

УДК 681.5.015.42

ИССЛЕДОВАНИЕ И ОЦЕНКА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ЧЛЕНОВ В ОБОБЩЕННОМ МЕТОДЕ ДУНКАНА ДЛЯ КОВАРИАЦИОННОГО АНАЛИЗА СИСТЕМ С ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Шушляпин Е.А.

Исследовано влияние ковариаций между вектором состояния и нелинейными членами тейлоровских разложений функций правых частей в алгоритме ковариационного анализа, обобщающего известный метод Дункана на нелинейные системы с дифференцируемыми нелинейностями. Показано, что в некоторых случаях указанные ковариации могут быть оценены с помощью численной процедуры.

Рассмотрим задачу определения ковариационной матрицы как функции времени для системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = \Phi(t, x(t)) + B(t) \cdot \xi(t), \quad (1)$$
$$t \in [t_0, t_f], \quad x(t_0) = x^0,$$

где $\xi(t)$ – вектор центрированных белых шумов с матрицей интенсивностей $Q(t)$; x^0 – вектор случайных начальных условий с математическим ожиданием $\bar{x}^0$, ковариационной матрицей D_{xx}^0 и произвольным законом распределения. Детерминированные внешние воздействия, в том числе и возможные ненулевые математические ожидания, по предположению входят в вектор Φ . Относительно вектор-функции Φ предположим, что на рассматриваемом интервале она разложима в ряд Тейлора.

Для линейных систем, когда $\Phi(t, x(t)) = A(t) \cdot x(t) + C(t) \cdot v(t)$, вектор математических ожиданий $\bar{x}(t)$ (здесь и далее верхней чертой обозначаются математические ожидания) и ковариационная матрица $D_{xx}(t)$ рассчитываются по известным уравнениям Дункана [1]:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A(t)\bar{x} + C(t)v(t),$$
$$\frac{dD_{xx}}{dt} = A(t)D_{xx} + D_{xx}A(t)^T + B(t)Q(t)B(t)^T, \quad (2)$$
$$t \in [t_0, t_f], \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}^0, \quad D_{xx}(t_0) = D_{xx}^0.$$

В общем случае системы (1) обобщенный алгоритм Дункана можно получить в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= \Phi(t, \tilde{x}(t)), \\
\frac{dD_{xx}(t)}{dt} &= A(\tilde{x}(t))D_{xx}(t) + D_{xx}(t)A^T(\tilde{x}(t)) + \\
&\quad + B(t)Q(t)B^T(T) + D_{xR}(t) + D_{xR}^T(t), \\
t \in [t_0, t_f], \quad D_{xx}(t_0) &= D_{xx}^0, \quad \tilde{x}(t_0) = \bar{x}(t_0) \equiv \bar{x}^0, \\
A(\tilde{x}(t)) &= \left[\frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x} \right]_{x=\tilde{x}(t)},
\end{aligned} \tag{3}$$

где $D_{xx}(t)$ – ковариационная матрица вектора состояния $x(t)$; $D_{xR}(t) = M[(x(t) - \bar{x}(t))(R(x(t) - \tilde{x}(t)) - \bar{R}(t))^T]$, $D_{Rx} = D_{xR}^T$; R – вектор остаточных членов тейлоровского разложения

$$\Phi(t, x^L) \equiv \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{x=\tilde{x}(t)} + R(x^L(t)), \quad x^L(t) = x(t) - \tilde{x}(t).$$

Доказательство справедливости (3) основано на использовании интегрального соотношения Алексеева [2], весьма объемно и будет опубликовано в отдельной работе. Вывод соотношений для первоначальной версии алгоритма в непрерывно-дискретной форме приведен в [3]. Алгоритм (3) является принципиально точным в части вычисления ковариационной матрицы D_{xx} , однако он зависит от ковариаций $D_{xR}(t)$ между вектором состояния и нелинейными членами тейлоровских разложений функций правых частей системы (1). В частном случае, когда система линейна, остаточный член равен нулю, а алгоритм (3) превращается в (2). Во многих случаях членом $D_{xR}(t) + D_{Rx}(t)$ можно пренебречь, поскольку он представляет собой смешанные моменты высших порядков, отображающие статистическую связь между функциями разных координат. Такая возможность вероятнее всего при статистическом анализе сложных систем, имеющих функции правых частей, каждая из которых зависит от многих координат. Однако в некоторых случаях указанным членом нельзя пренебрегать, поскольку его влияние является определяющим.

