)^T \bar{H}_t C_t^\alpha, \quad L_0 = 0_{r \times r}. \quad (3.229)$$

Утверждение доказывается по той же схеме, что и предыдущая теорема.

3.8 Примеры идентификация нелинейных динамических объектов

Пример 3.1. Рассмотрим задачу идентификации объекта описываемого нелинейным разностным уравнением [79]

$$y_t = y_{t-1} y_{t-2} (y_{t-1} + 2.5) / (1 + y_{t-1}^2 + y_{t-2}^2) + u_{t-1}.$$

Значения u_t на обучающем множестве равномерно распределены на интервале $[-2, 2]$, а значения тестирующей выборки определяются выражением $u_t = \sin(2\pi t / 250)$. Модель объекта ищется в форме нелинейной модели авторегрессии и скользящего среднего

$$y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, u_{t-1}),$$

где $f(\cdot)$ – персептрон с одним скрытым слоем и линейной ФА.

В отличие от раздела 2.3.1 будем одновременно оценивать все параметры, входящие в описание персептрона. Начальные значения весов и смещений скрытого слоя выбираются из равномерного распределения на интервалах $[-1, 1]$ и $[0, 1]$, соответственно. Введем следующие обозначения: ДАО1 описывается соотношениями (3.35)–(3.41), ДАО2 – (3.35), (3.68)–(3.70), ДАО3 – (2.30)–(2.31), оценивающий только параметры выходного слоя (диффузная версия ELM алгоритма). В таблице 3.2 приведены значения 90-ой процентиля ошибки аппроксимации. На рисунке 3.6 показаны

выходы системы и моделей с пятью нейронами скрытого слоя. Здесь кривые 1, 2 – выходы ДАО2, ДАО1, соответственно, 3 – выход объекта.

Таблица 3.2. 90-ые процентиля ошибок аппроксимации выхода

Размеры обучающего и тестирующего множеств (N, M)	Количество нейронов скрытого слоя	Обучение			Тестирование		
		ДАО 1	ДАО 2	ДАО 3	ДАО 1	ДАО2	ДАО 3
$N = 2000$, $M = 500$	5	0.13	0.15	0.57	0.06	0.1	0.59
	10	0.12	0.13	0.23	0.05	0.05	0.18
	15	0.13	0.12	0.14	0.05	0.04	0.08
	20	0.13	0.12	0.12	0.05	0.04	0.04
$N = 500$, $M = 500$	4	0.16	0.21	0.83	0.11	0.2	0.83
	5	0.15	0.19	0.58	0.1	0.15	0.58
	6	0.14	0.18	0.48	0.1	0.12	0.46
	10	0.14	0.12	0.23	0.09	0.08	0.19

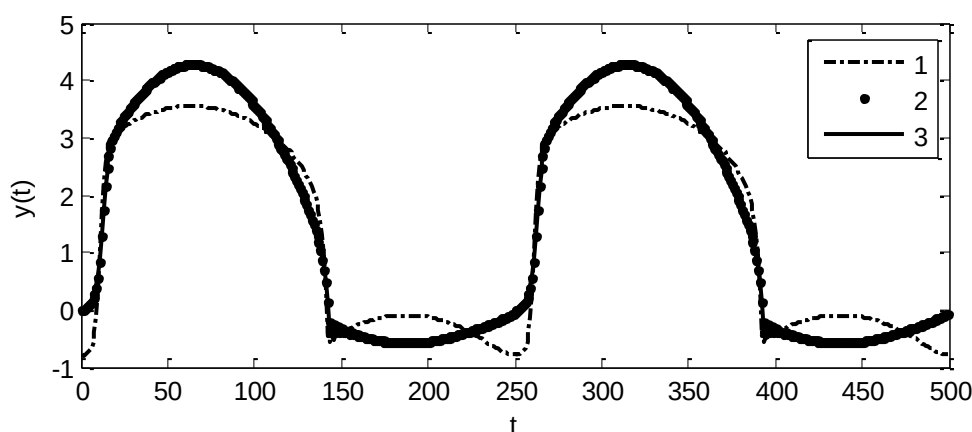


Рисунок 3.6 – Зависимости выхода объекта и выходов моделей от времени

Пример 3.2. Рассмотрим задачу идентификации двух резервуарной емкости по вход – выходным данным [80]. Напряжение $u(t)$ (входное воздействие) приложено к насосу, наполняющего жидкостью верхний резервуар, из которого она через отверстие поступает в нижнюю емкость. Уровень жидкости в нижней емкости определяет выход системы $y(t)$. Файл данных содержит 3000 значений $u(t)$ в вольтах и $y(t)$ в метрах, измеренных с тактом 0.2 секунды, которые показаны на рисунках 3.7, 3.8, соответственно. Модель системы ищется в форме персептрона (1.6) с сигмоидной ФА и вектором входов

$$z_t = (y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, y_{t-4}, y_{t-5}, u_{t-3})^T.$$

Размер обучающей выборки $N = 1000$, тестирующей – $M = 1000$. Веса скрытого слоя и смещений выбираются, как и в предыдущем примере. Параметр забывания определяется выражением $\lambda_k = \{\max(1 - 0.05/k, 0.99)\}$. На рисунке 3.9 показаны значения выходов объекта (кривая 1) и его модели, построенной с помощью ДАО (кривая 2) и соотношений (3.194) – (3.202) с пятью нейронами скрытого слоя при одновременном обучении всех неизвестных параметров для двадцати эпох. На рисунке 3.10 показаны значения выходов объекта (кривая 1) и его модели, построенной с помощью ДАО (кривая 2) из теоремы 2.1 с пятью нейронами скрытого слоя и оценкой только параметров выходного слоя.

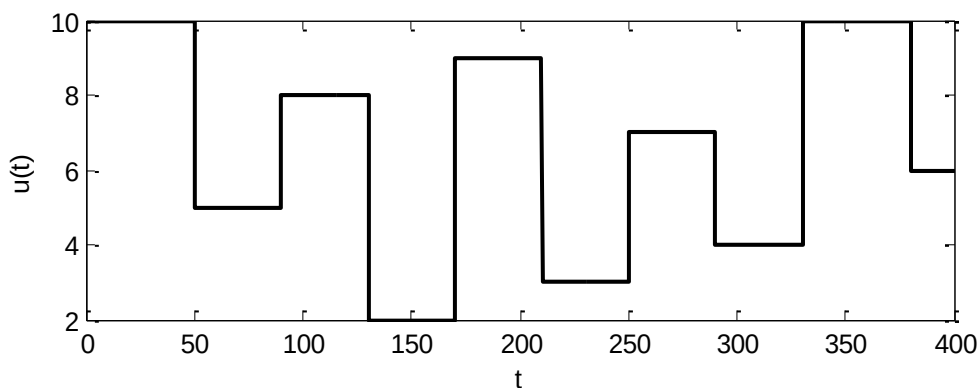


Рисунок 3.7 – Зависимость входа объекта от времени

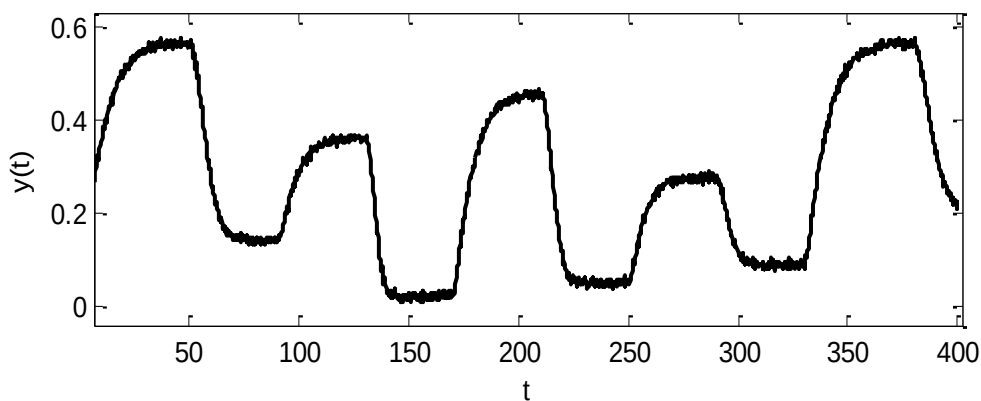


Рисунок 3.8 – Зависимость выхода объекта от времени

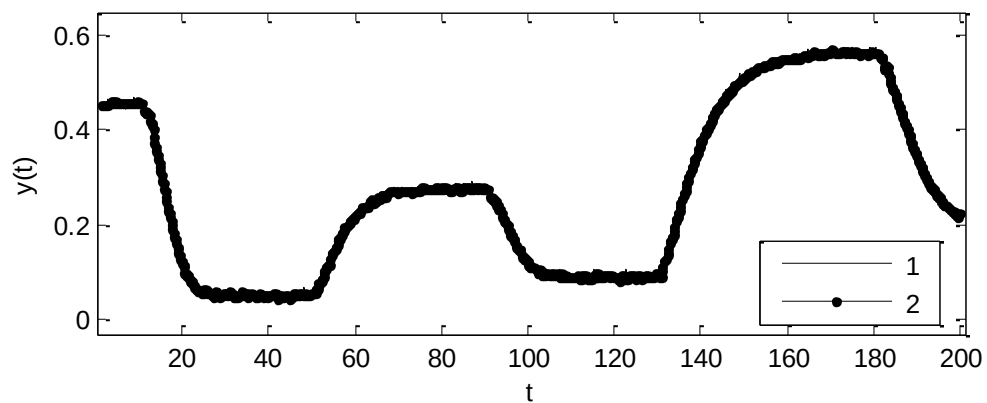


Рисунок 3.9 – Зависимость выхода объекта и выхода модели от времени

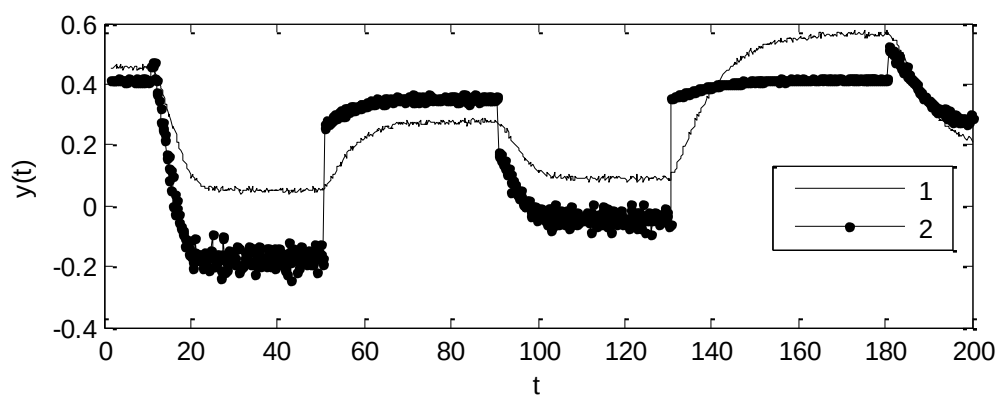


Рисунок 3.10 – Зависимость выхода объекта и выхода модели от времени

ГЛАВА 4

ДИФФУЗНЫЙ ФИЛЬТР КАЛМАНА

В этой главе рассматриваются задачи оценивания состояния и параметров дискретных динамических объектов при отсутствии или не полной априорной статистической информации о начальных условиях. Рассматриваются две постановки задачи. В рамках первой неизвестные начальные условия интерпретируются как диффузные. В рамках второй – как неизвестные постоянные или случайные величины с неизвестными статистическими характеристиками. При этом не используются какие-либо предположения статистического характера о природе неизвестных начальных условий. Получены диффузные аналоги фильтра Калмана и расширенного фильтра Калмана. В качестве практических приложений рассмотрены задачи построения фильтров со скользящим окном, наблюдателей, восстанавливающих состояние за конечное время, обучение рекуррентных НС и задача оценивания состояния нелинейных систем с частично неизвестной динамикой.

4.1 Постановка задачи

Пусть задана линейная дискретная система

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t w_t, y_t = C_t x_t + D_t \xi_t, t \in T = \{a, a+1, \dots\}. \quad (4.1)$$

Здесь $x_t \in R^n$ – вектор состояния системы, $y_t \in R^m$ – измерение, $w_t \in R^r$ и $\xi_t \in R^l$ – некоррелированные случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и матрицами ковариации $E(w_t w_t^T) = I_r, E(\xi_t \xi_t^T) = I_l$, A_t, B_t, C_t, D_t – известные матрицы соответствующих размерностей.

Пусть начальное состояние системы (4.1) x_a удовлетворяет следующим условиям:

А1. Случайный вектор x_a не коррелирован с w_t и ξ_t для $t \in T$.

А2. Без ограничения общности предполагается, что элементы вектора состояния упорядочены таким образом, что имеется априорная информация относительно его первых $q \in \{1, \dots, n-1\}$ компонент в начальный момент $t = a$

$$m_i^a = E[x_{ia}], \bar{s}_{ij}^a = E[(x_{ia} - m_i^a)(x_{ja} - m_j^a)], i, j = 1, 2, \dots, q. \quad (4.2)$$

A3. Случайные величины $x_{ia}, i = 1, 2, \dots, q, q \geq 1$ не коррелированы с $x_{ia}, i = q + 1, q + 2, \dots, n$.

A4. Априорная информация относительно оставшихся $n - q$ компонент x_a отсутствует, и они интерпретируются, как случайные величины, имеющие нулевое математическое ожидание и матрицу ковариации пропорциональную большому параметру $\mu > 0$, т.е.

$$E[x_{ia}] = 0, E[x_{ia}x_{ja}] = \mu \tilde{s}_{ij}^a, i, j = q + 1, q + 2, \dots, n, \quad (4.3)$$

где $\tilde{S}_a = \|\tilde{s}_{ij}^a\|_{q+1}^n > 0$.

A4. Если априорная информация относительно всего вектора x_a отсутствует, то выполняются только условия A1, A4 с $q = 0$.

Требуется найти предельные соотношения для фильтра Калмана (ФК) при $\mu \rightarrow \infty$ и исследовать их свойства. Мы будем называть их диффузным ФК (ДФК).

Рассмотрим альтернативный подход к задаче оценке состояния системы (4.1) при отсутствии априорной информации о начальных условиях. В рамках этого подхода предполагается, что x_a удовлетворяет следующим условиям.

B1: Без ограничения общности предполагается, что элементы вектора состояния упорядочены таким образом, что имеется априорная информация (4.2) относительно его первых $q \in \{1, \dots, n - 1\}$ компонент в начальный момент $t = a$.

B2: Априорная информация относительно оставшихся $n - q$ компонент x_a отсутствует, и они могут быть либо неизвестными постоянными, либо случайными величинами, статистические характеристики которых неизвестны.

B3: Если $x_{ia}, i = 1, 2, \dots, q$ являются случайными величинами, то они не коррелированы с w_t и ξ_t для $t \in T$.

B4: Если априорная информация относительно всего вектора x_a отсутствует, то выполняются только условия B2, B3 с $q = 0$.

Требуется найти условия существования линейной оценки

$$\hat{x}_b = \Omega_{b-1,a} m_a + \sum_{t=a}^{b-1} Y_{b-1,t} y_t \quad (4.4)$$

состояния x_b по измерениям $y_a, y_{a+1}, \dots, y_{b-1}$, $b \in \{a + 1, a + 2, \dots\}$ и рекуррентное представление для ее вычисления, где матрицы $Y_{b-1,t} \in R^{n \times m}$ и

$\Omega_{b-1,a} \in R^{n \times q}$ не зависят от неизвестной априорной информации о векторе x_a , $m^a = (m_1^a, \dots, m_q^a)^T$. При этом оценка должна быть несмещенной и иметь минимальную дисперсию ошибки оценивания

$$E(\hat{x}_b) = E(x_b), \quad E((x_b - \hat{x}_b)^T (x_b - \hat{x}_b)). \quad (4.5)$$

4.2 Оценивание при диффузной инициализации

Рассмотрим задачу оценивания вектора состояния системы (4.1) в предположении выполнения условий A1 – A5

При сделанных предположениях, линейная несмещенная оценка состояния системы (4.1) с минимальной среднеквадратической ошибкой (ФК) определяется из системы уравнений [82]

$$\hat{x}_{t+1} = A_t \hat{x}_t + K_t (y_t - C_t \hat{x}_t), \quad \hat{x}_a = (m_a^T, 0_{1 \times (n-q)})^T, \quad t \in T = \{a, a+1, \dots\} \quad (4.7)$$

где

$$K_t = A_t P_t C_t^T N_t^{-1}, \quad (4.8)$$

$$P_{t+1} = A_t P_t A_t^T - A_t P_t C_t^T N_t^{-1} C_t P_t A_t^T + V_{2t}, \quad P_a = \text{block diag}(\bar{S}_a, \mu \tilde{S}_a), \quad (4.9)$$

$$N_t = C_t P_t C_t^T + V_{1t}, \quad V_{1t} = D_t D_t^T, \quad V_{2t} = B_t B_t^T,$$

$$m_a = (m_1^a, \dots, m_q^a)^T, \quad \bar{S}_a = \|\bar{s}_{ij}^a\|_{q+1}^n \in R^{q \times q}, \quad \tilde{S}_a = \|\tilde{s}_{ij}^a\|_{q+1}^n \in R^{(n-q) \times (n-q)}.$$

Мы хотим исследовать поведение ФК при больших значениях μ и найти предельные соотношения при $\mu \rightarrow \infty$. Докажем два вспомогательных утверждения, которые понадобятся нам для решения этой задачи.

Лемма 4.1. Матрица ковариации ошибки оценивания P_t удовлетворяет при $t \in T$ тождеству

$$P_t = S_t + Q_t = S_t + R_t M_t^{-1} R_t^T, \quad (4.10)$$

где

$$S_{t+1} = A_t S_t A_t^T - A_t S_t C_t^T N_{1t}^{-1} C_t S_t A_t^T + V_{2t}, \quad S_a = \text{block diag}(\bar{S}_a, 0_{(n-q) \times (n-q)}), \quad (4.12)$$

$$R_{t+1} = A_{1t} R_t, \quad A_{1t} = A_t - A_t S_t C_t^T N_{1t}^{-1} C_t, \quad R_a = (e_{q+1}, \dots, e_n), \quad (4.12)$$

$$M_{t+1} = M_t + R_t^T C_t^T N_{1t}^{-1} C_t R_t, \quad M_a = \tilde{S}_a^{-1} / \mu, \quad (4.13)$$

$$Q_{t+1} = A_{1t} Q_t A_{1t}^T - A_{1t} Q_t C_t^T N_t^{-1} C_t Q_t A_{1t}^T, \quad Q_a = \text{block diag}(0_{q \times q}, \mu \bar{S}_a), \quad (4.14)$$

$$N_{1t} = C_t S_t C_t^T + V_{1t}, \quad N_t = C_t (S_t + Q_t) C_t^T + V_{1t}.$$

$$S_t \in R^{n \times n}, R_t \in R^{n \times (n-q)}, M_t \in R^{(n-q) \times (n-q)}, Q_t \in R^{n \times n}.$$

Доказательство. Первое равенство в (4.10) следует из известного свойства [83] дискретного матричного уравнения Риккати:

$$Q_t = \tilde{P}_t - \bar{P}_t, t \in T,$$

где $\tilde{P}_t, \bar{P}_t$ – произвольные решения уравнения (4.9). Докажем второе. Покажем, что

$$Q_t = R_t M_t^{-1} R_t^T. \quad (4.15)$$

Подстановка этого выражения в (4.14) дает

$$R_{t+1} M_{t+1}^{-1} R_{t+1}^T = R_t M_t^{-1} R_t^T - R_t M_t^{-1} R_t^T C_t^T N_t^{-1} C_t R_t M_t^{-1} R_t^T.$$

Это равенство справедливо при условии, что M_t^{-1} удовлетворяет разностному уравнению

$$M_{t+1}^{-1} = M_t^{-1} - M_t^{-1} R_t^T C_t^T N_t^{-1} C_t R_t M_t^{-1}.$$

Преобразуя его с помощью тождества (2.7) для $B = M_t^{-1}, C = C_t R_t, D = N_{1t}$, получим

$$M_{t+1}^{-1} = (M_t + R_t^T C_t^T N_{1t}^{-1} C_t R_t)^{-1}. \quad (4.16)$$

Откуда следуют (4.13) и (4.10).

Лемма 4.2. Матричный коэффициент усиления в (4.8) удовлетворяет при $t \in T$ тождеству

$$K_t = A_t (S_t + Q_t) C_t^T N_t^{-1} = (A_t S_t + A_{1t} R_t M_{t+1}^{-1} R_t^T) C_t^T N_{1t}^{-1}. \quad (4.17)$$

Доказательство. Первое равенство в (4.17) следует из леммы 4.1. Докажем второе. Покажем сначала, что

$$K_t = A_t P_t C_t^T N_t^{-1} = A_t S_t C_t^T N_{1t}^{-1} + A_{1t} Q_t C_t^T N_t^{-1}.$$

Так как

$$P_t = S_t + Q_t$$

(лемма 4.1), то должно быть

$$A_t (S_t + Q_t) C_t^T = A_t S_t C_t^T N_{1t}^{-1} N_t + A_{1t} Q_t C_t^T.$$

Преобразовывая правую часть этого выражения, устанавливаем, что

$$\begin{aligned} A_t S_t C_t^T N_{1t}^{-1} N_t + A_{1t} Q_t C_t^T &= A_t S_t C_t^T (I_m + N_{1t}^{-1} C_t Q_t C_t^T) + (A_t - A_t S_t C_t^T N_{1t}^{-1} C_t) Q_t C_t^T = \\ &= A_t (S_t + Q_t) C_t^T. \end{aligned}$$

Используя (4.15), (4.16) находим

$$\begin{aligned} A_{1t} Q_t C_t^T N_t^{-1} &= A_{1t} R_t M_t^{-1} R_t^T C_t^T N_t^{-1} = \\ &= A_{1t} R_t M_{t+1}^{-1} (M_t + R_t^T C_t^T N_{1t}^{-1} C_t R_t) M_t^{-1} R_t^T C_t^T N_t^{-1} = \\ &= A_{1t} R_t M_{t+1}^{-1} (R_t^T C_t^T + R_t^T C_t^T N_{1t}^{-1} C_t R_t M_t^{-1} R_t^T C_t^T) N_t^{-1} = \\ &= A_{1t} R_t M_{t+1}^{-1} R_t^T C_t^T N_{1t}^{-1} (N_{1t} + C_t R_t M_t^{-1} R_t^T C_t^T) N_t^{-1} = \\ &= A_{1t} R_t M_{t+1}^{-1} R_t^T C_t^T N_{1t}^{-1}. \end{aligned}$$

Откуда следует (4.17).

Теорема 4.1. Пусть $\bar{T} = \{a, a+1, \dots, b\}$ произвольное, ограниченное множество.

Тогда: 1. Справедливы равномерные по $t \in \bar{T}$ асимптотические представления

$$P_t = R_t (I_{n-q} - W_t W_t^+) \tilde{S}_a R_t^T \mu + S_t + R_t W_t^+ R_t^T + O(\mu^{-1}), \quad \mu \rightarrow \infty, \quad (4.18)$$

$$K_t = \begin{cases} 0, & C_t = 0 \\ K_t^{dif} + O(\mu^{-1}), & \mu \rightarrow \infty, C_t \neq 0 \end{cases}, \quad (4.19)$$

где

$$W_{t+1} = W_t + R_t^T C_t^T N_{1t}^{-1} C_t R_t, W_a = 0_{(n-q) \times (n-q)}. \quad (4.20)$$

$$K_t^{dif} = (A_t S_t + A_{1t} R_t W_{t+1}^+ R_t^T) C_t^T N_{1t}^{-1}, \quad (4.21)$$

S_t и R_t – решения уравнений (4.11), (4.12), соответственно.

2. Для любого $\varepsilon > 0$ равномерно по $t \in \bar{T}$ выполняется условие

$$P(\|\hat{x}_t - \hat{x}_t^{dif}\| \geq \varepsilon) = O(\mu^{-1}), \quad \mu \rightarrow \infty, t \in \bar{T}, \quad (4.22)$$

где

$$\hat{x}_{t+1}^{dif} = A_t \hat{x}_t^{dif} + K_t^{dif} (y_t - C_t \hat{x}_t^{dif}), \quad \hat{x}_a^{dif} = (m_a^T, 0_{1 \times (n-q)})^T. \quad (4.23)$$

Доказательство. 1. Из (4.13) следует, что

$$M_t = \tilde{S}_a^{-1} / \mu + \sum_{s=a}^{t-1} R_s^T C_s^T N_{1t}^{-1} C_s R_s = \tilde{S}_a^{-1} / \mu + W_t.$$

Используя лемму 2.7 для $\Omega_t = M_t$, $\Omega_0 = \tilde{S}_a^{-1}$, $F_t = N_{1t}^{-1/2} C_t R_t$, получим

$$M_t^{-1} = (I_{n-q} - W_t W_t^+) \tilde{S}_a \mu + W_t^+ + O(\mu^{-1}), \quad \mu \rightarrow \infty.$$

Подстановка этого выражения в (4.10) дает (4.18).

Из (4.8) следует, что $K_t = 0$, если $C_t = 0$. Пусть $C_t \neq 0$. Использование леммы 2.2 дает

$$(I_{n-q} - W_{t+1} W_{t+1}^+) R_t^T C_t^T N_{1t}^{-1/2} = 0,$$

что влечет (4.19).

2. Вводя обозначение $h_t = E(x_t - \hat{x}_t^{dif})$ и используя (4.1), (4.23), получим

$$\begin{aligned} h_{t+1} &= A_t h_t + (K_t - K_t^{dif}) E(y_t) - K_t C_t E(\hat{x}_t) + K_t^{dif} C_t E(\hat{x}_t^{dif}) = \\ &= (A_t - K_t^{dif} C_t) h_t + (K_t - K_t^{dif}) E(y_t) + (K_t^{dif} - K_t) C_t E(\hat{x}_t). \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} \|h_t\| &\leq \sum_{s=1}^{t-1} \|H_{t,s+1}\| (\|K_s - K_s^{dif}\| (\|E(y_s)\| + \|C_s\| \|E(\hat{x}_t^{dif})\|)) \leq \\ &\leq \eta(N, \mu) \max_{s=1,2,\dots,t} \|K_s^{dif} - K_s\|, \end{aligned}$$

где $H_{t,s}$ – переходная матрица системы

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= (A_t - K_t^{dif} C_t) x_t, \\ \eta(N, \mu) &= \sum_{s=1}^N \|H_{t,s+1}\| (\|E(y_s)\| + \|C_s\| \|E(\hat{x}_t^{dif})\|). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Из (4.19) следует

$$\|K_s - K_s^{dif}\| = O(\mu^{-1})$$

при $s=1,2,\dots,t$, $t \in \bar{T}$ и $\mu \rightarrow \infty$, что влечет $\eta(N, \mu) < \text{const}$ и оценку $\|e_t\| = O(\mu^{-1})$, $\mu \rightarrow \infty$.

Использование неравенства Маркова дает

$$P(\|\hat{x}_t - \hat{x}_t^{dif}\| \geq \varepsilon) \leq \|h_t\| / \varepsilon = O(\mu^{-1}), \mu \rightarrow \infty, t \in \bar{T}.$$

Систему уравнений (4.23), (4.20), (4.21) будем называть диффузным ФК (ДФК).

Следствие 4.1.1. Диффузная составляющая

$$P_t^{dif} = R_t (I - W_t W_t^+) \tilde{S}_a^{-1} R_t^T \mu$$

— компонента в разложении P_t пропорциональная большому параметру — равна нулю, начиная с момента $tr = \min_t \{t : W_t > 0, t = a, a+1, \dots\}$.

Следствие 4.1.2. Матрица K_t не зависит от диффузной составляющей, и в отличие от матрицы P_t , как функция μ равномерно ограничена по норме при $t \in \bar{T}$ и $\mu \rightarrow \infty$.

Следствие 4.1.3. Ошибки численной реализации могут приводить к расходимости ФК при больших μ . Действительно, положим

$$\tilde{K}_t^{dif} = R_t (I_{n-q} - W_t (W_t^+ + \delta W_t^+)) \tilde{S}_a^{-1} R_t^T C_t^T N_{1t}^{-1} \mu,$$

где δW_t^+ — ошибка, связанная с вычислением псевдообратной матрицы W_t^+ . При $\delta W_t^+ \neq 0$ матрица $\tilde{K}_t^{dif}$ уже не равна нулю и коэффициент усиления ФК K_t становится зависимым от диффузной составляющей.

Установим свойства оптимальности ДФК.

Найдем вначале соотношение для переходной матрицы $H_{t,s}$ (4.24), удовлетворяющей системе уравнений

$$H_{t+1,s} = (I_r - K_t^{dif} C_t) H_{t,s} = \tilde{A}_t H_{t,s}, H_{t,s} = I_n, t \geq s.$$

Лемма 4.3. Справедливы представления

$$H_{t,s} = \Phi_{t,s} - R_t W_t^{-1} \sum_{i=s}^{t-1} R_i^T C_i^T N_{1i}^{-1} C_i \Phi_{i,s}, t \geq t_{tr}, s < t, \quad (4.25)$$

$$(\tilde{K}_t^{dif})^T Z_{t+1,s} = N_{1t}^{-1} C_t R_t W_s^{-1} R_s^T = f_{t,s}, \quad (4.26)$$

где $H_{t,s}$, $\Phi_{t,s}$ определяется из систем уравнений

$$H_{t+1,s} = (A_t - K_t^{dif} C_t) H_{t,s} = \tilde{A}_t H_{t,s}, H_{t,s} = I_n, t \geq s, \quad (4.27)$$

$$\Phi_{t+1,s} = A_{1t} \Phi_{t,s}, \Phi_{s,s} = I_n, t > s. \quad (4.28)$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательные системы уравнений

$$G_{t,s} = (A_t - K_t^{dif} C_t)^T G_{t+1,s} = \tilde{A}_t^T G_{t+1,s}, G_{s,s} = I_n, \quad (4.29)$$

$$Z_{t,s} = A_{1t}^T Z_{t+1,s} - C_t^T N_{1t}^{-1} C_t R_t W_s^{-1} R_s^T, Z_{s,s} = I_n. \quad (4.30)$$

Покажем вначале, что

$$G_{t,s} = Z_{t,s}, t = s-1, s-2, \dots, s \geq tr. \quad (4.31)$$

Итерируя (4.30), (4.28), получим

$$Z_{t,s} = A_{1t}^T A_{1t+1}^T \dots A_{1s-1}^T - A_{1t}^T A_{1t+1}^T \dots A_{1s-2}^T f_{s-1,s} - \dots - f_{t,s}, t \geq t_{tr}, t \geq s.$$

$$\Phi_{t,s} = A_{1t-1} A_{1t-2} \dots A_{1s},$$

$$\Phi_{s,t}^T = (A_{1s-1} A_{1s-2} \dots A_{1t})^T = A_{1t}^T A_{1t+1}^T \dots A_{1s-1}^T.$$

С учетом этих выражений $Z_{t,s}$ примет вид

$$\begin{aligned} Z_{t,s} &= \Phi_{s,t}^T - \Phi_{s+1,t}^T f_{s-1,s} - \dots - f_{t,s} = \\ &= \Phi_{s,t}^T - \sum_{j=t}^{s-1} \Phi_{j,t}^T C_j^T N_{1j}^{-1} C_j R_j W_s^{-1} R_s^T, t \geq t_{tr}, t \geq s. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Представим (4.29) в следующей эквивалентной форме

$$G_{t,s} = (A_t - K_t^{dif} C_t)^T G_{t+1,s} = (\tilde{A}_t - \tilde{K}_t^{dif} C_t)^T G_{t+1,s}, G_{s,s} = I_n, \quad (4.33)$$

где $\tilde{K}_t^{dif} = R_{t+1}^+ W_{t+1}^T R_t^T C_t^T N_{1t}^{-1}$. Из сравнения правых частей (4.30) и (4.33) следует, что (4.31) выполняется, если

$$(K_t^d)^T Z_{t,s} = N_t^{-1} C_t R_t W_s^{-1} R_s^T. \quad (4.34)$$

Подставляя (4.32) в левую часть (4.34), получим

$$\begin{aligned} (\tilde{K}_t^{dif})^T Z_{t+1,s} &= N_{1t}^{-1} C_t R_t W_{t+1}^+ R_{t+1}^T (\Phi_{s,t+1}^T - \sum_{j=t+1}^{s-1} \Phi_{j,t+1}^T C_j^T N_{1j}^{-1} C_j R_j W_s^{-1} R_s^T) = \\ &= N_{1t}^{-1} C_t R_t W_{t+1}^+ (I_n - \sum_{j=t+1}^{s-1} R_j^T C_j^T N_{1j}^{-1} C_j R_j W_s^{-1}) R_s^T = \\ &= N_{1t}^{-1} C_t R_t W_{t+1}^+ W_{t+1}^{-1} R_s^T. \end{aligned} \quad (4.35)$$

При выводе (4.35) мы воспользовались тождествами

$$R_{t+1} = \Phi_{t+1,a} R_a, \quad \Phi_{s,t+1} \Phi_{t+1,a} = \Phi_{s,a},$$

$$\Phi_{j,t+1} R_{t+1} = \Phi_{j,t+1} \Phi_{t+1,a} R_a = \Phi_{j,a} R_a = R_j.$$

Выполнение (4.25) и (4.34) следует из равенств

$$N_{1t}^{-1/2} C_t R_t W_t^+ W_t = N_{1t}^{-1/2} C_t R_t (L_t^T)^+ \tilde{\Gamma}_t^{-1} L_t^+ \tilde{\Gamma}_t L_t^T =$$

$$= N_{1t}^{-1/2} C_t R_t L_t (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T = \Gamma_{tt}^T (L_t^T L_t) (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T = N_{1t}^{-1/2} C_t R_t.$$

$$G_{s,t} = \tilde{A}_s^T \tilde{A}_{s+1}^T \dots \tilde{A}_{t-1}^T, \quad H_{t,s} = \tilde{A}_{t-1} \tilde{A}_{t-2} \dots \tilde{A}_s, \quad H_{t,s} = G_{s,t}^T,$$

а (4.26) из (4.34).

Теорема 4.2. Оценка состояния системы (4.1), полученная с помощью ДФК является несмещенной при $t \geq t_r$ с матрицей ковариации ошибки оценивания, определяемой выражением

$$P_t^{dif} = E((x_t - \hat{x}_t^{dif})(x_t - \hat{x}_t^{dif})^T) = S_t + R_t W_t^{-1} R_t^T, \quad t \geq t_r, \quad (4.36)$$

где матрицы S_t , R_t , W_t определяются из соотношений (4.11), (4.12), (4.20), соответственно и выполняется условие

$$E(\|x_t - \hat{x}_t\|^2) \geq E(\|x_t - \hat{x}_t^{dif}\|^2), \quad (4.37)$$

где $\hat{x}_t$ - несмещенная оценка при $t \geq t_r$ состояния системы (4.1), определяемая системой уравнений

$$\hat{x}_{t+1} = A_t \hat{x}_t + \tilde{K}_t (y_t - C_t \hat{x}_t), \quad \hat{x}_a = (m_a^T, 0_{1 \times (n-q)})^T, \quad t \in T = \{a, a+1, \dots\} \quad (4.38)$$

с произвольной матрицей коэффициентов усиления $\tilde{K}_t \in R^{n \times m}$, не зависящей от неизвестной априорной информации о начальных условиях.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений для математического ожидания ошибки оценивания $h_t = E(\hat{x}_t^{dif} - x_t)$

$$h_{t+1} = (A_t - K_t^{dif} C_t) h_t,$$

с начальным условием $h_a = (0_{1 \times q}, \tilde{x}^T)^T$, где $\tilde{x} = (x_{a(q+1)}, x_{a(q+2)}, \dots, x_{an})^T$ - произвольный вектор.

Используя лемму 4.3, устанавливаем, что

$$h_t = H_{t,a} h_a = (\Phi_{t,a} - R_t W_t^{-1} \sum_{i=a}^{t-1} R_i^T C_i^T N_{1i}^{-1} C_i \Phi_{i,a}) R_a \tilde{x} = 0.$$

Откуда следует, что оценка $\hat{x}_t^{dif}$ является несмещенной, т.е., $E(\hat{x}_t^{dif}) = E(x_t)$ для $t \geq tr$.

Матрица ковариации ошибки оценивания

$$\tilde{P}_t = E((x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)^T)$$

удовлетворяет уравнению

$$\tilde{P}_{t+1} = (A_t - \tilde{K}_t C_t) \tilde{P}_t (A_t - \tilde{K}_t C_t)^T + \tilde{K}_t V_{1t} \tilde{K}_t^T + V_{2t} \quad (4.39)$$

с некоторой неизвестной матрицей начальных условий при $t = tr$.

Дополняя правую часть (4.39) до полного квадрата, получим

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{t+1} = & A_t \tilde{P}_t A_t^T - A_t \tilde{P}_t C_t^T N_t^{-1} C_t \tilde{P}_t A_t^T + V_{2t} + \\ & (\tilde{K}_t - A_t \tilde{P}_t C_t^T N_t^{-1}) N_t (\tilde{K}_t - A_t \tilde{P}_t C_t^T N_t^{-1})^T. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Откуда следует, что если положить $\tilde{K}_t = A_t \tilde{P}_t C_t^T N_t^{-1}$, то

$$\tilde{P}_{t+1} = A_t \tilde{P}_t A_t^T - A_t \tilde{P}_t C_t^T N_t^{-1} C_t \tilde{P}_t A_t^T + V_{2t}, \quad (4.41)$$

и при этом $\tilde{P}_t \leq \bar{P}_t$ где $\bar{P}_t$ – произвольное решение уравнения (4.39).

Из леммы 4.1 следует, что множество решений уравнения (4.41) включает решение вида

$$P_t^{dif} = S_t + Q_t = S_t + R_t W_t^{-1} R_t^T, \quad t > tr$$

с начальным условием $P_{tr}^{dif} = S_{tr} + R_{tr} W_{tr}^{-1} R_{tr}^T$. Таким образом $P_t^{dif} \leq \tilde{P}_t$.

Замечание 4.1.1. Сравнивая ФК с большим параметром μ , описываемый выражениями (4.7)–(4.9) с ДФК нетрудно увидеть, что с точки зрения объема вычислений он существенно более затратный. Действительно, в случае ДФК мы должны дополнительно в темпе реального времени итерировать два матричных уравнения (4.11) и (4.12). Кроме того, имеется еще целый ряд дополнительных матричных операций, связанных с определением коэффициента усиления ДФК. Вместе с тем, следствие 4.1.3 показывает, что такая сложная структура ДФК компенсируется его устойчивостью к накоплению ошибок, обеспечивая сходимость оценок.

4.3 Оценивание при отсутствии или неполной априорной информации о начальных условиях

В этом разделе будет рассмотрена задача оценивания вектора состояния системы (4.1) в предположении выполнения условий В1 – В4.

