

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

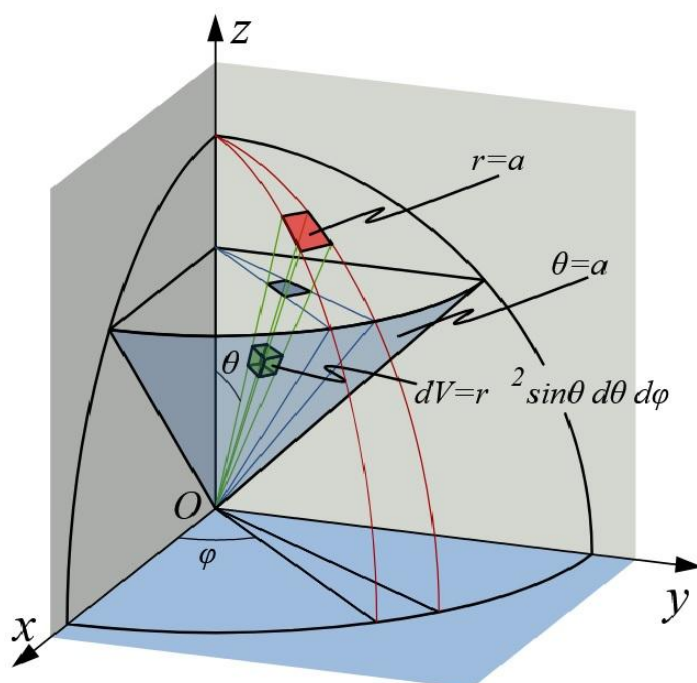
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

С.А. Чернявская, В.Г. Царёв

ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания

к проведению практических занятий по высшей математике
для студентов технических и естественно-научных специальностей



Севастополь
СевГУ
2023

УДК 517.3(07)
ББК 22.161я73
Ч49

Р е ц е н з е н т:
О.В. Матузаева – канд. техн. наук, доцент

Чернявская, С. А.

Ч49 Двойные и тройные интегралы: методические указания к проведению практических занятий по высшей математике для студентов технических и естественно-научных специальностей / С.А. Чернявская, В.Г. Царёв ; Севастопольский государственный университет. – Севастополь: СевГУ, 2023. – 68 с.: ил. – Текст: электронный.

Методические указания разработаны преподавателями кафедры «Высшая математика» СевГУ и предназначены для студентов 1, 2 курса технических и естественно-научных специальностей, выполняющих индивидуальные задания по дисциплине «Высшая математика». Может быть использовано преподавателями, ведущими практические занятия.

Каждое занятие пособия содержит основные сведения из теории, а также достаточное количество задач, решенных и предлагаемых решения. В пособии более 140 задач. В конце приведены варианты индивидуальных заданий.

Для студентов, желающих расширить свой кругозор знаний по рассматриваемой теме, в конце пособия приводится список литературы.

УДК 517.3(07)
ББК 22.161я73

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Высшая математика», протокол № 9 от 29 мая 2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ: «Вычисление двойных интегралов в декартовой и полярной системах координат»	4
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ: «Решение задач на применение двойного интеграла»	17
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ: «Вычисление тройных интегралов в прямоугольной, цилиндрической и сферической системах координат»	30
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ: «Применение тройных интегралов к решению различных задач геометрии, физики, механики»	41
ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ	49
ЛИТЕРАТУРА	68

Тема. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВОЙ И ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Основные понятия теории двойных интегралов в декартовой и полярной системах координат

Пусть в замкнутой области D определена некоторая функция $z = f(x, y)$.

1. Разобьем область D произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек и обозначим площадь каждой частичной области (ч.о.) через ΔS_i , $i = \overline{1, \dots, n}$ (рис. 1).
2. В каждой области ΔS_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$ и вычислим произведение $f(M_i) \cdot \Delta S_i$, $i = \overline{1, \dots, n}$.