Целью настоящей работы является исследование влияния члена $D_{xR}(t) + D_{Rx}(t)$ на точность статистического анализа, разработка основ одного из возможных подходов к его оцениванию для повышения точности статистических расчетов.

Приведем вначале экспериментальное свидетельство правильности алгоритма (3) на примере одномерной системы, допускающей аналитическое вычисление математического ожидания и вычисление

дисперсии через квадратуры. Система задана дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \quad t \in [0,1], \quad x(0) = x^0, \quad (4)$$

где x^0 – равномерно распределенная в интервале $[a,b]$ случайная величина.

Аналитическое решение (4) имеет вид

$$x(t, x^0) = \frac{x^0}{1 - x^0 \cdot t}, \quad (5)$$

а статистические характеристики (математическое ожидание и дисперсия) как функции времени определяются соответственно выражениями:

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} \left[(a-b) \cdot t - \ln \left(\frac{1-b \cdot t}{1-a \cdot t} \right) \right], & t > 0, \\ \frac{b^2 - a^2}{2}, & t = 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$D_{xx}(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b (x(t, v) - \bar{x}(t))^2 dv. \quad (7)$$

Для получения этих же характеристик с помощью (3) необходимо решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= \tilde{x}(t)^2, \\ \frac{dD_{xx}(t)}{dt} &= 4 \cdot \tilde{x}(t) \cdot D_{xx}(t) + 2 \cdot D_{xR}(t, \tilde{x}(t)), \end{aligned} \quad (8)$$

где матрица D_{xR} может быть вычислена согласно определению (3) с использованием (5) и (6):

$$\begin{aligned} D_{xR}(t) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (x(t, v) - \bar{x}(t)) \cdot (R(x(t, v) - \tilde{x}(t)) - \bar{R}(t)) dv = \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (x(t, v) - \bar{x}(t)) \cdot (x(t, v) - \tilde{x}(t))^2 dv. \end{aligned} \quad (9)$$

При записи последнего выражения учтено, что $R(x - \tilde{x}) = (x - \tilde{x})^2$, а

$$M[(x - \bar{x})(R - \bar{R})] = M[(x - \bar{x})R]. \quad (10)$$

Расчеты на компьютере по (7) и (8) для различных a и b показали, что соответствующие результаты совпадают с точностью до шести знаков после запятой. Так, при $a = -0,5$, $b = 0,7$ $D_{xx}(1) = 0,423409$ как при расчетах по (7), так и при расчетах по (8), (9).

Далее приведем пример статистического моделирования разгона асинхронного двигателя [4], когда дополнительным членом $D_{xR}(t) + D_{Rx}(t)$ можно пренебречь. Поскольку в данном случае эта модель представляет интерес только как объект применения метода, физический смысл ее параметров и их связь с конструктивными элементами двигателя описывать не будем. Модель имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= 203791,25 \cdot (x_3 x_4 - x_2 x_5) - 1973,68 \cdot (4 + x_6), \\ \frac{dx_2}{dt} &= 310,2 \cdot \cos(314 \cdot t) - 90,01 \cdot x_2 + 81,92 \cdot x_4, \\ \frac{dx_3}{dt} &= 310,2 \cdot \sin(314 \cdot t) - 90,01 \cdot x_3 + 81,92 \cdot x_5, \\ \frac{dx_4}{dt} &= -92,5 \cdot x_4 + 87,19 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_5, \\ \frac{dx_5}{dt} &= -92,5 \cdot x_5 + 87,19 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4, \\ \frac{dx_6}{dt} &= -\lambda \cdot x_6 + \sigma \sqrt{2\lambda} \cdot \xi(t), \\ t &\in [0, t_f].\end{aligned}$$