Покажем, вначале, что задача несмещенного оценивания вектора состояния (4.1) двойственна специальной задаче управления. Опираясь на этот результат, найдем условия существования и представление для несмещенной оценки.

Рассмотрим вспомогательную линейную систему вида

$$Z_t = A_t^T Z_{t+1} - C_t^T U_t, Z_b = I_n, t = b-1, b-2, \dots, a, \quad (4.42)$$

где $Z_t \in R^{n \times n}$, $U_t \in R^{m \times n}$ – управляющее воздействие.

Лемма 4.4. Пусть существует управление U_t , которое переводит систему (4.42) в состояние, удовлетворяющее условию $\Psi^T Z_a = 0$, где $\Psi = (e_{q+1}, \dots, e_n)$, $e_i \in R^n$ – i -единичный вектор. Тогда, существует и несмещенная оценка состояния системы (4.1) в момент $t = b$ с

$$Y_{b-1,t} = U_t^T, \quad \Omega_{b-1,a} = Z_a^T (e_1, \dots, e_q). \quad (4.43)$$

Доказательство. Использование тождества

$$x_b = Z_a^T x_a + \sum_{t=a}^{b-1} (Z_{t+1}^T x_{t+1} - Z_t^T x_t), \quad (4.44)$$

(4.1) и (4.4) дает

$$\begin{aligned} x_b &= Z_a^T x_a + \sum_{t=a}^{b-1} [Z_{t+1}^T (A_t x_t + B_t w_t) - (Z_{t+1}^T A_t - U_t^T C_t) x_t] = \\ &= Z_a^T x_a + \sum_{t=a}^{b-1} (Z_{t+1}^T B_t w_t + U_t^T C_t x_t). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Поэтому, выражение для ошибки оценивания в момент $t = b$ может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} e_b &= x_b - \hat{x}_b = Z_a^T x_a - \Omega_{b-1,a} m_a + \sum_{t=a}^{b-1} (Z_{t+1}^T B_t w_t + U_t^T C_t x_t - Y_{b-1,t} y_t) = \\ &= Z_a^T x_a - Z_a^T (e_1, \dots, e_q) m_a + \sum_{t=a}^{b-1} (Z_{t+1}^T B_t w_t - U_t^T D_t \xi_t) = \\ &= Z_a^T q_1 + Z_a^T q_2 + \sum_{t=a}^{b-1} (Z_{t+1}^T B_t w_t - U_t^T D_t \xi_t), \end{aligned} \quad (4.46)$$

где

$$q_1 = (x_a(1) - m_1^a, x_a(2) - m_2^a, \dots, x_a(q) - m_q^a, 0, 0, \dots, 0)^T \in R^n,$$

$$q_2 = (0, 0, \dots, 0, x_a(q+1), x_a(q+2), \dots, x_a(n))^T \in R^n.$$

Усредняя левую и правую части этого выражения и используя условие леммы $\Psi^T Z_a = 0$, получим

$$\begin{aligned} E(e_b) &= E(Z_a^T q_1) + E(Z_a^T q_2) = Z_a^T E(q_2) = \\ &= Z_a^T \Psi \{E[x_a(q+1)], E[x_a(q+2)], \dots, E[x_a(n)]\}^T = 0. \end{aligned}$$

Лемма 4.4. Пусть

$$W_{a,b} = \sum_{j=a}^{b-1} \Psi^T \Phi_{j,a}^T C_j^T C_j \Phi_{j,a} \Psi > 0, \quad (4.47)$$

где матрица $\Phi_{t,a}$ определяется из системы

$$\Phi_{t+1,a} = A_t \Phi_{t,a}, \Phi_{a,a} = I_n, t \in T.$$

Тогда: 1. Существует несмещенная оценка вектора состояния системы (4.1) в момент $t = b$. 2. Если дополнительно для любого отличного от нуля вектора $p \in R^{n-q}$

$$A_{b-1} \dots A_a (0_{1 \times q}, p^T)^T \neq 0, \quad (4.48)$$

то условие (4.47) и необходимо для существования несмещенной оценки состояния системы (4.1) в момент $t = b$.

Доказательство. 1. Покажем, что при выполнении (4.47) существует управление, о котором говорится в лемме 4.1. Подстановкой в (4.42) проверяется, что

$$Z_t = G_{t,b} Z_b - \sum_{j=t}^{b-1} G_{t,j} C_j^T U_j, t = b-1, b-2, \dots, a, \quad (4.49)$$

где матрица $G_{t,s}$ определяется из системы

$$G_{t,s} = A_t^T G_{t+1,s}, G_{s,s} = I_n, s \geq t.$$

Используя граничное условие $\Psi^T Z_a = 0$, из (4.49) находим

$$0 = \Psi^T G_{a,b} Z_b - \sum_{j=a}^{b-1} \Psi^T G_{a,j} C_j^T U_j. \quad (4.50)$$

Будем искать решение этой системы в виде

$$U_t = C_t G_{a,t}^T \Psi L,$$

где $L \in R^{(n-q) \times n}$ – постоянная, неизвестная матрица. Тогда, из (4.50) следует, что

$$L = \tilde{W}_{a,b}^{-1} \Psi^T G_{a,b} Z_b$$

при условии, что $\tilde{W}_{a,b} > 0$, где

$$\tilde{W}_{a,b} = \sum_{j=a}^{b-1} \Psi^T G_{a,j} C_j^T C_j G_{a,j}^T \Psi.$$

Но так как

$$G_{t,b} = A_t^T \dots A_{b-1}^T, \Phi_{b,t} = A_{b-1} \dots A_t,$$

то, $G_{t,b}^T = \Phi_{b,t}$ и $W_{a,b} = \tilde{W}_{a,b}$, а управление определяется выражением

$$U_t = C_t G_{a,t}^T \Psi \tilde{W}_{a,b}^{-1} \Psi^T G_{a,b} = C_t \Phi_{t,a} \Psi W_{a,b}^{-1} \Psi^T \Phi_{b,a}^T. \quad (4.51)$$

Утверждение следует из леммы 4.4.

2. Предположим, что существуют такие $Y_{b-1,t}$, $\Omega_{b-1,a}$ при которых оценка (4.4) является несмещенной и выполняется (4.12), но $W_{a,b}$ вырождена. Тогда найдется вектор $p \neq 0$, $p \in R^{n-q}$ такой, что $W_{a,b} p = 0$. Обозначим $\varsigma_t = C_t \Phi_{t,a} \Psi p$. Так как

$$\sum_{t=a}^{b-1} \varsigma_t^T \varsigma_t = p^T W_{a,b} p,$$

то $\varsigma_t = 0$ для любых $t \in \{a, \dots, b-1\}$. Пусть $x_a = (\eta^T, p^T)^T$, где $\eta \in R^q$ – случайный вектор с нулевым математическим ожиданием. Использование (4.1), (4.42) дает

$$\begin{aligned} E(\hat{x}_b) &= \Omega_{b-1,a} E(\eta) + E\left(\sum_{t=a}^{b-1} Y_{b-1,t} y_t\right) = \\ &= \sum_{t=a}^{b-1} Y_{b-1,t} E(y_t) = \sum_{t=a}^{b-1} U_t^T C_t \Phi_{t,a} E(x_t) = \\ &= \sum_{t=a}^{b-1} U_t^T C_t \Phi_{t,a} \Psi p = \sum_{t=a}^{b-1} U_t^T \varsigma_t = 0, \end{aligned}$$

что невозможно при выполнении (4.48), т.к.

$$E(x_b) = \Phi_{b,a} (0_{1 \times q}, p^T)^T = A_{b-1} \dots A_a (0_{1 \times q}, p^T)^T \neq 0.$$

Отметим, что если матрицы A_t , $t \in T$ не вырождены (например, система (4.1) получена в результате дискретизации непрерывной системы), то (4.48) выполняется автоматически.

Несмещенная оценка состояния системы (4.1) определяется выражением

$$\hat{x}_b = Z_a^T (m_a^T, 0_{1 \times (n-q)})^T + \sum_{t=a}^{b-1} \Phi_{b,a} \Psi W_{a,b-1}^{-1} \Psi^T \Phi_{t,a}^T C_t^T y_t,$$

где

$$Z_a = \Phi_{b,a}^T - \sum_{j=a}^{b-1} \Phi_{j,a}^T C_j^T C_j \Phi_{t,a} \Psi W_{a,b}^{-1} \Psi^T \Phi_{b,a}^T.$$

Это утверждение вытекает из леммы 4.4 и выражений (4.49), (4.51).

Покажем, что при сделанных предположениях задача определения оптимальной оценки состояния системы (4.1) (несмещенной оценки с минимальной дисперсией ошибки) двойственна специальной задаче оптимального управления. Опираясь на этот результат, будет найдено рекуррентное представление для оценки состояния системы (4.1).

Рассмотрим систему (4.42) совместно с критерием качества

$$J(U_t) = \text{tr}[Z_a^T \tilde{S}_a Z_a^T + \sum_{t=a}^{b-1} (Z_{t+1}^T V_{2t} Z_{t+1} + U_t^T V_{1t} U_t)], \quad (4.52)$$

Где $S_a = \text{block diag}(\bar{S}_a, 0_{n-q, n-q})$. Требуется выбрать управление U_t из условия минимизации критерия (4.52) на решениях (4.42).

Из леммы 4.4 следует, что если выполняются условия $\Psi^T Z_a = 0$, $Y_{b-1,t} = U_t^T$, $\Omega_{b-1,a} = Z_a^T (e_1, \dots, e_q)$, то оценка состояния системы (4.1) в момент $t=b$ будет несмещенной, а использование (4.46) дает

$$x_b - \hat{x}_b = Z_a^T (x_{1a} - m_1^a, \dots, x_{qa} - m_q^a, 0, \dots, 0)^T + \sum_{t=a}^{b-1} (Z_{t+1}^T B_t w_t - U_t^T D_t \xi_t).$$

Откуда следует, что матрица ковариации и дисперсия ошибки оценивания будут определяться, соответственно, выражениями

$$E[(x_b - \hat{x}_b)(x_b - \hat{x}_b)^T] = Z_a^T \tilde{S}_a Z_a^T + \sum_{t=a}^{b-1} (Z_{t+1}^T V_{2t} Z_{t+1} + U_t^T V_{1t} U_t), \quad (4.53)$$

$$E[(x_b - \hat{x}_b)^T (x_b - \hat{x}_b)] = J(U_t).$$

Таким образом, несмещенная оценка состояния (4.1), имеющая минимальную дисперсию ошибки оценивания может быть найдена из решения, сформулированной задачи, а матрицы $Y_{b-1,t}$, $\Omega_{b-1,a}$, входящие в (4.4) находятся из (4.43).

Докажем сначала несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 4.6. Пусть $W_{a,b} = \sum_{j=a}^{b-1} \Psi^T \Phi_{j,a}^T C_j^T C_j \Phi_{j,a} \Psi > 0$. Тогда, оптимальное программное управление и минимальное значение критерия качества в задаче (4.42), (4.52) определяются выражениями

$$U_t^p = N_t^{-1} C_t (S_t A_t^T Z_{t+1} + R_t M_{a,b}^{-1} R_b^T), \quad (4.54)$$

$$J_{\min} = \text{Tr}(S_b + R_b M_{a,b}^{-1} R_b^T), \quad (4.55)$$

где

$$M_{a,b} = \sum_{t=a}^{b-1} R_t^T C_t^T N_t^{-1} C_t R_t, \quad (4.56)$$

$$Z_t = \Lambda_{b,t}^T - \sum_{j=t}^{b-1} \Lambda_{j,t}^T C_j^T N_j^{-1} C_j R_j M_{a,b}^{-1} R_b^T, \quad (4.57)$$

$$\Lambda_{t+1,s} = A_{1t} \Lambda_{t,s}, \Lambda_{s,s} = I_n, t \geq s, \quad (4.58)$$

$$R_{t+1} = A_{1t} R_t, R_a = \Psi, \quad (4.59)$$

$$S_{t+1} = A_t S_t A_t^T - A_t S_t C_t^T N_t^{-1} C_t S_t A_t^T + V_{2t}, S_a = \bar{S}_a; \quad (4.60)$$

$$A_{1t} = A_t - A_t S_t C_t^T N_t^{-1} C_t, N_t = C_t S_t C_t^T + V_{1t}. \quad (4.61)$$

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$I = -\sum_{t=a}^{b-1} (Z_{t+1}^T S_{t+1} Z_{t+1} - Z_t^T S_t Z_t) + Z_b^T S_b Z_b - Z_a^T S_a Z_a = 0.$$

Преобразовывая его с помощью (4.42), (4.60), получим

$$\begin{aligned} I &= -\sum_{t=a}^{b-1} [Z_{t+1}^T (A_t S_t A_t^T - A_t S_t C_t^T N_t^{-1} C_t S_t A_t^T + V_{2t}) Z_{t+1} - \\ &- (A_t^T Z_{t+1} - C_t^T U_t)^T S_t (A_t Z_{t+1} - C_t^T U_t)] + Z_b^T S_b Z_b - Z_a^T S_a Z_a = \\ &= -\sum_{t=a}^{b-1} [Z_{t+1}^T (-A_t S_t C_t^T N_t^{-1} C_t S_t A_t^T + V_{2t}) Z_{t+1} - Z_{t+1}^T A_t S_t C_t^T U_t + \\ &+ U_t^T C_t S_t A_t^T Z_{t+1} - U_t^T C_t S_t C_t^T U_t] + Z_b^T S_b Z_b - Z_a^T S_a Z_a = 0. \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} J(U_t) &= \text{tr}[Z_a^T \tilde{S}_a Z_a^T + \sum_{t=a}^{b-1} (Z_{t+1}^T V_{2t} Z_{t+1} + U_t^T V_{1t} U_t) + I] = \\ &= \text{tr}[Z_b^T S_b Z_b + \sum_{t=a}^{b-1} (U_t - N_t^{-1} C_t S_t A_t^T Z_{t+1})^T N_t (U_t - N_t^{-1} C_t S_t A_t^T Z_{t+1})]. \quad (4.62) \end{aligned}$$

Положим

$$U_t = N_t^{-1} C_t S_t A_t^T Z_{t+1} + N_t^{-1/2} \tilde{U}_t. \quad (4.63)$$

Подстановка этого выражения в (4.1) и (4.62) дает

$$Z_t = (A_t^T - C_t^T N_t^{-1} C_t S_t A_t^T) Z_{t+1} - C_t^T N_t^{-1/2} \tilde{U}_t = A_{1t}^T Z_{t+1} - C_t^T N_t^{-1/2} \tilde{U}_t, \quad (4.64)$$

$$Z_b = I_n, \Psi^T Z_a = 0, t = b-1, b-2, \dots, a, \quad (4.65)$$

$$J(\tilde{U}_t) = \text{Tr}\{\sum_{t=a}^{b-1} \tilde{U}_t^T \tilde{U}_t + S_b\}. \quad (4.66)$$

Найдем программное управление, переводящее систему (4.64) в состояние, при котором $\Psi^T Z_a = 0$. Имеем

$$Z_t = \Lambda_{t,b} Z_b - \sum_{j=t}^{b-1} \Lambda_{t,j} C_j^T N_j^{-1/2} \tilde{U}_j, t = b-1, b-2, \dots, a. \quad (4.67)$$

Откуда, используя граничное условие $\Psi^T Z_a = 0$, получим

$$0 = \Psi^T \Lambda_{a,b} Z_b - \sum_{j=a}^{b-1} \Psi^T \Lambda_{a,j} C_j^T N_j^{-1/2} \tilde{U}_j. \quad (4.68)$$

Будем искать решение (4.68) в виде $\tilde{U}_t = N_t^{-1/2} C_t \Omega_{a,t}^T \Psi L$, где $L \in R^{(n-q) \times n}$ – постоянная, неизвестная матрица. Подстановка этого выражения в (4.68) дает

$$\begin{aligned} L &= (\sum_{j=a}^{b-1} \Psi^T G_{a,j} C_j^T N_j^{-1/2} C_j G_{a,j}^T \Psi)^{-1} \Psi^T G_{a,b} Z_b = \\ &= (\sum_{j=a}^{b-1} \Psi^T \Lambda_{j,a}^T C_j^T N_j^{-1/2} C_j \Lambda_{j,a} \Psi)^{-1} \Psi^T \Lambda_{b,a}^T Z_b = M_{a,b}^{-1} \Psi^T \Lambda_{b,a}^T Z_b, \end{aligned}$$

если $M_{a,b} > 0$. Откуда следует

$$\tilde{U}_t = N_t^{-1/2} C_t R_t M_{a,b}^{-1} R_b^T Z_b \quad (4.69)$$

и представление (4.54) для U_t .

Покажем, что $\tilde{U}_t$ действительно минимизирует критерий (4.66) на решениях системы (4.64). Пусть $\hat{U}_t$ произвольное управление такое, что $\Psi^T Z_a = 0$. Из (4.67) следует, что

$$\sum_{j=a}^{b-1} \Psi^T \Lambda_{j,t}^T C_j^T N_j^{-1/2} (\tilde{U}_j - \hat{U}_j) = 0.$$

Умножая это выражение слева на матрицу $\Lambda_{j,a} \Psi M_{a,b-1}^{-1}$, получим равенство

$$\sum_{j=a}^{b-1} \tilde{U}_j^T (\tilde{U}_j - \hat{U}_j) = 0,$$

используя которое, находим

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\sum_{j=t}^{b-1} (\tilde{U}_j - \hat{U}_j)^T (\tilde{U}_j - \hat{U}_j)] &= \text{Tr}[\sum_{j=t}^{b-1} (\tilde{U}_j^T \tilde{U}_j - 2\tilde{U}_j^T \hat{U}_j + \hat{U}_j^T \hat{U}_j)] = \\ &= \text{Tr}(\sum_{j=t}^{b-1} \hat{U}_j^T \hat{U}_j) - \text{Tr}(\sum_{j=t}^{b-1} \tilde{U}_j^T \tilde{U}_j) \geq 0. \end{aligned}$$

Выражение (4.55) для минимального значения критерия качества следует из (4.66) и (4.69).

Лемма 4.7. Условие $W_{a,b} > 0$ достаточно для существования оптимального управления. Если $A_{b-1} \dots A_a (0_{1 \times q}, p^T)^T \neq 0$ для любого отличного от нуля вектора $p \in R^{n-q}$, то оно и необходимо.

Доказательство. Достаточность. Покажем, что из $W_{a,b} > 0$ следует $M_{a,b} > 0$. Пусть $W_{a,b} > 0$, но матрица $M_{a,b}$ вырождена. В этом случае найдется отличный от нуля вектор $p \in R^{n-q}$ такой, что $M_{a,b} p = 0$ и, при этом, $C_t R_t p = 0$, $t \in \{a, \dots, b-1\}$. Покажем, что отсюда будут следовать равенства

$$C_t R_t p = C_t A_{t-1} \dots A_a \Psi p = C_t \Phi_{t,a} \Psi p = 0, \quad t \in \{a, \dots, b-1\}. \quad (4.70)$$

Воспользуемся индукцией. Так как

$$\begin{aligned} C_a R_a p &= C_a \Psi p = 0, \\ C_{a+1} R_{a+1} p &= C_{a+1} A_{1a} \Psi p = C_{a+1} (A_a - A_a S_a C_a^T N_a^{-1} C_a) \Psi p = C_{a+1} A_a \Psi p = 0, \end{aligned}$$

то для значений $t = a$ и $t = a+1$ они выполняются. Предположим, что равенства справедливы при $a+2, \dots, t$ и докажем, что они должны выполняться при $t+1$.

Имеем

$$\begin{aligned} C_{t+1} R_{t+1} p &= C_{t+1} (A_t - A_t S_t C_t^T N_t^{-1} C_t) R_t p = \\ &= C_{t+1} A_t R_t p = C_{t+1} A_t (A_{t-1} - A_{t-1} S_{t-1} C_{t-1}^T N_{t-1}^{-1} C_{t-1}) R_{t-1} p = C_{t+1} A_t A_{t-1} R_{t-1} p = \\ &= C_{t+1} \Phi_{t+1,a} \Psi p = 0, \end{aligned}$$

что невозможно, так как

$$p^T W_{a,b} p = \sum_{j=a}^{b-1} p^T \Psi^T \Phi_{j,a}^T C_j^T C_j \Phi_{j,a} \Psi p > 0$$

и, следовательно, должно быть $C_t \Phi_{t,a} \Psi p > 0$ при $t \in \{a, \dots, b-1\}$.

Необходимость. Пусть оптимальное управление U_t существует, но матрица $W_{a,b}$ вырождена. В этом случае найдется отличный от нуля вектор $p \in R^{n-q}$ такой, что $W_{a,b} p = 0$ и при этом

$$C_t \Phi_{t,a} \Psi p = 0, \quad t \in \{a, \dots, b-1\}.$$

Использование граничного условия $\Psi^T Z_a = 0$ и представления

$$Z_t = \Phi_{b,t}^T - \sum_{j=t}^{b-1} \Phi_{j,t}^T C_j^T U_j, \quad t = b-1, b-2, \dots, a$$

для решения системы (4.42) показывает, что должно выполняться условие

$$p^T \Psi^T \Phi_{b,a}^T = \sum_{j=a}^{b-1} p^T \Psi^T \Phi_{j,a}^T C_j^T U_j = 0,$$

что невозможно, так как

$$\Phi_{b,a} \Psi p = A_{b-1} \dots A_a (0_q^T, p^T)^T \neq 0.$$

Обозначим: U_t^p – оптимальное программное управление, U_t^f – оптимальное управление с обратной связью.

Лемма 4.8. Пусть $W_{a,b} > 0$. Тогда оптимальное управление с обратной связью определяется выражением

$$U_t^f = N_t^{-1} C_t (S_t A_t^T + R_t M_{a,t+1}^+ R_{t+1}^T) Z_{t+1}, \quad t = b-1, b-2, \dots, a. \quad (4.71)$$

Доказательство. Для получения управления с обратной связью заменим в (4.54) b на $t+1$, Z_b на Z_{t+1} и $M_{a,b}^{-1}$ на $M_{a,t+1}^+$, что дает (4.71). Покажем, что это управление действительно решает поставленную задачу. Рассмотрим систему (4.42) под действием управлений (4.54), (4.71).

Имеем

$$Z_t^p = A_t^T Z_{t+1}^p - C_t^T U_t^p, \quad (4.72)$$

$$Z_t^f = (A_t^T - C_t^T G_t) Z_{t+1}^f, \quad (4.73)$$

где

$$G_t = N_t^{-1} C_t (S_t A_t^T + R_t M_{a,t+1}^+ R_{t+1}^T) = G_{1t} + G_{2t}.$$

Покажем, что Z_t^p удовлетворяет системе (4.73). Подставляя U_t^p в (4.72), получим

$$Z_t^p = A_{1t}^T Z_{t+1}^p - C_t^T N_t^{-1} C_t R_t M_{a,b}^{-1} R_b^T.$$

Откуда находим

$$Z_t^p = \Lambda_{b,t}^T - \sum_{j=t}^{b-1} \Lambda_{j,t}^T C_j^T N_j^{-1} C_j R_j M_{a,b}^{-1} R_b^T.$$

Имеем

$$\begin{aligned} G_{2t} Z_{t+1}^p &= N_t^{-1} C_t R_t M_{a,t+1}^+ R_{t+1}^T (\Lambda_{b,t}^T - \sum_{j=t+1}^{b-1} \Lambda_{j,t+1}^T C_j^T N_j^{-1} C_j R_j M_{a,b}^{-1} R_b^T) = \\ &= N_t^{-1} C_t R_t M_{a,t+1}^+ (I_n - \sum_{j=t+1}^{b-1} R_j^T C_j^T N_j^{-1} C_j R_j M_{a,b}^{-1}) R_b^T = \\ &= N_t^{-1} C_t R_t M_{a,t+1}^+ M_{a,t+1} M_{a,b}^{-1} R_b^T. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Выражение (4.74) следует из тождеств

$$\begin{aligned} R_{t+1} &= \Lambda_{t+1,a} \Psi, \quad \Lambda_{b,t+1} \Lambda_{t+1,a} = \Lambda_{b,a}, \\ \Lambda_{j,t+1} R_{t+1} &= \Lambda_{j,t+1} \Lambda_{t+1,a} \Psi = \Lambda_{j,a} \Psi = R_j. \end{aligned}$$

Преобразуем (4.74), используя представление $M_{a,t} = V_t V_t^T$, где

$$V_t = (R_a^T C_a^T \tilde{N}_a, \dots, R_t^T C_t^T \tilde{N}_t), \quad N_j^{-1} = \tilde{N}_j \tilde{N}_j^T. \quad (4.75)$$

Пусть $l_{1t}, l_{2t}, \dots, l_{k(t),t}$ линейно независимые столбцы матрицы V_t такие, что $l_{k(t),t}$ совпадает с последним столбцом матрицы V_t . Использование скелетного разложения дает $V_t = L_t \Gamma_t$, где $L_t = (l_{1t}, l_{2t}, \dots, l_{k(t),t}) \in R_{k(t)}^{(n-q) \times k(t)}$, $\Gamma_t \in R_{k(t)}^{k(t) \times (t-a+1)}$, $R_r^{k \times l}$ — множество $k \times l$ матриц ранга r . Так как $\tilde{\Gamma}_t = \Gamma_t \Gamma_t^T > 0$ — матрица Грамма, построенная по линейно независимым строкам матрицы Γ_t и $\text{rank}(L_t) = \text{rank}(\tilde{\Gamma}_t L_t^T)$, то

$$M_{a,t} = L_t \tilde{\Gamma}_t L_t^T, M_{a,t}^+ = (L_t \tilde{\Gamma}_t L_t^T)^+ = (L_t^T)^+ \tilde{\Gamma}_t^{-1} L_t^+.$$

Подставляя эти выражения в (4.74) и используя представления $L_t^+ = (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T$, находим

$$\begin{aligned} G_{2t} Z_{t+1}^p &= N_t^{-1} C_t R_t (L_t^T)^+ \tilde{\Gamma}_t^{-1} L_t^+ L_t \tilde{\Gamma}_t L_t^T M_{a,b}^{-1} R_b^T = \\ &= N_t^{-1} C_t R_t L_t (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T R_t^T M_{a,b}^{-1} R_b^T. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Из (4.75) следует, что $R_t^T C_t^T \tilde{N}_t = L_t \Gamma_{1t}$, где Γ_{1t} - некоторая прямоугольная матрица. Подстановка этого выражения в (4.76) дает

$$G_{2t} Z_{t+1}^p = \tilde{N}_t \Gamma_{1t}^T L_t^T L_t (L_t^T L_t)^{-1} L_t^T R_t^T M_{a,b}^{-1} R_b^T = N_t^{-1} C_t R_t M_{a,b}^{-1} R_b^T,$$

что и требовалось доказать. Лемма доказана.

Теорема 4.3. 1. 1. Состояние системы

$$\hat{x}_{t+1} = A_t \hat{x}_t + K_t (y_t - C_t \hat{x}_t), \hat{x}_a = (\tilde{m}_a^T, 0_{n-q}^T)^T, t \in T \quad (4.77)$$

при $t \geq t_{tr}$, $t_{tr} = \min_t \{t : W_{a,t} > 0, t = a, a+1, \dots\}$ является несмещенной оценкой с минимальной дисперсией ошибки, где

$$K_t = (A_t S_t + A_{1t} R_t M_{a,t+1}^+ R_t^T) C_t^T N_t^{-1}, \quad (4.78)$$

$$S_{t+1} = A_t S_t A_t^T - A_t S_t C_t^T N_t^{-1} C_t S_t A_t^T + V_{2t}, S_a = \bar{S}_a, \quad (4.79)$$

$$R_{t+1} = (A_t - A_t S_t C_t^T N_t^{-1} C_t) R_t, R_a = (e^{q+1}, \dots, e^n), \quad (4.80)$$

$$M_{a,t+1} = M_{a,t} + R_t^T C_t^T N_t^{-1} C_t R_t, M_{a,a} = 0. \quad (4.81)$$

2. Матрица ковариации ошибки оценивания дается выражением

$$P_t = S_t + R_t M_{a,t}^{-1} R_t^T. \quad (4.82)$$

Доказательство. 1. Положим в (4.4)

$$Y_{b-1,t} = (U_t^p)^T, \Omega_{b-1,a} = Z_a^T (e^1, \dots, e^q), b \geq t_{tr},$$

где U_t^p и Z_a были определены ранее в лемме 4.6. Матрицы $Y_{b-1,t}$, $\Omega_{b-1,a}$ выбраны таким образом, что выполнены условия леммы 4.6 из которой следует оптимальность оценки в момент $t = b$ и представление

$$\hat{x}_b = \sum_{t=a}^{b-1} (U_t^p)^T y_t + Z_a^T (\tilde{m}_a^T, 0_{n-q}^T)^T.$$

Из леммы 4.7 следует, что $U_t^p = U_t^f$ для любых $t \in T$. С учетом этого

$$\begin{aligned} \hat{x}_t &= \sum_{s=a}^{t-1} (U_s^f)^T y_s + Z_a^T (\tilde{m}_a^T, 0_{n-q}^T)^T \\ &= \sum_{s=a}^{t-1} H_{s+1,t}^T K_s y_s + H_{a,t}^T (\tilde{m}_a^T, 0_{n-q}^T)^T, \end{aligned} \quad (4.83)$$

где

$$H_{s,t} = (A_s^T - C_s^T K_s^T) H_{s+1,t}, H_{t,t} = I_n, s \leq t, t \in T.$$

Откуда следует

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+1} - \hat{x}_t &= K_t y_t + \sum_{s=a}^t (H_{s+1,t+1}^T - H_{s+1,t}^T) K_s y_s + \\ &\quad (H_{a,t+1}^T - H_{a,t}^T) (\tilde{m}_a^T, 0_{n-q}^T)^T. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Используя тождества

$$H_{s+1,t+1} = H_{s+1,t} H_{t,t+1}, H_{a,t+1} = H_{a,t} H_{t,t+1}, H_{t,t+1} = A_t^T - C_t^T K_t^T,$$

преобразуем это выражение к виду, которое совпадает с рекуррентным представлением оценки (4.77)

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+1} - \hat{x}_t &= K_t y_t + (H_{t,t+1}^T - I_n) \sum_{s=a}^{t-1} H_{s+1,t}^T K_s y_s + (H_{t,t+1}^T - I_n) H_{a,t}^T (\tilde{m}_a^T, 0_{n-q}^T)^T = \\ &= K_t y_t + (A_t - K_t C_t - I_n) \left[\sum_{s=a}^{t-1} H_{s+1,t}^T K_s y_s + H_{a,t}^T (\tilde{m}_a^T, 0_{n-q}^T)^T \right] \\ &= K_t y_t + (A_t - K_t C_t - I_n) \hat{x}_t, \end{aligned}$$

Полагая в (4.83) $t = a$, находим $\hat{x}_a = H_{a,a}^T (\tilde{m}_a^T, 0_{n-q}^T)^T = (\tilde{m}_a^T, 0_{n-q}^T)^T$.

2. Следует из выражения $Tr(S_t + R_t M_{a,t}^{-1} R_t^T) = E((x_t - \hat{x}_t)^T (x_t - \hat{x}_t))$.

Замечание 4.2.2. Попутно мы установили следующий методически важный результат. Диффузная инициализация ФК приводит к соотношениям идентичным, полученным с помощью решения специальной оптимизационной задачи в предположении неполной или отсутствия априорной информации о начальном состоянии системы (4.1).

4.4 Задача восстановления состояния системы за конечное число шагов

Рассмотрим систему (4.1) при отсутствии случайных возмущений

$$x_{t+1} = A_t x_t, y_t = C_t x_t, t \in T = \{a, a+1, \dots\}. \quad (4.85)$$

Пусть требуется восстановить вектор x_t по наблюдениям $y_t, t \in T$. Для решения этой задачи воспользуемся наблюдателем, использующего конструкцию предложенного ДФК

$$\hat{x}_{t+1}^{dif} = A_t \hat{x}_t^{dif} + K_t^{dif} (y_t - C_t \hat{x}_t^{dif}), \hat{x}_a = 0, t \in T = \{a, a+1, \dots\}, \quad (4.86)$$

где

$$K_t^{dif} = A_t \Phi_{t,a} W_{t+1}^+ \Phi_{t,a}^T C_t^T, \\ W_{t+1} = W_t + \Phi_{t,a}^T C_t^T C_t \Phi_{t,a}, W_a = 0_{(n-q) \times (n-q)}.$$

Наблюдатель будет восстанавливать состояние системы за конечное число шагов. Действительно, ошибка восстановления $h_t = \hat{x}_t - x_t$ удовлетворяет уравнению

$$h_{t+1} = (A_t - K_t^{dif} C_t) h_t$$

при произвольных начальных условиях. Использование леммы 4.3 при $S_t = 0, V_{1t} = 0_{m \times m}$ дает

$$H_{t,s} = \Phi_{t,s} - \Phi_{t,s} W_t^{-1} \sum_{i=s}^{t-1} \Phi_{i,s}^T C_i^T C_i \Phi_{i,s},$$

где

$$\Phi_{t+1,s} = A_t \Phi_{t,s}, \Phi_{s,s} = I_n, t > s.$$

Откуда следует, что $H_{t,a} = 0$ при $t \geq tr$ а значит и $h_t = 0$.

Возможно, обобщение на случай, когда начальные условия заданы только для q компонент вектора состояния (4.85). Пусть

$$K_t^{dif} = A_t R_t W_{t+1}^+ R_t^T C_t^T, \quad (4.87)$$

где

$$R_{t+1} = A_t R_t, R_a = (e_{q+1}, \dots, e_n),$$

$$(4.88)$$

$$W_{t+1} = W_t + \Phi_{t,a}^T C_t^T C_t \Phi_{t,a}, W_a = 0_{(n-q) \times (n-q)}. \quad (4.89)$$

Использование леммы 4.3 при $S_t = 0$ дает

$$H_{t,s} = \Phi_{t,s} - R_t W_t^{-1} \sum_{i=s}^{t-1} R_i^T C_i^T C_i \Phi_{i,s}, \quad t \geq t_{tr}, s < t.$$

Откуда следует, что $H_{t,a} = 0$ при $t \geq tr$ а значит и $h_t = 0$.

4.5 Фильтрация со скользящим окном

Рассмотрим интервалы наблюдения $[t - N, t]$, $t \in T$ (скользящие окна), где $N > tr$ и предположим, что в момент $t - N$ имеется только априорная информация о q первых компонентах вектора x_{t-N} . Используя ДФК, нетрудно выписать следующие соотношения для оценки состояния системы (4.1) в момент t , основанную на скользящем окне последних N наблюдений

$$\hat{x}_{s+1}^{dif} = A_s \hat{x}_s^{dif} + K_s^{dif} (y_s - C_s \hat{x}_s^{dif}), \quad \hat{x}_{t-N}^{dif} = (m_a^T, 0_{1 \times (n-q)})^T, \quad (4.90)$$

где

$$K_s^{dif} = (A_s S_s + A_{1s} R_s W_{t-N,s+1}^+ R_t^T) C_s^T N_{1s}^{-1}, \quad (4.91)$$

$$S_{s+1} = A_s S_s A_s^T - A_s S_s C_s^T N_{1s}^{-1} C_s S_s A_s^T + V_{2s}, S_{t-N} = \text{block diag}(\bar{S}_a, 0_{(n-q) \times (n-q)}), \quad (4.92)$$

$$R_{s+1} = A_{1s} R_s, R_{t-N} = (e_{q+1}, \dots, e_n), \quad (4.93)$$

$$A_{1s} = A_s - A_s S_s C_s^T N_{1s}^{-1} C_s, N_{1s} = C_s S_s C_s^T + V_{1s}, \quad (4.94)$$

$$W_{s+1,t-N} = W_{s,t-N} + R_s^T C_s^T N_{1s}^{-1} C_s R_s, W_{t-N,t-N} = 0, \quad (4.95)$$

$$s = t - N, t - N + 1, \dots, t - 1, t = a + N, a + N + 1, \dots$$

Пример 4.1. Пусть задана дискретизированная модель авиационного двигателя [84, 85]

$$x_{t+1} = A x_t + B w_t = \begin{bmatrix} 0.90305 + \delta_t & 0 & 0.1107 \\ 0.0077 & 0.9802 + \delta_t & -0.0173 \\ 0.0142 & 0 & 0.8953 + 0.1\delta_t \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} w_t,$$

с запаздыванием в измерительном канале

$$y_t = Cx_{t-\tau} + D\xi_t = \begin{bmatrix} 1+0.1\delta_t & 0 & 0 \\ 0 & 1+0.1\delta_t & 0 \end{bmatrix} x_{t-\tau} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xi_t,$$

где w_t и ξ_t - некоррелированные случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $E(w_t^2) = 0.02, E(\xi_t^2) = 0.02$, τ - запаздывание, δ_t - неизвестное возмущение, вызванное изменением температуры турбины.

Мы хотим сравнить ошибки оценивания ФК и ДФК при действии на двигатель неизвестного возмущения δ_t . Оба фильтра конструируются без учета его действия и предполагается, что

$$\delta_t = \begin{cases} 0.1, & t \in [50, 100] \\ 0, & t \notin [50, 100] \end{cases}.$$

Начнем с того, что преобразуем модель к стандартному виду без запаздывания при $\tau = 1$

$$z_{t+1} = \tilde{A}z_t + \tilde{B}w_t, \quad v_t = \tilde{C}z_t + \tilde{D}\xi_t,$$

где

$$z_t = \begin{bmatrix} x_t \\ Cx_t \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{cases} 0_{2 \times 5}, & t = 0 \\ [0_{2 \times 3}, I_2], & t \geq 1 \end{cases}, \tilde{\xi}_t = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \xi, & t \geq 1 \end{cases}.$$

При построении ФК будем полагать, что начальное условие для вектора состояния известно точно и при этом $x_0 = 0$. ДФК будем использовать в режиме скользящего окна – повторной инициализации после N тактов работы фильтра в предположении отсутствия априорной информации о начальном векторе состояния объекта. Так как матрица динамики $\tilde{A}$ вырождена и априорная информация отсутствует, то условие $W_{a,t} > 0$ только достаточно для существования оптимальной оценки. Оно выполняется, начиная с момента $t_{tr} = 3$.

На рис. 4.1 приведены результаты моделирования – ошибки оценивания $e(t) = \hat{z}_{1t} - z_{1t}$ ФК и ДФК при $N = 20$ (кривые 1 и 2, соответственно). Видно, что для ДФК ошибки существенно меньше ошибок ФК на интервале действия возмущения. Кроме того, скорость сходимости ошибки суще-

ственно выше для ДФК по сравнению с ФК после прекращения действия возмущения.