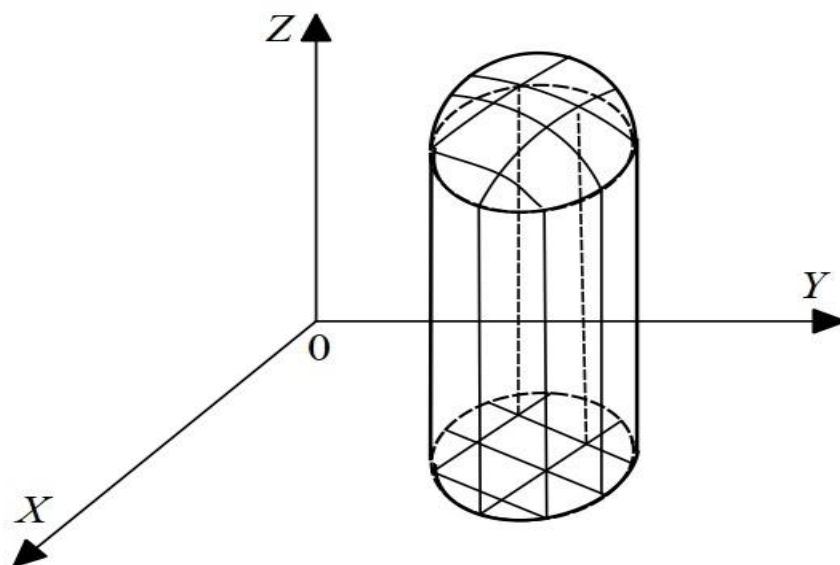


Рис. 1

3. А затем просуммируем полученные произведения. Получим интегральную сумму вида: $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$.

Эта сумма зависит от способа разбиения обл. D на частичные и от выбора т. $M_i(x_i, y_i)$ в каждой ч.о.

4. Найдем предел интегральной суммы при условии, что наибольший из диаметров ч.о. стремится к нулю ($\max d_i \rightarrow 0$), а число разбиений к бесконечности ($n \rightarrow \infty$).

Определение. Конечный предел интегральной суммы функции $f(x, y)$ в области D при условии, что $\max d_i \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ называется двойным интегралом этой функции по области D и обозначается

$$\lim_{\substack{\max d_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i = \iint_D f(x, y) ds$$

Область D называется областью интегрирования.

Вопрос о существовании предела и его единственности устанавливается по следующей теореме.

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D плоскости XOY , то предел интегральной суммы при $n \rightarrow \infty$ и $\max d_i \rightarrow 0$ существует и он единственный и не зависит от способа разбиения области D и выбора точек $M_i(x_i, y_i)$.

Так как по теореме существования предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения области D , то разобьем ее прямыми параллельными осями OX и OY . В этом случае $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$. Переходя к дифференциалу и отбрасывая бесконечно малые более высоких порядков, получим $ds = dx dy$.

$$\text{Следовательно: } \iint_D f(x, y) ds = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Двойной интеграл является обобщением определенного на случай двумерной области интегрирования. Двойной интеграл – число.

Геометрический смысл двойного интеграла: если $f(x, y) > 0$, то двойной интеграл от функции $z = f(x, y)$ по области D равен объему тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, с боков – цилиндрической поверхностью, образующие которого параллельны оси OZ , а направляющей служит граница L области D , снизу – плоскостью $z = 0$.

Физический смысл двойного интеграла: двойной интеграл от функции $z = f(x, y)$ по области D выражает массу пластинки D , если подынтегральную функцию $f(x, y)$ считать плотностью этой пластинки в точке $M(x, y)$.

Двойной интеграл обладает рядом свойств аналогичных свойствам определенного интеграла:

- 1) Вынесение постоянного множителя

$$\iint_D c \cdot f(x, y) ds = c \cdot \iint_D f(x, y) ds, \quad c = \text{const}$$

- 2) Интегрирование суммы

$$\iint_D [f_1(x, y) + f_2(x, y)] ds = \iint_D f_1(x, y) ds + \iint_D f_2(x, y) ds$$

- 3) О разбиении области интегрирования

$$\iint_D f(x, y) ds = \iint_{D_1} f(x, y) ds + \iint_{D_2} f(x, y) ds$$

где D_1 и D_2 – области, на которые разбита область D некоторой кривой.

- 4) Оценка интеграла

Если в D $m \leq f(x, y) \leq M$, то $m \cdot S \leq \iint_D f(x, y) ds \leq M \cdot S$, где S – площадь области D . Откуда $\iint_D f(x, y) ds = \mu \cdot S$, $m \leq \mu \leq M$.

5) Интегрирование неравенств

Если $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$, то $\iint_D f_1(x, y) ds \leq \iint_D f_2(x, y) ds$

Для дальнейшего введем понятие правильной области. Пусть задана область D плоскости XOY . Проведем прямую параллельно оси Ox (Oy), так, чтобы область пересекалась этой прямой.