Последнее уравнение описывает формирующий фильтр для генерации стационарного случайного процесса x_6 изменения момента нагрузки, заданного корреляционной функцией $K(\tau) = \sigma^2 \exp(-\lambda|\tau|)$. При моделировании параметры полагались равными $\sigma^2 = 1,5$, $\lambda = 20$. Моделирование производилось двумя методами – предлагаемым методом (3) и методом Монте-Карло при 1100 реализациях в качестве контрольного. Шаг численного интегрирования полагался равным 0,0001с. Центрированный случайный процесс $\xi(t)$ типа белого шума с единичной интенсивностью при использовании метода Монте-Карло моделировался ступенчатым сигналом с шириной ступеньки, равной шагу численного интегрирования h и равномерно распределенной в интервале $[-\sqrt{3/h}, \sqrt{3/h}]$ амплитудой. Среднее значение момента нагрузки, как видно из уравнений, полагалось постоянным во времени и равным 4 Н·м. Кроме того, начальное условие по переменной x_2 задавалось равномерно распределенной в интервале $[0; 0,24]$ случайной величиной.

Матрицу $\mathbf{A}$ и вектор $\mathbf{\Phi}$ алгоритма (3) нетрудно получить. Что же касается матрицы D_{xR} , то ее составляющими в данном случае являются математические ожидания от произведений $x_j^0 (x_3^L x_4^L - x_2^L x_5^L)$, $x_j^0 U_m \cos(x_7^L t)$, $x_j^0 U_m \sin(x_7^L t)$, $-x_j^0 x_1^L x_5^L$, $x_j^0 x_1^L x_4^L$, $j = 1, 2, \dots, 7$, где, как и

ранее, $x_j^0 = x_j - \bar{x}$, $x_j^L = x_j - \tilde{x}_j$. Имеются основания предполагать, что представленные этими составляющими уровни статистических связей малы. Это обусловлено сложными опосредованными функциональными зависимостями между сомножителями. По этой причине в уравнениях (3) матрица D_{xR} принята нулевой

Результаты моделирования изображены на рисунке 1.

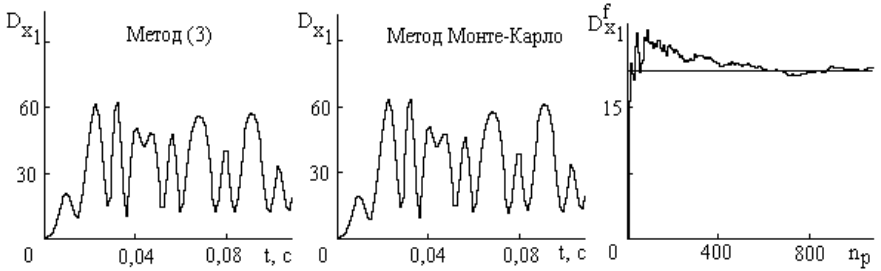


Рисунок 1 – Зависимости оценок дисперсии от времени и числа реализаций

На первом и втором графиках рисунка 1 показаны зависимости дисперсии $D_{x_1}(t)$ выходной координаты x_1 (угловой скорости ротора двигателя) как функции времени, полученные двумя методами – методом (3) и методом Монте-Карло соответственно. На третьем графике изображены значения дисперсии $D_{x_1}^f$ этой же выходной координаты в конечный момент $t_f = 0,1$ с. При этом дисперсия по методу (3) изображена горизонтальной прямой, а дисперсия по методу Монте-Карло – зависимостью оценок от числа реализаций n_p . Как видно из приведенных графиков, точность статистического моделирования методом (3) с $D_{xR} = 0$ весьма высока. Разница между оценками, полученными двумя методами, не превышает одного процента.

Далее рассмотрим один из возможных подходов к оцениванию ковариации D_{xR} . Проиллюстрируем этот подход на примере (4). Введем переменную $x^L = x - \tilde{x}$, представляющую собой отклонение исходной переменной x от детерминированного решения $\tilde{x}$ (см. уравнения (3)). Тогда для x^L получаем дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dx^L}{dt} &= 2 \cdot \tilde{x} \cdot x^L + (x^L)^2, \\ \frac{d\tilde{x}}{dt} &= \tilde{x}^2, \quad t \in [0,1], \quad x^L(0) = x^0 - \bar{x}^0, \quad \tilde{x}(0) = \bar{x}^0 = \frac{a+b}{2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Составим дифференциальные уравнения для коэффициентов тейлоровского разложения по времени остаточного члена $R_0 = (x^L(t))^2$:

$$R_0(\vartheta - t) = R_0(t) + R_1(t)(\vartheta - t) + R_2(t)(\vartheta - t)^2 + \dots + R_k(t)(\vartheta - t)^k + \dots,$$

$$R_1(t) = \frac{dR_0}{dt} = \frac{dR_0}{dx^L} \cdot \frac{dx^L}{dt},$$

$$R_2(t) = \frac{1}{2} \frac{d^2 R_0}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dR_0}{dt} \right) = \frac{1}{2} \frac{dR_1}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dR_1}{dx^L} \cdot \frac{dx^L}{dt},$$

$$R_3(t) = \frac{1}{3!} \frac{d^3 R_0}{dt^3} = \frac{1}{3!} \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2 R_0}{dt^2} \right) = \frac{1}{3!} \frac{d}{dt} (2R_2) = \frac{1}{3} \frac{\partial R_2}{\partial x^L} \cdot \frac{dx^L}{dt},$$

$$R_4(t) = \frac{1}{4!} \frac{d^4 R_0}{dt^4} = \frac{1}{4!} \frac{d}{dt} \left(\frac{d^3 R_0}{dt^3} \right) = \frac{1}{4!} \frac{d}{dt} (3! R_3) = \frac{1}{4} \frac{\partial R_3}{\partial x^L} \cdot \frac{dx^L}{dt}, \dots,$$

$$R_k(t) = \frac{1}{k!} \frac{d^k R_0}{dt^k} = \frac{1}{k} \frac{dR_{k-1}}{dt} = \frac{1}{k} \frac{\partial R_{k-1}}{\partial x^L} \cdot \frac{dx^L}{dt}.$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= \tilde{x}^2, & \frac{dR_0}{dt} &= R_1, \\ \frac{dx^L}{dt} &= 2 \cdot \tilde{x} \cdot x^L + R_0, & \frac{dR_1}{dt} &= 2 \cdot R_2, \\ & & \frac{dR_2}{dt} &= 3 \cdot R_3 \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

где выраженные через $x^L(t)$ и $\tilde{x}(t)$ коэффициенты определяются как

$$R_0(x^L, \tilde{x}) = (x^L)^2, \quad (13)$$

$$R_1(x^L, \tilde{x}) = \frac{\partial R_0}{\partial x^L} \cdot \frac{dx^L}{dt} = 2x^L \left(2\tilde{x}x^L + (x^L)^2 \right) = 4\tilde{x}(x^L)^2 + 2(x^L)^3, \quad (14)$$

$$R_2(x^L, \tilde{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R_1}{\partial x^L} \cdot \frac{dx^L}{dt} + \frac{\partial R_1}{\partial \tilde{x}} \cdot \frac{d\tilde{x}}{dt} \right) = \frac{1}{2} (8\tilde{x}x^L + 6(x^L)^2) (2\tilde{x}x^L + (x^L)^2) + 2(x^L\tilde{x})^2. \quad (15)$$

Выражение для $R_3 = \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial R_2}{\partial x^L} \cdot \frac{dx^L}{dt} + \frac{\partial R_2}{\partial \tilde{x}} \cdot \frac{d\tilde{x}}{dt} \right)$, которое далее не потребуется в развернутом виде не приводим.

Начальные условия $\tilde{x}(0), x^L(0)$ те же, что в (11), $R_i(0)$ определяются через $\tilde{x}(0), x^L(0)$ по (13)-(15).

Предположим, что $R_0(t)$ – функция, у которой коэффициенты тейлоровского разложения достаточно быстро приближаются к нулю с возрастанием их номера. Тогда вместо системы уравнений бесконечного порядка оставляем конечную систему, в последнем уравнении которой правую часть полагаем нулевой. Для нашего примера ограничимся системой (12), где при дальнейших исследованиях будем полагать нулевыми последовательно R_0, R_1, R_2, R_3 . Модель (12) при обнуленной правой части последнего уравнения является линейной, если в вектор состояния не включать $\tilde{x}$. Это можно сделать, поскольку $\tilde{x}$ – детерминированное решение, являющееся для задачи статистического анализа известной функцией времени. Для перечисленных случаев линейной модели (12) составим уравнения Дункана (2) с матрицами A :