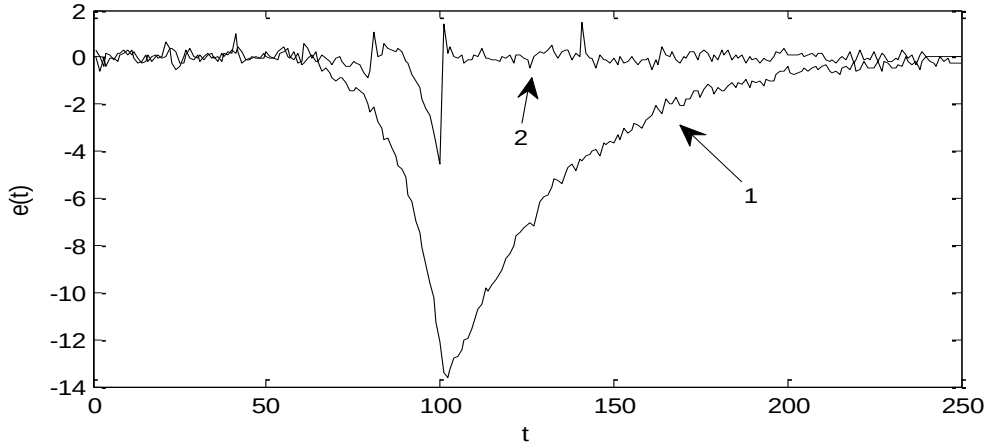


Рис. 4.1. Зависимости ошибок оценивания от времени

4.6 Диффузный аналог расширенного фильтра Калмана

Рассмотрим нелинейную динамическую систему вида

$$x_{t+1} = F_t(u_t, x_t) + w_t, \quad (4.96)$$

$$y_t = Z_t(x_t) + \xi_t, \quad t \in T = \{a, a+1, \dots\}, \quad (4.97)$$

где $x_t \in R^n$ – вектор состояния системы, $y_t \in R^m$ – измерение, $u_t \in R^n$ – вектор измеряемых входных воздействий, $F_t(z_t, x_t)$, $Z_t(x_t)$ – заданные функции, $w_t \in R^n$ и $\xi_t \in R^m$ – некоррелированные случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и заданными матрицами ковариации $E(w_t w_t^T) = Q_t$, $E(\xi_t \xi_t^T) = R_t$, случайный вектор x_a не коррелирован с w_t и ξ_t .

Пусть выполняются условия А1 – А5 или В1 – В4 и требуется выписать соотношения для диффузного расширенного ФК, используя теорему 4.1.

Представим соотношения для диффузного ФК в следующем виде. Между наблюдениями

$$x_{t+1}^- = A_t x_t^+, \quad (4.98)$$

$$S_{t+1}^- = A_t S_t^+ A_t^T + V_{2t}, \quad (4.99)$$

$$R_{t+1} = A_t (I_n - S_t^- C_t^T N_t^{-1} C_t) R_t, \quad (4.100)$$

$$W_{t+1} = W_t + R_t^T C_t^T N_t^{-1} C_t R_t, \quad (4.101)$$

$$N_t = C_t S_t^- C_t^T + V_{1t}. \quad (4.102)$$

После поступления наблюдений

$$K_t^{dif} = S_t^- C_t^T N_t^{-1} + (I_n - S_t^- C_t^T N_t^{-1} C_t) R_t W_{t+1}^+ R_t^T C_t^T N_t^{-1}, \quad (4.103)$$

$$x_t^+ = x_t^- + K_t^{dif} (y_t - C_t \hat{x}_t), \quad (4.104)$$

$$S_t^+ = (I_n - S_t^- C_t^T N_t^{-1} C_t) S_t^-. \quad (4.105)$$

Начальные условия для фильтра определяются выражениями

$$x_a^+ = (\tilde{m}_a^T, 0_{n-q}^T)^T, \quad S_a^- = \text{block diag}(\bar{S}_a, 0_{(n-q) \times (n-q)}), \quad (4.106)$$

$$R_a = (e_{q+1}, \dots, e_n), \quad W_a = 0_{(n-q) \times (n-q)}. \quad (4.107)$$

Диффузный расширенный ФК получается заменой (4.98) на

$$x_{t+1}^- = F_t(u_t, x_t^+) \quad (4.108)$$

и использованием линеаризации

$$A_t = \partial F_t(u_t, x_t^+) / \partial x_t^+, \quad C_t = \partial Z_t(x_t^+) / \partial x_t^+. \quad (4.109)$$

4.7 Обучение рекуррентной нейронной сети

Пусть рекуррентная НС описывается соотношениями (4.210), (4.211). Тогда модель пространства состояния на этапе обучения будет иметь вид

$$p_{t+1} = \Psi(u_t, p_t, \beta_t) + w_t^p, \quad (4.110)$$

$$\beta_{t+1} = \beta_t + w_t^\beta, \quad (4.111)$$

$$\alpha_{t+1} = \alpha_t + w_t^\alpha, \quad (4.112)$$

$$y_t = \Phi(p_t) \alpha_t + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (4.113)$$

с малыми случайными начальными условиями p_0, β_0 , где $\Psi(z_t, p_t, \beta_t)$, $\Phi(p_t)$, p_t, β_t, α_t – определены выражениями (4.212), (4.213), $w_t^p, w_t^\beta, w_t^\alpha$ – некоррелированные, искусственно добавленные шумы с

$$E(w_t^p) = 0, \quad Q^p = E[w_t^p (w_t^p)^T],$$

$$E(w_t^\beta) = 0, \quad Q^\beta = E[w_t^\beta (w_t^\beta)^T],$$

$$E(w_t^\alpha) = 0, \quad Q^\alpha = E[w_t^\alpha (w_t^\alpha)^T].$$

На этапе прогноза модель пространства состояния имеет вид

$$p_{t+1} = \Psi(u_t, p_t, \beta^*) + w_t^p, \quad (4.114)$$

$$y_t = \Phi(p_t) \alpha^* + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (4.115)$$

с малым начальным условием p_0 , где β^* , α^* – оценки параметров, полученные в результате обучения,

Матричные функции A_t, C_t в (4.109) нетрудно определить с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_t} \Psi_i(u_t, p_t, \beta_t) &= \frac{d\sigma(x)}{dx} a_i, \quad \frac{\partial}{\partial z_t} \Psi_i(u_t, p_t, \beta_t) = \frac{d\sigma(x)}{dx} b_i, \\ \frac{\partial}{\partial d} \Psi_i(u_t, p_t, \beta_t) &= \frac{d\sigma(x)}{dx}, \quad i = 1, 2, \dots, q, \\ \frac{\partial}{\partial c_j} \Phi_j(p_t) &= p_t, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

где $x = a_i^T p_{t-1} + b_i^T u_t + d_i$.

Пример 4.2. Пусть объект описывается системой уравнений [86, 87]

$$\begin{aligned} x_{1t+1} &= \frac{x_{1t} + 2x_{2t}}{1 + x_{2t}^2} + u_t, \quad x_{2t+1} = \frac{x_{1t} x_{2t}}{1 + x_{2t}^2} + u_t, \\ y_t &= x_{1t} + x_{2t}, \quad t = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Для моделирования объекта мы использовали рекуррентную НС (4.210), (4.211) с

$q = 10, m = 1, N = 900, M = 100$ (количество точек для тестирования),

$Q = \text{block diag}(Q^p, Q^\beta, Q^\alpha) = 0.001 I_{140}, R = 1, p_0, \beta_0, u_t \sim 0.001 \times \text{rand}(-1, 1)$.

Способность к обобщению обученной НС дополнительно проверялась с помощью гармонического входного сигнала $u_t = \sin(2\pi/t)$, $t = 1, 2, \dots, N$. Результаты моделирования приведены на рисунках 4.2 – 4.4.

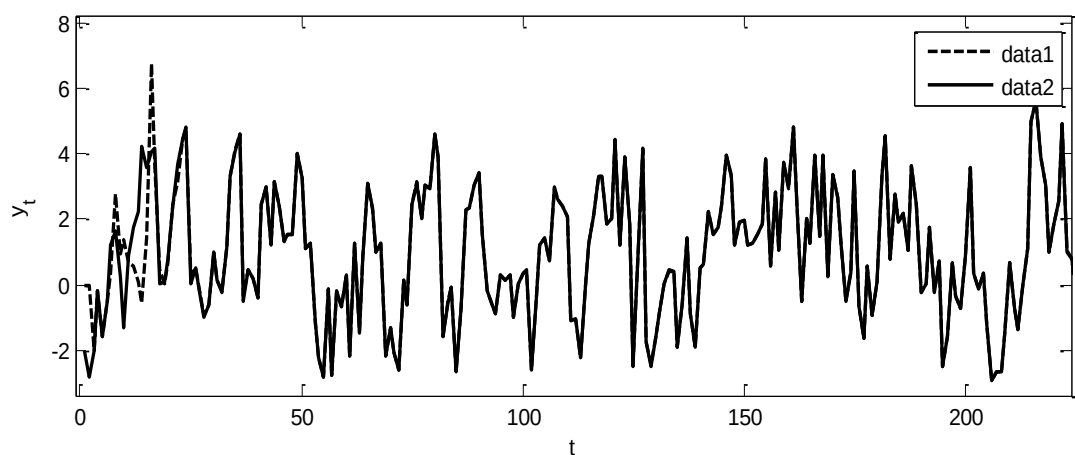


Рис.4.2. Зависимости выхода ДРФК (кривая 1) и выхода объекта (кривая 2) от количества наблюдений на обучающем множестве.

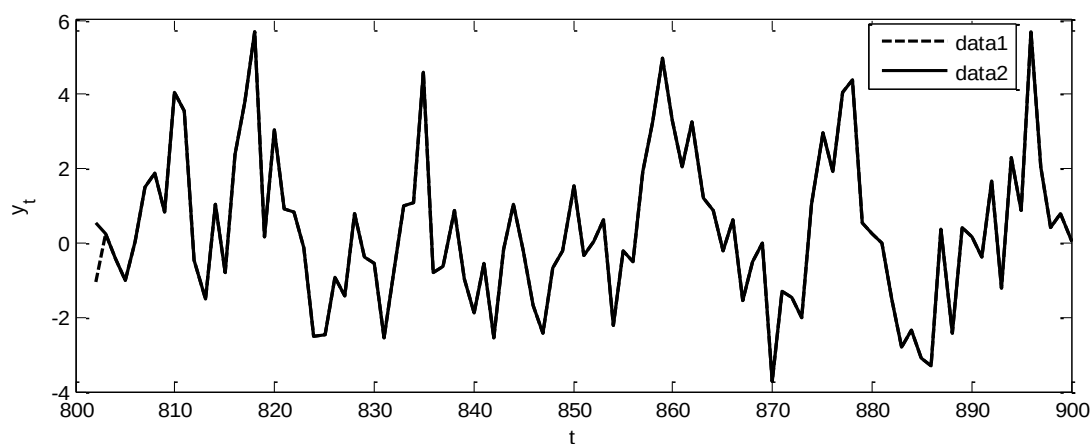


Рис.4.3. Зависимости выхода ДРФК (кривая 1) и выхода объекта (кривая 2) от количества наблюдений на тестирующем множестве.

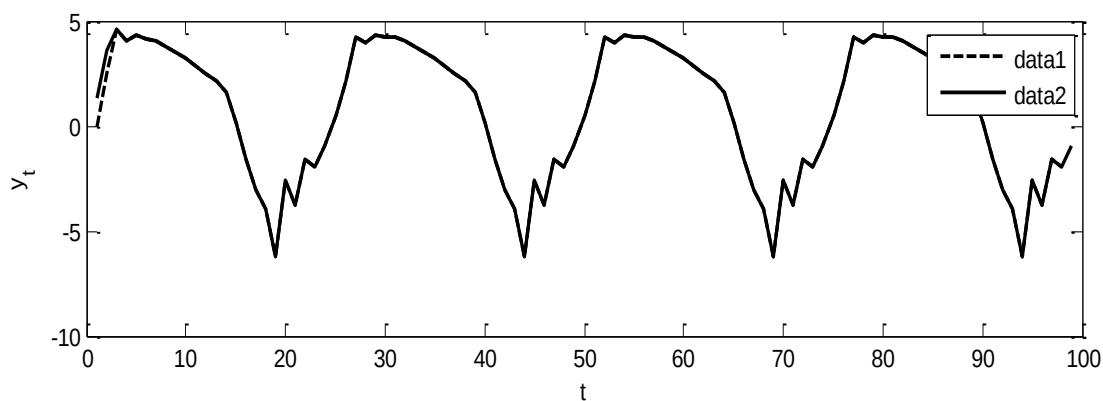


Рис.4.4. Зависимости выхода ДРФК (кривая 1) и выхода объекта (кривая 1) от количества наблюдений на тестирующем множестве с $u_t = \sin(2\pi/t)$.

4.8 Системы с частично неизвестной динамикой

Рассмотрим задачу оценки состояния системы (4.96), (4.97), когда ее правые части содержат некоторый уровень неопределенности

$$x_{t+1} = F_t(u_t, x_t) + \varepsilon(z_t, x_t) + w_t, \quad (4.117)$$

$$y_t = Z_t(x_t) + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (4.118)$$

где $\varepsilon(z_t, x_t)$ – разность между полной и приближенной моделью объекта. В предположении, что $\varepsilon(z_t, v_t)$ непрерывная функция, для аппроксимации ее на компактных множествах могут быть использован персептрон с одним скрытым слоем и линейной функцией активации на выходе, РБНС или нечеткая система Сугено, описываемые сепарабельной регрессией

$$\varepsilon(z_t, v_t) = \Phi(z_t, \beta)\alpha, \quad (4.119)$$

где $z_t = (x_t^T, u_t^T)^T$. Таким образом, задача сводится к одновременной оценке состояния (4.117) x_t и параметров β, α (если они неизвестны) по измерениям выхода y_t для решения которой может быть использован ДРФК.

Пример 4.3. Пусть объект описывается системой уравнений

$$x_{1t+1} = \frac{x_{1t} + 2x_{2t}}{1 + x_{2t}^2} + u_t + w_t = f_{1t}, \quad (4.120)$$

$$x_{2t+1} = \frac{x_{1t}x_{2t}}{1 + x_{2t}^2} + u_t + w_t = f_{2t}, \quad (4.121)$$

$$y_t = x_{1t} + x_{2t} + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (4.122)$$

где $u_t = 10\sin(2\pi/t)$, $w_t \sim N(0, 0.7)$, $\xi_t \sim N(0, 0.1)$.

Предположим, что f_{2t} неизвестная функция, и мы используем для ее аппроксимации персептрон с одним скрытым слоем

$$f_{2t} = \Phi(z_t, \beta)\alpha = (\sigma(a_1 z_t + b_1), \sigma(a_2 z_t + b_2), \dots, \sigma(a_r z_t + b_r))\alpha,$$

где $z_t = (x_{1t}, x_{2t}, u_t)^T$, $a_k, b_k, k = 1, 2, \dots, r$ – веса и смещения, соответственно, $\sigma(\cdot)$ – сигмоидная функция. Пусть веса и смещения выбраны из равномерного распределения: $a_k, b_k \sim 0.01 \times \text{rand}(-1, 1)$, $k = 1, 2, \dots, r$, а значения α неизвестны. Таким образом, задача оценки состояния x_{1t}, x_{2t} системы сво-

дится к их одновременной оценке с α . Результаты моделирования для трех нейронов приведены на рисунках 4.5, 4.6.

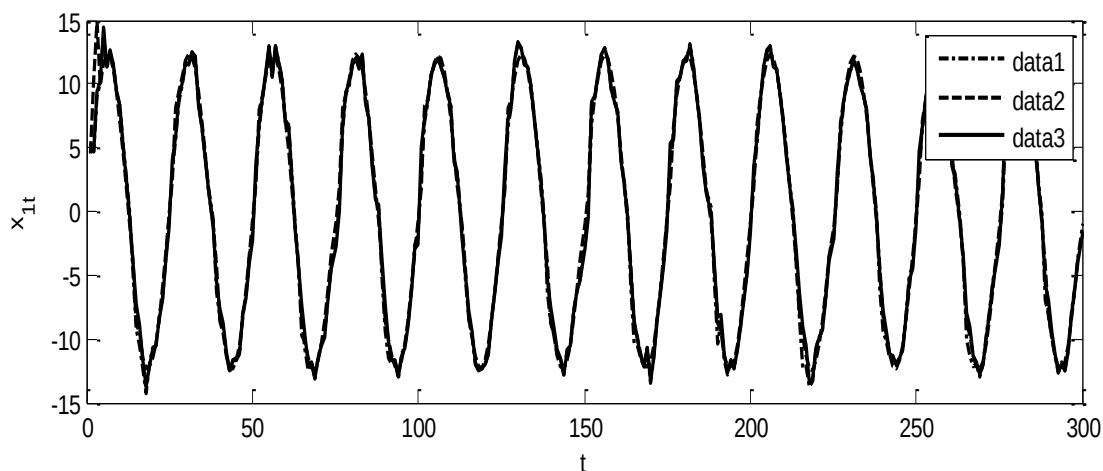


Рис.4.4. Зависимости x_{1t} (кривая 1), оценок x_{1t} при известной (кривая 2) и неизвестной f_{2t} (кривая 3) от количества наблюдений

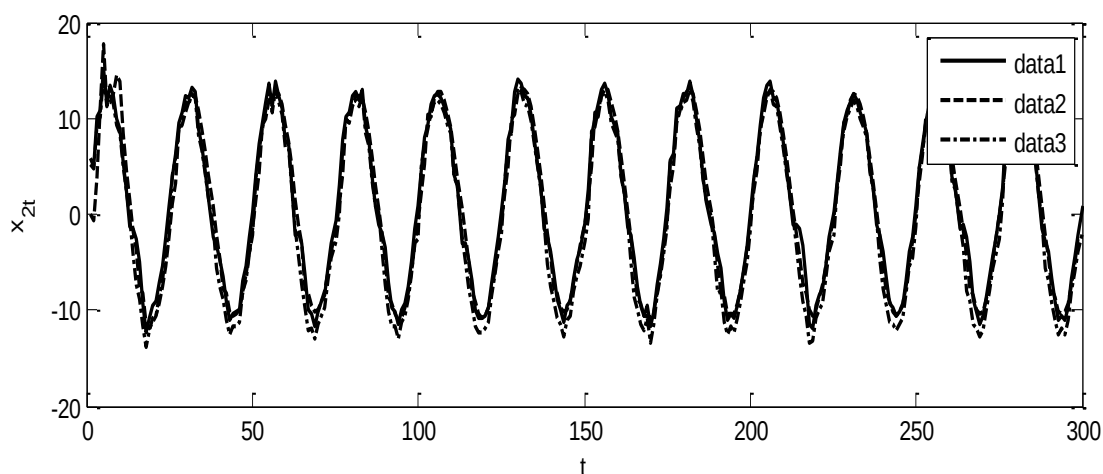


Рис.4.6. Зависимости x_{2t} (кривая 1), оценок x_{2t} при известной (кривая 2) и неизвестной f_{2t} (кривая 3) от количества наблюдений

4.9 Несмещенные фильтры с конечной импульсной характеристикой

Алгоритмы оценки состояния фильтрами с конечной импульсной характеристикой (КИХ) можно рассматривать как альтернативу фильтру Калмана (ФК), позволяющие преодолеть его расходимость, вызванную некорректно выбранной моделью, импульсными возмущениями, ошибками в настройке статистик шумов [88, 89, 90]. Другое название фильтров с КИХ – фильтры со скользящим окном. Предотвращение расходимости достигается уменьшением воздействия данных, находящихся за пределами текущего скользящего окна. Таким образом, основным предположением, ис-

пользуемым в этом подходе, является адекватность модели реальной системе только на скользящем интервале, а не на всем интервале наблюдения в случае ФК. В этом контексте ФК можно рассматривать как алгоритм оценки с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ).

Для решения этой проблемы были разработаны и изучены различные методы. Так, в [91] предложен КИХ-фильтр для линейной однородной системы. Пакетные и рекурсивные несмещенные оптимальные фильтры с КИХ (НОКИХ) предлагаются в [88, 89, 90, 92-94]. Исходные условия в начальных точках скользящих окон предполагаются диффузными случайными величинами или неизвестными. В [4] разработаны фильтры НОКИХ, которые получают информацию о начальных условиях окна по конечному числу наблюдений. Другой подход, обеспечивающий несмещенность за конечное число шагов и оптимальность, развит в [17, 18]. НОКИХ фильтр использует известную статистическую информацию о любых компонентах вектора состояния в начальных точках скользящих окон. Это позволяет учитывать (в рамках ковариационного анализа) априорную статистическую информацию о случайных смещениях, трендах и специфических движениях системы. В [95-99] несмещенные фильтры с КИХ (НКИХ) игнорируют статистику шума процесса, измерений и статистику начальных состояний вектора состояния. Компьютерное моделирование показывает, что при подходящем размере скользящего окна НКИХ фильтры могут быть более робастными, чем ФК или НОКИХ фильтр. Однако предлагаемые рекурсивные фильтры имеют два недостатка. Во-первых, алгоритм с пакетной обработкой требуется для инициализации рекурсивного НКИХ фильтра, что может быть неудобным при реализации или даже проблематичным в некоторых случаях (например, при наличии пропусков в наблюдениях, оценки параметров нелинейных систем и нестационарных процессов). Во-вторых, фильтры не используют известную информацию для инициализации в начальных точках скользящих окон.

В этом разделе разработаны и изучены новые фильтры НКИХ, использующие только известные средние любых компонентов вектора состояния в начальных точках скользящих окон. Это позволяет учитывать (в среднем) статистическую информацию о случайных смещениях, трендах и специфических движениях системы. Кроме того, цикл обучения в пакетной форме не требуется для инициализации итеративного фильтра. Основные результаты этого раздела были получены в [100].

Рассмотрим линейную дискретную систему вида

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t w_t, y_t = C_t x_t + D_t \xi_t, \quad (4.123)$$

где $x_t \in R^n$ – вектор состояния, $y_t \in R^m$ – измеряемый выход, $w_t \in R^r$, $\xi_t \in R^l$ – центрированные случайные процессы, A_t, B_t, C_t, D_t – известные

матрицы соответствующих размерностей, $t \in \{0, 1, \dots\}$.

Введем дискретные интервалы $[t - N, t - 1]$, $t \in T_N = \{N, N + 1, \dots\}$ (скользящие окна), где N - длина горизонта. Пусть выполняются следующие условия.

Известны средние для произвольных $q \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ компонент вектора состояния в начальных точках x_{t-N} скользящего окна. Априорная информация относительно оставшихся $n - q$ компонент отсутствует, и они могут быть либо неизвестными постоянными, либо случайными величинами, статистические характеристики которых неизвестны. Значение $q = 0$ используется, если отсутствует информация обо всех компонентах x_{t-N} . Если $q \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$, то без ограничения общности предполагается, что элементы вектора состояния упорядочены таким образом, что средние $m_{i,t-N} = E(x_{i,t-N})$, $i = 1, 2, \dots, q$ известны.

Соотношение $m_{i,t-N} = \text{const}$, $t \in T_N$, $i = 1, 2, \dots, q$ является простейшим случаем, описывающее случайное смещение с известным средним. Более сложные случаи $m_{i,t-N} \neq \text{const}$ могут описывать поведение x_t в среднем (специфицированное движение, тренд и т.д.).

Требуется найти линейную оценку вида

$$\hat{x}_t = \Omega_{t,t-N} m_{t-N} + \sum_{i=t-N}^{t-1} Y_{t,i} y_i, \quad t \in T_N \quad (4.123)$$

По измерениям $y_{t-N}, y_{t-N+1}, \dots, y_{t-1}$ и рекуррентное представление для нее, где $Y_{t,i} \in R^{n \times m}$ и $\Omega_{t,t-N} \in R^{n \times q}$ не зависят от априорной информации относительно x_{t-N} , $m_{t-N} = (m_{1,t-N}, m_{2,t-N}, \dots, m_{q,t-N})^T$, $q \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ and $\Omega_{t,t-N} = 0$, $m_{t-N} = 0$ if $q = 0$. При этом, оценка должна быть несмещенной

$$E(\hat{x}_t) = E(x_t), \quad t \in T_N. \quad (4.124)$$

НКХХ фильтр в пакетном режиме

Справедливо следующее утверждение

Теорема 1. Пусть выполняется условие

$$M_t = \sum_{i=t-N}^{t-1} R_i^T C_i^T C_i R_i > 0, \quad t \in T_N \quad (4.125)$$

Тогда несмещенная оценка состояния (4.123) в пакетном режиме определяется выражением (4.124), где

$$Y_{t,i} = R_t M_t^{-1} R_t^T C_i^T + \Theta_{t,i}^T, \quad (4.126)$$

$$\Omega_{t,t-N} = \begin{cases} Z_{t-N,t}^T (e_1, e_2, \dots, e_q), q \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ 0, q = 0 \end{cases}, \quad (4.127)$$

$$Z_{t-N,t} = \Phi_{t,t-N}^T - \sum_{i=t-N}^{t-1} \Phi_{i,t-N}^T Y_{i,t-N}^T, \quad (4.128)$$

$$\Phi_{t+1,t-N} = A_t \Phi_{t,t-N}, \Phi_{t-N,t-N} = I_n, \quad (4.129)$$

$$R_i = \Phi_{i,t-N} \Lambda_q, \quad (4.130)$$

$$(\Theta_{t-N,t}, \Theta_{t-N+1,t}, \dots, \Theta_{t-1,t}) = (I_{N(n-q)} - \Omega^+ \Omega) \Xi, \quad (4.131)$$

$$\Lambda_q = (e_{q+1}, e_{q+2}, \dots, e_n), q \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

$\Omega = (R_{t-N}^T C_{t-N}^T, R_{t-N+1}^T C_{t-N+1}^T, \dots, R_{t-1}^T C_{t-1}^T) \in R^{(n-q) \times Nm}$, Ξ -- произвольная $(n-q)N \times (n-q)N$ матрица, Ω^+ -- Мура-Пенроуза инверсия Ω , $e_i \in R^n$ -- i -ый единичный вектор, I_n -- единичный вектор размера n .

Доказательство. Вначале мы показываем, что рассматриваемая задача эквивалентна двойственной задаче управления. Рассмотрим вспомогательную систему уравнений вида

$$Z_{i,t} = A_i^T Z_{i+1,t} - C_i^T U_{i,t}, Z_{t,t} = I_n, i \in [t-N, t-1], t \in T_N, \quad (4.132)$$

где $Z_{i,t} \in R^{n \times n}$, $U_{i,t} \in R^{m \times n}$ -- управление. Предположим, что имеется управление $U_{i,t}$ приводящее (4.132) в состояние, удовлетворяющее условию $\Lambda_q^T Z_{t-N,t} = 0$ для любого $t \in T_N$. Покажем, что тогда существует и несмещенная оценка (4.123) вида (4.124) где

$$Y_{t,i} = U_{i,t}^T \quad (4.133)$$

и $\Omega_{t,t-N}$ -- определяется (4.127).

Использование тождества

$$x_t = Z_{t-N,t}^T x_{t-N} + \sum_{i=t-N}^{t-1} (Z_{i+1,t}^T x_{i+1} - Z_{i,t}^T x_i),$$

(4.123) и (4.127) дает

$$x_t = Z_{t-N,t}^T x_{t-N} + \sum_{i=t-N}^{t-1} (Z_{i+1,t}^T B_i w_i + U_{i,t}^T C_i x_i).$$

С учетом этого выражения, ошибка оценивания в момент t может быть представлена в виде

$$e_t = x_t - \hat{x}_t = Z_{t-N,t}^T (q_1 + q_2) + \sum_{i=t-N}^{t-1} (Z_{i+1,t}^T B_i w_i - U_{i,t}^T D_i \xi_i),$$

где

$$q_1 = \begin{cases} (h_1, h_2, \dots, h_q, 0_{1 \times (n-q)})^T, & q \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ 0, & q = 0 \end{cases} \in R^n,$$

$$q_2 = \begin{cases} (0_{1 \times q}, x_{q+1, t-N}, x_{q+2, t-N}, \dots, x_{n, t-N})^T, & q \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ x_{t-N}, & q = 0 \end{cases} \in R^n,$$

$h_i = x_{i, t-N} - m_{i, t-N}, i = 1, 2, \dots, q, 0_{1 \times q}$ -- $1 \times q$ вектор строка с нулевыми элементами.

Усредняя левую и правую части этого выражения и используя выражение $\Lambda_q^T Z_{t-N,t} = 0$, получаем

$$E(e_t) = Z_{t-N,t}^T E(q_2) = Z_{t-N,t}^T \Lambda_q [E(x_{q+1, t-N}), E(x_{q+2, t-N}), \dots, E(x_{n, t-N})]^T = 0.$$

Найдем управление обеспечивающее решение двойственной задачи. Итерирование (4.132) дает

$$Z_{i,t} = G_{i,t} Z_{t,t} - \sum_{j=i}^{t-1} G_{i,j} C_j^T U_{j,t}, i \in [t-N, t-1], t \in T_N, \quad (4.134)$$

где $G_{i,s}$ определяется системой

$$G_{i,s} = A_i^T G_{i+1,s}, G_{s,s} = I_n, s \geq i.$$

Используя граничное условие $\Lambda^T Z_{t-N,t} = 0$, получаем с помощью (4.134) линейную систему уравнений

$$0 = \Lambda_q^T G_{t-N,t} Z_{t,t} - \sum_{j=t-N}^{t-1} \Lambda_q^T G_{t-N,j} C_j^T U_{j,t}. \quad (4.135)$$

Мы ищем решение этой системы в форме

$$U_{j,t} = C_j G_{t-N,j}^T \Lambda_q L + \Theta_{j,t}, \quad (4.136)$$

где $L \in R^{(n-q) \times n}$ -- постоянная неизвестная матрица и $\Theta_{j,t}$ -- произвольная матричная функция, удовлетворяющая условию

$$\sum_{j=t-N}^{t-1} \Lambda_q^T G_{t-N,j} C_j^T \Theta_{j,t} = 0. \quad (4.137)$$

Подставляя (4.136) в (4.135) и учитывая (4.136) находим $L = W_t^{-1} \Lambda_q^T G_{t-N,t} Z_{t,t}$ при условии, что $W_t > 0$, где

$$W_t = \sum_{j=t-N}^{t-1} \Lambda_q^T G_{t-N,j} C_j^T C_j G_{t-N,j} \Lambda_q.$$

Используя выражения

$$G_{j,t} = A_j^T A_{j+1}^T \dots A_{t-2}^T A_{t-1}^T, \Phi_{t,j} = A_{t-1} A_{t-2} \dots A_{j-1} A_j, G_{j,t}^T = \Phi_{t,j}, M_t = W_t,$$

получаем

$$\begin{aligned} U_{j,t} &= C_j G_{t-N,j}^T \Lambda_q W_t^{-1} \Lambda_q^T G_{t-N,j} Z_{t,t} + \Theta_{j,t} = C_j \Phi_{j,t-N} \Lambda_q M_t^{-1} \Lambda_q^T \Phi_{t,t-N}^T Z_{t,t} + \Theta_{j,t} \\ &= C_j R_j M_t^{-1} R_t^T Z_{t,t} + \Theta_{j,t}. \end{aligned} \quad (4.138)$$

Но так как $Z_{t,t} = I_n$, и (10) – общее решение однородной системы (4.137) то это влечет (4.126), (4.127).

Комментарий. Условие пара $\{A_i, C_i\}$ наблюдаема при $i \in \{t-N, t-N+1, \dots, t-1\}, t \in T_N = \{N, N+1, \dots\}$ влечет (4.124)

Итерационный фильтр с КИХ

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Пусть выполняется условие (4.125). Тогда управление приводящее (11) в состояние, удовлетворяющее условию $\Lambda_q^T Z_{t-N,t} = 0$ может быть представлено в виде

$$U_{i,t}^f = K_i^T Z_{i+1,t}^f, i \in [t-N, t-1], t \in T_N, \quad (4.139)$$

где

$$K_i = R_{i+1} M_{i+1}^+ R_i^T C_i^T, \quad (4.140)$$

$$Z_{i,t}^f = (A_i^T - C_i^T K_i^T) Z_{i+1,t}^f, Z_{t,t}^f = I_n, i \in [t-N, t-1], t \in T_N. \quad (4.141)$$

Доказательство. Покажем, что управление (4.137) действительно решает нашу задачу. Рассмотрим (4.132) под действием управления (4.138) при $\Theta_{j,t} = 0$. Мы показываем, что $Z_{i,t} = Z_{i,t}^f$. Подставляя $U_{i,t}$ при $\Theta_{i,t} = 0$ в (4.132) получим

$$Z_{i,t} = A_i^T Z_{i+1,t} - C_i^T C_i R_i M_t^{-1} R_t^T, \quad Z_{t,t} = I_n, \quad i \in [t-N, t-1], t \in T_N. \quad (4.138)$$

Из сравнения правых частей (4.137) и (4.138), следует, что решения этих систем действительно совпадают, если $U_{i,t}^f = U_{i,t}$, т.е.,

$$K_i^T Z_{i+1,t} = C_i R_i M_t^{-1} R_t^T. \quad (4.139)$$

Итерируя систему (4.138), последовательно находим

$$Z_{i,t} = \Phi_{t,i}^T - \sum_{j=i}^{t-1} \Phi_{j,i}^T C_j^T C_j R_j M_t^{-1} R_t^T, \quad (4.140)$$

$$\begin{aligned} K_i^T Z_{i+1,t} &= C_i R_i M_{i+1}^+ R_{i+1}^T (\Phi_{t,i+1}^T - \sum_{j=i+1}^{t-1} \Phi_{j,i+1}^T C_j^T C_j R_j M_t^{-1} R_t^T) = \\ &= C_i R_i M_{i+1}^+ (I_n - \sum_{j=i+1}^{t-1} R_j^T C_j^T C_j R_j M_t^{-1}) R_t^T = \\ &= C_i R_i M_{i+1}^+ M_{i+1}^{-1} M_t^{-1} R_t^T. \end{aligned} \quad (4.141)$$

Выражения (4.139), (4.140) следуют из тождеств

$$\begin{aligned} R_{i+1} &= \Phi_{i+1,t-N} \Lambda_q, \quad \Phi_{t,i+1} \Phi_{i+1,t-N} = \Phi_{t,t-N}, \\ \Phi_{j,i+1} R_{i+1} &= \Phi_{j,i+1} \Phi_{i+1,t-N} \Lambda_q = \Phi_{j,t-N} \Lambda_q = R_j. \end{aligned}$$

Трансформируем (4.141), используя ортогональную декомпозицию $M_{i+1} = V_i V_i^T$, где

$$V_i = (R_{t-N}^T C_{t-N}^T, R_{t-N+1}^T C_{t-N+1}^T, \dots, R_i^T C_i^T) \in R^{(n-q) \times mN}. \quad (4.142)$$

Пусть $l_{1i}, l_{2i}, \dots, l_{k(i),i}$ -- линейно независимые колонки матрицы V_i .

Использование скелетной декомпозиции дает $V_i = L_i \Gamma_i$, где $L_i = (l_{1i}, l_{2i}, \dots, l_{k(i),i}) \in R_{k(i)}^{(n-q) \times k(i)}$, $\Gamma_i \in R_{k(i)}^{k(i) \times mN}$, $R_r^{k \times l}$ -- множество $k \times l$ матриц, имеющих ранг r . Так как $\tilde{\Gamma}_i = \Gamma_i \Gamma_i^T > 0$ матрица Грамма, генерируемая линейно независимыми строками матрицы Γ_i и $rank(L_i) = rank(\tilde{\Gamma}_i L_i^T)$, то

$$M_{i+1} = L_i \tilde{\Gamma}_i L_i^T, \quad M_{i+1}^+ = (L_i \tilde{\Gamma}_i L_i^T)^+ = (L_i^T)^+ \tilde{\Gamma}_i^{-1} L_i^+.$$

Подставляя эти выражения в (4.141) и используя представление $L_i^+ = (L_i^T L_i)^{-1} L_i^T$, находим

$$\begin{aligned} K_i^T Z_{i+1,t} &= C_i R_i (L_i^T)^+ \tilde{\Gamma}_i^{-1} L_i^+ L_i \tilde{\Gamma}_i L_i^T M_t^{-1} R_t^T \\ &= C_i R_i L_i (L_i^T L_i)^{-1} L_i^T M_t^{-1} R_t^T. \end{aligned} \quad (4.143)$$

Из (25) следует, что $R_i^T C_i^T = L_i \Gamma_{1i}$, где Γ_{1i} некоторая прямоугольная матрица. Подстановка этого выражения в (4.141) дает

$$K_i^T Z_{i+1,t} = \Gamma_{1i}^T L_i^T L_i (L_i^T L_i)^{-1} L_i^T R_i^T M_t^{-1} R_t^T = C_i R_i M_t^{-1} R_t^T.$$

Итеративный НКИХ фильтр специфицируется в следующей теореме.

Теорема 2. Состояние системы

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1} &= A_i \hat{x}_i + K_i (y_i - C_i \hat{x}_i), \quad i \in [t-N, t-1], t \in T_N, \\ \hat{x}_{t-N} &= \tilde{m}_{t-N} = ((m_{t-N})^T, 0_{1 \times (n-q)})^T, \end{aligned} \quad (4.144)$$

Является несмещенной оценкой состояния (1) при $i \geq tr$, $tr = \min_i \{i : M_i > 0, i = t-N, t-N+1, \dots\}$, где

$$K_i = A_i R_i (M_i + R_i^T C_i^T C_i R_i)^+ R_i^T C_i^T, \quad (4.145)$$

$$R_{i+1} = A_i R_i, R_{t-N} = (e_{q+1}, e_{q+2}, \dots, e_n), \quad (4.146)$$

$$M_{i+1} = M_i + R_i^T C_i^T C_i R_i, M_{t-N} = 0. \quad (4.147)$$

Доказательство. Положим в (4.124)

$$\begin{aligned} Y_{t,i} &= (U_{i,t})^T = R_i M_i^{-1} R_t^T C_t^T, \\ \Omega_{t,t-N} &= Z_{t-N,t}^T (e_{q+1}, e_{q+2}, \dots, e_n), t \geq tr, \end{aligned}$$

Где матричные функции определены в теореме 1. Это влечет несмещенность оценки в момент $i \geq tr$ и соотношение

$$\hat{x}_i = \sum_{s=t-N}^{i-1} (U_{s,t})^T y_s + Z_{t-N,i}^T \tilde{m}_{t-N}.$$

Из леммы 1 следует, что

$$U_{s,t} = U_{s,t}^f = K_s^T Z_{s+1,t}^f.$$

Таким образом

$$\hat{x}_i = \sum_{s=t-N}^{i-1} (U_s^f)^T y_s + (Z_{t-N,t}^f)^T \tilde{m}_{t-N} = \sum_{s=t-N}^{i-1} H_{s+1,i}^T K_s y_s + H_{t-N,i}^T \tilde{m}_{t-N}, \quad (4.148)$$

где

$$H_{s,i} = (A_s^T - C_s^T K_s^T) H_{s+1,i}, H_{i,i} = I_n, s \leq i.$$

Используя (4.148), находим

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i &= K_i y_i + \sum_{s=i-N}^i (H_{s+1,i+1}^T - H_{s+1,i}^T) K_s y_s \\ &\quad + (H_{t-N,i+1}^T - H_{t-N,i}^T) \tilde{m}_{t-N}. \end{aligned}$$

Используя тождества

$$\begin{aligned} H_{s+1,i+1} &= H_{s+1,i} H_{i,i+1}, \quad H_{t-N,i+1} = H_{t-N,i} H_{i,i+1}, \\ H_{i,i+1} &= A_i^T - C_i^T K_i^T, \end{aligned}$$

Трансформируем это выражение к виду (4.144)

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i &= K_i y_i + (H_{i,i+1}^T - I_n) \sum_{s=t-N}^{i-1} H_{s+1,i}^T K_s y_s + (H_{i,i+1}^T - I_n) H_{t-N,i}^T \tilde{m}_{t-N} = \\ &= K_i y_i + (A_i - K_i C_i - I_n) [\sum_{s=t-N}^{i-1} H_{s+1,i}^T K_s y_s \\ &\quad + H_{t-N,i}^T \tilde{m}_{t-N}] = K_i y_i + (A_i - K_i C_i - I_n) \hat{x}_i. \end{aligned}$$

Полагая в (4.148) $i = t - N$ находим $\hat{x}_{t-N} = \tilde{m}_{t-N}$.

