

УДК 681.5

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПОДХОДА К АНАЛИЗУ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ САУ Крамарь В.А.

Рассматривается алгебраическая форма анализа робастной устойчивости нелинейной дискретной системы управления с непараметрической аддитивной неопределенностью в модели объекта управления.

Проблеме анализа устойчивости нелинейных систем управления, в том числе и нелинейных дискретных, посвящено большое число работ. Одним из основных средств исследования нелинейных систем являются частотные методы. Геометрическая интерпретация частотных неравенств с построением комплекснозначных кривых является одним из основных средств анализа абсолютной устойчивости и робастной устойчивости нелинейной системы с непараметрической неопределенностью в модели объекта. В то же время частотные неравенства являются по существу неравенствами для вещественной функции, определенной многочленами вещественной же переменной. Это положение может быть развито до построения полиномиальных неравенств, равносильных частотным неравенствам для годографов

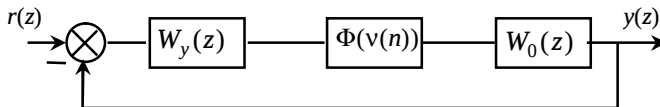


Рисунок 1 – Структурная схема нелинейной дискретной САУ

Рассматривается нелинейная дискретная система автоматического управления (САУ), структурная схема которой изображена на рисунке 1, где $\Phi(v(n))$ описывает нелинейный элемент (НЭ) системы. Пусть характеристика НЭ принадлежит сектору $S(\underline{k}, \bar{k})$ (рисунок 2),

$$\underline{k} < \frac{\Phi(v)}{v} < \bar{k} . \quad (1)$$

Как показано в [1], характеристики НЭ, удовлетворяющие условиям (1), можно представить в виде

$$\frac{\Phi(v)}{v} = k_\phi + \frac{\delta\Phi(v)}{v} ,$$

где $k_\phi = \frac{2\underline{k}\bar{k}}{\underline{k} + \bar{k}} .$

$W_0(z) = p(z)/q(z)$ —
передаточная функция объекта,

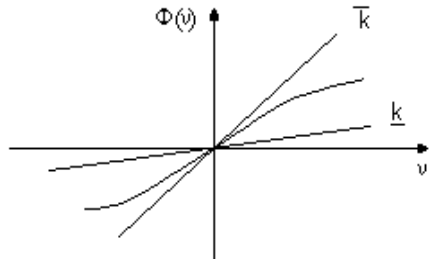


Рисунок 2 – Сектор $S(\underline{k}, \bar{k})$

$W_y(z) = h(z)/g(z)$ – заданная передаточная функция регулятора. Предполагается, что задан номинальный объект с помощью рациональной функции $W_0^0(z) = p^0(z)/q^0(z)$. Здесь и далее верхний индекс 0 означает номинальную систему.

Передаточная функция реального объекта задается с точностью до класса.

Определение. Передаточная функция $W_0(z)$ принадлежит классу $\text{Ad}\{W_0^0(z), \alpha d(z)\}$ если:

а) $W_0(z)$ и $W_0^0(z)$ имеют одинаковое число неустойчивых полюсов;

б) $\left| W_0(e^{j\omega T}) - W_0^0(e^{j\omega T}) \right| \leq \left| \alpha d(e^{j\omega T}) \right|$, $0 \leq \omega \leq 2\pi/T$,

где $\alpha d(z)$ – рациональная функция, характеризующая аддитивную неопределенность модели объекта.

Передаточная функция линейной части системы может быть представлена как

$$W(z) = W_y(z)W_0(z) = \frac{h(z)p(z)}{g(z)q(z)} = \frac{c(z)}{d(z)}.$$

Тогда $W(z)$ принадлежит классу $\text{Ad}\{W^0(z), \alpha(z)\}$, где $\alpha(z) = \alpha d(z)W_y(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$.

Найдем алгебраические условия для анализа робастной устойчивости рассматриваемой реальной САУ.

Будем рассматривать частотный подход для решения указанной задачи как обобщение частотного критерия устойчивости [1]. Семейство частотных характеристик линейной части $W(e^{j\omega T})$ должно удовлетворять неравенству

$$\left| k_\phi^{-1} + W(e^{j\omega T}) \right| > R_\phi, \quad (2)$$

где $R_\phi = \frac{1}{2} \left| \underline{k}^{-1} - \bar{k}^{-1} \right|$.

Учитывая, что

$$\left| W(e^{j\omega T}) - W^0(e^{j\omega T}) \right| = \left| W^0(e^{j\omega T}) - W(e^{j\omega T}) \right| \geq \left| W(e^{j\omega T}) \right| - \left| W^0(e^{j\omega T}) \right|,$$

запишем

$$\left| k_\phi^{-1} + W(e^{j\omega T}) \right| \geq \left| k_\phi^{-1} + W^0(e^{j\omega T}) \right| - \left| W(e^{j\omega T}) - W^0(e^{j\omega T}) \right|,$$

$$\left| k_\phi^{-1} + W(e^{j\omega T}) \right| \geq \left| k_\phi^{-1} + W^0(e^{j\omega T}) \right| - \left| \alpha(e^{j\omega T}) \right|.$$

С учетом неравенства (2) критериальное неравенство принимает вид [1]

$$\left| \hat{W}^0(e^{j\omega T}) \right| > R_\Phi + |\alpha(e^{j\omega T})|, \quad (3)$$

где $\hat{W}^0(e^{j\omega T}) = k_\Phi^{-1} + W^0(e^{j\omega T})$.