$$A_{R_1=0} = \begin{pmatrix} 2\tilde{x} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{R_2=0} = \begin{pmatrix} 2\tilde{x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{R_3=0} = \begin{pmatrix} 2\tilde{x} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученную в результате решения (2) ковариацию D_{xR_0} и будем считать оценкой искомой ковариации D_{xR} . С учетом того, что $x^L - \bar{x}^L = x - \tilde{x} - \bar{x} + \tilde{x} = x - \tilde{x} - \bar{x} + \tilde{x} = x - \bar{x}$, все ковариации для x^L равны соответствующим ковариациям для x , поэтому в уравнениях Дункана (2), полученных по (12), в индексах ковариаций вместо x^L записываем x . В итоге для случая $R_3 = 0$ получаем систему:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= \tilde{x}^2, & \frac{dD_{R_0R_1}}{dt} &= D_{R_1R_1} + 2D_{R_0R_2}, \\ \frac{dD_{xx}}{dt} &= 4\tilde{x}D_{xx} + 2D_{xR_0}, & \frac{dD_{R_0R_2}}{dt} &= D_{R_1R_2}, \\ \frac{dD_{xR_0}}{dt} &= 2\tilde{x}D_{xR_0} + D_{R_0R_0} + D_{xR_1}, & \frac{dD_{R_1R_1}}{dt} &= 4D_{R_1R_2}, \\ \frac{dD_{xR_1}}{dt} &= 2\tilde{x}D_{xR_1} + D_{R_0R_1} + 2D_{xR_2}, & \frac{dD_{R_1R_2}}{dt} &= 2D_{R_2R_2}, \\ \frac{dD_{xR_2}}{dt} &= 2\tilde{x}D_{xR_2} + D_{R_0R_2}, & \frac{dD_{R_2R_2}}{dt} &= 0. \\ \frac{dD_{R_0R_0}}{dt} &= 2D_{R_0R_1}, \end{aligned} \tag{16}$$

Начальные условия для $\tilde{x}$ и D_{xx} определяются согласно постановке задачи как математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной случайной величины, т.е. $\tilde{x}(0) = (a+b)/2$, $D_{xx}(0) = (b-a)^2/12$. Остальные начальные условия определяем по теоретическим формулам для равномерного закона распределения. Так, ковариация $D_{xR_0}(0)$ с учетом (10), (13) определится как

$$\begin{aligned} D_{xR_0} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (v - \bar{x}(0)) \cdot R_0(x^L(0)) dv = \frac{1}{b-a} \int_a^b (v - \bar{x}(0)) \cdot R_0(v - \tilde{x}(0)) dv = \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (v - \bar{x}^0) \cdot R_0(v - \bar{x}^0) dv = \frac{1}{b-a} \int_a^b (v - \bar{x}^0)^3 dv. \end{aligned}$$

Аналогичным образом вычисляются остальные начальные условия:

$$\begin{aligned} D_{xR_1}(0) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (v - \bar{x}^0) \cdot R_1(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) dv, \\ D_{xR_2}(0) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (v - \bar{x}^0) \cdot R_2(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) dv, \\ D_{R_0R_0}(0) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (R_0(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) - \bar{R}_0(0))^2 dv, \\ D_{R_0R_1}(0) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (R_0(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) - \bar{R}_0(0)) \cdot R_1(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) dv, \\ D_{R_0R_2}(0) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (R_0(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) - \bar{R}_0(0)) \cdot R_2(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) dv, \\ D_{R_1R_1}(0) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (R_1(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) - \bar{R}_1(0))^2 dv, \\ D_{R_1R_2}(0) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (R_1(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) - \bar{R}_1(0)) \cdot R_2(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) dv, \\ D_{R_2R_2}(0) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (R_2(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) - \bar{R}_2(0))^2 dv, \\ \bar{R}_j(0) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b R_j(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) dv, \quad j = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Результаты расчетов по уравнениям (16) для четырех упомянутых выше случаев и различных a и b приведены в таблице 1 и изображены на рисунке 2. В таблице 1 приведены погрешности вычисления дисперсии (в процентах), вычисленные по формуле $\varepsilon = (\tilde{D} - D) / D \cdot 100\%$, где $\tilde{D}$ и D – приближенное и точные значения дисперсии, вычисленные соответственно по уравнениям (16) и по выражениям (5)-(7).