Рассмотрим для переходной матрицы фильтра (4.144)

$$X_{i+1,s} = (A_i - K_i C_i) X_{i,s} = \tilde{A}_i X_{i,s}, \quad X_{s,s} = I_n, i \geq s \quad (4.149)$$

Следствие 2.1. Справедливо следующее утверждение

$$X_{i,s} = \Phi_{i,s} - R_i M_i^{-1} \sum_{j=s}^{i-1} R_j^T C_j^T C_j \Phi_{j,s}, \quad i \geq tr, s < i, \quad (4.150)$$

$$K_s^T X_{i,s+1}^T = C_s R_s M_i^{-1} R_i^T, \quad i \geq tr, s < i. \quad (4.151)$$

Так как

$$H_{s,i} = Z_{s,i}^f = \tilde{A}_s^T \tilde{A}_{s+1}^T \dots \tilde{A}_{i-1}^T, \quad X_{i,s} = H_{s,i}^T = \tilde{A}_{i-1} \tilde{A}_{i-2} \dots \tilde{A}_s$$

Утверждение следует из (4.140) и (4.141).

Следствие 2.2. Покажем, используя (4.150), что $\hat{x}_i$ действительно несмещенная оценка. Рассмотрим систему уравнение для средней ошибки оценивания $e_i = E(x_i - \hat{x}_i)$

$$e_{i+1} = (A_i - K_i C_i) e_i, \quad e_{t-N} = (0_{1 \times q}, x_q)^T, \quad i \geq tr,$$

Где $x_q = (x_{q+1,t-N}, x_{q+2,t-N}, \dots, x_{n,t-N})^T$ - произвольный вектор. Из (4.150) следует

$$e_i = X_{i,t-N} e_{t-N} = (\Phi_{i,t-N} - R_i M_i^{-1} \sum_{j=t-N}^{i-1} R_j^T C_j^T C_j \Phi_{j,t-N}) R_{t-N} x_q = 0, \quad i \geq tr$$

при $q \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Аналогично проверяется, что $e_i = 0$ при $i \geq tr$, $q = 0$, $e_{t-N} = x_{t-N}$, где x_{t-N} произвольный вектор.

Следствие 2.3. Пусть система (4.123) стационарна $q = 0$ и $\det A \neq 0$. Тогда представление для переходной матрицы $X_{i,s}$ имеет вид

$$X_{i,s} = \begin{cases} 0, & s = 0, i > tr \\ A^{i-t+N} M_i^{-1} M_s A^{-s+t-N}, & i > tr, s < i, s \neq 0 \end{cases}$$

Утверждение следует из (4.150) с помощью элементарных выкладок.

Сравнение НЛИХ и НОКИХ фильтров

Предположим, что выполняются следующие условия.

A1: w_t и ξ_t -- некоррелированные случайные процессы с нулевыми средними и известными ковариационными матрицами $E(w_t w_t^T) = V_t$, $E(\xi_t \xi_t^T) = \Sigma_t$, A_t, B_t, C_t, D_t -- известные матрицы соответствующих размерностей.

A2: Средние и ковариации известны для произвольных $q \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ компонент вектора состояния в начальных точках скользящих окон. . Априорная информация относительно оставшихся $n-q$ компонент отсутствует, и они могут быть либо неизвестными постоянными, либо случайными величинами, статистические характеристики которых неизвестны. Значение $q = 0$ используется далее, как и выше, если отсутствует информация обо всех компонентах x_{t-N} .

A3: Если $q \neq 0$, то без потери общности предполагается, что элементы вектора состояния упорядочены таким образом, что средние и ковариации

$$m_{i,t-N} = E(x_{i,t-N}), \bar{s}_{ij,t-N} = E[(x_{i,t-N} - m_{i,t-N})(x_{j,t-N} - m_{j,t-N})], i, j = 1, 2, \dots, q$$

известны.

А4: Если $x_{i,t-N}, i = 1, 2, \dots, q$ -- случайные переменные, то они не коррелированы с $x_{i,t-N}, i = q+1, q+2, \dots, n$, w_t и ξ_t for $t \in T$.

Требуется найти несмещенную линейную оценку состояния (4.123) из условия минимума критерия качества $E[(x_t - \hat{x}_t)^T (x_t - \hat{x}_t)]$. Мы называем такую оценку оптимальной.

Теорема 3 ([17, 18]). 1. Оптимальная оценка x_t (НОКИХ фильтр) определяется следующим соотношениями при $i \geq tr$, $tr = \min_i \{i : M_i > 0, i = t - N, t - N + 1, \dots\}$.

Прогноз:

$$\hat{x}_{i+1}^- = A_i \hat{x}_i^+, \hat{x}_{t-N}^+ = ((m_{t-N})^T, 0_{1 \times (n-q)})^T, i \in [t - N, t - 1], t \in T_N, \quad (4.152)$$

$$K_i = [A_i S_i^- + A_i R_i (M_i + R_i^T C_i^T N_i^{-1} C_i R_i)^+ R_i^T] C_i^T N_i^{-1}, \quad (4.153)$$

$$S_i^- = A_i S_i^+ A_i^T + B_i V_i B_i^T, S_{t-N}^+ = \text{block diag}(\bar{S}_{t-N}, 0_{(n-q) \times (n-q)}), \quad (4.154)$$

$$R_{i+1} = A_i R_i, R_{t-N} = (e_{q+1}, \dots, e_n), A_{li} = A_i - A_i S_i^- C_i^T N_i^{-1} C_i, \quad (4.155)$$

$$N_{1s} = C_s S_i^- C_s^T + D_i \Sigma_i D_i^T, \quad (4.156)$$

$$M_{i+1} = M_i + R_i^T C_i^T N_i^{-1} C_i R_i, M_{t-N} = 0. \quad (4.157)$$

Коррекция:

$$S_i^+ = (I_n - S_i^- C_i^T N_i^{-1} C_i) S_i^-, \quad (4.158)$$

$$\hat{x}_{i+1}^+ = \hat{x}_i^- + K_i (y_i - C_i \hat{x}_i^-). \quad (4.159)$$

2. Ковариационная матрица ошибки оценивания при $i \geq t_r$ определяется выражением

$$P_i = S_i^- + R_i M_i^{-1} R_i^T. \quad (4.160)$$

Замечание 3.1. Формально, НКИХ фильтр следует из НОКИХ фильтра полагая $V_t = I_m, S_{t-N}^+ = 0, \Sigma_t = 0$. Вместе с тем при выводе НКИХ мы не опирались на эти предположения.

Замечание 3.2. Соотношение (4.160) представляет собой декомпозицию ковариационной матрицы ошибки оценивания, включающую два слагаемых. Первое – учитывает влияние статистической информации о начальных условиях и шумов измерений на точность оценивания. Второе –

дополнительно отражает эффект действия неизвестных начальных условий в скользящем окне.

Замечание 3.3. Аналогично ковариационной матрице, справедлива также декомпозиция для коэффициентов фильтра. Действительно, из (4.137) следует, что $K_i = K_i^{KF} + K_i^{UBF}$, где слагаемое $K_i^{KF} = A_i S_i^{-1} C_i^T N_i^{-1}$ совпадает с коэффициентом усиления ФК, учитывающего известную статистическую информацию, а слагаемое $K_i^{UBF} = A_{i+1} R_i M_{i+1}^+ R_i^T C_i^T N_i^{-1}$ отражает дополнительный эффект связанный с отсутствием смещения в оценках фильтра.

Диффузный фильтр с КИХ

Рассмотрим альтернативный подход к построению фильтров с КИХ. Пусть сохраняется предположение А1 из предыдущей секции и дополнительно следующие условия.

В1: Средние и ковариации известны для произвольных $q \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ компонент вектора состояния в точках x_{t-N} скользящего окна.

В2: Если $q = 0$, то $x_{i,t-N}, i = 1, 2, \dots, n$ интерпретируются как случайные переменные с нулевым средним и ковариационной матрицей пропорциональной большому параметру $\mu > 0$, т.е., $E(x_{t-N}) = 0$, $E(x_{t-N} x_{t-N}^T) = \mu \tilde{S}_{t-N}$, где $\tilde{S}_{t-N}$ -- произвольная положительно определенная матрица.

В3: Если $q \neq 0$, то без потери общности предполагается, что элементы вектора состояния упорядочены таким образом, что средние и ковариации

$$m_{i,t-N} = E(x_{i,t-N}), \bar{s}_{ij,t-N} = E[(x_{i,t-N} - m_{i,t-N})(x_{j,t-N} - m_{j,t-N})], i, j = 1, 2, \dots, q$$

известны. Априорная информация относительно оставшихся $n - q$ компонент x_{t-N} , $t \in T_N$ отсутствует и они интерпретируются как случайные переменные с нулевым средним и ковариационной матрицей пропорциональной большому параметру $\mu > 0$, т.е.,

$$E(x_{i,t-N}) = 0, E(x_{i,t-N} x_{j,t-N}) = \mu \tilde{s}_{ij,t-N}, i, j = q+1, q+2, \dots, n,$$

где $\tilde{S}_{t-N} = \|\tilde{s}_{ij,t-N}\|_{q+1}^n > 0$, $\mu > 0$ -- большой параметр.

В4: Случайный вектор x_{t-N} не коррелированы с w_t и ξ_t при $[t - N, t - 1]$, $t \in T_N = \{N, N + 1, \dots\}$.

B5: Случайные переменные $x_{i,t-N}$ при $i = 1, 2, \dots, q$, $q \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ не коррелированы с $x_{i,t-N}$, $i = q+1, q+2, \dots, n$.

Требуется найти предельные соотношения для ФК при $\mu \rightarrow \infty$ и исследовать их свойства. В [8, 9] показано, что при $\mu \rightarrow \infty$ предельные соотношения совпадают с (4.152)–(4.157).

Условия B1 – B5 формализуют стандартный подход к реализации ФК при большой начальной неопределенности состояния системы. Вместе с тем, известно, что при больших значениях μ ФК может расходиться. В частности, пусть δM_i^+ есть ошибка, связанная с вычислением M_i^+ . Тогда [8,9]

$$K_i = R_i \tilde{S}_{t-N} (I_{n-q} - M_i (M_i^+ + \delta M_i^+)) R_i^T C_i^T N_i^{-1} \mu + O(1), \mu \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что при $\delta M_i^+ \neq 0$ матрица K_i пропорциональна большому параметру и возможна расходимость даже при выполнении условия непрерывности определения псевдообратной матрицы. Таким образом использование предельных соотношений позволяет избежать расходимости фильтра.

Отметим, что при $N=0$ соотношения (4.152)–(4.157) могут быть использованы для оценки состояния системы (4.123) при отсутствии или неполной информации о начальных условиях. Следуя [18,18], мы называем их диффузным ФК (ДФК).

4.10 Ковариационный анализ НКИХ фильтра

Рассмотрим линейную дискретную систему

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t w_t, \quad (4.161)$$

$$y_t = C_t x_t + D_t \xi_t, \quad (4.162)$$

где $x_t \in R^n$ - вектор состояния, $y_t \in R^m$ - вектор измерений, w_t и ξ_t - некоррелированные случайные процессы с нулевыми средними и известными матрицами ковариаций $E(w_t w_t^T) = Q_t$, $E(\xi_t \xi_t^T) = V_t$, A_t, B_t, C_t, D_t - известные матрицы, $t = 1, 2, \dots$.

Введем дискретные интервалы $[t-N, t]$, $t \in T_N = \{N, N+1, \dots\}$, где N - размер скользящего окна.

Предположим, что выполняются следующие условия.

A1: Априорная информация о x_{t-N} , $t \in T_N$ отсутствует и они есть либо неизвестные постоянные или случайные переменные статистические характеристики которых неизвестны

A2: Если x_{t-N} случайные переменные, то они не коррелированы с w_t и ξ_t при $t=1,2,\dots$.

При выполнении A1, A2, линейная несмещенная оценка состояния $\hat{x}_i$ при $i \in T^* = [t - N + N^*, t]$, $t \in T_N$ определяется выражениями (RHUFIR фильтр)

$$\hat{x}_{i+1} = A_i \hat{x}_i + K_i (y_i - C_i x_i), \quad \hat{x}_{t-N} = 0, \quad (4.163)$$

$$K_i = A_i \tilde{R}_i \tilde{M}_{i+1}^+ \tilde{R}_i^T C_i^T, \quad (4.164)$$

$$\tilde{R}_{i+1} = A_i \tilde{R}_i, \quad \tilde{R}_{t-N} = I_n, \quad (4.165)$$

$$\tilde{M}_{i+1} = \tilde{M}_i + \tilde{R}_i^T C_i^T C_i \tilde{R}_i, \quad \tilde{M}_{t-N} = 0, \quad (4.166)$$

$$N^* = \min_i \{i : \tilde{M}_i > 0, i = t - N, t - N + 1, \dots\}, \quad (4.167)$$

$$i \in [t - N, t], t \in T_N.$$

Оптимальность RHUFIR фильтра достигается выбором N из условия минимума $E[(x_i - \hat{x}_i)^T (x_i - \hat{x}_i)]$. Требуется разработать процедуру для оценки ковариационной матрицы ошибки (КМО) этого фильтра.

Теорема. Пусть $i \in T^*$, $T^* = [t - N + N^*, t]$, $t \in T_N$ и $\det(A_i) \neq 0$. Тогда КМО определяется соотношениями

$$\tilde{P}_i = \tilde{H}_i + \tilde{S}_i, \quad (4.168)$$

где

$$\tilde{H}_i = \tilde{R}_i \tilde{M}_i^{-1} \Omega_i \tilde{M}_i^{-1} \tilde{R}_i^T, \quad (4.169)$$

$$\tilde{S}_i = \tilde{R}_i \tilde{M}_i^{-1} \Gamma_i \tilde{M}_i^{-1} \tilde{R}_i^T, \quad (4.170)$$

$$\Omega_{i+1} = \Omega_i + \tilde{R}_i^T C_i^T \tilde{V}_i C_i \tilde{R}_i, \quad \Omega_{t-N} = 0, \quad (4.171)$$

$$\Gamma_{i+1} = \Gamma_i + \tilde{M}_{i+1} \tilde{R}_{i+1}^T C_i^T \tilde{Q} C_i \tilde{R}_{i+1} \tilde{M}_{i+1}, \quad \Gamma_{t-N} = 0. \quad (4.172)$$

Доказательство Обозначим $e_i = x_i - \hat{x}_i$. Находим из (4.161), (4.162), (4.163)

$$e_{i+1} = (A_i - K_i C_i) e_i - K_i D_i \xi_i + B_i w_i. \quad (4.173)$$

Итерирование этого уравнения дает

$$\begin{aligned} e_i &= X_{i,t-N} e_{t-N} \\ &+ \sum_{s=t-N}^{i-1} X_{i,s+1} (-K_s D_s \xi_s + B_i w_s), \end{aligned} \quad (4.174)$$

где $X_{i,s}$ - переходная матрица однородной части фильтра, удовлетворяющая уравнению

$$\begin{aligned} X_{i+1,s} &= (A_i - K_i C_i) X_{i,s} = \tilde{A}_i X_{i,s}, \\ X_{s,s} &= I_n, i \geq s. \end{aligned} \quad (4.175)$$

Так как $\hat{x}_i$ несмещенная оценка x_i при $i \in T^*$ то из (4.174)

$$\tilde{P}_i = E(e_i e_i^T) = J_1 + J_2, \quad (4.176)$$

где

$$J_1 = \sum_{s=t-N}^{i-1} X_{i,s+1} K_s \tilde{V}_s K_s^T X_{i,s+1}^T, \quad (4.177)$$

$$J_2 = \sum_{s=t-N}^{i-1} X_{i,s+1} \tilde{Q}_s X_{i,s+1}^T. \quad (4.178)$$

Трансформируем J_1 и J_2 с помощью выражений

$$K_s^T X_{i,s+1}^T = C_s \tilde{R}_s \tilde{M}_i^{-1} \tilde{R}_i^T, \quad (4.179)$$

$$X_{i,s} = \Phi_{i,s} - \tilde{R}_i \tilde{M}_i^{-1} \sum_{j=s}^{i-1} \tilde{R}_j^T C_j^T C_j \Phi_{j,s}, \quad (4.180)$$

$$i \in T^*, T^* = [t - N + N^*, t], t \in T_N,$$

где $\Phi_{i,s}$ переходная матрица системы (4.161)

$$\Phi_{i+1,s} = A_i \Phi_{i,s}, \Phi_{s,s} = I_n, i \geq s. \quad (4.181)$$

Подстановка (4.180), (4.177) дает (4.169). Рассмотрим J_2 . Вначале мы находим более компактное выражение для (4.180). Используя тождества

$$\Phi_{i,t-N}^{-1} \Phi_{i,s} = \Phi_{s,t-N}^{-1}, \Phi_{i,s} \Phi_{t,t-N}^{-1} = \Phi_{i,t-N} \quad (4.182)$$

и выражение

$$\tilde{R}_i = \Phi_{i,t-N}, \quad (4.183)$$

последовательно находим

$$\begin{aligned} X_{i,s} &= \Phi_{i,t-N} (\Phi_{i,t-N}^{-1} \Phi_{i,s} - \tilde{M}_i^{-1} \sum_{j=s}^{i-1} \tilde{R}_j^T C_j^T C_j \Phi_{j,s}) = \Phi_{i,t-N} \tilde{M}_i^{-1} \\ &\times (\tilde{M}_i - \sum_{j=s}^{i-1} \tilde{R}_j^T C_j^T C_j \Phi_{j,s}) \Phi_{i,t-N}^{-1} \Phi_{i,s} \\ &= \tilde{R}_i \tilde{M}_i^{-1} \tilde{R}_i^T, \quad i > s. \end{aligned} \quad (4.184)$$

Подстановка этого выражения в J_2 дает (4.171).

Следствие 1. Пусть система стационарна. Так как

$$\Phi_{i,s} = A^{i-s}, \quad i \geq s, \quad \tilde{R}_i = \Phi_{i,t-N} = A^{i-t+N}, \quad i \geq t-N,$$

то из ((4.169) - ((4.172) следует, что

$$\tilde{H}_i = A^i \tilde{M}_i^{-1} \Omega_i \tilde{M}_i^{-1} (A^i)^T, \quad (4.185)$$

$$\tilde{S}_i = A^i \tilde{M}_i^{-1} \Gamma_i \tilde{M}_i^{-1} (A^i)^T, \quad (4.186)$$

$$\Omega_{i+1} = \Omega_i + (A^i)^T C^T \tilde{V} C A^i, \quad \Omega_0 = 0, \quad (4.187)$$

$$\Gamma_{i+1} = \Gamma_i + \tilde{M}_i A^{-s} C^T \tilde{Q} C (A^{-s})^T \tilde{M}_i, \quad \Gamma_0 = 0. \quad (4.188)$$

Следствие 2. При выполнении условий теоремы, устанавливаем, что $\tilde{H}_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Рассмотрим $\tilde{S}_i$. Находим из (4.186)

$$\tilde{S}_i = A^i \tilde{M}_i^{-1} \sum_{s=1}^i \tilde{M}_s A^{-s} C^T \tilde{Q} C (A^{-s})^T \tilde{M}_s \tilde{M}_i^{-1} (A^i)^T.$$

Так как $\tilde{M}_s \leq \tilde{M}_i$, то $|\lambda_s(A)| < 1$, $s=1,2,\dots,n$ влечет

$$\begin{aligned} \tilde{S}_i &\leq A^i \sum_{s=1}^i A^{-s} C^T \tilde{Q} C (A^{-s})^T (A^i)^T \\ &= \sum_{s=0}^{i-1} A^s C^T \tilde{Q} C (A^s)^T \rightarrow L \quad \text{при } i \rightarrow \infty \end{aligned}$$

где L - решение уравнения Ляпунова $L = A^T L A + C^T \tilde{Q} C$. Более общий случай, когда имеются собственные числа A на единичном круге может быть изучен, используя подход, описанный в теореме.

В качестве простого применения, пусть $n = 1$, тогда

$$x_{i+1} = ax_i + w_i, y_i = x_i + \xi_i.$$

Нетрудно проверить, что если $a = 1$, то

$$\tilde{P}_i = V/i + Qi/3, N_{opt} = (3V/Q)^{1/2}.$$

4.11 Адаптивный КИХ фильтр

Фильтр Калмана (ФК), широко используемый в различных приложениях, представляет собой алгоритм, позволяющий получать оптимальные оценки для линейных моделей пространства состояний, возмущенных белыми шумами. В классической постановке предполагается, что динамика системы и ковариационные матрицы шумов известны и определяют достижимую точность оценок. Однако во многих случаях эти модельные предположения не являются реалистичным, и их нарушение может ухудшить оценку состояния, что приводит к расходимости ФК. Это обусловлено неадекватностью используемой номинальной модели системы на интервале наблюдения и использованием при обработке всей доступной информации на текущий момент времени [1, 2]. В этом разделе рассматриваются фильтры с конечно-импульсной характеристикой (КИХ) для оценки состояния линейных дискретных систем, которые используются в различных приложениях, включая, в частности, управление, робототехнику, слежение за целями обработку сигналов и так далее [3-13]. В отличие от ФК, они позволяют избегать расходимости и неудовлетворительного отслеживания объекта, связанных с временными возмущениями, ошибками в задании статистики шума, резкими изменениями в поведении объекта [1, 14, 15]. Это достигается использованием моделей систем, заданных только на конечном дискретном интервале (скользящем окне). Основной проблемой является выбор подходящего размера скользящего окна, обеспечивающий приемлемую точность оценок состояния системы на нем.

Для построения фильтров с КИХ были предложены различные методы. Оптимальные алгоритмы для заданного размера скользящего разработаны в [1, 14, 15]. Основная идея предлагаемых в этих работах подходов заключается в том, что начальные условия в начальных точках скользящих окон предполагаются диффузными случайными величинами или неизвестными произвольными постоянными. В [15] предложен фильтр с КИХ, получающий информацию о начальных условиях окна по конечному количеству наблюдений. Показано, что полученные оценки являются несмещенными.

Другой подход, обеспечивающий оптимальность и несмещенность за конечное число шагов, описан в [16, 17]. Предложенный авторами опти-

мальный несмещенный КИХ фильтр использует известную статистическую информацию для части компонент вектора состояния в начальных точках скользящих окон. В рамках ковариационного анализа это позволяет учесть априорную статистическую информацию о случайных смещениях, трендах и заданных движениях системы. В [18-25] разработаны несмещенные КИХ фильтры, игнорирующие статистику шума процесса, измерений и статистику начальных условий вектора состояния. Компьютерное моделирование показывает, что такие фильтры могут быть более робастными, чем фильтр ФК, если размер скользящего окна правильно подобран. Однако предложенные рекурсивные фильтры имеют два недостатка. Во-первых, для инициализации рекурсивного фильтра во время цикла обучения требуется не рекуррентная форма алгоритма, что в некоторых случаях может быть неудобно или даже проблематично (например, при наличии пропусков в наблюдениях, оценке параметров нелинейных систем и нестационарных процессов). Во-вторых, эти фильтры не используют априорно известную информацию для инициализации в начальных точках скользящих окон. Различные обобщения этого подхода предложены в [26-30].

Одной из наиболее важных проблем, связанных с КИХ фильтрами, является выбор размера горизонта, который влияет на эффективность его оценки. Существуют общие требования к его выбору. Во-первых, модель должна быть адекватна объекту в пределах скользящих окон. Во-вторых, если размер горизонта слишком мал, то имеющейся информации недостаточно для получения приемлемой оценки точности. И наоборот, если он слишком велик, то может оказаться неприемлемым с точки зрения практической реализации и переходных характеристик фильтра. Подходы для его выбора основаны на статистическом моделировании, аналитических соотношениях для достаточно простых моделей и реальных измерениях [31]. В литературе было предложено несколько адаптивных алгоритмов для выбора размера горизонта КИХ фильтров для линейных моделей пространства состояний. В [32] предложен адаптивный КИХ фильтр, использующий два задаваемых пользователем окна разного размера и статистике хи-квадрат для сравнения состояний номинальной и задаваемой системы. Не рекуррентная предстваление для КИХ фильтра разрабатывается, используя условную плотность распределения по измерениям, поступающим с последнего скользящего окна. Моделирование показало, что такой подход позволяет значительно улучшить характеристики по сравнению с обычным КИХ фильтром, который использует фиксированный размер горизонта. В [33, 34] предложен метод с расширяемым банком КИХ фильтров, для адаптации размера горизонта на основе стратегии максимального правдоподобия. Банк фильтров состоит из нескольких параллельно работающих КИХ фильтров с минимальной дисперсией [1], каждый из которых соответствует определенному размеру горизонта. В [35] разработана стратегия

выбора горизонта, ранее предложенная в [18], и конструкция адаптивного итерационного несмещенного КИХ фильтра. Подход основан на том, что текущая итерация с большой длиной горизонта содержит информацию о предыдущих итерациях с малой длиной горизонта.

В данном разделе предлагается новый алгоритм фильтрации с КИХ и адаптивным выбором размера горизонта, основанный на совместном использовании оптимального фильтра со скользящим окном (RHOFIR) [16, 17] и детекторов резких изменений. Далее мы называем такой алгоритм фильтрации адаптивным фильтром RHOFIR (ARHOFIR) фильтром. Отметим следующие основные результаты:

1. Фильтр реализует концепцию, согласно которой размер горизонта должен быть достаточно мал, когда в системе появляется временная неопределенность, и достаточно велик, если она отсутствует или исчезает. Основная идея заключается в том, что фильтр RHOFIR строится для номинальной модели, а детектор изменений используется для анализа последовательности остатков. Это позволяет сформулировать процедуру выбора размера горизонта в зависимости от выхода детектора. Фильтр ARHOFIR имеет лучшие переходные характеристики по сравнению с ФК и фильтром RHOFIR на интервалах, где существует временная неопределенность, и может обеспечить такую же точность оценок, как и ФК при их отсутствии. В отличие от известных аналогов, нет необходимости задавать размер окон, а их количество может быть любым; алгоритм определен в итерационной форме и для инициализации такого фильтра не требуется цикл обучения в пакетной форме; тестовая статистика используется для анализа последовательности инноваций, но не для сравнения состояний номинальной и вспомогательной системы.

2. Установлены монотонность и асимптотические свойства ковариационной матрицы ошибки оценивания (ЕЕСМ) и коэффициента усиления фильтра RHOFIR. Мы опираемся на выражения для ЕЕСМ и матричных переходных характеристик однородных частей фильтра, которые были получены в [16, 17,]. Основной проблемой, связанной с получением этих результатов, является необходимость анализа алгоритмов с диффузной инициализацией и переходными компонентами. Эти результаты составляют фундамент для обоснования принципиальной возможности реализации сформулированных выше требований для фильтра ARHOFIR.

Постановка задачи

Рассмотрим линейную стационарную дискретную модель системы

$$x_{t+1} = Ax_t + Bw_t \quad (1)$$

$$y_t = Cx_t + D\xi_t \quad (2)$$

где $x_t \in R^n$ - вектор состояния, $y_t \in R^m$ - вектор измерений, w_t, ξ_t - некоррелированные случайные процессы с нулевыми средними и известными ковариационными матрицами $E(w_t w_t^T) = Q, E(\xi_t \xi_t^T) = V, A, B, C, D$ - известные матрицы соответствующей размерности, $t = 1, 2, \dots$.

Введем дискретные интервалы $[t - N, t], t \in T_N = \{N, N + 1, \dots\}$, где N размер скользящего окна. Предположим, что выполняются следующие условия.

A1: Априорная информация о компонентах $x_{t-N}, t \in T_N$ отсутствует, и они являются либо неизвестными константами, либо случайными величинами, статистические характеристики которых неизвестны.

A2: Если компоненты x_{t-N} являются случайными величинами, то они некоррелированы с w_t и ξ_t для $t = 1, 2, \dots$.

В предположениях A1, A2 несмещенная линейная оценка состояния (1) для $i \in T^* = [t - N + N^*, t], t \in T_N$ минимизирующая критерий $E[(x_i - \hat{x}_i)^T (x_i - \hat{x}_i)]$ (фильтр RHOFIR) определяется следующими соотношениями [16, 17].

$$\hat{x}_{i+1} = A\hat{x}_i + K_i(y_i - C\hat{x}_i), \quad \hat{x}_{t-N} = 0 \quad (3)$$

$$K_i = K_i^s + K_i^{tr} \quad (4)$$

$$K_i^s = A_i S_i C_i^T N_i^{-1} \quad (5)$$

$$K_i^{tr} = A_{1i} R_i M_{i+1}^+ R_i^T C_1^T N_i^{-1}, \quad (6)$$

$$S_{i+1} = A S_i A_1^T - A S_i C_1^T N_i^{-1} C S_i A_1^T + \tilde{Q}_i, \quad S_{t-N} = 0, \quad (7)$$

$$R_{i+1} = A_{1i} R_i, \quad R_{t-N} = I_n, \quad (8)$$

$$M_{i+1} = M_i + R_i^T C_1^T N_i^{-1} C R_i, \quad M_{t-N} = 0, \quad (9)$$

$$N_i = C S_i C_1^T + \tilde{V}, \quad (10)$$

$$A_i = A - A S_i C_1^T N_i^{-1} C, \quad (11)$$

$$N^* = \min_i \{i: M_i > 0, i = t - N, t - N + 1, \dots\}, \\ i \in [t - N, t], t \in T_N, \quad (12)$$

где $\tilde{Q} = B Q B_1^T, \tilde{V} = D V D^T, A^+$ является обратной величиной Мура-Пенроуза A, I_n единичная матрица размера n .

Ковариационная матрица ошибки оценивания (ЕЕСМ) фильтра RHOFIR для $i \in T^* = [t - N + N^*, t], t \in T_N$ задается выражением

$$P_i = S_i + H_i \quad (13)$$

где $H_i = R_i M_i^+ R_i^T$. В (4), (13), (7) K_i^{tr}, H_i - переходные составляющие коэффициента усиления фильтра и ЕЕСМ, отражающие отсутствие априорной информации о $x_{t-N}, t \in T_N$ S_i - стандартное матричное уравнение Риккати с нулевым начальным условием, соответственно.

Задача формулируется следующим образом. Модель (1), (2) рассматривается как номинальная для анализируемого объекта, а для оценки ее состояния используется фильтр RHOFIR, описываемый выражениями (3) - (13). Требуется обнаруживать изменения свойств объекта на основе наблюдений за остатками фильтра $v_i = y_i - C\hat{x}_i$ и предложить фильтр с КИХ для выбора размера скользящего окна N в каждый момент времени для улучшения характеристик фильтра при действии возмущений.

СВОЙСТВА МОНОТОННОСТИ ФИЛЬТРА RHOFIR

В этом подразделе рассматриваются свойства матричных функций P_i , H_i , K_i^{tr} . Используя асимптотический анализ, показано, что при определенных условиях они являются не возрастающими функциями, сходящимися к установившемуся состоянию с увеличением размера скользящего окна.

Из (3-11), (13) следует, что P_i , H_i , K_i^{tr} не зависят от t и достаточно изучить их поведение в пределах одного скользящего окна $i \in [0, N]$ для $t = N$.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

- (a) пара матриц $[A, \tilde{Q}^{1/2}]$ обнаруживаемая,
- (b) пара матриц $[A, C^T]$ стабилизируемая,
- (c) $\tilde{V} > 0$,
- (d) $|\lambda_i(A)| \leq 1$, где $\lambda_i(A)$, $i = 1, 2, \dots, n$ собственные числа матрицы A .

Тогда: 1. Существуют однопараметрические семейства матричных функций P_i^μ, H_i^μ и значение $\mu^* > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ и конечного интервала $T^* = [N^*, N]$

$$\|P_i - P_i^\mu\| \leq \varepsilon, \|H_i - H_i^\mu\| \leq \varepsilon \quad (14)$$

$$P_{i+1}^\mu \leq P_i^\mu, H_{i+1}^\mu \leq H_i^\mu \quad (15)$$

для всех $i \in T^*$ и $\mu \geq \mu^*$.

3. При неограниченном увеличении размера горизонта существуют пределы

$$P_i^\mu \rightarrow \bar{P}, H_i^\mu \rightarrow 0 \text{ при } i \rightarrow \infty \quad (16)$$

где

$$\bar{P} = A\bar{P}A^T - A\bar{P}C^T(C\bar{P}C^T + \tilde{V})^{-1}\bar{P}A^T + \tilde{Q} \quad (17)$$

для всех $\mu \geq \mu^*$.

Доказательство. 1. Определим P_i^μ . Предположим, что состояние (1) в начальной точке x_0 скользящего окна является диффузной случайной величиной, $E(x_0) = 0$, $E(x_0 x_0^T) = \mu I_n$, где $\mu > 0$ является большим параметром. Тогда ЕЕСМ оценки состояния (1) с помощью ФК имеет вид

$$P_{i+1}^\mu = A P_i^\mu A^T - A P_i^\mu C^T N_i^{-1} C P_i^\mu A^T + \tilde{Q} \quad (18)$$

где

$$P_0^\mu = \mu I_n \quad N_i = C P_i^\mu C^T + \tilde{V}.$$

Аппроксимирующее свойство (17) для P_i^μ следует из равномерного асимптотического представления на T^* [17]

$$\begin{aligned} P_i^\mu &= R_i(I_n - M_i M_i^+) R_i^T + S_i \\ &+ R_i M_i^+ R_i^T + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \text{ при } \mu \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (19)$$

благодаря обращению в ноль первого члена в этом выражении для $i \in T^*$ и (13). Найдем H_i^μ , полагая

$$H_i^\mu = P_i^\mu - S_i, \quad (20)$$

где P_i^μ , S_i определяются (19) и (7), соответственно. Так как P_i^μ и S_i решения одного и того же уравнения Риккати, то их разность удовлетворяет следующему однородному уравнению [17]

$$H_{i+1}^\mu = A_i H_i^\mu A_i^T - A_i H_i^\mu C^T N_{1i}^{-1} C H_i^\mu A_i^T, \quad (21)$$

где $H_0^\mu = \mu I_n$, A_i определяется (11), $N_{1i} = C S_i C^T + C H_i^\mu C^T + \tilde{V}$. Аппроксимирующее свойство (14) для H_i^μ следует из равномерного асимптотического представления на T^* [17]

$$\begin{aligned} H_i^\mu &= R_i(I_n - M_i M_i^+) R_i^T \\ &+ R_i M_i^+ R_i^T + O\left(\frac{1}{\mu}\right), \text{ при } \mu \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим первое неравенство в (15). Достаточно показать, что оно верно для некоторого значения $i = k$ [36]. Пусть $k = 1$. Мы показываем, что $P_1^\mu \leq P_0^\mu = \mu I_n$ для достаточно большого μ . Из (19) следует, что

$$P_1^\mu = \mu AA^T - \mu APC^T(CC^T + \frac{\tilde{V}}{\mu})^{-1}CA^T + \tilde{Q} \quad (23)$$

Так как для любой $m \times n$ матрицы C и несингулярной $m \times m$ матрицы $\tilde{V}$ [17, Леммы 2.1, 2.2]

$$\Omega = (CC^T + \tilde{V}/\mu)^{-1} = \tilde{V}^{-1}(I_n - CC^T(CC^T)^+)_\mu + (CC^T)^+ + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \text{ при } \mu \rightarrow \infty, \quad (24)$$

$$(I_n - CC^T(CC^T)^+)C = 0 \quad (25)$$

то

$$C^T \Omega C = CT_1(CC^T)^+C + O\left(\frac{1}{\mu}\right), \text{ при } \mu \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Поскольку $C^T(CC^T)^+ = C^+$, то подстановка этого выражения в (23) дает

$$P_1^\mu = \mu AA^T - \mu AC^T(CC^T)^+CA^T + O(1) = \mu A \Sigma A^T + O(1), \quad \text{при } \mu \rightarrow \infty, \quad (27)$$

где $\Sigma = I_n - C^+C$. Таким образом, необходимо показать, что

$$A \Sigma A^T \leq I_n \quad (28)$$

Принимая во внимание, что Σ имеет только нули и единицы в качестве собственных значений, а собственные значения AA^T совпадают с $\lambda_i^2(A)$, $i = 1, 2, \dots, n$, мы последовательно находим для любого $z \neq 0$ используя условие теоремы (d)

$$z_1^T A \Sigma A^T z \leq z_1^T A A^T z \leq z_1^T z.$$

Отсюда следует первое неравенство в (18). Рассмотрим второе неравенство в (15). Из (19), (20) находим.

$$(P_i^\mu - P_{i+1}^\mu) - (S_i - S_{i+1}) = H_i^\mu - H_{i+1}^\mu + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \text{ при } \mu \rightarrow \infty \quad (29)$$

для $i \in T^*$. Поскольку S_i является решением уравнения Риккати с нулевым начальным условием, то $S_{i+1} \geq S_i$ для $i = 1, 2, \dots$ [36]. Кроме того, из (15)

также следует $P_{i+1}^\mu \leq P_i^\mu$. Это влечет, что из (29) следует и достаточно большого μ (15) будет выполняться.