Для дальнейшего анализа (3) применим билинейное преобразование [2], т.е. введем замену $e^{j\omega T} = \frac{1+j\omega_w}{1-j\omega_w}$, где $\omega_w = \operatorname{tg}\left[\frac{\omega T}{2}\right]$ – «псевдочастота».

Тогда, неравенство (3) примет вид

$$\left| \hat{W}^0(j\omega_w) \right| > R_\Phi + |\alpha(j\omega_w)|. \quad (4)$$

Заметим, что обозначение в (4) и далее используется в том смысле, что передаточные функции зависят от $j\omega_w$, и вовсе не означает простой замены $e^{j\omega T}$ на $j\omega_w$.

Анализируя (4), можем записать

$$\left| \hat{W}^0(j\omega_w) \right|^2 > R_\Phi^2 + |\alpha(j\omega_w)|^2 + 2R_\Phi |\alpha(j\omega_w)|.$$

Используя то обстоятельство что

$$\left| \hat{W}^0(j\omega_w) \right|^2 = \hat{W}_1^0(-\omega_w^2) = \frac{c^0(j\omega_w)c^0(-j\omega_w)}{d^0(j\omega_w)d^0(-j\omega_w)} = \frac{c_1^0(-\omega_w^2)}{d_1^0(-\omega_w^2)} \quad \text{и}$$

$$|\alpha(j\omega_w)|^2 = \alpha_1(-\omega_w^2) = \frac{b(j\omega_w)b(-j\omega_w)}{a(j\omega_w)a(-j\omega_w)} = \frac{b_1(-\omega_w^2)}{a_1(-\omega_w^2)}, \quad \text{получаем}$$

$$\hat{W}_2(-\omega_w^2) > 2R_\Phi |\alpha(j\omega_w)| \quad \text{и} \quad \hat{W}_2^2(-\omega_w^2) > 4R_\Phi^2 \alpha_1(-\omega_w^2),$$

или

$$\hat{W}_2^2(-\omega_w^2) - 4R_\Phi^2 \alpha_1(-\omega_w^2) > 0, \quad (5)$$

$$\text{где } \hat{W}_2(-\omega_w^2) = \hat{W}_1^0(-\omega_w^2) - R_\Phi^2 - \alpha_1(-\omega_w^2) = \frac{h(-\omega_w^2)}{m(-\omega_w^2)}.$$

С учетом принятых обозначений неравенство (5) примет вид

$$\frac{h^2(-\omega_w^2)a_1(-\omega_w^2) - 4R_\Phi^2 m^2(-\omega_w^2)b_1(-\omega_w^2)}{m^2(-\omega_w^2)a_1(-\omega_w^2)} > 0. \quad (6)$$

Поскольку $m^2(-\omega_w^2)a_1(-\omega_w^2) > 0 \quad \forall \omega_w$, то, полагая $x_w = -\omega_w^2 < 0$, для дальнейшего анализа будем рассматривать многочлен

$$Nd(x_w) = h^2(-\omega_w^2)a_1(-\omega_w^2) - 4R_\Phi^2 m^2(-\omega_w^2)b_1(-\omega_w^2), \quad x_w = -\omega_w^2 < 0.$$

Таким образом, для выполнения неравенства (6) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$Nd(x_w) > 0, \quad x_w = -\omega_w^2 < 0.$$

Таким образом, получаем, что рассматриваемая нелинейная дискретная система, характеристики нелинейного элемента которой удовлетворяют условиям (1), будет робастно устойчивой, если выполняется условие

$$Nd(-\infty) > 0, \quad \rho^-(Nd) = 0, \quad (7)$$

где $\rho^-(Nd)$ — означает число отрицательных вещественных корней многочлена $Nd(x_w)$.

В качестве эффективного средства анализа условия (7) можно использовать обобщенный метод Рауса [3]. Предложенное алгебраическое решение поставленной задачи представляет собой эффективную альтернативу прямому решению посредством поточечного построения частотных годографов

Библиография

- 1 Цыпкин Я.З. Робастно устойчивые нелинейные дискретные системы управления / Я.З. Цыпкин // Изв. АН СССР. Сер. Технич. кибернетика — 1992. — № 6. — С. 18–29.
- 2 Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления / Б. Куо — М.: Машиностроение, 1986. — 448 с.
- 3 Барабанов А.Т. Алгебраические формы частотных критериев качества линейных систем управления / А.Т. Барабанов, В.А. Крамарь // Вестн. СевГУ. Автоматизация процессов и управление: Сб. науч. тр. — Севастополь, 1996. — Вып. 2. — С. 3–17.

Поступила в редакцию 17.01.2001 г.