Таблица 1 – Ошибки определения дисперсии $D_{xx}(1)$

a	b	D	ε для $R_0 = 0, \%$	ε для $R_1 = 0, \%$	ε для $R_2 = 0, \%$	ε для $R_3 = 0, \%$
0	0,9	3,454	78,6	78,2	74,6	69,6
-0,5	0,5	0,126	34,1	29,7	8,1	6,0
0	0,5	0,078	15,8	15,0	9,5	5,3
-0,5	0	0,009	5,8	3,3	4,7	3,0
-0,3	0,3	0,034	12,9	10,8	1,1	0,7

На рисунке 2 показаны зависимости точного $R_0(t)$, вычисленного по выражениям (5), (6), (9) (кривая 1) и оценок $\tilde{R}_0(t)$, полученных путем интегрирования уравнений (16) для случаев $R_1 = 0$ (кривая 4), $R_2 = 0$ (кривая 3), $R_3 = 0$ (кривая 2) при $a = 0, b = 0,5$.

Приведенные результаты свидетельствуют в пользу того, что учет большего количества тейлоровских членов разложения приводит к уменьшению погрешности. Другой вывод, следующий из приведенных результатов также вполне ожидаемый: увеличение дисперсии начальных условий приводит к увеличению погрешностей вычисления дисперсии. При этом для сохранения точности необходимо увеличивать количество

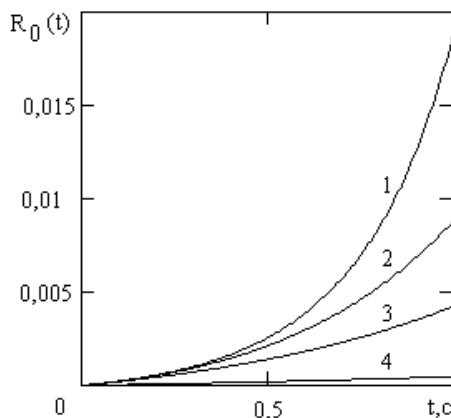


Рисунок 2 – Зависимости остаточного члена и его оценок от времени

членов разложения остаточного члена, что влечет к существенному возрастанию порядка системы дифференциальных уравнений обобщенного метода Дункана.

Приведенный подход к оценке остаточного члена может применяться и для многомерных систем. Заметим также, что использованный при этом способ линеаризации исходного нелинейного дифференциального уравнения имеет самостоятельную ценность. Несмотря на

ограниченный класс нелинейных систем, к которым он применим (разложимые в сходящиеся ряды Тейлора по времени нелинейные функции правых частей, конечность интервала времени функционирования нелинейной системы), данный способ позволяет существенно расширить область фазового пространства, в которой линеаризованная модель достаточно точно отображает свойства соответствующей нелинейной системы. При этом эта область тем больше, чем больше членов разложений, и соответственно дифференциальных уравнений для коэффициентов разложений учитывается. Развитие данного подхода на многомерные системы требует отдельного исследования.

Библиография

1 Методы оптимизации в статистических задачах управления / А.М. Батков, В.М. Александров, А.О. Мишулина и др. — М.: Машиностроение, 1974. — 240 с.

2 Алексеев В.М. Об одной оценке возмущений обыкновенных дифференциальных уравнений / В.М. Алексеев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика, механика. — 1961. — № 2. — С. 28–36.

3 Шушляпин Е.А. Статистический анализ динамических систем на основе моделей конечного состояния / Е.А. Шушляпин // Тр. Междунар. конф. по автомат. упр. «Автоматика-2000». — Т. 2. — Львов: Госуд НИИ информ. инфраструктуры, 2000. — С. 234–238.

4 Копылов И.П. Применение вычислительных машин в инженерно-экономических расчетах (Электрические машины) / И.П. Копылов. — М.: Высш. шк., 1980. — 256 с.

Поступила в редакцию 21.05.2001 г.