Поскольку (7), (18) являются стандартными уравнениями Риккати, то существование пределов в (16) для любого $\mu > 0$ следует из условий теорем (a), (b), (c) и (20)

Следствие 1.1. Пусть $Q > \bar{Q}, V > \bar{V}$. Тогда

$$\begin{aligned} P_i^\mu(Q, V) &\geq P_i^\mu(\bar{Q}, \bar{V}), \\ H_i^\mu(Q, V) &\geq H_i^\mu(\bar{Q}, \bar{V}). \end{aligned} \quad (30)$$

Первое неравенство следует из известного свойства уравнения Риккати [36]. Второе неравенство - из (20), (30) и

$$\begin{aligned} P_i^\mu(\bar{Q}, \bar{V}) - P_i^\mu(\bar{Q}, \bar{V}) &\geq S_i(Q, V) - S_i(\bar{Q}, \bar{V}), \\ (P_i^\mu(Q, V) - P_i^\mu(\bar{Q}, \bar{V})) - (S_i(Q, V) - S_i(\bar{Q}, \bar{V})) &= H_i^\mu(Q, V) - H_i^\mu(\bar{Q}, \bar{V}). \end{aligned}$$

Следствие 1.2. Условия теоремы, за исключением последнего, хорошо известны и обеспечивают существование устойчивого состояния ФК [36]. Выполнение условия (d) и ограничение на выбор μ гарантирует монотонное поведение решений рассматриваемых матричных уравнений (18), (21).

Теорема 2. Пусть выполнены условия Теоремы 1. Тогда: 1. Существует такое $\mu^* > 0$, что

$$\alpha_i^\mu \geq \alpha_{i+1}^\mu, i \in T^* = [N^*, N], \mu \geq \mu^* \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_i^\mu &= \text{tr}(K_i^\mu (K_i^\mu)^T), \quad K_i^\mu = AP_i^\mu C^T (N_i^\mu)^{-1}, \\ N_i^\mu &= CP_i^\mu C^T + \tilde{V}, \end{aligned} \quad (32)$$

2. Если $\det A \neq 0$ и $\det \tilde{V} \neq 0$ то

$$\beta_i^\mu \geq \beta_{i+1}^\mu, i \in T^* = [N^*, N], \mu \geq \mu^*, \quad (33)$$

где

$$\beta_i^\mu \text{tr}(K_i^{tr, \mu} (K_i^{tr, \mu})^T) K_i^{tr, \mu} = AN_i^\mu C^T (N_i^\mu)^{-1} \quad (34)$$

3. Существует значение $\mu^* > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$, конечного интервала $T^* = [N^*, N]$ и $i \in T^*$

$$\|K_i - K_i^\mu\| \leq \varepsilon,$$

$$\|K_i^{tr} - K_i^{tr,\mu}\| \leq \varepsilon. \quad (35)$$

Доказательство. Использование тождества

$PH^T(HPH^T + R)^{-1} = (P^{-1} + H^T R^{-1}H)^{-1}H^T R^{-1}$
для $P = P_i^\mu$, $H = C$, $R = \tilde{V}$ дает

$$P_i^\mu C^T (N_i^\mu)^{-1} = ((P_i^\mu)^{-1} + C^T \tilde{V}^{-1}C)^{-1} C^T \tilde{V}^{-1}. \quad (36)$$

Поскольку $P_{i+1}^\mu \leq P_i^\mu$, то

$$\begin{aligned} & ((P_i^\mu)^{-1} + C^T \tilde{V}^{-1}C)^{-1} \\ & \geq ((P_{i+1}^\mu)^{-1} + C^T \tilde{V}^{-1}C)^{-1}, \end{aligned} \quad (37)$$

что влечет (31).

2. Представим $K_i^{tr,\mu}$ в следующей эквивалентной форме [17, Лемма 5.2, p.145]

$$K_i^{tr,\mu} = A_i H_i^\mu C^T N_i^{-1}, \quad (38)$$

где

$$A_i^0 = A - AS_i^0 C^T N_i^{-1} C, \quad N_i = CS_i C^T + \tilde{V}.$$

Используя тождество

$$I - H(R + PH)^{-1}P = (I + HR^{-1}P)^{-1} \quad (39)$$

для $H = S_i C^T$, $R = \tilde{V}$, $P = C$ и принимая во внимание, что $\det A \neq 0$ мы устанавливаем, что

$$I_n - S_i C^T N_i^{-1} C = (I_n + S_i C^T \tilde{V}^{-1} C)^{-1} \quad (40)$$

и матрица A_i не сингулярная, устанавливается, что $\det A \neq 0$.

Имеем

$$\begin{aligned} K_i^{tr,\mu} &= A_i H_i^\mu C^T N_i^{-1} \\ &= R_{i+1} (M_{i+1}^\mu)^{-1} R_{i+1}^T A_i^{-T} C^T N_i^{-1}, \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$M_{i+1}^\mu = M_i^\mu + R_i^T C_0^T N_i^{-1} C R_i, M_0 = \mu I_n. \quad (42)$$

Мы находим из (40)

$$\begin{aligned} A_i^{-T} C^T N_i^{-1} &= A^{-T} (I_n + C^T \tilde{V}^{-1} C S_i) C^T N_i^{-1} \\ &= A^{-T} C^T \tilde{V}^{-1} \end{aligned} \quad (43)$$

Подстановка этого выражения в (41) дает

$$\begin{aligned} K_i^{tr,\mu} &= R_{i+1} (M_{i+1}^\mu)^{-1} R_{i+1}^T A^{-T} C^T \tilde{V}^{-1} \\ &= H_{i+1}^\mu A^{-T} C^T \tilde{V}^{-1} \end{aligned} \quad (44)$$

Поскольку $H_{i+1}^\mu \leq H_i^\mu$ то отсюда следует (33).

3. Утверждение следует из (32), (38), (14).

Комментарий 2.1. Из (16) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} K_i^\mu &= \bar{P} C^T (C \bar{P} C^T + \tilde{V})^{-1}, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} K_i^{tr,\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Комментарий 2.2. Требование $\det A \neq 0$ все линейные дискретные системы, полученные из непрерывных систем, удовлетворяют этому условию.

Теорема 3. Пусть $\det A \neq 0$ и $\det \tilde{V} \neq 0$. Тогда

$$H_i \leq \bar{H}_i = A^i \bar{M}_i^{-1} (A^i)^T, i \geq N^*, \quad (46)$$

Где

$$\bar{M}_{i+1} = \bar{M}_i + (A^i)^T C^T \tilde{V}^{-1} C A^i, \quad \bar{M}_0 = 0. \quad (47)$$

Доказательство. Находим из (8)

$$\begin{aligned} R_i &= A_{i-1} A_{i-2} \dots A, i = 2, 3, \dots, \\ R_0 &= I_n R_1 = A \end{aligned} \quad (48)$$

и поскольку $\det A_i \neq 0$ то

$$H_i = R_i M_i^+ R_i^T$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{j=0}^{i-1} R_i^{-T} R_j^T C^T N_j^{-1} C R_j R_i^{-1} \right)^{-1} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{i-1} J_j \right)^{-1}, i \geq N^*
\end{aligned}$$

Из (48) и (40) следует

$$\begin{aligned}
R_1^{-1} &= A^{-1}, \quad R_i^{-1} = A^{-1} A_1^{-1} \dots A_{i-1}^{-1}, \quad i = 2, 3, \dots, \\
R_j R_i^{-1} &= A_j^{-1} A_{j+1}^{-1} \dots A_{i-1}^{-1}
\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
&= (I_n + S_j C^T \tilde{V}^{-1} C) A^{-1} (I_n + S_{j+1} C^T \tilde{V}^{-1} C) A^{-1} \dots \\
&\dots (I_n + S_{i-1} C^T \tilde{V}^{-1} C) A, \quad i = 2, 3.
\end{aligned} \tag{50}$$

Принимая во внимание, что $S_0 = 0$ и

$$\begin{aligned}
R_i^{-T} R_j^T C^T N_j^{-1} C R_j R_i^{-1} &\geq (A^{j-i})^T (I_n + C^T \tilde{V}^{-1} C S_j)^{j-i} \\
&\quad * C^T N_j^{-1} C (I_n + S_j C^T \tilde{V}^{-1} C) A, \quad i = 2, 3, \dots, \\
&\quad (I_n + C^T \tilde{V}^{-1} C S_j) C^T N_j^{-1} \\
&= C^T (I_n + \tilde{V}^{-1} C S_j C^T) N_j^{-1} \\
&= C^T \tilde{V}^{-1},
\end{aligned}$$

последовательно находим

$$\begin{aligned}
J_j &= \sum_{j=0}^{i-1} R_i^{-T} R_j^T C^T N_j^{-1} C R_j R_i^{-1} = \\
&= C^T \tilde{V}^{-1} C + \sum_{j=1}^{i-1} R_i^{-T} R_j^T C^T N_j^{-1} C R_j R_i^{-1} \\
&\geq C^T \tilde{V}^{-1} C + \sum_{j=1}^{i-1} (A^{j-i})^T (I_n + C^T \tilde{V}^{-1} C S_j)^{j-i} \\
&\quad * C^T N_j^{-1} C (I_n + S_j C^T \tilde{V}^{-1} C) A \\
&= \sum_{j=0}^{i-1} (A^{j-i})^T C^T \tilde{V}^{-1} C A^{j-i}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
H_i &\leq \left(\sum_{j=0}^{i-1} (A^T)^{j-i} C^T \tilde{V}^{-1} C A^{j-i} \right)^{-1} \\
&= A^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (A^T)^j C^T \tilde{V}^{-1} C A^j \right)^{-1} (A^i)^T.
\end{aligned}$$

Теорема 4. Пусть выполняются следующие условия:

- (a) $\tilde{V} > 0$,
- (b) $\det(A) \neq 0$,
- (c) $|\lambda_s(A)| \leq 1$, где $\lambda_s(A)$, $s = 1, 2, \dots, n$ являются собственными значениями матрицы A ,
- (d) пара матриц $[A, C]$ является наблюдаемой,
- (e) для любого n мерного вектора $z \neq 0$

$$J_i = \sum_{j=0}^{i-1} z^T (A^{-j-1})^T C^T C A^{-j-1} z \rightarrow \infty \quad (51)$$

при $i \rightarrow \infty$. Тогда $\bar{H}_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Доказательство. Из (46) находим

$$\begin{aligned}
\bar{H}_i^{-1} &= (A^{-i})^T \bar{M}_i A^{-i} \\
&= \sum_{j=0}^{i-1} (A^{-j-1})^T C^T \tilde{V}^{-1} C A^{-j-1} = J_i i \geq N^*
\end{aligned} \quad (52)$$

Если $|\lambda_s(A)| < 1$, $s = 1, 2, \dots, n$, то утверждение теоремы очевидно. Пусть z лежит в корневом подпространстве собственных значений $\lambda_s^{-1}(A)$ таких, что $|\lambda_s(A)| = 1$. Если $\lambda_s(A)$ соответствующие элементарные делители, то

$$A^{-1}z = \lambda_s^{-1}(A)z, \quad z^T J_i z = i \|C^T z\|^2.$$

Поскольку $\tilde{V} > 0$, $\det(\bar{M}_i) \neq 0$ для $i \in [N^*, N]$ и пара матриц $[A, C]$ является наблюдаемой, то не существует собственных векторов A ортогональных столбцам C^T и $z^T J_i z \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Что влечет $\bar{H}_i \rightarrow 0$ $i \rightarrow \infty$.

Пусть теперь $\lambda_s^{-1}(A)$ $|\lambda_s(A)| = 1$ соответствуют кратные делители и z принадлежит корневому подпространству собственных значений $\lambda_s^{-1}(A)$ с базой $b_1, \dots, b_k$ которая определяет любой блок Жордана размерности $k \times k$

$$A^{-1}b_1 = \lambda_s^{-1}(A)b_1, A^{-1}b_i = \lambda_s^{-1}(A)b_i - b_{i-1}, i = 1, 2, \dots, k$$

Известно, что для любого базисного вектора b_k

$$\begin{aligned} A^{-i-1}b_k &= \alpha_1 b_k + \alpha_2 b_{k-1} + \dots + \alpha_k b_1 \\ &= (i+1)^k/k! \left[(\lambda_s^{-1}(A))^{i-k+1} b_1 + o\left(\frac{1}{i}\right) \right] \text{ при } i \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (53)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (\lambda_s^{-1}(A))^{i+1}, \alpha_2 = (\lambda_s^{-1}(A))^i i, \\ \alpha_k &= \binom{i+1}{s} (\lambda_s^{-1}(A))^{i-k+1} \end{aligned} \quad (54)$$

Поскольку $\alpha_i > 0$ является собственным значением A^{-1} и

$$\sum_{j=0}^{i-1} (j+1)^{2k} b_1^T C^T \tilde{V}^{-1} C b_1 \rightarrow \infty$$

то $\tilde{H}_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Адаптивный алгоритм выбор размера скользящего окна

Рассмотрим применение полученных результатов к выбору размера N горизонта фильтра RNOFIR. Существует несколько общих требований к его выбору для КИХ фильтров. Прежде всего, модель должна быть адекватна объекту в пределах скользящих окон. Во-вторых, если размер горизонта слишком мал, то имеющейся информации недостаточно для получения приемлемой оценки точности. И наоборот, если он слишком велик, то может оказаться неприемлемым с точки зрения переходных характеристик фильтра. Принимая во внимание эти соображения, мы хотели бы выбирать N большим в отсутствие возмущений и малым в течение их действия.

Принципиальная возможность решения этой задачи с помощью фильтра RNOFIR следует из того, что коэффициент K_i усиления фильтра является монотонно не возрастающей матричной функцией (было доказано в предыдущем разделе). Чтобы оценить момент появления изменений в поведении объекта, в литературе предлагаются различные решения, основанные на анализе остатков ФК [37, 38]. В данном исследовании мы используем статистику хи-квадрат, которая широко применяется в различных приложениях [39-41] в качестве детектора таких изменений.

Рассмотрим след ковариационной матрицы ошибки оценивания филь-

тра RHO FIR $tr(P_i^\mu)$. Мы показали, что ЕЕСМ, определяемая (13), может быть аппроксимирована однопараметрическим семейством матричных функций P_i^μ , которые монотонно не возрастают и имеют конечный предел для $i \rightarrow \infty$. Принимая это во внимание, установим приемлемые значения в окрестности P_i установившегося значения, используя неравенство

$$p_{min} \leq (tr(P - \bar{P}) \leq P_{max}, \quad (55)$$

где p_{min}, p_{max} - параметры, выбираемые пользователем. Отсюда следует верхняя граница N_{max} для допустимых значений размера скользящего окна $[N_{max}, N_{min}]$, где $N^* \leq N_{min} < N_{max}$. Отметим, что вместо $tr(P_i)$ может быть использован любой диагональный элемент P_i .

Введем скользящие окна $[t + \Delta_t, t + N_{max}]$ переменной длины $N_t = N_{max} - \Delta_t \geq N_{min}, t = 0, 1, \dots$, и определенный на них нормированный квадрат обновлений

$$\begin{aligned} J_t &= \sum_{t+\Delta_t}^{t+N_{max}} v_i^T \Sigma_i^{-1} v_i / (N_{max} - \Delta_t) \\ &= \sum_{t+\Delta_t}^{t+N_{max}} (y_i - C \hat{x}_i)^T \Sigma_i^{-1} (y_i - C \hat{x}_i) / (N_{max} - \Delta_t), \end{aligned} \quad (56)$$

где Δ_t - целочисленная последовательность, $\Sigma_i = C P_i C^T + \tilde{V}$. При гипотезе, что шумы w_t, ξ_t , в (1), (2) являются гауссовскими переменными, величина $J_t m v_t$ имеет распределение хи-квадрат с $\nu_t = (N_{max} - \Delta_t + 1)$ степенями свободы. Хи-квадрат тест определяется следующим образом:

$$J_t > \eta_t = F^{-1}(1 - \alpha | \nu_t) \quad (57)$$

в случае, когда имеется возмущение на интервале $[t + \Delta_t, t + N_{max}]$, где $F(x | \nu)$ распределение Хи-квадрат ν со степенями свободы, α - вероятность ложной тревоги. Отметим случай теста с одной степенью свободы [39, 41] как частный случай (56), полагая

$$J_{t+N_{max}} = v_{t+N_{max}}^T \Sigma_{t+N_{max}}^{-1} v_{t+N_{max}}$$

Описанная схема обнаружения резких изменений является одной из простых известных процедур и в литературе [37, 38] представлено множество продвинутых подходов, обсуждение которых выходит за рамки данной работы. Предлагается следующая адаптивная процедура выбора размера

горизонта:

$$N_t = N_{max}t = 0,1, \quad (58)$$

$$\Delta_t = \Delta_{t-1} + \tau_t, \Delta_0 \in [N_{MAX}, N_{MIN}] \quad (59)$$

где τ_t - любая целочисленная последовательность, удовлетворяющая условиям

$$\tau_t = \begin{cases} \geq 0 & \text{если } J_t > \eta_t \text{ и } \Delta_{t-1} + \tau_t < N_{max} - N_{min} \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (60)$$

$$\tau_t = \begin{cases} \leq 0 & \text{if } J_t \leq \eta_t \text{ and } \Delta_{t-1} + \tau_t \geq N_{min}. \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (61)$$

Покажем, как теоремы 3, 4 могут быть использованы для оценки верхней границы N_{max} для случая неполной или недостаточной информации об интенсивности шумов в (1), (2). Из (13) и теорем 3, 4 следует, что

$$P_i = S_i + H_i \leq S_i + \bar{H}_i, \quad (62)$$

где $\bar{H}_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и не зависит от интенсивности шума динамики $\bar{Q}$. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое i^* что $||\bar{H}_i|| \leq \varepsilon$ и выполнение условия (55) не зависит от $\bar{Q}$ из $i \geq i^*$. Таким образом, мы можем положить $N_{max} = i^*$.

Оценка верхней границы для N_{max} может быть получена также с использованием тех же соображений для переходных составляющих коэффициента усиления фильтра $K_i^{tr, \mu}$ и неравенства

$$tr(K_i^{tr}(K_i^{tr})^T) \leq tr(\bar{K}_i^{tr}(\bar{K}_i^{tr})^T), \quad (63)$$

где

$$\bar{K}_i^{tr} = \bar{H}_{i+1}A^{-T}C^T\tilde{V}^{-1} \quad (64)$$

В случае скалярного измерения (или $\tilde{V} = qI_m$) $\gamma_i = tr(\bar{K}_i^{tr}(\bar{K}_i^{tr})^T)$ не зависит от $\tilde{V}$.

Основные результаты, представленные в этом подразделе, были получены в работе [44].

Список литературы к подразделу 4.11

1. W. H. Kwon, P.S. Kim, S.H. Han, “A receding horizon unbiased FIR filter for discrete-time state space models”, *Automatica* 38 (3) (2002), pp. 545–551.
2. Y. S. Shmaliy, S. Zhao, C. K. Ahn “Unbiased finite impulse response filtering: an iterative alternative to Kalman filtering ignoring noise and initial conditions,” *IEEE Control System*, vol. 37, no. 5, pp. 70–89, Oct. 2017.
3. In Hwan Choi, Jung Min Pak, Choon Ki Ahn, Young Hak Mo, Myo Taeg Lim, Moon Kyou Song, New preceding vehicle tracking algorithm based on optimal unbiased finite memory filter. *Measurement* 73 (2015) 262–274.
4. Shunyi Zhao, Yuriy S. Shmaliy, Choonki Ahn, Lijia Luo An Improved Iterative FIR State Estimator and Its Applications, June 2019 *IEEE Transactions on Industrial Informatics* PP(99):1-1.
- 5.] S. Zhao, Y. S. Shmaliy, and F. Liu, “Fast Kalman-like optimal unbiased FIR filtering with applications,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 64, no. 9, pp. 2284–2297, May 2016.
6. S. Yin, J. Wang, and T. Liu, “Improved UFIR tracking algorithm for maneuvering target,” *Indonesian J. Electr. Eng. Comput. Sci.*, vol. 2, no. 2, pp. 344–350, May 2016.
7. Y. S. Shmaliy, S. H. Khan, S. Zhao, and O. Ibarra-Manzano, “General unbiased FIR filter with applications to GPS-based steering of oscillator frequency,” *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 25, no. 3, pp. 1141–1148, May 2017.
8. P. S. Kim, E. H. Lee, M. S. Jang and S. Y. Kang, A finite memory structure filtering for indoor positioning in wireless sensor networks with measurement delay, *International Journal of Distributed Sensor Networks*, vol.13, no.1, pp.1-8, 2017.
9. P. S. Kim, A design of finite memory residual generation filter for sensor fault detection, *Measurement Science Review*, vol.17, no.2, pp.75-81, 2017.
10. S. H. You, et al.: “Unbiased finite-memory digital phase-locked loop,” *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp. Briefs* 63 (2016) 7 98 (DOI: 10.1109 /TCSII.201 6. 2531138).
11. J. M. Pak, et al.: “Maximum likelihood FIR filter for visual object tracking,” *Neurocomputing* 216 (2016) 543 (DOI: 10.1 016/j.neucom .2016.07. 047).
12. C. J. Lee, J. M. Park, C. K. Ahn, K. M. Mim, P. Shi, and M. T. Lim, “Multi-target FIR tracking algorithm for Markov jump linear systems based on true-target decision-making,” *Neurocomputing*, vol. 174, pp.298–307, Nov. 2015.
13. S. Zhao, Y. S. Shmaliy, C. K. Ahn, and P. Shi, “Real-time optimal state estimation of multi-DOF industrial systems using FIR filtering,” *IEEE Trans. Ind. Inform.* , vol. 63, no. 8, pp. 1210–1221, Aug. 2016.
14. Y.S. Shmaliy and O. Ibarra-Manzano, “Time-variant linear optimal finite impulse response estimator for discrete state-space models,” *Int. J. Adapt. Control Signal Process.* vol. 26, no. 2, pp. 95–104, Feb. 2012.

15. Bokyu Kwon and Sangil Kim Recursive Optimal Finite Impulse Response Filter and Its Application to Adaptive Estimation. *Appl. Sci.* 2022, 12, 2757.
16. B. Skorohod, "Diffuse Initialization of Kalman Filter", *Journal of Automation and Information Sciences*, v43. 2011, pp. 20-34. Begell House Publishing Ins, USA.
17. B. Skorohod, *Diffuse Algorithms for Neural and Neuro-Fuzzy Networks: With Applications in Control Engineering and Signal Processing*. United Kingdom: Elsevier, 2017.
18. S. Zhao, Y. S. Shmaliy, F. Liu, and S. Khan, "Unbiased, optimal, and in-between: the trade off in discrete FIR filtering," *IET Signal Process.*, vol. 10, no. 4, pp. 325–334, June 2016.
19. S. Zhao, Y. S. Shmaliy, B. Huang, and F. Liu, "Minimum variance unbiased FIR filter for discrete time-variant systems," *Automatica*, vol. 53, no. 3, pp. 355–361, Mar. 2015.
20. S. Zhao, Y. S. Shmaliy, and F. Liu, "Fast Kalman-like optimal unbiased FIR filtering with applications," *IEEE Trans. Signal Process.* vol. 64, no. 9, pp. 2284–2297, May 2016.
21. S. Zhao and Y. S. Shmaliy, "Unified maximum likelihood form for bias constrained FIR filters," *IEEE Signal Process. Letters*, vol. 23, no. 12, pp. 1848–1852, Dec. 2016.
22. Y. S. Shmaliy, K. S. Khan, and S. Zhao, "Ultimate iterative UFIR filtering algorithm," *Measurement*, vol. 92, pp. 236–242, Oct. 2016.
23. S. Zhao, Y. S. Shmaliy, C. K. Ahn, and L. Luo, "An improved iterative FIR state estimator and its applications," *IEEE Trans. Ind. Informat.*, vol. 16, no. 2, pp. 969–1097, Jul. 2020.
24. Y. S. Shmaliy, S. Zhao, and C. K. Ahn, "Kalman and UFIR state estimation with colored measurement noise using backward Euler method," *IET Signal Process.* vol. 14, no. 2, pp. 64–71, Apr. 2020.
25. S. Zhao, Y. S. Shmaliy, J. A. Andrade Lucio, and F. Liu, "Multi-pass optimal FIR filtering for processes with unknown initial states and temporary mismatches," *IEEE Trans. Ind. Information* is available online, 2020.
26. S. I. Zhao, Y. S. Shmaliy, P. Shi, and C. K. Ahn, "Fusion Kalman/UFIR filter for state estimation with uncertain parameters and noise statistics," *IEEE Trans. Indust. Electron.* vol. 64, no. 4, pp. 3075–3083, Apr. 2017.
27. S. Zhao, Y. S. Shmaliy, P. Shi, and C. K. Ahn, "Fusion Kalman/UFIR filter for state estimation with uncertain parameters and noise statistics", *IEEE Trans. Ind. Electron.* , vol. 64, no. 4, pp. 3075-3083, Apr. 2017.
28. J. M. Pak, et al.: "Fuzzy horizon group shift FIR filtering for nonlinear systems with Takagi-Sugeno model," *Neurocomputing* 174 (2016) 1013 (DOI: 10.1016/j.neucom.2015.10.029).
- 29 Y. S. Shmaliy, S. Zhao, and C. K. Ahn, "Kalman and UFIR state estimation with colored measurement noise using backward Euler method," *IET Signal*

Process. vol. 14, no. 2, pp. 64–71, Apr. 2020.

30. S. Zhao, B. Huang, and Y. S. Shmaliy, “Bayesian state estimation on finite horizons: The case of linear state space model,” *Automatica*, vol. 85, pp. 91–99, Nov. 2017.

31. Felipe Ramirez-Echeverria, Amadou Sarr, and Yuriy S. Shmaliy, “Optimal memory of discrete-time FIR filters in state-space,” *IEEE Trans. Signal Process.*, 62, pp. 557–561, 2014.

32 Pyung Soo Kim Selective Finite Memory Structure Filtering Using the Chi-Square Test Statistic for Temporarily Uncertain Systems. *Appl. Sci.* 2019, 9, 4257.

33 J. M. Pak, et al. Switching extensible FIR filter bank for adaptive horizon state estimation with application, *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.* 24 (2016) 1052.

34 Jung Min Pak, Choon Ki Ahn, Myo Taeg Lim, Moon Kyou Song Horizon group shift FIR filter: Alternative nonlinear filter using finite recent measurements, *Measurement* 57 (2014) 33–45.

35 Zhao, S.; Shmaliy, Y.S.; Ahn, C.K.; Liu, F. Adaptive-Horizon Iterative UFIR Filtering Algorithm with Applications. *IEEE Trans. Ind. Electron.* 2018, 65, 6393–6402.

36 R. Bitmed, M. Gevers, R. Peterson, Monotonicity and stabilizability-properties of solutions of the Riccati difference equation: Propositions, lemmas, theorems, fallacious conjectures and counterexamt. *Systems & Control Letters* 5 (1985) 309–315.

37. Basseville M, Nikiforov I. Detection of abrupt changes: theory and application. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall; 1993.

38. Gustafsson F. Adaptive filtering and change detection. West Sussex: Wiley; 2000.

39. Murguia, C., Ruths, J.: Cusum and chi-squared attack detection of compromised sensors’. *Proc. IEEE Multi-Conf. on Systems and Control (MSC)*, Buenos Aires, Argentina, 2016, pp. 474–480.

40. Carlos Murguia, Justin Ruths On model-based detectors for linear time-invariant stochastic systems under sensor attacks. *IET Control Theory & Applications*. Volume 13, Issue 8, 21 May 2019, p. 1051 – 1061.

41. Y. Bar-Shalom, X. R. Li, T. Kirubarajan, Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory Algorithms and Software, New York:Wiley, 2001.

42. Eustace, R.W.; Woodyatt, B.A.; Merrington, G.L.; Runacres, A. Fault signatures obtained from fault implant tests on an F404 engine. *J. Eng. Gas Turbines Power* 1994, 116, 178–183.

43. Fan, S., Liu, C., Li, B. et al. AUV docking based on USBL navigation and vision guidance. *J Mar Sci Technol* **24**, 673–685 (2019). <https://doi.org/10.1007/s00773-018-0577-8>.

44. Boris Skorohod Finite Impulse Response Filtering Algorithm with Adaptive Horizon Size Selection and Its Applications Journal of Robotics and Control (JRC) Volume 3, Issue 6, November 2022, pp.836-847, ISSN: 2715-5072, DOI: 10.18196/jrc.v3i6.16058.

ГЛАВА 5

В этой главе приводятся примеры использования диффузных алгоритмов для решения задач, возникающих в различных инженерных приложениях.

5.1 Фильтры с КИХ для слежения за морскими объектами

Рассматривается задача оценки положения и скорости морских объектов (целей) с помощью наблюдений углов пеленга и возвышения, наблюдаемых с корабля (наблюдателя). Мы используем результаты и обозначения из подраздела 4.9 и работы [9]. Общий подход к решению этой проблемы заключается в использовании методов фильтрации Калмана [1]. Трудности, возникающие в этом случае из-за особенностей, как самой проблемы, так и используемых методов, хорошо известны. Во-первых, модели измерений могут быть существенно нелинейными в окрестности оценки состояния [2]. Во-вторых, состояние объекта может не полностью наблюдаться, если наблюдатель не маневрирует особым образом [3, 4]. В-третьих, существует большая начальная неопределенность относительно положения, скорости и ускорения наблюдаемого объекта. Все это может привести к расходимости ФК и его различных модификаций [5, 6, 7].

Модели объектов и измерений

Мы используем следующий сценарий. Измеряются углы пеленга цели в горизонтальной (α) и вертикальной (β) плоскостях, полученные в результате обработки изображений поступающих с видеокамеры, установленной на судне (рисунок 1).

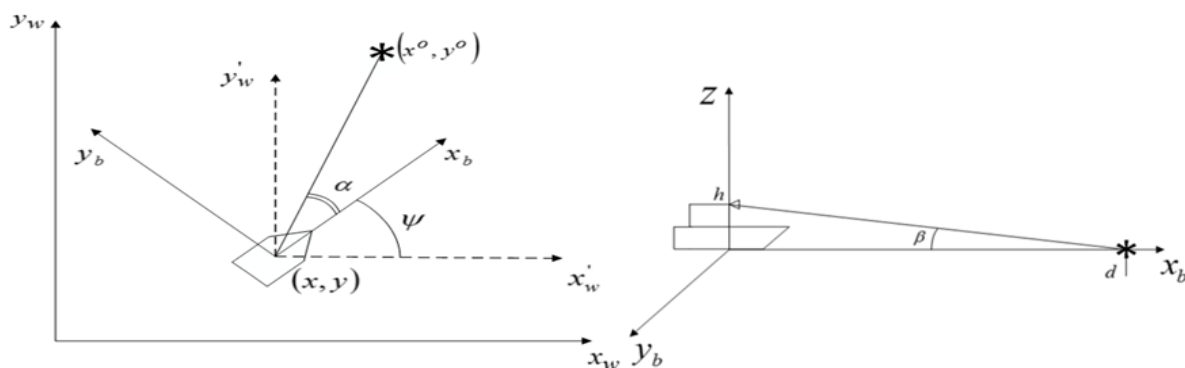


Рисунок 1 – Углы пеленга в горизонтальной и вертикальной плоскостях

Выражения для этих углов с учетом ошибок измерений следуют из рисунка 1

$$\alpha_t = \text{atan}\left(\frac{-e_t^x \sin(\psi) + e_t^y \cos(\psi)}{e_t^x \cos(\psi) + e_t^y \sin(\psi)}\right) + \xi_{1t}, \quad (1)$$

$$\beta_t = \text{atan}\left(\frac{h_t}{\sqrt{(e_t^x)^2 + (e_t^y)^2}}\right) + \xi_{2t}, \quad (2)$$

где $e_t^x = x_t^t - x_t^o$, $e_t^y = y_t^t - y_t^o$, $x_t^o, y_t^o, x_t^t, y_t^t$ – положение судна и цели, h_t – высота установки камеры над уровнем моря, $\xi_{1,t}$, $\xi_{2,t}$ – центрированные некоррелированные белые шумы с дисперсиями σ_1^2 , σ_2^2 , соответственно. Изменчивость h_t вызвана регулярной качкой и $h_t = h + \delta_t$, $\delta_t = p \sin(\omega \Delta t)$, где величина h приближенно известна, а значения p, ω неизвестны наблюдателю и $|\delta_t| \ll h$, Δ – шаг дискретизации, $\arctg$ – 4-квadrантный арктангенс. Функция δ_t интерпретируется как неконтролируемое возмущение в канале измерения угла пеленга в вертикальной плоскости. Отметим также возможности непосредственного измерения величины h_t или ее параметризации с последующей оценкой по поступающим измерениям, которые далее не рассматриваются.

Движение судна и модели измерений описывается соотношениями вида

$$q_{t+1}^o = f^o(q_t^o, u_t, w_t^o), \quad q_0^o = q^o, \quad (3)$$

$$\eta_t = g^o(q_t^o) + \xi_t, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

где $q_t^o \in R^n$ – вектор состояния, $\eta_t \in R^m$ – измеряемый выход, $u_t \in R^r$ – управление, $f^o(\cdot, \cdot), g^o(\cdot)$ – известные векторные функции, $w_t^o \in R^r$ и $\xi_t \in R^m$ – случайные процессы.

Движение цели наблюдателю неизвестно, и мы опираемся на стандартный подход для моделирования ее поведения, состоящий в следующем [1, 8]. Предполагается, что движение цели может быть задано с помощью стохастической системы вида

$$q_{t+1}^t = f^t(q_t^t, w_t^t), \quad q_0^t = q^t, \quad (5)$$

где $q_t^t \in R^l$ – вектор состояния, $w_t^t \in R^d$ – случайный процесс, $f^t(\cdot, \cdot)$ – векторная функция. Априорная информация о начальном положении цели q^t отсутствует, а правые части (5), вектор состояния q_t^t и случайный процесс w_t^t выбираются исходя из специфики рассматриваемой задачи.

Типичными являются следующие частные случаи моделей (47), (48), (49) [1, 8].

Судно движется с постоянной скоростью в соответствии с уравнениями

$$x_{t+1}^o = x_t^o + v^o \cos(\psi) \Delta, y_{t+1}^o = y_t^o + v^o \sin(\psi) \Delta, \quad (6)$$

где линейная скорость v^o и курсовой угол ψ судна известны. Координаты судна в горизонтальной плоскости (x_t^o, y_t^o) измеряются, и модель наблюдений имеет вид

$$z_{3,t} = x_t^o + \xi_{3t}, z_{4,t} = y_t^o + \xi_{4t}, t = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

где ξ_{3t}, ξ_{4t} – некоррелированные центрированные белые шумы с дисперсиями σ_3^2, σ_4^2 , соответственно, $Ex_0^o = 0, Ey_0^o = 0, \text{cov}(x_0^o) = \sigma_3^2, \text{cov}(y_0^o) = \sigma_4^2$.

Движение цели описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x_{t+1}^t &= x_t^t + \Delta v_t^{t,x} + \Delta^2 / 2 w_t^x, v_{t+1}^{t,x} = v_t^{t,x} + \Delta w_t^x, \\ y_{t+1}^t &= y_t^t + \Delta v_t^{t,y} + \Delta^2 / 2 w_t^y, v_{t+1}^{t,y} = v_t^{t,y} + \Delta w_t^y, t = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

где $v_t^{t,x}, v_t^{t,y}$ – проекции скорости цели на оси координат x и y , w_t^x, w_t^y – проекции ускорения цели на оси координат x и y (центрированные, белые шумы с дисперсиями σ_x^2, σ_y^2 , соответственно).

Модели псевдо измерений

Найдем выражения для псевдо измерений, используя (1), (2). Идея [8] состоит в том, чтобы нелинейные измерения

$$y = h(x) + w$$

представить в следующей псевдо линейной форме

$$z(y) = H(y)x + w_z(x, y),$$

где $z(y) = H(y)x + w_z(x, y)$, $H(y)$ -- известная функция измерений y , $w_z(x, y)$ -- ошибки псевдо измерений. ФК использует $z(y)$, $H(y)$ и $\text{cov}[w_z(\hat{x}, y)]$, где $\hat{x}$ -- прогнозируемое значение x .

Перепишем (1), (2) в следующей форме

$$\begin{aligned} & [\tan(\alpha_t - \xi_{1t}) \cos(\psi) + \sin(\psi)] e_t^x + \\ & [\tan(\alpha_t - \xi_{1t}) \sin(\psi) - \cos(\psi)] e_t^y = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$(e_t^x)^2 + (e_t^y)^2 = \left[\frac{h_t}{\tan(\beta_t - \xi_{2t})} \right]^2. \quad (11)$$

Находим из (10)

$$e_t^x = \frac{\cos(\psi) - \tan(\alpha_t - \xi_{1t}) \sin(\psi)}{\tan(\alpha_t - \xi_{1t}) \cos(\psi) + \sin(\psi)} e_t^y = k e_t^y. \quad (12)$$

Подстановка этого выражения в (11) дает

$$e_t^y = \frac{h_t}{\tan(\beta_t - \xi_{2t}) (1 + k^2)^{1/2}} \quad (13)$$

и используя (56) and (57), получаем

$$e_t^x = \frac{k h_t}{\tan(\beta_t - \xi_{2t}) (1 + k^2)^{1/2}}. \quad (14)$$

Так как

$$(1 + k^2)^{1/2} = 1 / \sin(\alpha_t + \psi - \xi_{1t}), \quad \frac{k}{(1 + k^2)^{1/2}} = \cos(\alpha_t + \psi - \xi_{1t}),$$

то

$$e_t^x = h_t \frac{\cos(\alpha_t + \psi - \xi_{1t})}{\tan(\beta_t - \xi_{2t})}, \quad e_t^y = h_t \frac{\sin(\alpha_t + \psi - \xi_{1t})}{\tan(\beta_t - \xi_{2t})}. \quad (15)$$

Линеаризация правых частей (15) в окрестности точек $\xi_{1t} = 0, \xi_{2t} = 0$, дает

$$e_t^x = h_t \left(\frac{\cos(\alpha_t + \psi)}{\tan(\beta_t)} - \zeta_t \right), \quad e_t^y = h_t \left(\frac{\sin(\alpha_t + \psi)}{\tan(\beta_t)} - \eta_t \right),$$

где ζ_t, η_t -- коррелированные случайные процессы, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} \zeta_t &= \frac{\sin(\alpha_t + \psi)}{\tan(\beta_t)} \xi_{1t} + \frac{\cos(\alpha_t + \psi)}{\sin^2(\beta_t)} \xi_{2t}, \\ \eta_t &= -\frac{\cos(\alpha_t + \psi)}{\tan(\beta_t)} \xi_{1t} + \frac{\sin(\alpha_t + \psi)}{\sin^2(\beta_t)} \xi_{2t}. \end{aligned}$$

Отсюда следуют выражения для модели псевдо измерений

$$z_{1t}(\alpha_t, \beta_t) = \frac{\cos(\alpha_t + \psi)}{\tan(\beta_t)} = (-x_t^o + x_t^t)/(h + \delta_t) + \zeta_t, \quad (16)$$

$$z_{2t}(\alpha_t, \beta_t) = \frac{\sin(\alpha_t + \psi)}{\tan(\beta_t)} = (-y_t^o + y_t^t)/(h + \delta_t) + \eta_t, \quad (17)$$

где

$$\sigma_\zeta^2 = \left[\frac{\sin(\alpha_t + \psi)}{\tan(\beta_t)} \right]^2 \sigma_1^2 + \left[\frac{\cos(\alpha_t + \psi)}{\sin^2(\beta_t)} \right]^2 \sigma_2^2, \quad (18)$$

$$\sigma_\eta^2 = \left[\frac{\cos(\alpha_t + \psi)}{\tan(\beta_t)} \right]^2 \sigma_1^2 + \left[\frac{\sin(\alpha_t + \psi)}{\sin^2(\beta_t)} \right]^2 \sigma_2^2. \quad (19)$$

Линеаризуя правые части (16), (17) в окрестности точки $\delta_t = 0$, получаем также

$$z_{1t}(\alpha_t, \beta_t) = \frac{\cos(\alpha_t + \psi)}{\tan(\beta_t)} = q_t(-x_t^o + x_t^t) + \zeta_t, \quad (20)$$

$$z_{2t}(\alpha_t, \beta_t) = \frac{\sin(\alpha_t + \psi)}{\tan(\beta_t)} = q_t(-y_t^o + y_t^t) + \eta_t, \quad (21)$$

где $q_t = (1 - \delta_t / h) / h$.