Замкнутая область D наз. **правильной в направлении оси Ox (Oy)**, если любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области параллельно оси Ox (Oy) пересекает границу области в двух точках, причем, каждая из пересекаемых границ задается только одним уравнением (рис. 2)

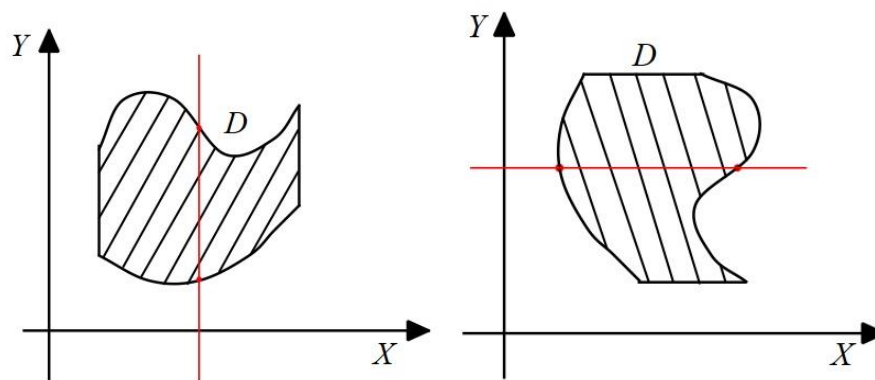


Рис. 2

Если область не является правильной, то в этом случае ее можно разбить на несколько областей, каждая из которых будет правильной.

Нижнюю точку будем называть точкой «входа», верхнюю точку – точкой «выхода».

Правильная область называется **простой**, если точки «входа» и «выхода» лежат на линиях, которые определяются только одним аналитическим выражением (рис. 3)

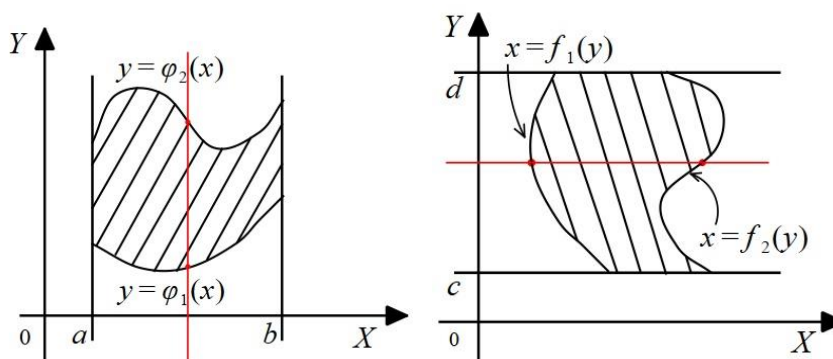


Рис. 3

Назовем двукратным или повторным интегралом по области, простой и правильной в направлении оси Ox , интеграл вида

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \text{ или } \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Интеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ — называется внутренним интегралом. Здесь интегрирование берется по y , при произвольном постоянном x .

Его пределы интегрирования функции, зависящие от x , в частности постоянные.

Интеграл $\int_a^b (\dots) dx$ — называется внешним интегралом. Его пределы интегрирования всегда постоянные.

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению одного или нескольких двукратных интегралов.

Если область D ограничена слева и справа прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$) соответственно, снизу — кривой $y = \varphi_1(x)$, сверху — кривой $y = \varphi_2(x)$ ($\varphi_2(x) \geq \varphi_1(x)$), каждая из которых пересекается с вертикалью $x = \alpha$ ($a \leq \alpha \leq b$)

только в одной точке, то $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$.

Если область D ограничена снизу и сверху прямыми $y = c$, $y = d$ соответственно, слева — кривой $x = \psi_1(y)$, справа — кривой $x = \psi_2(y)$, каждая из которых пересекается с горизонталью $y = \beta$ ($c \leq \beta \leq d$) только в одной точке, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

Для того, чтобы расставить пределы интегрирования, достаточно, чтобы область была правильной и простой вдоль некоторой оси.

Если область интегрирования простая вдоль оси OY , то внутренний интеграл зависит от y , иначе от x .