Реализация фильтров

Модели (7) – (9) используются для того, чтобы продемонстрировать реализацию фильтров с КИХ. Отметим, что входы фильтров получают измерения, определяемые выражениями (1), (2). Предлагаются два близких варианта реализации. Первый определяется следующим образом. Так как возмущение δ_t неизвестно и $|\delta_t| \ll h$, то используется модель псевдо измерений вида

$$z_{1t}(\alpha_t, \beta_t) = \frac{\cos(\alpha_t + \psi)}{\tan(\beta_t)} = (-x_t^o + x_t^t)/h + \zeta_t, \quad (22)$$

$$z_{2t}(\alpha_t, \beta_t) = \frac{\sin(\alpha_t + \psi)}{\tan(\beta_t)} = (-y_t^o + y_t^t)/h + \eta_t. \quad (23)$$

Используя (7) – (9), (22), (23), мы получаем следующую систему для построения ОФКИХ и ДФК

$$x_{t+1} = Ax_t + w_t + f_t, y_t = Cx_t + \mu_t, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} x_t &= (x_t^o, y_t^o, x_t^t, v_t^{t,x}, x_t^t, v_t^{t,y})^T, \quad f_t = (v^o \cos(\psi)\Delta, v^o \sin(\psi)\Delta, 0, 0, 0, 0)^T, \\ w_t &= (0, 0, \Delta^2 / 2w_t^x, \Delta w_t^x, \Delta^2 / 2w_t^y, \Delta w_t^y)^T, \quad \mu_t = (\xi_{3t}, \xi_{4t}, \zeta_t, \eta_t)^T, \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/h & 0 & -1/h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/h & 0 & 0 & -1/h & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$Ex_{i,t-N}^o = 0, \quad \text{cov}(x_{i,t-N}^o) = \sigma_i^2, \quad i=3,4,$$

$$Ew_t^x = 0, \quad \text{cov}(w_t^x) = \sigma_x^2, \quad Ew_t^y = 0, \quad \text{cov}(w_t^y) = \sigma_y^2, \quad q=2.$$

Так как НФКИХ не зависит от статистик шумов, то мы имеем две системы (24) с $q=1$, где

$$\begin{aligned} x_t &= (x_t^o, x_t^t, v_t^{t,x})^T, \quad f_t = (v^o \cos(\psi)\Delta)^T, \\ w_t &= (0, \Delta^2 / 2w_t^x, \Delta w_t^x)^T, \quad \mu_t = (\xi_{3t}, \zeta_t)^T, \\ x_t &= (y_t^o, y_t^t, v_t^{t,y})^T, \quad f_t = (v^o \sin(\psi)\Delta)^T, \\ w_t &= (0, \Delta^2 / 2w_t^y, \Delta w_t^y)^T, \quad \mu_t = (\xi_{4t}, \eta_t)^T, \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/h & 0 \end{bmatrix}.$$

Второй вариант для НФКИХ определяется соотношениями

$$z_{1t}(\alpha_t, \beta_t) = \frac{\cos(\alpha_t + \psi)}{\tan(\beta_t)} + (x_0^o + v^o \cos(\psi)\Delta t) / h = x_t^t / h + \zeta_t + \xi_{3t}, \quad (25)$$

$$z_{2t}(\alpha_t, \beta_t) = \frac{\sin(\alpha_t + \psi)}{\tan(\beta_t)} + (y_0^o + v^o \sin(\psi)\Delta t) / h = y_t^t / h + \eta_t + \xi_{4t}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} x_t &= (x_t^t, v_t^{t,x})^T, f_t = 0, \\ w_t &= (\Delta^2 / 2 w_t^x, \Delta w_t^x)^T, \mu_t = \zeta_t + \xi_{3t}, \\ y_t &= (y_t^t, v_t^{t,y})^T, f_t = 0, \\ w_t &= (\Delta^2 / 2 w_t^y, \Delta w_t^y)^T, \mu_t = \eta_t + \xi_{4t}, \\ A &= \begin{Bmatrix} 1 & \Delta \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, C = [1/h \quad 0], q = 0. \end{aligned}$$

Моделирование

Сравним поведение ОФКИХ, ДФК и НФКИХ при действии волнения (δ_t), импульсных возмущений углов пеленга и ускорений цели для реализаций этих фильтров, приведенных в предыдущем разделе. Мы полагаем, что $N = 130$ для ОФКИХ и НФКИХ, и $N = 0$ для ДФК. Исходные данные для моделирования приведены в таблице 1.

Таблица 1: Исходные данные для моделирования.

Компоненты системы	Parameters
Камера	Full HD (1920 × 1080), $\alpha = 70^\circ$ (angle of view), $\sigma_1 = 0.88^\circ$, $\sigma_2 = 1.56^\circ$, $h = 3\text{m}$, $\omega = 2\pi / T$, $T = 10\text{s}$, $p = 0.3\text{m}$
Судно	$x_0^o = y_0^o = 0\text{ m}$, $\sigma_3 = \sigma_4 = 1\text{m}$, $v^{o,x} = 2.55\text{ m/s}$, $v^{o,y} = 4.33\text{ m/s}$, $\psi = 60^\circ$, $\Delta = 0.3\text{ s}$
Объект	$x_0^t = 400\text{m}$, $y_0^t = 600\text{m}$, $v_0^{t,y} = 3.12\text{ m/s}$, $v_0^{t,x} = 2.98\text{ m/s}$, $\sigma_x = \sigma_y = 0.1\text{m/s}^2$, $\Delta = 0.3\text{ s}$, $\psi = 60^\circ$

Сравним вначале эффекты от совместного действия качки (δ_t) и импульсного возмущения на ошибки оценки положения и скорости ОФКИХ, ДФК и НФКИХ. Мы полагаем $\alpha_t + \lambda_t$ при $60 \leq t \leq 75$ с $\lambda_t = 1^\circ$ и $\lambda_t = 0$ в противном случае. Ошибки оценивания ($e_x = x_t^t - x_t^o$, $e_y = y_t^t - y_t^o$, $e_{vx} = v_t^{t,x} - v_t^{o,x}$, $e_{vy} = v_t^{t,y} - v_t^{o,y}$) показаны на рисунке 2. Видно, что НФКИХ дает более робастные оценки по сравнению с ДФК и ОФКИХ, а ОФКИХ превосходит ДФК.

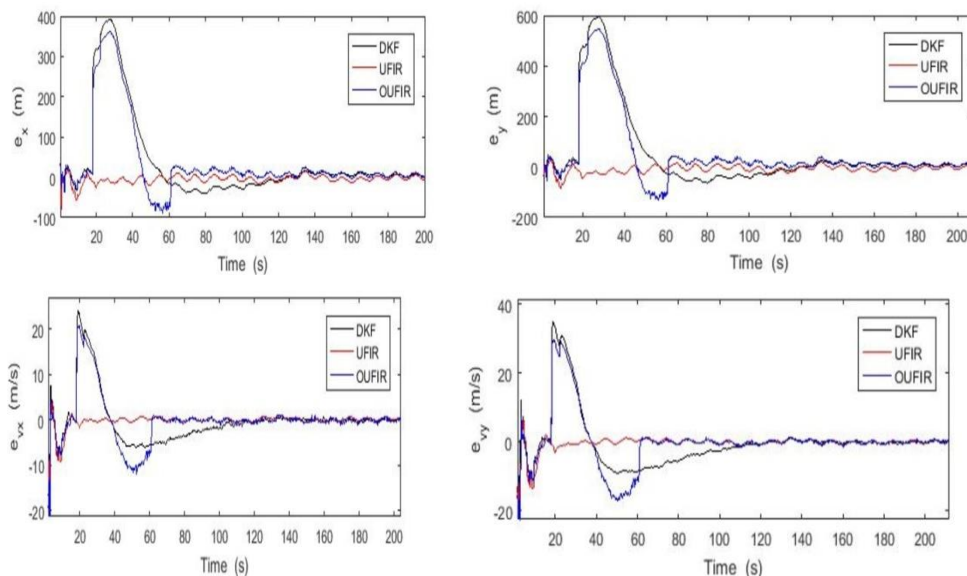


Рисунок 2 – Ошибки оценивания положения и скорости

Сравним теперь эффект от совместного действия качки (δ_t) и некорректного задания статистик шумов на ошибки оценки положения и скорости ОФКИХ, ДФК и НФКИХ. Мы полагаем $\sigma_x = \sigma_y = 0.13 \text{ м/с}^2$ при $60 \leq t \leq 150$ с и $\sigma_x = \sigma_y = 0.1 \text{ м/с}^2$ в противном случае. В качестве критерия качества (ошибки оценивания) используются оценки $RMS(t) = \{E[(x_t - \hat{x}_t)^T (x_t - \hat{x}_t)]\}^{1/2}$, полученные с помощью статистического моделирования по 100 реализациям фильтров. Значения RMS для ошибок оценки положения и скорости показаны на рис.3. Видно, что НФКИХ дает более робастные оценки по сравнению с ДФК и ОФКИХ. Зависимости ошибок оценки положения и скорости НФКИХ от минимального расстояния от судна до цели ($D_{\min}$) для каждой реализации показаны на рис.4. Видно, что ошибки e_x , e_y по положению не превышают 11 м, а по скорости e_{vx} , $e_{vy} - 0.8 \text{ м/с}$ при $D_{\min} \leq 300 \text{ м}$.

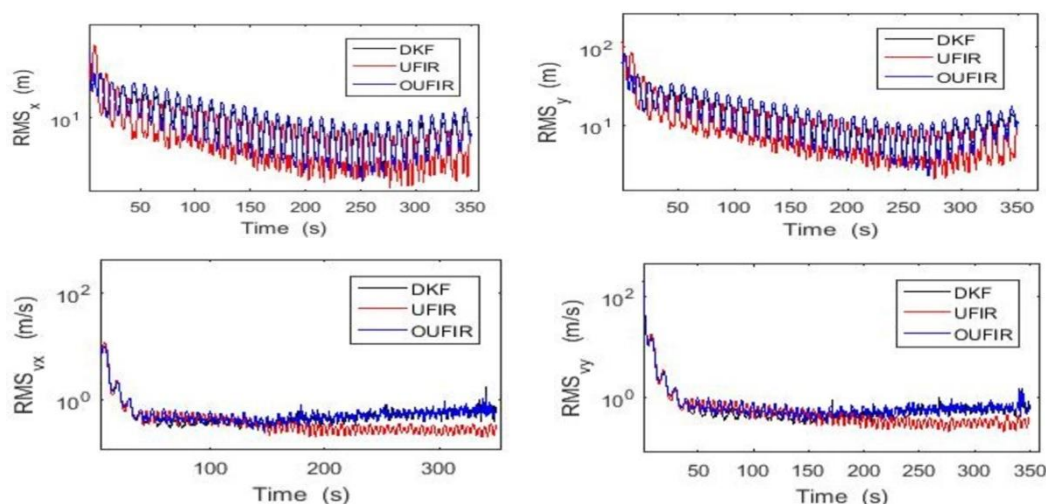


Рисунок 3 – Значения RMS для ошибок оценивания положения и скорости

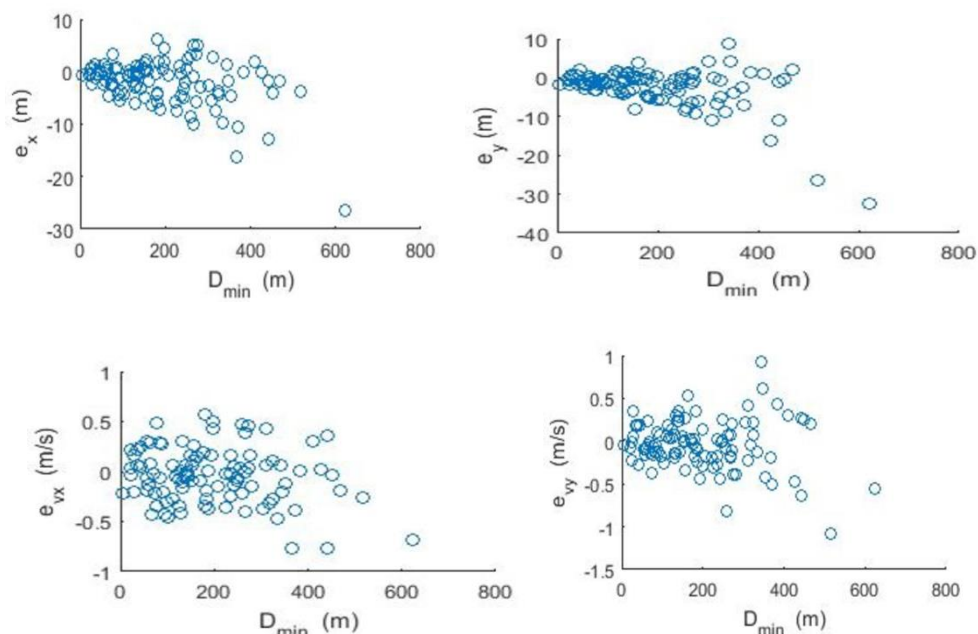


Рисунок 4 – Зависимости ошибок оценивания положения и скорости от минимальной дальности на каждой реализации

Список литературы к подразделу 5.1

1. Bar-Shalom, Yaakov, Li, X Rong, Kirubarajan, Estimation with applications to tracking and navigation. John Wiley and Sons, New York. 2001.
2. B. F. La Scala, M. Mallick, and S. Arulampalam, "Differential geometry measures of nonlinearity for filtering with nonlinear dynamic and linear measurement models," in SPIE Conference on Signal and Data Processing of Small Targets, vol. 6699, August 2007.
3. P. Shar, and X. R. Li, "A practical approach to observability of bearings-only target tracking", SPIE Vol 3809, 514-520, 1999.

4. M.H. Ferdowsi Observability conditions for target states with bearing-only measurements in three dimensional case. Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Control Applications Munich, Germany, October 4-6, 2006, 1443-1449.
5. Barbara La Scala Mark Morelande An analysis of the single sensor bearings-only tracking problem 2008 11th International Conference on Information Fusion June 30 2008-July 3 2008 525-530
6. V. J. Aidala, "Kalman filter behavior in bearings-only tracking applications" IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. 15, pp. 29–39, Jan. 1979.
7. X. Lin; T. Kirubarajan; Y. Bar-Shalom; S. Maskell, "Comparison of EKF, pseudomeasurement, and particle filters for a bearing-only target tracking problem", Proc. SPIE 4728, Signal and Data Processing of Small Targets 2002, pp. 240–250.
8. X. R. Li and V. P. Jilkov. A Survey of Maneuvering Target Tracking: Dynamic Models. In Proc. 2000 SPIE Conf. on Signal and Data Processing of Small Targets, vol. 4048, pages 212–236, Orlando, Florida, USA, April 2000.
9. Skorohod B.A. Finite Impulse Response Filters for State Estimation with Not Completely Known Statistical Information, Conference Paper. International Russian Automation Conference, IEEE, 2018, p.1-7.

5.2 Мониторинг положения объектов на морской поверхности с помощью монокулярной видеокамеры

Мониторинг морской поверхности системами наблюдения может вестись с неподвижных, плавающих или надводных платформ [1,2,3]. Такие системы позволяют выявлять, анализировать и принимать решения в различных ситуациях по мере поступления информации с датчиков, расположенных на них.

Далее будет рассматриваться одна из важных задач мониторинга, состоящая в определении положения объектов интереса на морской поверхности относительно системы координат связанной с системой наблюдения. Такая задача может решаться с помощью радаров, лидаров и видеокамер (стереопар или монокулярных) как в видео, так и инфракрасном диапазонах. Хорошо известны проблемы связанные с решением сформулированной задачи с помощью любого из перечисленных датчиков. Это большая изменчивость морской поверхности, туманы, плохие условия освещенности, низкая контрастность объектов благодаря большому расстоянию до объекта и т.д.

Широкое использование радаров связано с их робастностью относительно погодных условий, освещенности и тумана. Вместе с тем, имеются и определенные ограничения их применения. Это чувствительность к материалам или то, что из поступающих с них сигналов не удастся извлечь

многие полезные свойства присущие объектам наблюдения (по крайней мере, с помощью недорогих и малогабаритных). Имеется в виду информация об их форме, размерах, принадлежности определенному классу. В сравнении с радарами, одним из основных преимуществ лидаров является возможность представления объектов в виде облака точек, позволяющего определить форму объектов и классифицировать их. С другой стороны, осадки и туман существенно ухудшают их характеристики. Видеокамеры в системах наблюдения могут использоваться как в режиме комплексирования с другими датчиками, так и независимо. Стереопары позволяют в принципе определить 3d координаты любого наблюдаемого объекта. Однако, их применение на небольших, мобильных платформах не представляется возможным из-за необходимости создания большой стереобазы, обеспечивающей приемлемую точность. Так на расстояниях 500-1000м до объекта, необходима стереобаза порядка 9-10м [4]. Значительно более перспективным для использования на небольших платформах являются недорогие, малогабаритные монокулярные видеокамеры. Кроме отмеченных выше факторов, существенно затрудняющих решение задачи, отметим также следующее. Движение объекта не контролируется наблюдателем и в каждый момент времени доступно только его изображение.

Известно небольшое количество публикаций, посвященных разработке алгоритмов определения положения объектов на морской поверхности с помощью монокулярной камеры [5-8]. Так в [5-7] рассматриваются алгоритмы определения только расстояния до объекта по углу возвышения для неподвижной и плавающей платформ. В [8] предложены алгоритмы, позволяющие определять не только расстояние, но и относительные координаты положения и скорости объекта по измерениям углов возвышения и азимута на основе нелинейных методов калмановской фильтрации. В этой статье предлагаются новые адаптивные алгоритмы оценки координат объектов (как линейных, так и угловых) относительно системы координат, связанной с видеокамерой. Наш [14] подход основывается на представлении углов возвышения и азимута в виде нестационарных моделей авторегрессии, рекуррентной оценке их параметров и последующей оценке координат объекта.

Постановка задачи

Пусть видеокамера установлена на некоторой платформе и измеряются углы азимута (α) и возвышения (β) относительно объекта. Из рисунка 1, раздел 5.1 Из следуют выражения для углов α и β , учитывающие ошибки измерений

$$\tilde{\alpha}_t = \alpha_t + \xi_{\alpha,t} = \arctg\left(\frac{p_t}{r_t}\right) + \xi_{\alpha,t}, \quad (1)$$

$$\tilde{\beta}_t = \beta_t + \xi_{\beta,t} = \arctg\left(\frac{h_t}{k_t}\right) + \xi_{\beta,t}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} p_t &= -e_t^x \sin(\psi_t) + e_t^y \cos(\psi_t), \\ r_t &= e_t^x \cos(\psi_t) + e_t^y \sin(\psi_t), \\ k_t &= \sqrt{(e_t^x)^2 + (e_t^y)^2}, \\ e_t^x &= x_t^t - x_t^o, \quad e_t^y = y_t^t - y_t^o, \end{aligned}$$

$x_t^o, y_t^o, x_t^t, y_t^t$ - положение камеры и платформы соответственно, ψ_t - курсовой угол движения платформы, h_t - высота установки камеры над уровнем моря, $\xi_{\alpha,t}, \xi_{\beta,t}$ - центрированные некоррелированные белые шумы с дисперсиями $\sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2$, соответственно.

Пусть в каждый момент времени известны величины $x_t^o, y_t^o, \psi_t, h_t$. Требуется по наблюдениям $\tilde{\alpha}_t, \tilde{\beta}_t$ оценивать значения величин $x_t^t, y_t^t, d_t, \alpha_t, \beta_t$ и их прогнозов.

Общее описание алгоритма

Предлагается двухэтапный алгоритм. На первом этапе выполняется обработка изображений, поступающих с камеры – выделение на изображении области, принадлежащей морской поверхности, обнаружение и видео сопровождение объектов, определение по полученным изображениям углов азимута и возвышения. Примеры такой обработки приведены на рисунках 1. На втором этапе проводится собственно оценка положения объекта. Алгоритмы первого этапа получены в [9] и далее не рассматриваются. Разработка алгоритмов второго этапа собственно и является целью статьи, и их описание и исследование будет далее приведено.

Будет предполагаться, без ограничения общности, что движение камеры, вызванное движением подвижной платформы, отсутствует. Этого можно добиться, например, оценивая корреляцию соседних изображений, используя оценку линии горизонта на изображении или ее прогнозируемое значение [10], по неподвижным ключевым точкам изображения, если они имеются.

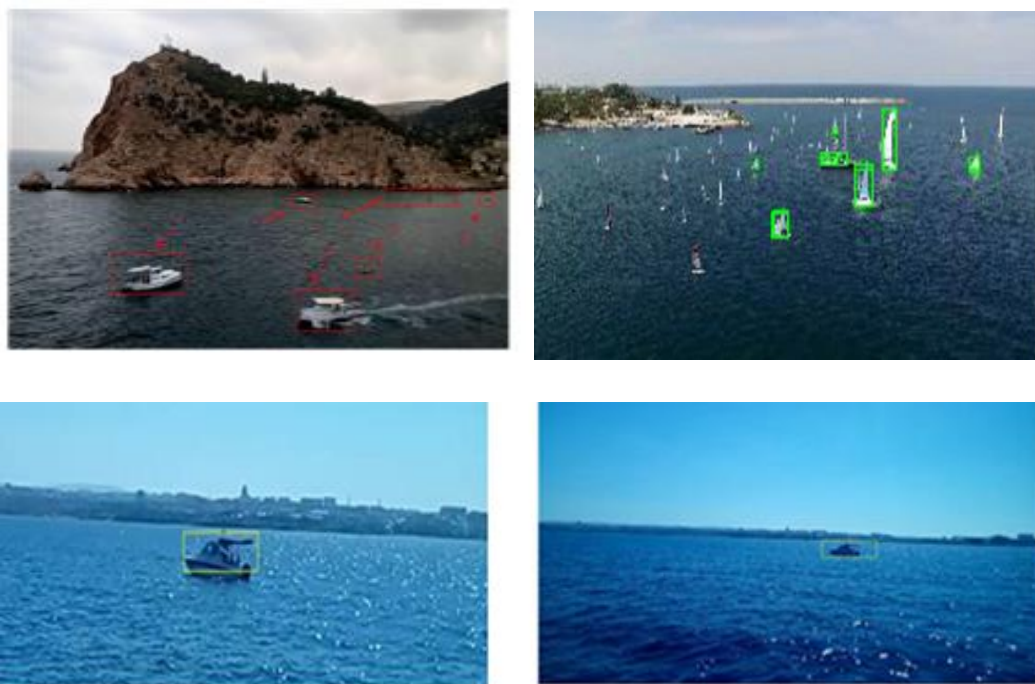


Рисунок 1 – Примеры выделения объектов на морской поверхности
Модели сигналов

Из (1), (2) нетрудно получить следующие соотношения для x_t^t , y_t^t , d_t [8]

$$x_t^t = x_t^o + h_t \frac{\cos(\tilde{\alpha}_t + \psi_t)}{\tan(\tilde{\beta}_t)}, \quad (3)$$

$$y_t^t = y_t^o + h_t \frac{\sin(\tilde{\alpha}_t + \psi_t)}{\tan(\tilde{\beta}_t)}, \quad (4)$$

$$d_t = \frac{h_t}{\tan(\tilde{\beta}_t)}. \quad (5)$$

Выражения (3), (4), (5), решают задачу оценки положения объекта по наблюдениям углов азимута α_t и возвышения β_t , и заданных значениях $x_t^o, y_t^o, \psi_t, h_t$. При отсутствии шумов (точных наблюдениях) они позволяют получить истинные значения x_t^t, y_t^t, d_t .

Отметим, также, что положение объекта может быть задано либо линейными координатами x_t^t, y_t^t , либо угловыми α_t, β_t . Для получения линейных координат необходимо знать высоту камеры над уровнем моря и все другие указанные выше величины. Для угловых координат такая информация не требуется. Вместе с тем, для ряда прило-

жений достаточно знать только угловые координаты (фиксация объекта в центре изображения, задачи сближения наблюдателя с объектом или его обхода).

Так как в (3), (4) используются измеренные значения углов α_t , β_t , то ошибки измерений $\xi_{\alpha,t}$, $\xi_{\beta,t}$ могут приводить к значительным ошибкам в определении x_t^t , y_t^t , d_t даже для камер с высоким разрешением. Кроме того, такой подход не позволяет строить оценки прогнозов как линейных, так и угловых координат объекта. В качестве альтернативы, в работе предлагается строить оптимальные оценки, опираясь на математические модели для α_t , β_t . При выборе моделей, мы исходим из того, что движение объектов неизвестно наблюдателю и происходит в сложном динамическом окружении. В качестве таких моделей предлагается использовать нестационарные модели авторегрессии широко используемые при описании поведения стохастических динамических систем [11]

$$\alpha_t = c_0 + c_{t,1}\alpha_{t-1} + \dots + c_{t,n}\alpha_{t-n}, \quad (6)$$

$$\tilde{\alpha}_t = \alpha_t + \xi_{\alpha,t}, \quad (7)$$

$$\beta_t = b_0 + b_{t,1}\beta_{t-1} + \dots + b_{t,m}\beta_{t-m}, \quad (8)$$

$$\tilde{\beta}_t = \beta_t + \xi_{\beta,t}, \quad (9)$$

где c_0 , $c_{t,i}$, $i=1,2,\dots,n$, b_0 , $b_{t,i}$, $i=1,2,\dots,m$ - неизвестные параметры, зависящие от времени, подлежащие определению, n , m - порядки моделей, выбираемые пользователем в процессе компьютерного моделирования.

Выражения (6)-(9) включают важный частный случай, когда платформа с установленной камерой и объект неподвижны

$$c_{t,i} = 0, i=1,2,\dots,n,$$

$$b_{t,i} = 0, i=1,2,\dots,m,$$

Переходя в (6), (8) к более компактным, векторно-матричным обозначениям, получим

$$\alpha_t = \Phi_t \theta_t, \quad (10)$$

$$\tilde{\alpha}_t = \alpha_t + \xi_{\alpha,t}, \quad (11)$$

$$\beta_t = H_t \gamma_t, \quad (12)$$

$$\tilde{\beta}_t = \beta_t + \xi_{\beta,t}, \quad (13)$$

где

$$\Phi_t = (1, \alpha_{t-1}, \dots, \alpha_{t-n}), \theta_t = (c_0, c_{t,1}, \dots, c_{t,n})^T, \\ H_t = (1, \beta_{t-1}, \dots, \beta_{t-n}), \theta_t = (b_0, b_{t,1}, \dots, b_{t,n})^T.$$

Применение рекуррентного метода наименьших квадратов (РМНК)

Хотя РМНК основывается на предположении, что неизвестные параметры, не зависят от времени, он часто используется в приложениях, где они меняются достаточно медленно [11]. Кроме того, при разработке алгоритмов необходимо учесть следующие особенности рассматриваемой задачи:

1. Априорная информация о неизвестных параметрах отсутствует.
2. Появление аномальных наблюдений, обусловленное ошибками определения углов α_t , β_t по полученному изображению в течение короткого промежутка времени.
3. Срыв слежения (отсутствие объекта на изображениях) в течение короткого промежутка времени.
4. Увеличение интенсивности изменений α_t , β_t при сближении платформы и объекта.

Во всех указанных режимах работы системы, характеристики стандартного РМНК могут существенно отличаться от идеальных. В этих случаях принято говорить о расхождении РМНК. Рассмотрим две робастные модификации РМНК (диффузные алгоритмы), предложенные в [12].

Первый алгоритм основывается на минимизации критерия качества

$$J_t(\theta) = \sum_{k=1}^t \lambda^{t-k} (\tilde{\alpha}_r - H_k \theta)^2 + \theta^T \theta / \mu, \quad t = 1, 2, \dots,$$

где μ - большой положительный параметр, $\lambda \in (0, 1]$ - забывающий множитель, позволяющий уменьшить влияние прошлых наблюдений. Оценка параметра θ , из условия минимума этого критерия при $\mu \rightarrow \infty$, может быть найдена рекуррентно

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + K_t (\tilde{\alpha}_r - H_t \hat{\theta}_{t-1}), \quad (14)$$

$$\hat{\theta}_t = 0, t = 1, 2, \dots,$$

где

$$W_t = \lambda W_{t-1} + H_t^T H_t, W_0 = 0, \quad (15)$$

$$K_t = W_t^+ H_t^T, \quad (16)$$

где W_t^+ - псевдоинверсия W_t . При отсутствии шумов, соотношения (14) – (16) позволяют точно восстановить вектор неизвестных параметров за конечное число шагов в отличие от стандартного РМНК.

В основе второго алгоритма лежит идея использования скользящего временного окна, на котором определяется динамическая система. Это позволяет избежать расходимости, вызванной неточностью задания модели и подавлять возмущения, действующие в течение коротких промежутков времени. Длина скользящего окна является основным параметром для таких алгоритмов. Выбор его связан с двумя противоречащими друг другу требованиями, в дополнение к адекватности используемой модели. Во-первых, для получения приемлемой точности, размер окна должен позволять обрабатывать достаточное количество входящих наблюдений. Во-вторых, с точки зрения практической реализации и переходных характеристик фильтра он не должен быть слишком большим. Приведем соотношения для диффузного варианта такого РМНК со скользящим окном [12]. Рассмотрим интервалы наблюдения $[t-M, t]$, $t = 1, \dots, N$ (скользящие окна) и предположим, что в момент $t-M$ априорная информация о векторе $\hat{\theta}_{t-N}$ отсутствует. Оценка θ , по наблюдениям, принадлежащим текущему скользящему окну определяется выражениями

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_s &= \hat{\theta}_{s-1} + K_s (\tilde{\alpha}_s - H_s \hat{\theta}_{s-1}), \\ \hat{\theta}_{t-M} &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$K_t = W_{t-M,s}^+ H_s^T, \quad (18)$$

$$W_{s,t-M} = W_{s-1,t-M} + H_s^T H_s, \quad (19)$$

$$W_{t-M,t-M} = 0, \quad s = t-M, t-M+1, \dots, t-1, t = M, M+1, \dots$$

Прогноз α_t, β_t на l тактов может быть получен, используя оценки $\hat{\theta}_t, \hat{\gamma}_t, \hat{\theta}_{t+i}, \hat{\gamma}_{t+i}, i=1,2,...,l-1$, получаемые с помощью моделей (10), (12). Так для прогноза угла азимута находим

[illegible]

Компьютерное моделирование

Проиллюстрируем поведение трех предложенных алгоритмов, описываемых соотношениями (3) – (5), (14) – (16), (17) – (19) на одном из возможных типичных сценариев. Для удобства ссылок мы будем обозначать их 1, 2, 3, соответственно.

Пусть беспилотный летательный аппарат (БЛА) летит на заданной высоте и по изображениям, поступающим с камеры, установленной на нем, определяются углы азимута и возвышения наблюдаемого объекта (судно, неконтролируемая буйковая станция и т.д.) на морской поверхности. БЛА (наблюдатель) движется с постоянной скоростью в соответствии с уравнениями

$$\begin{aligned}x_{t+1}^o &= x_t^o + v^o \cos(\psi) \Delta, \\ y_{t+1}^o &= y_t^o + v^o \sin(\psi) \Delta,\end{aligned}$$

где линейная скорость v^o и курсовой угол ψ известны, Δ - такт дискретности. Координаты БЛА в горизонтальной плоскости (x_t^o, y_t^o) измеряются, и модель наблюдений имеет вид

$$\begin{aligned} z_t &= x_t^o + \xi_t, \\ u_t &= y_t^o + \tau_t, t = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где ξ_t , τ_t - центрированные, некоррелированные белые шумы с известными дисперсиями σ_τ^2 , σ_ξ^2 .

Движение объекта неизвестно наблюдателю и описывается линейной стохастической моделью с почти постоянной скоростью [13]

$$\begin{aligned}
x_{t+1}^t &= x_t^t + \Delta v_t^{t,x} + \Delta^2 / 2w_t^x, \\
v_{t+1}^{t,x} &= v_t^{t,x} + \Delta w_t^x, \\
y_{t+1}^t &= y_t^t + \Delta v_t^{t,y} + \Delta^2 / 2w_t^y, \\
v_{t+1}^{t,y} &= v_t^{t,y} + \Delta w_t^y, \quad t = 0, 1, \dots,
\end{aligned}$$

где $v_t^{t,x}$, $v_t^{t,y}$ - проекции скоростей на координатные оси x и y , w_t^x , w_t^y - проекции ускорений, которые предполагаются центрированными, некоррелированными белыми шумами с известными дисперсиями σ_x^2, σ_y^2 , соответственно.

Входные данные для моделирования приведены в Таблице.1. На рисунке 2 показаны траектории движения БЛА и объекта, зависимости дальности и углов азимута и возвышения от времени. Видно, что расстояние между ними меняется в пределах от 700 до 28м, а углы α_t , β_t в пределах примерно от 7 до 37 градусов и от 0.23 до 12 градусов, соответственно.

Введем следующие обозначения для ошибок оценивания каждым алгоритмом:

$$\begin{aligned}
ex_t^i &= x_t^t - \hat{x}_t^i, \quad ey_t^i = y_t^t - \hat{y}_t^i, \quad i=1,2,3, \\
e\alpha_t^i &= \alpha_t - \hat{\alpha}_t^i, \quad e\beta_t^i = \beta_t - \hat{\beta}_t^i, \quad i=2,3,
\end{aligned}$$

где $\hat{x}_t^i$, $\hat{y}_t^i$, $\hat{\alpha}_t^i$, $\hat{\beta}_t^i$ - оценки соответствующих параметров, полученные с помощью i -го алгоритма.

Ошибки наблюдения в (1), (2) будем обозначать $\alpha_{t,noise}$, $\beta_{t,noise}$. На рисунке 3 приведены результаты моделирования алгоритмов 1 и 2 с $\lambda=1$, порядками моделей $b=m=5$ и $c_0=b_0=0$. Визуальный анализ показывает, что оптимальные оценки позволяют заметно повысить точность определения линейных координат. Улучшение заметно также и по угловым координатам – но только на расстоянии более 200м по α_t и 100м по β_t до объекта. Мы объясняем это тем, что при приближении к объекту наблюдается быстрый рост угловых координат и модель авторегрессии не адекватна процессу на всем интервале наблюдения.

Для количественной характеристики точности алгоритмов использовались смещение оценки и корень из среднего квадрата ошибки (rmse), значения которых приведены в таблице 2. Из приведенных данных следует: 1. Использование оптимальной оценки позволяет уменьшить до 2.5 раз смещение в определении линейных координат и

до 18% гмс. 2. Смещение в угловых координатах – менее 1 угловой секунды (пренебрежимо мало), а гмс уменьшилось с 0.88' до 0.57' и с 1.56' до 1.14' по α_t и β_t , соответственно.

Таблица 1. Входные данные для моделирования

Компоненты системы	Параметры
Камера	Full HD (1920 × 1080), $\alpha = 70^0$ (угол зрения), $\sigma_\alpha = 0.88'$, $\sigma_\beta = 1.56'$, $h = 3\text{ м}$,
БЛА	$x_0^o = y_0^o = 0\text{ м}$, $\sigma_\xi = \sigma_w = 1\text{ м}$, $v^{o,x} = 2.55\text{ м/с}$, $v^{o,y} = 4.33\text{ м/с}$, $\psi = 50^0$, $\Delta = 0.1\text{ с}$
Объект	$x_0^t = 400\text{ м}$, $y_0^t = 600\text{ м}$, $v_0^{t,y} = 3.12\text{ м/с}$, $v_0^{t,x} = 2.98\text{ м/с}$, $\sigma_x = \sigma_y = 0.1\text{ м/с}^2$, $\Delta = 0.3\text{ с}$, $\psi = 60^0$

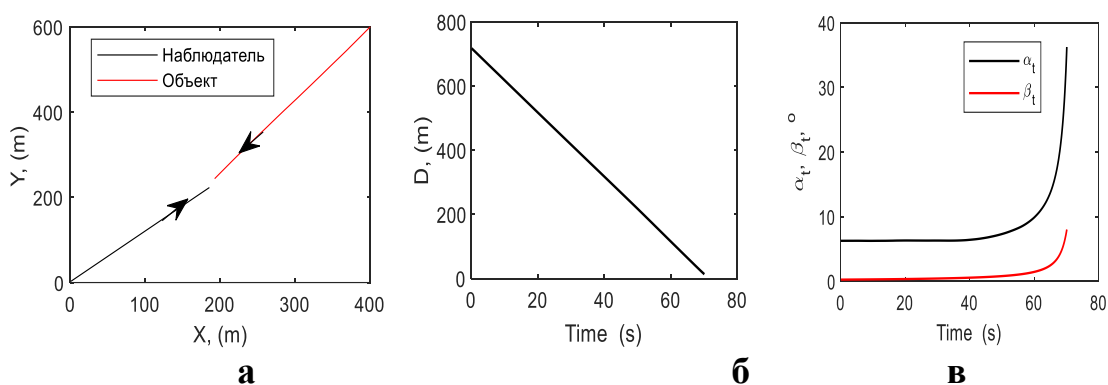
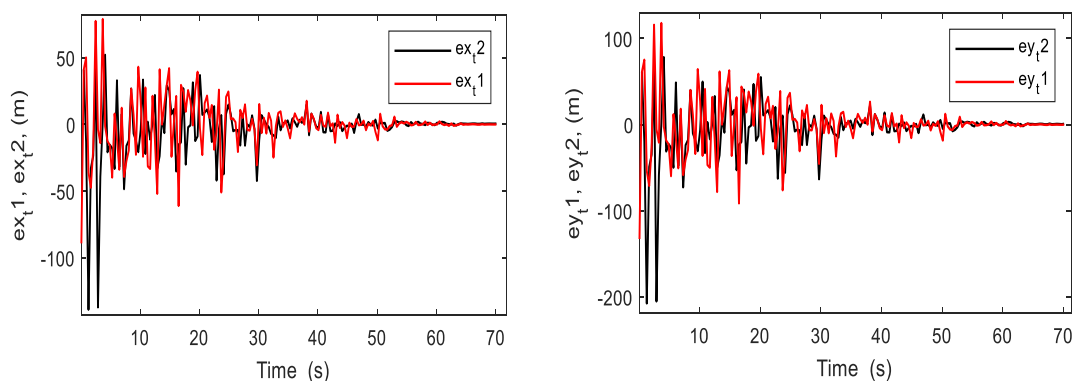


Рисунок 2 – а) Траектории движения наблюдателя и цели; б) зависимость дальности от времени; в) зависимость углов азимута и возвышения от времени



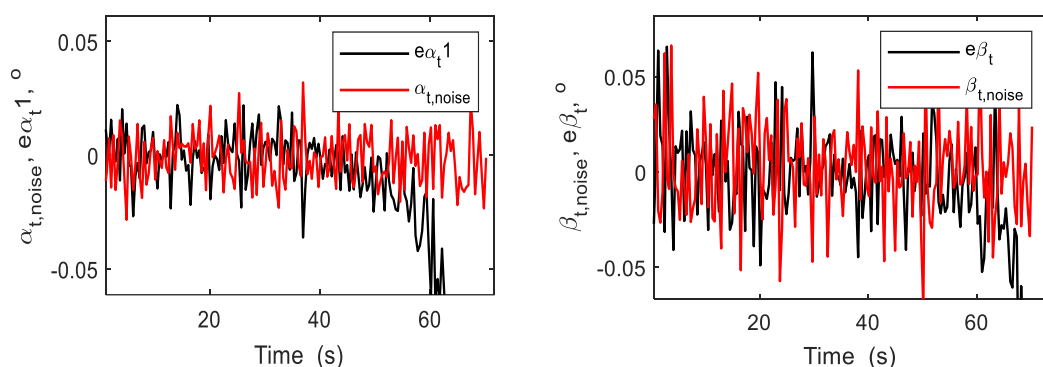


Рисунок 3 – Зависимости ошибок оценивания линейных и угловых координат объекта

Таблица 2. Оценки смещения и rmse

Алгоритм	Смещение				rmse			
	$x, (м)$	$y, (м)$	$\alpha, (^\circ)$	$\beta, (^\circ)$	$x, (м)$	$y, (м)$	$\alpha, (^\circ)$	$\beta, (^\circ)$
1	1.98	-2.79	0	0	20.7	31	0.88	1.56
2	-0.74	-1.1	0.008	$6 \cdot 10^{-4}$	16.9	25.2	0.57	1.14

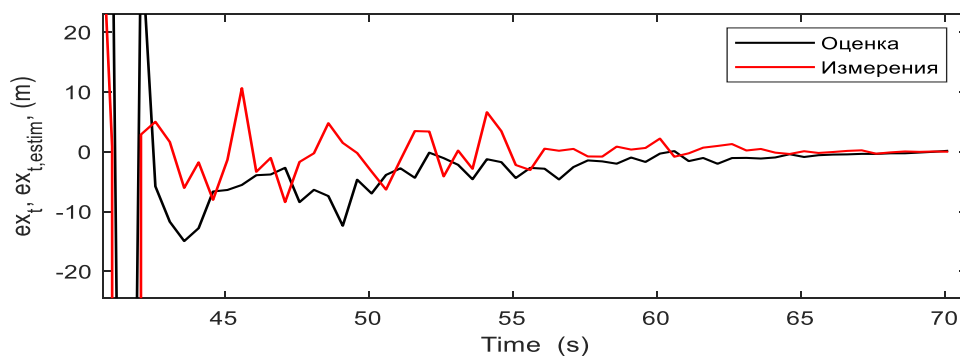
На рисунке 4 приведены результаты моделирования при ошибках наблюдения и импульсных помехах

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_t &= \alpha_t + \xi_{\alpha,t} + w_{\alpha,t}, \\ \tilde{\beta}_t &= \beta_t + \xi_{\beta,t} + w_{\beta,t},\end{aligned}$$

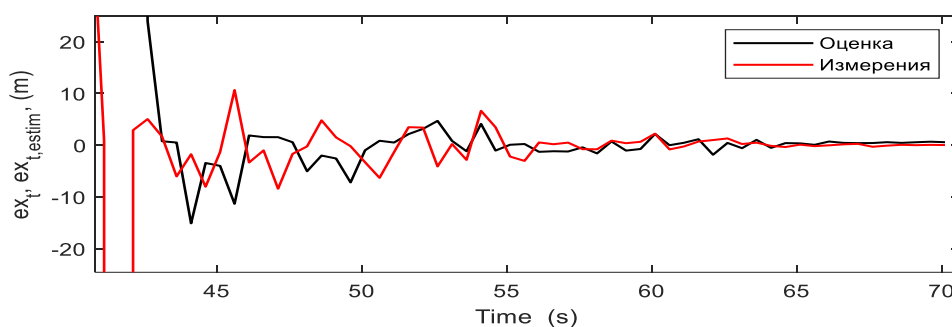
где

$$\begin{aligned}w_{\alpha,t} &= \begin{cases} N(0,1^\circ), & 40c \leq t \leq 42c \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \\ w_{\beta,t} &= \begin{cases} N(0,1^\circ), & 40c \leq t \leq 42c \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}.\end{aligned}$$

Использовался алгоритм 3 со скользящим окном, порядками моделей $b=m=5$ и длиной скользящего окна 120 тактов. Видно (рисунок 4б), что это позволило уменьшить время переходного процесса $e\alpha_t^i$ примерно на 20с по сравнению алгоритмом 1 (рисунок 4а).



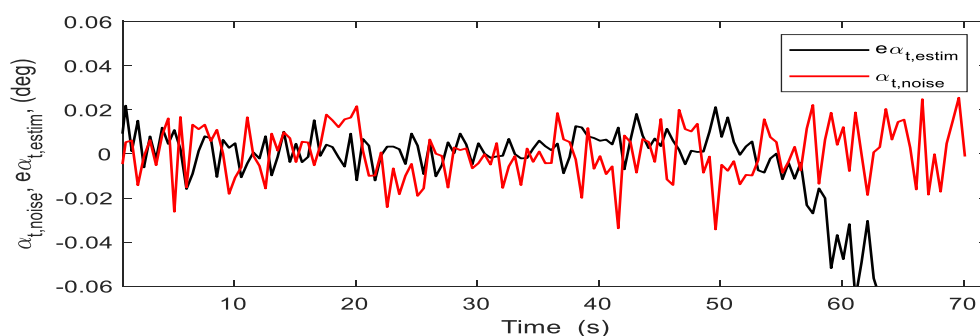
а



б

Рисунок 4 – а), б) Зависимости ошибок оценивания угла азимута с помощью алгоритмов 1, 3, соответственно, при действии импульсных возмущений

На рисунке 5а показана зависимость от времени ошибки оценивания $e\alpha_t^i$, полученная с помощью алгоритма 1. Видно, что примерно, с 53с (200м до объекта) алгоритм не позволяет получить приемлемые оценки (срыв слежения). Вместе с тем, как видно из рисунке 5б, при использовании алгоритма со скользящим окном, ошибка до 63с (90 м до объекта) примерно та же, что и у алгоритма 1.



а

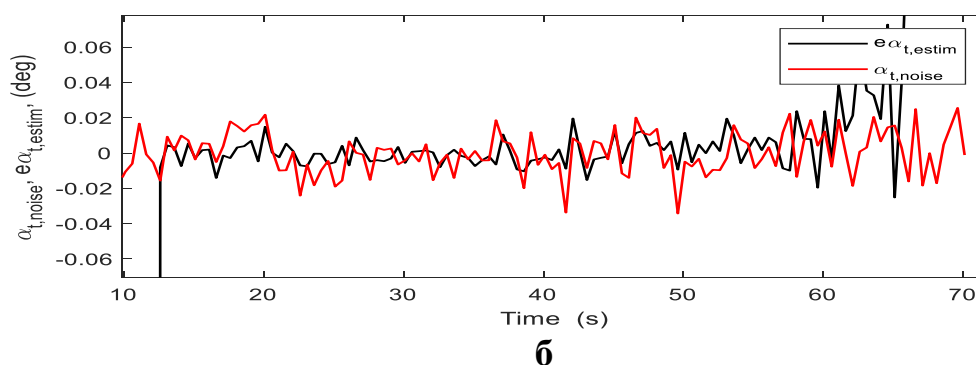


Рисунок 5 – а), б) Зависимости ошибок оценивания угла азимута с помощью алгоритмов 1, 3, соответственно

Основной результат, полученный в этом, подразделе состоит в следующем. Предложен новый двухэтапный подход к оценке положения объектов на морской поверхности по последовательности наблюдений с монокулярной камеры. На первом этапе выполняется обработка изображений, поступающих с камеры – выделение на изображении области, принадлежащей морской поверхности, обнаружение и видео сопровождение объектов, определение по полученным изображениям углов азимута и возвышения. На втором этапе проводится собственно оценка положения объекта, основанная на представлении этих углов в виде нестационарных моделей авторегрессии, рекуррентной оценке их параметров и последующей рекуррентной оценке координат объекта.

Список литературы к подразделу 5.2

1. Fefilatyeve F.; Goldgof D.; Shceve M.; and Lembke C. Detection and Tracking of Ships in Open Sea with Rapidly Moving Buoy-Mounted Camera System, Ocean Engineering, Vol.54, 2012, pp. 1-12.
2. Grupta K.; Aha D.; Hartley R.; Moore P.; Adaptive Maritime Video Surveillance, Proceedings of SPIE, Vol.7346, No.09, 2009, pp. 1-12.
3. Sullivan M.; Shah M. Visual Surveillance in Maritime Port Facilities, Proceedings of SPIE Vol.6978, No.11, 2008, pp. 1-8.
4. Mou X.; Wang W. Wide-Baseline Stereo-Based Obstacle Mapping for Unmanned Surface Vehicles, Sensors (Basel). 2018 Apr; 18(4): 1085.
5. Larson J.; Bruch M.; Halterman R.; Rogers J.; Webster R. "Advances in autonomous obstacle avoidance for unmanned surface vehicles," DTIC Document 2007.
6. Amarasinghe S.; Kodikara N.; Sandaruwan D., "Location estimation in a maritime environment using a monocular camera," in Advances in ICT

for Emerging Regions (ICTer), 2014 International Conference on, 2014, pp. 21-28.

7. Gladstone R.; Moshe Y.; Barel A.; Shenhav E. Distance Estimation for Marine Vehicles Using a Monocular Video Camera 2016 24th European Signal Processing Conference (EUSIPCO) DOI: 10.1109/EUSIPCO.2016.7760680.

8. B. A. Skorohod, "Receding Horizon Unbiased FIR Filters and Their Application to Sea Target Tracking", Journal of Control Science and Engineering, vol. 2018, Available: <https://doi.org/10.1155/2018/1803623>.

9. Б.А. Скороход, А.В. Стаценко, С.И. Фатеев Алгоритмы видеонаблюдения и маневрирования автономных морских судов. Известия ТГУ, технические науки. 2018. Выпуск 3. С.85-110.

10. Rodriguez-Padilla I.; Castelle B.; Marieu V.; Morichon D. A Simple and Efficient Image Stabilization Method for Coastal Monitoring Video Systems. Remote sensing, 2019, DOI : 10.3390/rs12010070.

11. Box G. Jenkins G. Time Series Analysis Forecasting and Control, Holden Day, San Francisco, 1976.

12. Skorohod B. Diffuse Algorithms for Neural and Neuro-Fuzzy Networks: With Applications in Control Engineering and Signal Processing. Elsevier, United Kingdom, 2017, 220 p.

13. Bar-Shalom Y.; Rong X.; Kirubarajan T. Estimation with applications to tracking and navigation. John Wiley and Sons, New York. 2001.

14. Б.А. Скороход Алгоритмы мониторинга положения объектов на морской поверхности с помощью монокулярной видеокамеры. Журнал "Системы контроля окружающей среды", No 4 (46) 2021 124

5.3 Слежения за объектами на морской поверхности по видеонаблюдениям с адаптивным выбором размера скользящего окна

Рассматривается задача оценки положения и скорости морских объектов с использованием измерений углов возвышения и азимута с видеокамеры, установленной на неподвижной, плавающей или надводной платформе [1,2]. Общий подход к ее решению заключается в использовании методов калмановской фильтрации [3]. Трудности, возникающие из-за специфики, как самой проблемы, так и используемых методов, хорошо известны и состоят в следующем. Во-первых, модели измерений являются нелинейными [4], а состояние объекта может быть в общем случае не наблюдаемым, если наблюдатель не

маневрирует особым образом [5, 6]. Во-вторых, существует большая априорная неопределенность относительно положения, скорости и ускорения наблюдаемого объекта. В-третьих, большая изменчивость морской поверхности, туманы, плохие условия освещенности, низкая контрастность объектов благодаря большому расстоянию до объекта и т.д. Все это может привести к расходимости фильтра Калмана (ФК) и его различных модификаций [7, 8, 9]. Для повышения робастности в [10-12] предлагаются алгоритмы, основанные на фильтрах со скользящим окном. В отличие от ФК, они позволяют избежать расходимости оценок, связанной с возмущениями, действующими на небольших промежутках времени, ошибками в настройке статистик шума, резкими изменениями в поведении объекта. Это достигается с помощью наблюдений и входных данных, заданных только на конечном дискретном интервале (скользящем окне). Основная проблема при конструировании таких алгоритмов заключается в выборе размера скользящего окна, обеспечивающего приемлемую точность оценок состояния системы на нем.

В этой статье предлагается новый адаптивный алгоритм оценки координат и скоростей объектов на морской поверхности. Наш подход основывается на совместном использовании фильтров со скользящим окном [13, 14] и детекторов обнаружения моментов появления возмущений [3].

Модели сигналов и постановка задачи

Пусть видеокамера установлена на некоторой платформе и измеряются углы азимута (α) и возвышения (β) относительно объекта (рисунок 1, раздел 5.1).

Выражения для углов α и β , учитывающие ошибки измерений, определяются выражениями

$$\tilde{\alpha}_t = \alpha_t + \xi_{\alpha,t} = \arctg\left(\frac{p_t}{r_t}\right) + \xi_{\alpha,t}, \quad (1)$$

$$\tilde{\beta}_t = \beta_t + \xi_{\beta,t} = \arctg\left(\frac{h_t}{k_t}\right) + \xi_{\beta,t}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} p_t &= -e_t^x \sin(\psi_t) + e_t^y \cos(\psi_t), \\ r_t &= e_t^x \cos(\psi_t) + e_t^y \sin(\psi_t), \\ k_t &= \sqrt{(e_t^x)^2 + (e_t^y)^2}, \\ e_t^x &= x_t^t - x_t^o, \quad e_t^y = y_t^t - y_t^o, \end{aligned}$$

$x_t^o, y_t^o, x_t^t, y_t^t$ - координаты камеры и платформы соответственно, ψ_t - курсовой угол движения платформы, h_t - высота установки камеры над уровнем моря, $\xi_{\alpha,t}, \xi_{\beta,t}$ - центрированные некоррелированные белые шумы с дисперсиями σ_1^2, σ_2^2 , соответственно.

Предположим, что по изображениям, поступающим с камеры, установленной на платформе, определяются углы азимута и возвышения наблюдаемого объекта на морской поверхности. Платформа (наблюдатель) движется с постоянной скоростью

$$x_{t+1}^o = x_t^o + v^o \cos(\psi) \Delta, \quad (3)$$

$$y_{t+1}^o = y_t^o + v^o \sin(\psi) \Delta, \quad (4)$$

где линейная скорость v^o и курсовой угол ψ известны, Δ - такт дискретности, поступающих измерений. Координаты платформы в горизонтальной плоскости (x_t^o, y_t^o) измеряются, и модель наблюдений имеет вид

$$z_t = x_t^o + \xi_t, \quad (5)$$

$$u_t = y_t^o + \tau_t, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

где ξ_t, τ_t - центрированные, некоррелированные белые шумы с известными дисперсиями σ_3^2, σ_4^2 .

Движение объекта неизвестно наблюдателю и описывается линейной стохастической моделью с почти постоянной скоростью [3]

$$x_{t+1}^t = x_t^t + \Delta v_t^{t,x} + \Delta^2 / 2 w_t^x, \quad (7)$$

$$v_{t+1}^{t,x} = v_t^{t,x} + \Delta w_t^x,$$

$$y_{t+1}^t = y_t^t + \Delta v_t^{t,y} + \Delta^2 / 2 w_t^y,$$

$$v_{t+1}^{t,y} = v_t^{t,y} + \Delta w_t^y, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

где $v_t^{t,x}, v_t^{t,y}$ - проекции скоростей на координатные оси x и y , w_t^x, w_t^y - проекции ускорений, которые предполагаются центрированными, некоррелированными белыми шумами с известными дисперсиями σ_x^2, σ_y^2 , соответственно.

Псевдо линеаризация измерений с учетом шумов наблюдений дает [1]

$$\begin{aligned} z_{1t}(\alpha_t, \beta_t) &= h \frac{\cos(\alpha_t + \psi)}{\tan(\beta_t)} + z_t \\ &= x_t^t + \zeta_t, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} z_{2t}(\alpha_t, \beta_t) &= h \frac{\sin(\alpha_t + \psi)}{\tan(\beta_t)} + u_t \\ &= y_t^t + \eta_t, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{pmatrix} \zeta_t \\ \eta_t \end{pmatrix} = D_t \begin{pmatrix} \xi_{\alpha,t} \\ \xi_{\beta,t} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$D_t = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\alpha_t + \psi)}{\tan(\beta_t)} & \frac{\cos(\alpha_t + \psi)}{\sin^2(\beta_t)} \\ \frac{\cos(\alpha_t + \psi)}{\tan(\beta_t)} & \frac{\sin(\alpha_t + \psi)}{\sin^2(\beta_t)} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Выражения (3)– (12) представляют собой специальный случай линейной нестационарной дискретной модели пространства состояния вида

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t w_t, \quad (13)$$

$$y_t = C_t x_t + D_t \xi_t, \quad (14)$$

где $x_t \in R^n$ - вектор состояния, $y_t \in R^m$ - вектор измерений, w_t и ξ_t - некоррелированные случайные процессы с нулевыми средними и известными ковариационными матрицами $E(w_t w_t^T) = Q_t$, $E(\xi_t \xi_t^T) = V_t$, A_t, B_t, C_t, D_t - известные матрицы соответствующих размерностей, $t = 1, 2, \dots$. В нашем случае все матрицы, входящие в описание (13), (14) за исключением D_t не зависят от времени.

Введем дискретные интервалы $[t - N, t]$, $t \in T_N = \{N, N + 1, \dots\}$, где N - размер скользящего окна. Предположим, что следующие условия выполняются.

A1: Априорная информация о компонентах x_{t-N} $t \in T_N$ отсутствует и они являются или неизвестными постоянными или случайными переменными, статистические характеристики которых неизвестны.

A2: Если x_{t-N} являются случайными переменными, то они не коррелированы с w_t and ξ_t for $t=1,2,\dots$

При выполнении A1, A2, линейная несмещенная оценка состояния системы (1), (2), минимизирующая критерий $E[(x_i - \hat{x}_i)^T (x_i - \hat{x}_i)]$, $i \in T^* = [t - N + N^*, t]$, $t \in T_N$ (оптимальный фильтр со скользящим окном) определяется выражениями [13, 14]:

$$\hat{x}_{i+1} = A_i \hat{x}_i + K_i (y_i - C_i \hat{x}_i), \quad \hat{x}_{t-N} = 0, \quad (15)$$

$$K_i = (A_i S_i + A_{1i} R_i M_{i+1}^+ R_i^T) C_i^T N_i^{-1}, \quad (16)$$

$$S_{i+1} = A_i S_i A_i^T - A_i S_i C_i^T N_i^{-1} C_i S_i A_i^T + \tilde{Q}_i, \quad S_{t-N} = 0, \quad (17)$$

$$R_{i+1} = A_{1i} R_i, \quad R_{t-N} = I_n, \quad (18)$$

$$M_{i+1} = M_i + R_i^T C_i^T N_i^{-1} C_i R_i, \quad M_{t-N} = 0, \quad (19)$$

$$N_i = C_i S_i C_i^T + \tilde{V}, \quad (20)$$

$$A_{1i} = A_i - A_i S_i C_i^T N_i^{-1} C_i, \quad (21)$$

$$N^* = \min_i \{i : M_i > 0, i = t - N, t - N + 1, \dots\}, \\ i \in [t - N, t], t \in T_N, \quad (22)$$

где $\tilde{Q}_i = B_i Q_i B_i^T$, $\tilde{V}_i = D_i V_i D_i^T$, A^+ - Мура-Пенроуза инверсия A , I_n - единичная матрица размера $m \times n$.

Ковариационная матрица ошибки оценивания фильтра (КМОО) при $i \in T^* = [t - N + N^*, t]$, $t \in T_N$ дается выражением

$$P_i = S_i + H_i, \quad (23)$$

где $H_i = R_i M_i^+ R_i^T$.

Задача формулируется следующим образом. Модель (13), (14) рассматривается как номинальная для анализируемого объекта, а для оценки ее состояния используется фильтр, описываемый выражениями (15) - (22). Требуется обнаруживать изменения в свойствах объекта на основе наблюдений невязок $y_i - C_i \hat{x}_i$ и предложить алгоритм для выбора размера скользящего окна в каждый момент времени, для того чтобы улучшить переходные характеристики фильтра.

Описание алгоритма

Вначале, сформулируем алгоритм выбора размера скользящего окна для стационарного случая системы (13), (14), а затем покажем, как он может быть модифицирован с учетом особенностей рассматриваемой задачи.

Из (15-22), (13), (14) следует, что P_i, H_i, K_i'' не зависят от t и поэтому достаточно рассматривать поведение фильтра внутри одного скользящего окна $i \in [0, N]$ и $t = N$. Нам понадобится следующее утверждение [15].

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

- (a) пара матриц $[A, \tilde{Q}^{1/2}]$ детектируема,
- (b) пара матриц $[A, C^T]$ стабилизируема,
- (c) $\tilde{V} > 0$,
- (d) $|\lambda_i(A)| \leq 1$, где $\lambda_i(A)$, $i = 1, 2, \dots, n$ - собственные числа A .

Тогда: 1. Существует семейство матричных функций P_i^μ, H_i^μ и $\mu^* > 0$ такое, что для любых $\varepsilon > 0$, конечного интервала $T^* = [N^*, N]$

$$\|P_i - P_i^\mu\| \leq \varepsilon, \|H_i - H_i^\mu\| \leq \varepsilon \quad (24)$$

$$P_{i+1}^\mu \leq P_i^\mu, H_{i+1}^\mu \leq H_i^\mu \quad (25)$$

для всех $i \in T^*$ и $\mu \geq \mu^*$.

2. При неограниченном увеличении длины скользящего окна существуют пределы

$$P_i^\mu \rightarrow \bar{P}, H_i^\mu \rightarrow 0 \text{ при } i \rightarrow \infty, \quad (26)$$

где

$$\bar{P} = A\bar{P}A^T - A\bar{P}C^T(C\bar{P}C^T + \tilde{V})^{-1}\bar{P}A^T + \tilde{Q}$$

для всех $\mu \geq \mu^*$.

Рассмотрим применение Теоремы 1 к выбору размера скользящего окна. Существует несколько общих требований. Прежде всего, модель должна соответствовать объекту внутри скользящих окон. Во-вторых, если размер окна N слишком мал, то доступной информации недостаточно для получения приемлемой оценки точности. И наоборот, если он слишком велик, то он может быть неприемлемым с точки зрения переходных характеристик фильтра. Принимая во внимание эти соображения, мы хотели бы выбирать большое N при отсутствии возму-

щений и небольшое в течение временных интервалов их действия. Принципиальная возможность решения этой проблемы с использованием оптимального фильтра следует из утверждения Теоремы 1, что КМОО фильтра является монотонно неубывающей матричной функцией. Чтобы детектировать момент появления внезапных изменений, в литературе предлагаются различные решения, основанные на анализе остатков ФК [3]. Для иллюстрации подхода, мы используем хи-квадрат статистику, широко применяемую для решения различных задач в качестве детектора таких изменений.

Рассмотрим след КМОО фильтра $tr(P_i^\mu)$. Из теоремы 1 следует, что КМОО, определяемая (23), может быть аппроксимирована семейством монотонно неубывающих матричных функций P_i^μ , имеющих предел $\bar{P}$ при $i \rightarrow \infty$. С учетом этого зададим величину P_i в окрестности установившегося значения, используя неравенство

$$p_{\min} \leq tr(P_i - \bar{P}) \leq p_{\max}, \quad (26)$$

где $p_{\min}$, $p_{\max}$ - выбираемые пользователем параметры. Отсюда следует верхняя граница $N_{\max}$ для приемлемого значения размера окна $[N_{\min}, N_{\max}]$, где $N^* \leq N_{\min} < N_{\max}$.

Введем скользящие окна $[t + \Delta_t, t + N_{\max}]$, длины $N_t = N_{\max} - \Delta_t \geq N_{\min}$, $t = 0, 1, \dots$ и нормализованный квадрат невязки

$$J_{t+N_{\max}} = \mathbf{v}_{t+N_{\max}}^T \Sigma_{t+N_{\max}}^{-1} \mathbf{v}_{t+N_{\max}}.$$

где Δ_t - последовательность целых положительных чисел, $\Sigma_i = CP_i C^T + \tilde{V}$. При условии, что шумы в (13), (14) имеют нормальные распределения, переменная $J_{t+N_{\max}}$ имеет распределение хи-квадрат с m степенями свободы. В этом случае Хи-квадрат тест определяется выражением:

$$\text{if } J_t > \eta_t = F^{-1}(1 - \alpha | m) \quad (27)$$

где $F(x|m)$ - распределение хи-квадрат с m , α - вероятность ложной тревоги.

Предлагается следующая процедура выбора длины окна

$$N_t = N_{\max} + \Delta_t, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (28)$$

$$\Delta_t = \Delta_{t-1} + \tau_t, \Delta_0 \in [N_{\min}, N_{\max}],$$

где τ_t - последовательность целых чисел, удовлетворяющая условиям

$$\tau_t = \begin{cases} \geq 0 & \text{if } J_t > \eta_t \text{ and } \Delta_{t-1} + \tau_t < N_{\max} - N_{\min}, \\ 0, & \text{else,} \end{cases} \quad (29)$$

$$\tau_t = \begin{cases} \leq 0 & \text{if } J_t \leq \eta_t \text{ and } \Delta_{t-1} + \tau_t \geq N_{\min}, \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (30)$$

Обратимся теперь к задаче оценки $x_t^t, y_t^t, v_t^{t,x}, v_t^{t,y}$, по наблюдениям (9, 10). Интенсивность шумов измерений определяется выражением $\tilde{V}_i = D_i V D_i^T$, где $V = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$. Отсюда и (9), (10) следует, что с увеличением дистанции до объекта матрица $\tilde{V}_i$ неограниченно растет по норме ($\beta_t \rightarrow 0$) и наоборот – убывает при ее уменьшении. Это означает, что для получения приемлемой точности в первом случае необходимо сохранять длину окна достаточно большой, тогда как во втором - размер окна можно уменьшить, сохраняя при этом достаточную точность и обеспечивая качество переходных процессов, при действии возмущений. Для определения длины скользящего окна предлагается использовать соотношения (27-29).

Компьютерное моделирование

Сравниваются три алгоритма: ФК, предложенный адаптивный алгоритм и оптимальный алгоритм с фиксированным размером скользящего окна, описываемый выражениями (15) – (23). Для удобства ссылок мы будем обозначать их 1, 2, 3, соответственно.

Рассмотрим следующий сценарий относительного движения судна-наблюдателя и объекта, при котором они движутся вдоль оси x в соответствии с уравнениями (3), (7) навстречу друг другу. Дополнительно предположим, что в канале наблюдения действует импульсная помеха, обусловленная появлением ошибок в оценке угла возвышения по видеонаблюдениям. В этом случае, модель наблюдения (2) и ее псевдо линеаризованный вариант, используемый для построения фильтров, определяются, соответственно, выражениями

$$\tilde{\beta}_t = \beta_t + \xi_{\beta,t} = \arctg\left(\frac{h_t}{k_t}\right) + \xi_{\beta,t} + \delta_t,$$

где

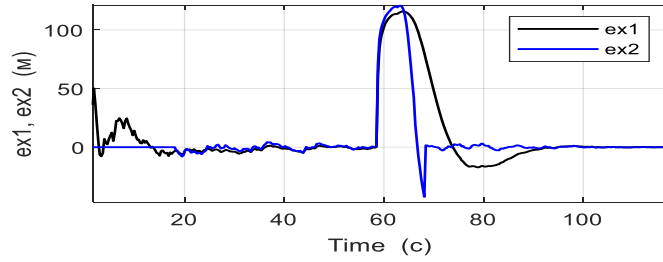
$$\delta_i = \begin{cases} 1^\circ, & \text{if } 65c \leq 75c, \\ 0 & \text{else.} \end{cases},$$

$$z_t(\beta_t) = h \frac{1}{\tan(\beta_t)} + z_t = x_t^t + h \frac{1}{\sin^2(\beta_t)} \zeta_t.$$

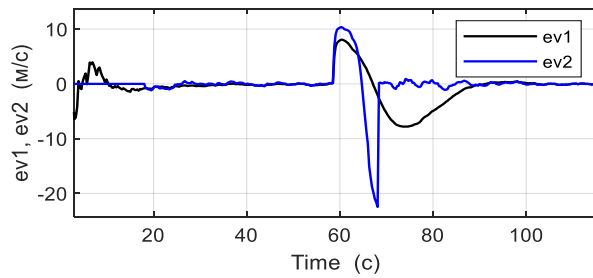
Введем следующие обозначения для ошибок оценивания каждым алгоритмом:

$$ex_t^{t,i} = x_t^t - \hat{x}_t^{t,i}, \quad ev_t^{t,x,i} = v_t^{t,x} - \hat{v}_t^{t,x,i}, \quad i=1,2,3.$$

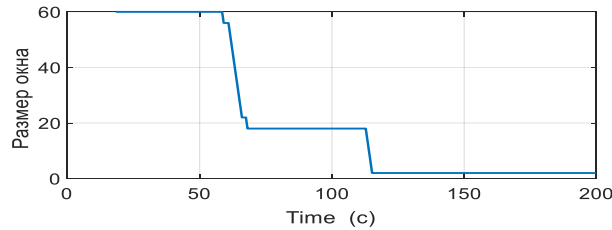
На рисунке 1 показаны зависимости ошибок оценивания координаты и скорости объекта, размера скользящего окна и угла возвышения от времен. Мы полагали $N_{\max} = 20$, $\Delta_0 = 0$, $N_{\min} = 2$, $\tau_t = 2$ если выполняется (29) и $\tau_t = -2$ если (30), $\alpha = 0.01$. Видно, что предложенный адаптивный алгоритм может иметь лучше переходные характеристики по сравнению с ФК. При этом, вне пределов действия возмущения оценки полученные с помощью адаптивного алгоритма и фильтра Калмана близки по точности.



a



b



c

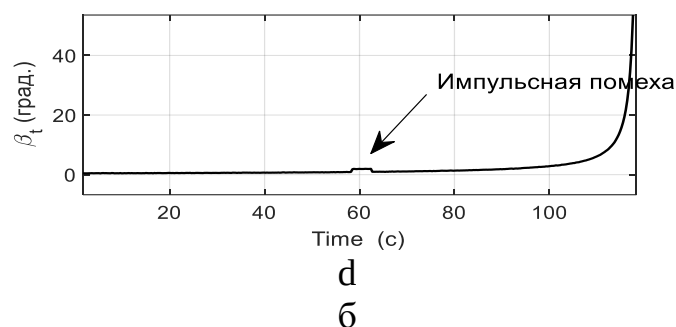


Рисунок 1 – Зависимости ошибок оценивания координаты (а) и скорости (б) объекта, размера скользящего окна (с), угла возвышения от времени (д)

На рисунке 2 показаны зависимости ошибок оценивания координаты и скорости объекта от времени, полученные с помощью фильтра Калмана и оптимального алгоритма со скользящим окном фиксированного размера с $N = 20$. Видно, что алгоритм со скользящим окном имеет лучшие переходный процесс по сравнению с фильтром Калмана, но дает менее точные оценки вне пределов действия возмущения.

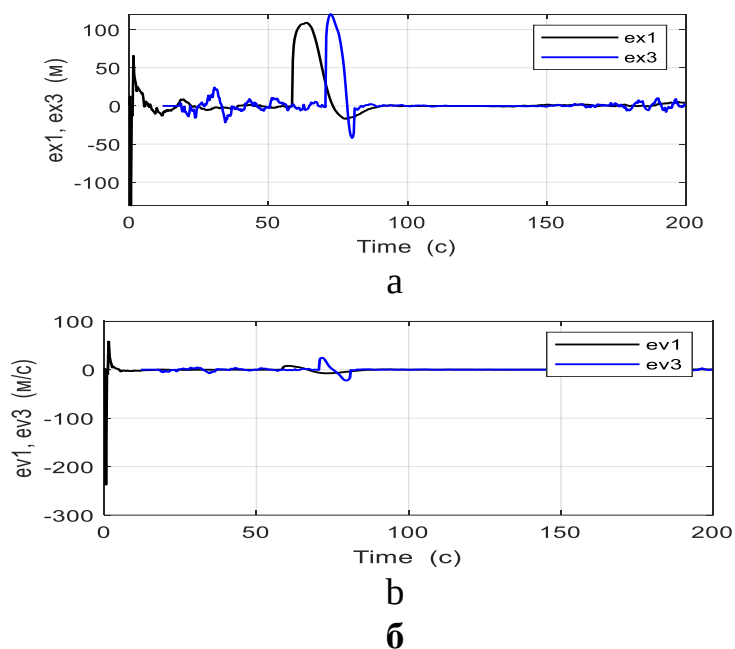


Рисунок 2 – Зависимости ошибок оценивания координаты (а) и скорости объекта от времени (б)

Входные данные для моделирования приведены в Таблице.1.

Таблица 1. Входные данные для моделирования

Компоненты системы	Параметры
Камера	Full HD (1920 × 1080), $\alpha = 70^0$ (угол зрения), $\sigma_\alpha = 0.88'$, $\sigma_\beta = 1.56'$, $h = 3\text{ m}$.
Судно-наблюдатель	$x_0^o = 0\text{ m}$, $\sigma_3 = 1\text{ m}$, $\Delta = 0.1\text{ s}$.
Объект	$x_0^t = 400\text{ m}$, $v_0^{t,y} = 3.12\text{ m/s}$, $\sigma_x = \sigma_y = 0.1\text{ m/s}^2$, $\Delta = 0.3\text{ s}$.

Основной результат этого подраздела состоит в следующем. Предложен новый адаптивный алгоритм оценивания состояния и скорости морских объектов на морской поверхности по углам возвышения и азимута, полученных по видеоизображениям этих объектов. Алгоритм позволяет выбирать адаптивно размер скользящего окна таким образом, чтобы он был достаточно малым, когда в системе появляется неконтролируемое возмущение, и достаточно большим, если оно отсутствует или исчезает. Численное моделирование показало, что предложенный алгоритм может иметь лучшие переходные характеристики по сравнению с фильтром Калмана и оптимальным фильтром с фиксированным размером скользящего окна на интервалах действия возмущений и может обеспечить близкую точность оценок, что и ФК в их отсутствие.

Список литературы к подразделу 5.3

1. B. A. Skorohod, "Receding Horizon Unbiased FIR Filters and Their Application to Sea Target Tracking", Journal of Control Science and Engineering, vol. 2018, Available: <https://doi.org/10.1155/2018/1803623>.
2. Б.А. Скороход, А.В. Стаценко, С.И. Фатеев Алгоритмы видеонаблюдения и маневрирования автономных морских судов. Известия ТГУ, технические науки. 2018. Выпуск 3. С.85-110.
3. Bar-Shalom, Yaakov, Li, X Rong, Kirubarajan, Estimation with applications to tracking and navigation. John Wiley and Sons, New York. 2001.
4. B. F. La Scala, M. Mallick, and S. Arulampalam, "Differential geometry measures of nonlinearity for filtering with nonlinear dynamic and linear measurement models," in SPIE Conference on Signal and Data Processing of Small Targets, vol. 6699, August 2007.
5. P. Shar, and X. R. Li, "A practical approach to observability of bearings-only target tracking", SPIE Vol 3809, 514-520, 1999.

6. M.H. Ferdowsi Observability conditions for target states with bearing-only measurements in three-dimensional case. Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Control Applications Munich, Germany, October 4-6, 2006, 1443-1449.
7. Barbara La Scala Mark Morelande An analysis of the single sensor bearings-only tracking problem 2008 11th International Conference on Information Fusion June 30 2008-July 3 2008 525-530
8. V. J. Aidala, “Kalman filter behavior in bearings-only tracking applications” IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. 15, pp. 29–39, Jan. 1979.
9. X. Lin; T. Kirubarajan; Y. Bar-Shalom; S. Maskell, “Comparison of EKF, pseudo measurement, and particle filters for a bearing-only target tracking problem”, Proc. SPIE 4728, Signal and Data Processing of Small Targets 2002, pp. 240–250.
10. A. H. Jazwinski, Stochastic Processes and Filtering Theory. New York: Academic, 1970.
11. W. H. Kwon, P.S. Kim, S.H. Han, “A receding horizon unbiased FIR filter for discrete-time state space models”, Automatica 38 (3) (2002), pp. 545–551.
12. Shmaliy, Y. S., Liu, F., Zhao, S. & Khan, S. (2016). Unbiased, optimal, and in-betweens: the trade-off in discrete finite impulse response filtering. IET Signal Processing, 10(4), pp. 325-334. doi: 10.1049/iet-spr.2015.0360.
13. B. Skorohod, “Diffuse Initialization of Kalman Filter”, Journal of Automation and Information Sciences, v43. 2011, pp. 20-34. Begell House Publishing Ins, USA.
14. B. Skorohod, Diffuse Algorithms for Neural and Neuro-Fuzzy Networks: With Applications in Control Engineering and Signal Processing. United Kingdom1: Elsevier, 2017.
15. Skorohod B. Covariance Analysis of the Receding Horizon Optimal FIR Filter. International Russian Automation Conference (RusAutoCon), September 2021, DOI: 10.1109/RusAutoCon52004.2021.9537565.

5.4 Оценка состояния газотурбинного авиационного двигателя F404

Модель газотурбинного авиационного двигателя F404 описывается линейной дискретной инвариантной по времени моделью вида

$$x_{t+1} = Ax_t + Bw_t \quad (1)$$

$$y_t = Cx_t + D\xi_t \quad (2)$$

где $x_t \in R^n$ - вектор состояния, $y_t \in R^m$ – вектор измерений, w_t, ξ_t -

некоррелированные случайные процессы с нулевыми средними и известными ковариационными матрицами $E(w_t w_t^T) = Q$, $E(\xi_t \xi_t^T) = V$, A, B, C, D - известные матрицы соответствующей размерности, $t = 1, 2, \dots$. Здесь [1, 2, 3]

$$A = \begin{Bmatrix} 0.9305 & 0 & 0.1107 \\ 0.0077 & 0.982 & -0.0173 \\ 0.0142 & 0 & 0.8953 \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$C = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix},$$

$$V = I_2, Q = 0.25. \quad (3)$$

Используется возмущенная модель, такая же, как в [32]:

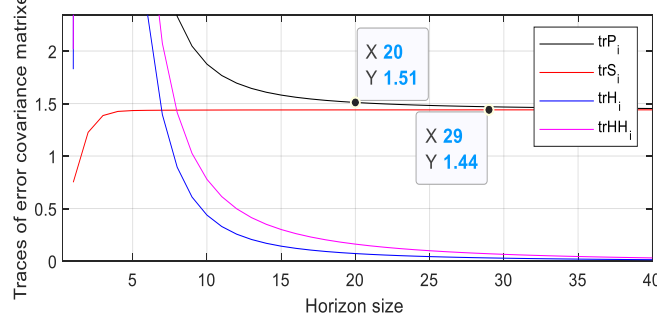
$$\bar{A} = A - \Delta A, \bar{C} = C - \Delta C$$

$$\Delta A = \begin{Bmatrix} \delta_i & 0 & 0 \\ 0 & \delta_i & 0 \\ 0 & 0 & \delta_i \end{Bmatrix}, \Delta C = \begin{Bmatrix} 0.1\delta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0.1\delta_i & 0 \end{Bmatrix},$$

$$\delta_i = \begin{cases} 0.05, & \text{if } 200 \leq i \leq 250, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}. \quad (4)$$

Требуется построить оценку состояния (1), используя адаптивный КИХ алгоритм предложенный в разделе 4.11. Мы сохраним все обозначения введенные в этом разделе.

Начнем с анализа ковариации фильтров, выбора N_{max} и размера горизонта N для фильтра RNOFIR. Следы ковариационных матриц ошибок и квадратов нормы коэффициентов усиления фильтров показаны на рисунке 1. Здесь $trP_i = tr(P_i)$, $trS_i = tr(S_i)$, $trH_i = tr(H_i)$, $trHH_i = tr(\bar{H}_i)$, $\alpha_i = tr(K_i(K_i)^T)$, $\beta_i = tr(K_i^{tr}(K_i^{tr})^T)$. Видно, что их поведение полностью соответствует результатам, полученным в разделе 3 ($P_i \geq P_{i+1}$, $H_i \geq H_{i+1}$, $H_i \leq \bar{H}_i$, $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$, $\beta_i \geq \beta_{i+1}$). Мы назначаем $N_{max} = N = 20$.



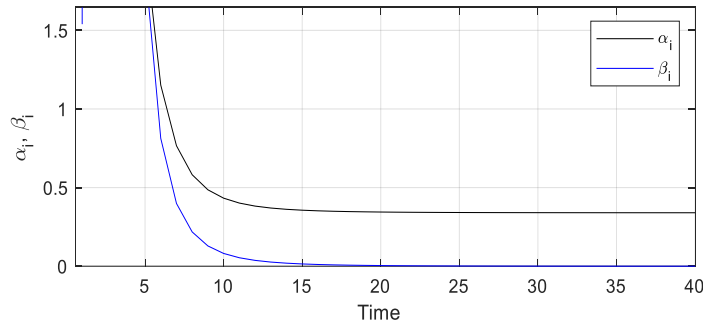
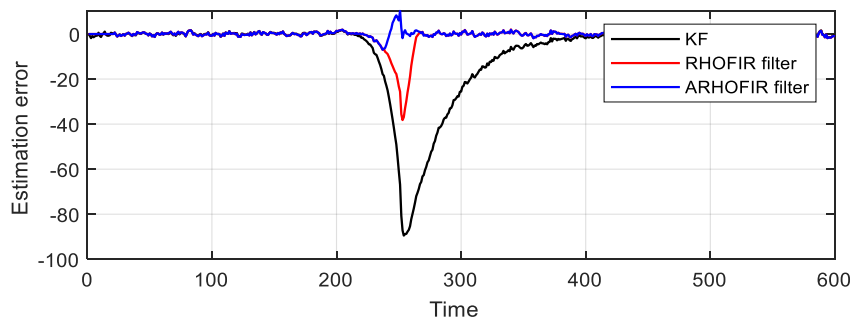


Рисунок 1 – Зависимости дисперсий и квадратов норм коэффициентов усиления фильтров

Ошибки оценок ФК, фильтров ARHOFIR, RHOFIR и размеры горизонта, полученные с помощью ARHOFIR, показаны на рисунке 2. Усредненные по времени значения среднеквадратичных ошибок оценивания для 50 реализаций ФК, фильтров ARHOFIR и RHOFIR составляют 19.9, 6.11 и 8.9, соответственно. Использовались следующие исходные данные:

$$N_{max} \Delta_0 = 0, N_{min} \tau_t = 2 \text{ если } (4.60) \text{ выполнение } \tau_t = -3 \text{ и если } (4.61), \text{ то } \alpha = 0.01.$$

Фильтры строились для номинальной модели (1), (2) а входами для них являются выходы возмущенной модели (3). Видно, что предложенный фильтр ARHUFIR имеет лучшие переходные характеристики по сравнению с фильтрами KF и RHOFIR на интервалах, где присутствует возмущение, и обеспечивает близкую точность оценок к оценкам ФК при их отсутствии (заметим, что размер горизонта фиксирован и равен 19 для $t > 250$).



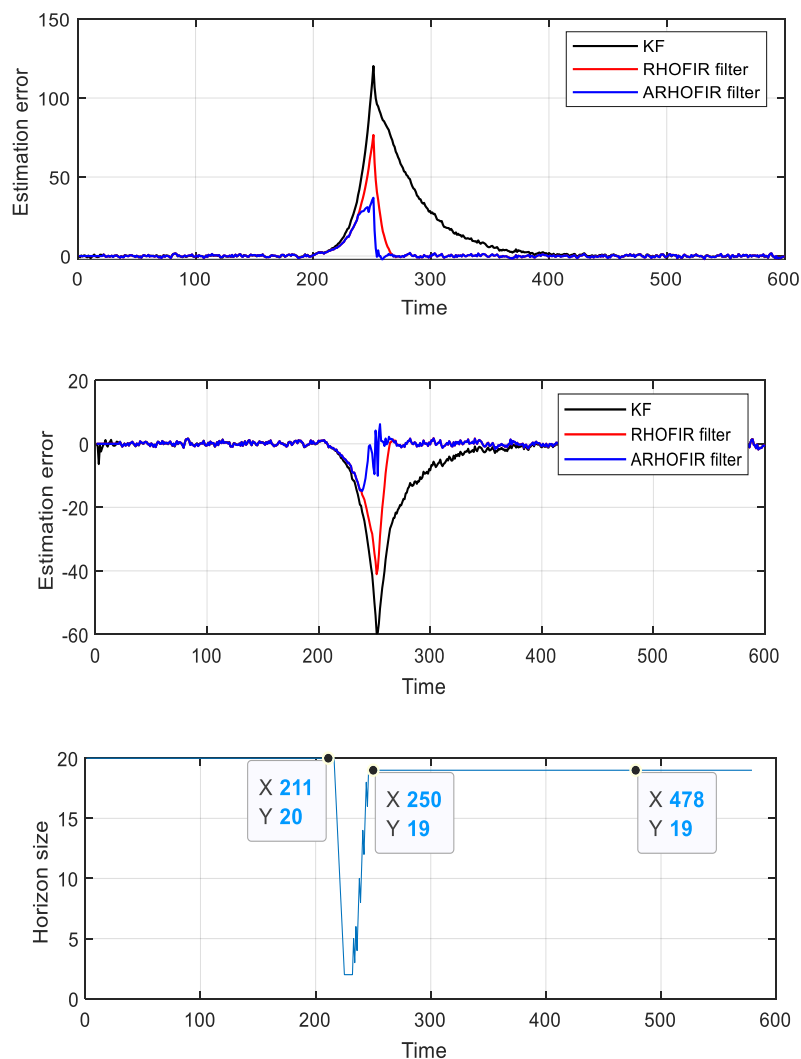


Рисунок 2 – Зависимости ошибок оценивания и размеров скользящего окна от времени

Список литературы к подразделу 5.4

1. S. Zhao, Y. S. Shmaliy, C. K. Ahn, and P. Shi, "Real-time optimal state estimation of multi-DOF industrial systems using FIR filtering," IEEE Trans. Ind. Inform., vol. 63, no. 8, pp. 1210–1221, Aug. 2016.
2. Bokyu Kwon and Sangil Kim Recursive Optimal Finite Impulse Response Filter and Its Application to Adaptive Estimation. Appl. Sci. 2022, 12, 2757.
3. Eustace, R.W.; Woodyatt, B.A.; Merrington, G.L.; Runacres, A. Fault signatures obtained from fault implant tests on an F404 engine. J. Eng. Gas Turbines Power 1994, 116, 178–183.

5.5. Прогноз угла возвышения движущегося подводного объекта

Используются экспериментальные данные, собранные с помощью стенда, который показан на рисунке 1. Стенд позволяет моделировать рабочее пространство подводного робота и включает в себя аналоги объектов искусственной подводной инфраструктуры. В качестве интересующего нас объекта рассматривался всплывающий куб коричневого цвета размером 3 на 3 сантиметра. За сценой наблюдает монокулярная видеокамера с частотой дискретизации 10 кадров в секунду. Объект находится на расстоянии около 1,5 метров от камеры. На каждом изображении пиксели, принадлежащие объекту, выбираются по цвету и находится центр наименьшего прямоугольника.

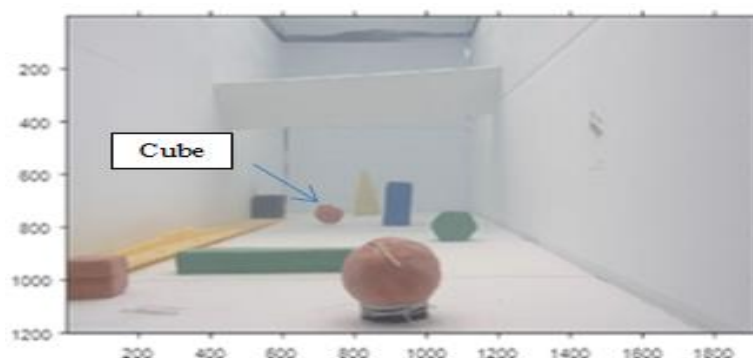
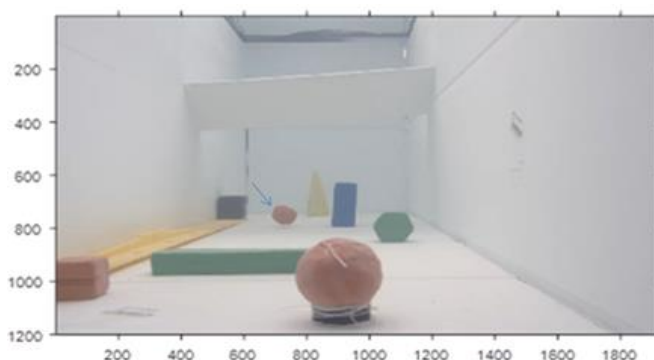


Рисунок 1 – Изображение сцены

Движение куба включает три различных режима, сопровождающихся столкновением с плоскостью, движением вдоль нее и, наконец, всплытием. Типичные скриншоты изображений в каждом режиме показаны на рисунке 2. Траектория движения в координатах плоскости изображения показана на рисунке 3.



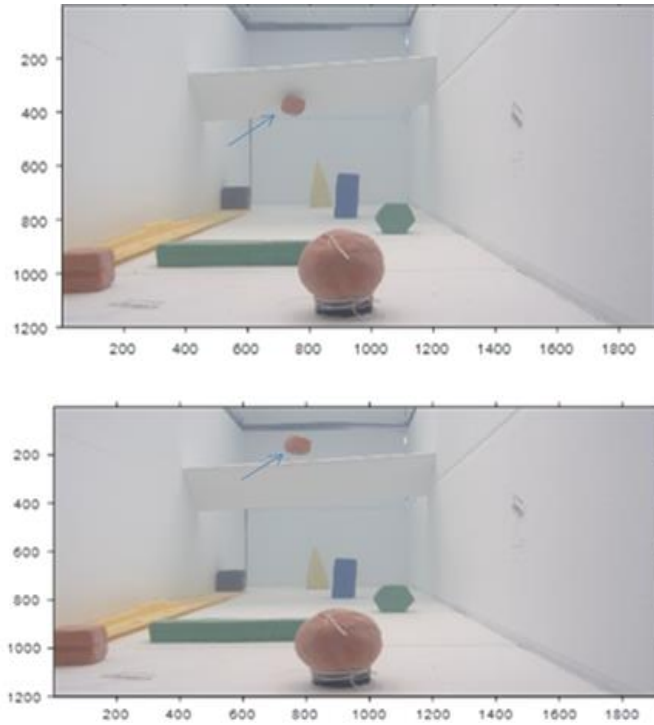


Рисунок 2 – Скриншоты изображения сцены в трех различных режимах движения куба

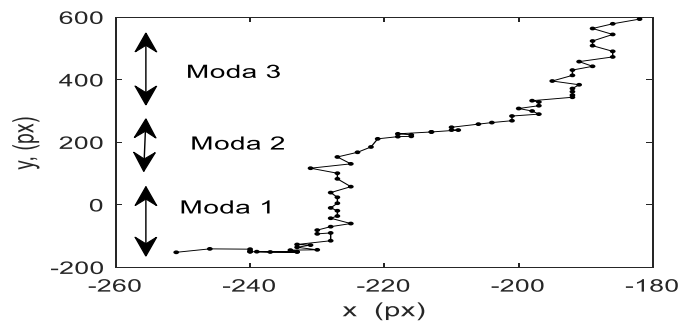


Рисунок 3 – Траектория движения центра куба в координатах плоскости изображения

Если пиксельные координаты центроида куба x_t, y_t известны, то его углы возвышения и пеленга могут быть определены с помощью соотношений [1]

$$\alpha_t = \tan^{-1}(2 \tan(\phi_v/2)/N_h y_t), \quad (1)$$

$$\beta_t = \tan^{-1}(2 \tan(\phi_h/2)/N_v x_t), \quad (2)$$

где $\phi_h, \phi_v, N_h, N_v, x_t, y_t$ - углы обзора, номера пикселей и координаты объекта в пикселях по горизонтали и вертикали, соответственно. Благодаря высокой точности обнаружения объектов с помощью видео, можно ожидать, что ошибки в определении α_t и β_t будут незначитель-

ными во многих приложениях. Действительно, обычно назначается размер рабочего пространства подводного робота, и можно определить максимальные линейные размеры пикселей. Так для 2 метров они приблизительно равны 0,6 мм, если

$$\phi_h = 51.13^\circ, \phi_v = 35.14^\circ \text{ (в воде)}, N_h = 1920\text{px}, N_v = 1200\text{px}.$$

а ошибка в определении центра куба составляет около 1-2 пикселей. В то же время, изменения y_t в течение одного такта могут варьироваться в пределах 20-25 пикселей. Принимая во внимание эти соображения, требуется разработать одношаговый прогноз для y_t с помощью фильтра ARNOFIR с адаптивным выбором горизонта, предложенным в разделе 4.11, и для сравнения с помощью ФК и фильтра RNOFIR с фиксированным размером горизонта. Мы сохраним все обозначения введенные в этом разделе.

Предположим, что движение центра куба вдоль вертикальной оси описывается кинематической моделью с почти постоянной скоростью

$$y_{t+1} = y_t + \Delta v_t + \frac{\Delta^2}{2w_t}, v_{t+1} = v_t + \Delta w_t \quad (3)$$

$$z_t = y_t + \xi_t, \quad (4)$$

где v_t - проекция скорости объекта на вертикальную ось, w_t, ξ_t - проекции ускорения и шум измерений (центрированные некоррелированные белые шумы с дисперсиями σ_w^2, σ_ξ^2 соответственно, Δ - такт дискретности. Входные данные для моделирования номинальной модели следующие: $\Delta = 0.1\text{s}$, $\sigma_w = 2\text{ px/s}^2$, $\sigma_\xi = 1\text{px}$.

Как и в предыдущем примере, мы начинаем с анализа ковариационного анализа фильтров, выбора N_{max} и размера горизонта N для фильтра RNOFIR. Следы ковариационных матриц ошибок и квадраты норм коэффициентов усиления фильтров показаны на рисунок 4. Видно, что поведение дисперсий полностью соответствует результатам, полученным в разделе 3. Мы полагаем $N_{max} = N = 10$. Аналогичный вывод справедлив и в отношении квадратов норм коэффициентов усиления фильтров.

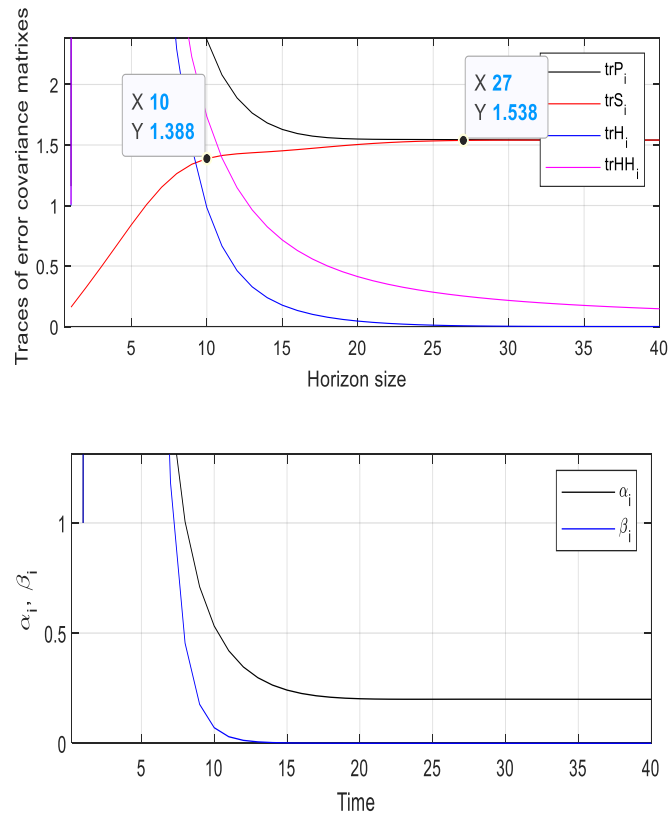


Рисунок 4 — Зависимости дисперсий и квадратов норм коэффициентов усиления фильтров

Ошибки оценки одношагового прогноза фильтров KF, ARHOFIR, RHOFIR и размеры скользящих окон, полученные с помощью ARHOFIR, показаны на рисунок 5. Среднеквадратичные ошибки оценивания для ФК, фильтров ARHOFIR и RHOFIR составляют: 19.9, 6.5, 11.9 соответственно. Использовались следующие исходные данные: $N_{max} = 10, \Delta_0 = 7, N_{min} = 2, \Delta_t = 7$, если (4.60) выполняется и $\tau_t = -1$ если (4.61), $\alpha = 0.01$ и использовался тест с одним запуском. Фильтры разработаны для номинальной модели (3), (4). Видно, что предложенный фильтр ARHUFIR может иметь лучшие переходные характеристики по сравнению с фильтрами KF и RHOFIR. Наконец, отметим, что в пределах каждого режима ошибки фильтра ARHOFIR не превышают 5-6 пикселей.

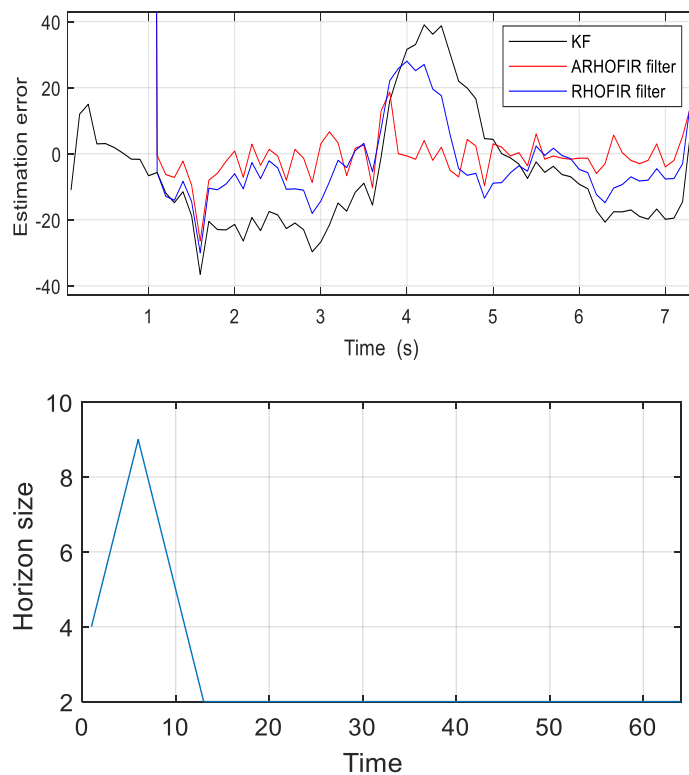


Рисунок 5 – Зависимости ошибок оценивания и размеров скользящего окна от времени

Список литературы к подразделу 5.5

1. Fan, S., Liu, C., Li, B. et al. AUV docking based on USBL navigation and vision guidance. *J Mar Sci Technol* **24**, 673–685 (2019). <https://doi.org/10.1007/s00773-018-0577-8>.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Golub G. H. Pereyra V. The differentiation of pseudoinverses and nonlinear least squares problems whose variables separate. *SIAM J. Numer. Anal.* 10, 413–432 (1973).
2. Golub G. H., Pereyra V. Separable nonlinear least squares: the variable projection method and its applications. *Inverse Problems*, volume 19, number 2, R1–R26, (2003).
3. Pereyra V., Scherer G., Wong F. Variable projections neural network training. *Mathematics and Computers in Simulation*, volume 73, issues 1–4, 6 November 2006, pp. 231–243.
4. Sjöberg J., Viberg M. Separable non-linear least-squares minimization and possible improvements for neural net fitting. In: *IEEE workshop in neural networks for signal processing*, Florida (USA) (1997), pp. 345–354.
5. Jang R., Sun C., Mizutani E. *Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence*, Prentice Hall, 1997.
6. Huang G.B, Zhu Q.Y, Siew C.K. (2006) Extreme learning machine: theory and applications. *Neurocomputing* 70:489–501.
7. Kaufman L. A variable projection method for solving separable nonlinear least squares Problems, *BIT* 15:49 – 57 (1975).
8. Golub G.H. Pereyra V. Separable nonlinear least squares: the variable projection method and its applications, *Inverse Problems*, volume 19, number 2, R1–R26, (2003).
9. Skorohod B. *Diffuse Algorithms for Neural and Neuro-Fuzzy Networks With Applications in Control Engineering and Signal Processing*. Elsevier, United Kingdom. 2017. 220p. (монография).
10. Haykin S. *Neural Networks and Learning Machines*, third edition, Prentice Hall, 2009. – 916 p.
11. Cybenko G. Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of Control, Signals and Systems*.– 1989.– vol. 2.– P. 303–314.
12. Funahashi K. On the Approximate Realization of Continuous Mappings by Neural Networks, *Neural Networks*, Vol. 2, pp. 183-192, 1989,
13. Battiti R., First and second order methods for learning: Between steepest descent and Newton's method // *Neural Computation*.–1992.– vol. 4.– no. 2.– P.141–166.
14. Hagan M. T., Menhaj M. Training multilayer networks with the Marquardt algorithm. *IEEE. Transactions on Neural Networks*.– 1994.– vol. 5.– no. 6.– P. 989 – 993.
15. Singhal S., Wu I. Training multilayer perceptrons with the extended Kalman filter. In *Advances in Neural Information Processing Systems*.– 1989.– 1.– P. 133–140.

16. Iiguni Y., Sakai H., Tokumaru H. A Real Time Learning. Algorithm for a Multilayered Neural Network Based on the Extended. Kalman Filter // Signal Processing, IEEE Transactions.– 1992.– Volume: 40 .– Issue: 4.– P. 959 – 966 .
17. Skorohod B. Diffuse Initialization of Kalman Filter, Journal of Automation and Information Sciences. — 2011. — v43. — i4. — P.20-34. Begell House Publishing Inc, USA.
18. Skorohod B. Diffusion learning algorithms for feedforward neural networks, Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 49, No. 3, May, 2013. Publisher: Springer New York.
19. Cheol-Taek Kim and Ju-Jang Lee Training Two-Layered Feedforward Networks With Variable Projection Method. IEEE transactions on neural networks, vol. 19, no.2, February, 2008.
20. Cheol-Taek Kim, Ju-Jang Lee and Hyejin Kim, Variable Projection Method and Levenberg-Marquardt Algorithm for Neural Network Training? Published in: IEEE Industrial Electronics, IECON 2006 - 32nd Annual Conference on 6-10 Nov. 2006, P. 4492 - 4497
21. Skorohod B. Learning Algorithms for Neural Networks and Neuro-Fuzzy Systems with Separable Structures, Cybernetics and Systems Analysis: Volume 51, Issue 2 (2015), Page 173-186. Publisher: Springer New York.
22. Huang G.B., Wang D.H., Lan Y. Extreme Learning Machines: A Survey. International Journal of Machine Learning and Cybernetics.– 2011.– vol. 2.– no. 2.– pp. 107–122.
23. Broomhead D, Lowe D. Multivariable functional interpolation and adaptive networks, Complex Systems 2 (1988) 321–355.
24. Simon D. Training Radial Basis Neural Networks with the Extended Kalman Filter // Neuro Computing. – 2002. – vol. 48. P.455-475, October 2002
25. Takagi T., and Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control, IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., vol.SMC-15, pp. 116–132, Jan./Feb. 1985.
26. Jang R., Sun C., Mizutani E. Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence. – Prentice Hall, 1997.
27. Simon D. Training fuzzy systems with the extended Kalman filter, Fuzzy Sets and Systems Volume 132, Issue 2, 1 December 2002, Pages 189-199.
28. Goddard J., Parrazales R., Lopez I., de Luca A. Rule learning in fuzzy systems using evolutionary programs, IEEE Midwest Symp. on Circuits and Systems, Ames, Iowa, 1996, P.703–709.

29. Nelles O. Nonlinear System Identification. From Classical Approaches to Neural Networks and Fuzzy Models, 2001. – 785 p.
30. Bruls, J., Chou, C.T., Haverkamp, B. R. J., and Verhaegen, M. Linear and non-linear system identification using separable least-squares. *European Journal of Control*, 5, 116–128, 1999.
31. Edrissi H. EL., Verhaegen M.H.G., Haverkamp B.R.J., Chou C.T. Off- and On-Line Identification of discrete time using Separable Least Squares, *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision & Control*, Tampa, Florida USA December 1998.
32. Stubberud S. C., Kramer K. A., and Geremia J. A. Online sensor modeling using a neural Kalman filter, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 56, no. 4, pp. 1451–1458, 2007.
33. Stubberud S. C., Kramer K. A., and Geremia J. A. System identification using the neural-extended Kalman filter for state-estimation and controller modification, in *Proc. of Int. Joint Conf. on Neural Networks*, 2008, pp. 1352–1357.
34. L. Kral L., Simandl M. Neural networks in local state estimation. *Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, 2012 17th International Conference on 27-30 Aug. 2012 Page(s): 250 – 255.
35. Liang Jin, Nikiforuk, Peter N., Gupta, M.M. Approximation of discrete-time state-space trajectories using dynamic recurrent neural networks, *Automatic Control, IEEE*, v.40, n.40, N.7, 1995.
36. Hagan M.T., Demuth H.B., De Jesús O. An introduction to the use of neural networks in control systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, volume 12, issue 11, pages 959–985, September 2002.
37. Ljung L., Soderstrom T. *Theory and Practice of Recursive Identification*. MIT Press, 1983.
38. Haykin S. *Adaptive Filter Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
39. Цыпкин Я.З. Информационная теория идентификации. М.: Наука. Физматлит, 1995. 336с.
40. Bellanger M.G. *Adaptive Digital Filters and Signal Analysis*, Marcel Dekker, New York, 1987.
41. Cioffi J.M. and Kailath T. Fast, recursive-least-squares transversal filters for adaptive filtering, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, Vol. 32, No. 2, April 1984. pp. 304-337.
42. Hubing N.E. and S.T. Alexander S.T. Statistical analysis of initialization methods for RLS adaptive filters, *IEEE Trans. Signal Process.*, Vol. 39, No. 8, August 1991., pp. 1793-1804.
43. Kwang-Seop Eom, Dong-Jo Park, Analysis of overshoot phenomena in initialisation stage of. RLS algorithm, *ELSEVIER. Signal Processing* 44 (1995) 329-339.

44. Moustakides, G. V. Study of the Transient Phase of the Forgetting Factor RLS. *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 45, pp. 2468—2476, 1997.
45. Skorohod B. Asymptotic of linear recurrent regression under diffuse initialization *Journal of Automation and Information Sciences*. — 2009. — v41. — i5. — P. 41-50. Begell House Publishing Inc, USA .
46. Скороход Б.А. Осцилляции оценок рекуррентного метода наименьших квадратов при диффузной инициализации Вестник СевНТУ. Автоматизация процессов и управление: Сб. научн. тр. СевНТУ. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2014. Вип. 146. - С. 40-45.
47. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. - М.: Наука.– 1977.– 224с.
48. Albert A, Sittler R. A method for computing least squares estimators that keep up with the data. *SIAM Journal of Control* 1965; 3(3): 384 } 417.
49. Stoica P. and Ashgren P. Exact initialization of the recursive least-squares algorithm, *International journal of adaptive control and signal processing*, volume 16, issue 3, pages 219–230, April 2002.
50. Ansley C. F. and Kohn R. Estimation, filtering and smoothing in state space models with incompletely specified initial conditions. *Ann. Statist.* – 1985. – № 13. – P.1286-1316.
51. Koopman S.J. Exact initial Kalman filtering and smoothing for non-stationary time series Models. *Journal of the American Statistical Association*. – 1997. – Volume 92. – Number 440. – P.1630-1638.
52. De Jong P. The diffuse Kalman Filter. *Ann. Statist.* – 1991. – № 19. – P.1073-1083.
53. Kwon W. H., Kim, P. S., Park P. A receding horizon Kalman FIR filter for discrete time invariant systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1999. – 44(9). – P.1787–1791.
54. Kwon W.H., Kim P.S. and Han S.H. A receding horizon unbiased FIR filter for discrete-time state space models. *Automatica*. – 2002. – Volume 38. – Issue 3. – P.545-551.
55. Harvey A.C., Pierse R.G. Estimating missing observations in economic time series // *J.Amer. Statist. Assoc.* – 1984. –79 – P.125 – 131.
56. Bar-Shalom Yaakov, Li, X Rong, Kirubarajan. Estimation with applications to tracking and navigation. *Johh Wiley and Sons, New York*. 2001.
57. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1966 г., 576 стр.
58. Haykin S 1991 *Adaptive Filter Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ
59. Norton, J. P. (Ed.) 1994 Special issue on bounded-error estimation. Part I *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 8(1).

60. Norton, J. P. (Ed.) 1995 Special issue on bounded-error estimation. Part II. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing 9(1).
61. Kurzhanski, A. B. 1996 Ellipsoidal calculus for estimation and control Basel: Birkhauser.
62. Fogel E, Huang Y F. 1982 on the value of information in system identification bounded noise case [J] Automatica 18(2): 229-238.
63. Deller J. R., Jr, Huang Y. F 2002 Set-membership identification and filtering for signal processing applications Circuits Systems and Signal Processing volume 21pp 69–82.
64. Dasgupta S, Huang Y F. 1987 Asymptotically convergent modified recursive least-squares with data dependent updating and forgetting factor for systems with bounded noise [J] IEEE Trans.on Information Theory 33(3): 383-391.
65. Boris Skorohod Asymptotic properties of the OBE parameter estimation algorithm under diffuse initialization October 2021 Journal of Physics Conference Series 2032(1):012021.
66. W. Gene and H.Golub, Constrained eigenvalue problem, Linear Algebra and its Applications Volumes 114–115, March–April, (1989), pp.815-839.
67. B. Skorohod RLS Algorithms with Nonlinear Constraints and their Application to Reducing Estimates Fluctuations. RusAutoCon, IEEE, 8-14 Sept. 2019, Page(s): 1 – 5.
68. Narendra K. S. and Parthasarathy K. Identification and control of dynamical systems using neural networks, IEEE Trans. Neural Netw. , vol.1, no.1, pp. 4–27, Mar. 1990.
69. Jazwinski A. H. Limited Memory Optimal Filtering. Proc. 1968 Joint Automatic Control Conf. Ann Arbor, Michigan, June 1968, P. 383-393.
70. Kwon Wook Hyun, Lee Kwan Ho, Han Soo Hee, Lee Chang Hoon. Receding horizon FIR parameter estimation for stochastic systems, International Conference on Control, Automation and Systems, pp.1193-1196, Oct. 2001.
71. A. Alessandri, M. Baglietto, and G. Battistelli, “Receding-horizon estimation for discrete-time linear systems,” IEEE Trans. Autom. Control, vol. 48, no. 3, pp. 473–478, Mar. 2003.
72. Zheng-ou Wang, Jtanping Zhang A Kalman filter algorithm using a moving window with applications, International Journal of Systems Science, 1995, vol 26, № 9, 1465 – 1478.
73. Gustafsson F. Adaptive filtering and change detection, Wiley, 2001.
74. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию Москва, Наука, 1983, 384стр.
75. Ravi P. Agarwal Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods, and Applications, CRC Press,. 2000, 971 pp.

76. Harville D. Matrix Algebra From a Statistician's Perspective, Springer Science & Business Media, 2008, 634 pp.
77. Lakshmikantham V., Trigiante D. Theory of difference equations — numerical methods and applications, 2nd ed., Marcel Dekker, 2002, 300 pp.
78. Вазан М. Стохастическая аппроксимация. М.: «Мир». 1972. – 296 с.
79. Bertsekas Dimitri P. Incremental least squares methods and the extended Kalman Filter. SIAM J Optim. 1996;6:807–22.
80. Narendra KS, Parthasarathy K. Identification and control of dynamical systems using neural networks. IEEE Trans Neural Net. Mar. 1990;1(1):4–27.
81. System Identification Toolbox. The MathWorks, Inc.
82. Anderson B.D.O. and J. Moore (1979). Optimal Filtering, Prentice Hall Inc.
83. Wimmer H.R. Stabilizing and unmixed solutions of the discrete time algebraic Riccati equation. In: Proceeding Workshop on the Riccati equation in Control, Systems, and Signals. 1989. p. 95–98.
84. Eustace R.W., Woodyat B.A., Merrington G.L. and Runacres A. Fault signatures obtained from fault implant tests on an F404 engine, ASME Trans. J. of Engine, Gas Turbines, and Power, vol.116, no. 1, pp. 178–183, 1994.
85. Soo Hee Han, Pyang Soo Kim and Wook Hyun Kwon. Receding horizon FIR filter with estimated horizon initial state and its application to aircraft engine systems, Proc. Of the 1999 IEEE, international conference on Control Application Hawaii, August 22–27, 1999.
86. Narendra KS, Parthasarathy K. Gradients methods for the optimization of dynamic systems containing neural networks. IEEE Trans Neural Net 1991;2(2):252.
87. Sum J. Extended Kalman Filter Based Pruning Algorithms and Several Aspects of Neural Network Learning. PhD Dissertation. Hong Kong: Department of Computer Science and Engineering, Chinese University of Hong Kong; 1998.
88. A. H. Jazwinski, Stochastic Processes and Filtering Theory. New York: Academic, 1970.
89. W.H. Kwon, P. S. Kim, P. Park, “A receding horizon Kalman FIR filter for discrete time-invariant systems”, IEEE Trans. Automat. Control 44 (9) (1999), pp. 1787–1791.
90. Y.S. Shmaliy and O. Ibarra-Manzano, “Time-variant linear optimal finite impulse response estimator for discrete state-space models,” Int. J. Adapt. Control Signal Process. vol. 26, no. 2, pp. 95–104, Feb. 2012.

91. A.H. Jazwinski, "Limited memory optimal filtering", IEEE Trans. Automat. Control 13 (1968), pp. 558–563.
92. W. H. Kwon, P.S. Kim, S.H. Han, "A receding horizon unbiased FIR filter for discrete-time state space models", Automatica 38 (3) (2002), pp. 545–551.
93. O.K. Kwon, W.H. Kwon, and K.S. Lee, "FIR filters and recursive forms for discrete-time state-space models". Automatica , 25(5):715–728, 1989.
94. P. S. Kim, "An alternative FIR filter for state estimation in discrete-time systems," Digital Signal Process., vol. 20, no. 3, pp. 935–943, May . 2010.
95. Y.S. Shmaliy, "Unbiased FIR filtering of discrete-time polynomial state- space models". IEEE Transactions on Signal Processing, 57(4):1241–1249, 2009.
96. Y.S. Shmaliy, "An iterative Kalman-like algorithm ignoring noise and initial conditions". IEEE Transactions on Signal Processing, 59(6):2465–2473, 2011.
97. Y. S. Shmaliy and D. Simon, "Iterative unbiased FIR state estimation: A review of algorithms," EURASIP J. Adv. Signal Process., vol. 113, no. 1, pp. 1–16, 2013.
98. Felipe Ramirez-Echeverria, Amadou Sarr, Yuriy S. Shmaliy "Optimal memory of discrete-time FIR filters in state-space" IEEE Trans. Signal Process. 62 (2014), pp. 557 – 561.
99. Shmaliy, Y. S., Liu, F., Zhao, S. & Khan, S. (2016). Unbiased, optimal, and in-betweens: the trade-off in discrete finite impulse response filtering. IET Signal Processing, 10(4), pp. 325-334. doi: 10.1049/iet-spr.2015.0360.
100. Skorohod B.A. Receding Horizon Unbiased FIR Filters and Their Application to Sea Target Tracking \ Journal of Control Science and Engineering, Vol. 2018, Article ID 1803623, <https://doi.org/10.1155/2018/1803623>.

Научное издание

Скороход Борис Аркадьевич

**ДИФFUЗНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ
И СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ**

Монография

В авторской редакции

Изд. № 80/2023. Объем 14,25 п.л. Усл. печ. л. 13,24. Уч.-изд. л. 13,965.
РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»