Правило расстановки пределов в повторном интеграле

1. Строим область.
2. Выясняем, вдоль какой оси она простая.
3. Проводим прямую параллельную той оси, относительно которой она простая.
4. Записываем интеграл в виде повторного, так, чтобы внутренний интеграл зависел от переменной соответствующей оси.
5. Уравнение линии, на которой лежит точка «входа», является нижним пределом внутреннего интеграла, «выхода» — верхним пределом.
6. Границы, вдоль которых может передвигаться прямая, пересекающая область, являются пределами интегрирования для второй переменной.

В полярной системе координат двойной интеграл имеет вид:

$$\iint_D f(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

Если область интегрирования D ограничена лучами, выходящими из полюса и образующими с полярной осью углы $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), и кривыми, определяемыми уравнениями $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$ ($\rho_1(\varphi) < \rho_2(\varphi)$), то двойной интеграл, распространенный на эту область, вычисляется по формуле:

$$\iint_D f(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho, \varphi) \cdot \rho d\rho,$$

где первое интегрирование выполняется по ρ , считая φ постоянной, а второе интегрирование выполняется по φ .

Для преобразования двойного интеграла, отнесенного к прямоугольным координатам, в двойной интеграл в полярных координатах нужно в подынтегральном выражении прямоугольные координаты заменить по формулам $x = \rho \cdot \cos \varphi$, $y = \rho \cdot \sin \varphi$, а вместо $dx dy$ подставить $\rho d\rho d\varphi$.

При этом уравнения линий, ограничивающих область интегрирования, также преобразуются к полярным координатам. Переход к полярным координатам полезен, когда подынтегральная функция имеет вид $f(x^2 + y^2)$ и область интегрирования есть круг или кольцо, или часть таковых, ограниченная лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Вычислить двукратные интегралы:

$$\text{а) } \int_3^5 dx \int_0^1 x \cdot y \cdot dy \quad \text{б) } \int_2^4 dy \int_0^4 \frac{y^3}{x^2 + y^2} dx.$$

Решение: а) сначала вычисляем внутренний интеграл, где y является переменной, а x постоянной:

$$\int_0^1 xy dy = x \int_0^1 y dy = x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = x \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2} x$$

Теперь вычисляем внешний интеграл:

$$\int_3^5 \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \int_3^5 x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_3^5 = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4$$

Обычно вычисления записывают короче:

$$\int_3^5 dx \int_0^1 x \cdot y \cdot dy = \int_3^5 x dx \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{2} \int_3^5 x dx = 4$$

б) Здесь интегрируем сначала по x , считая y постоянной; затем по y .

$$\int_2^4 dy \int_0^4 \frac{y^3}{x^2 + y^2} dx = \int_2^4 y^3 dy \left(\frac{1}{y} \arctg \frac{x}{y} \right) \Big|_0^y = \int_2^4 y^3 \frac{\pi}{4y} dy = \frac{\pi}{4} \int_2^4 y^2 dy = \frac{14}{3} \pi$$

2. Поменять порядок интегрирования, предварительно изобразив на графике область интегрирования:

$$а) \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$$

$$б) \int_2^1 dx \int_{x^2+1}^{3-x} f(x, y) dy.$$

Решение: а) полагая x равным пределам интегрирования с переменной x , а y равным пределам интеграла с переменной y , получим уравнения линий, ограничивающих область интегрирования: $y=0$, $y=1$, $x=y$, $x=\sqrt{y}$. Построим эти линии (рис. 4).

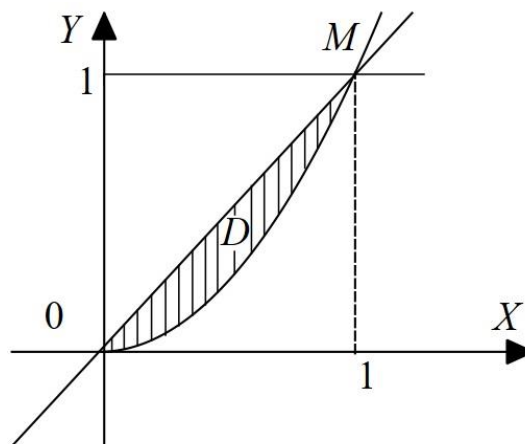


Рис. 4

Интегрируем теперь сначала по y , затем по x . Разрешая уравнения прямой $x=y$ и параболы $x=\sqrt{y}$ относительно y , найдем пределы интегрирования внутреннего интеграла: $y=x$, $y=x^2$. $M(1,1)$ – точка пересечения параболы и прямой. Область D ограничена слева прямой $x=0$, справа – прямой $x=1$. То есть $x=0, x=1$ есть наименьшее и наибольшее значения x во всей области D . Они и являются пределами внешнего интеграла. Имеем:

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_x^{x^2} f(x, y) dy$$

б) область интегрирования ограничена линиями:

$$x=-2, x=1, y=x^2+1, y=3-x \text{ (рис. 5).}$$

Точки $M_1(-2,5)$, $M_2(1,2)$ – точки пересечения параболы $y=x^2+1$ и прямой $y=3-x$.

Для интегрирования в другом порядке, т.е. вначале по x , затем по y , необходимо область D разбить прямой $y=2$ на две области D_1 и D_2 . Это вызвано тем, что область не является простой в направлении оси OX , так как правая линия границы области D состоит из двух различных частей, уравнения которых $y=3-x$ и $y=x^2+1$.

Получаем, что при перемене порядка интегрирования данный интеграл будет равен сумме двух интегралов:

$$\int_2^1 dx \int_{x^2+1}^{3-x} f(x, y) dy = \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f(x, y) dx + \int_2^5 dy \int_{-\sqrt{y-1}}^{3-y} f(x, y) dx$$

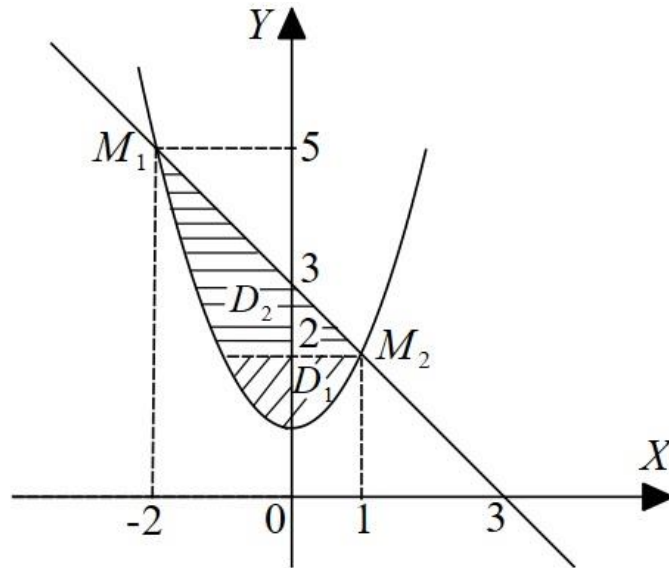


Рис. 5

3. Вычислить $\iint_D (x+y) dx dy$, где область D ограничена уравнениями $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$, $x = 4$.

Решение: Построим область интегрирования. Затем выберем порядок интегрирования (рис. 6).

Полученная область будет правильной и простой только в направлении оси OY . Действительно, любая прямая параллельная оси OY пересекает область в двух точках, и точки «входа» лежат только на прямой $y = \frac{1}{2}x$, точки «выхода» – на прямой $y = x$. Поэтому, внутренний интеграл будем брать по переменной y , а внешний – по x . (В направлении оси OX область правильная, но не простая, так как, точки «выхода» лежат на двух прямых $y = \frac{1}{2}x$ и $x = 4$. В этом случае, данный интеграл будет равен сумме двух интегралов. Область D надо разбить прямой $y = 2$ на области D_1 и D_2).

Решая системы: $\begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 4 \\ y = x \end{cases}$ находим координаты точек пересече-

ния этих линий: $M_1(4, 2)$, $M_2(4, 4)$.

Уравнение линий, ограничивающих область D , разрешаем относительно той переменной, по которой вычисляется внутренний интеграл. У нас $y = x$ и $y = \frac{1}{2}x$. Получаем:

$$\begin{aligned}\iint_D (x+y) dx dy &= \int_0^4 dx \int_{\frac{1}{2}x}^x (x+y) dy = \int_0^4 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{\frac{1}{2}x}^x dx = \int_0^4 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^2}{8} \right) dx = \\ &= \int_0^4 \frac{7}{8} x^2 dx = \frac{7}{8} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{7 \cdot 64}{8 \cdot 3} = \frac{56}{3}.\end{aligned}$$

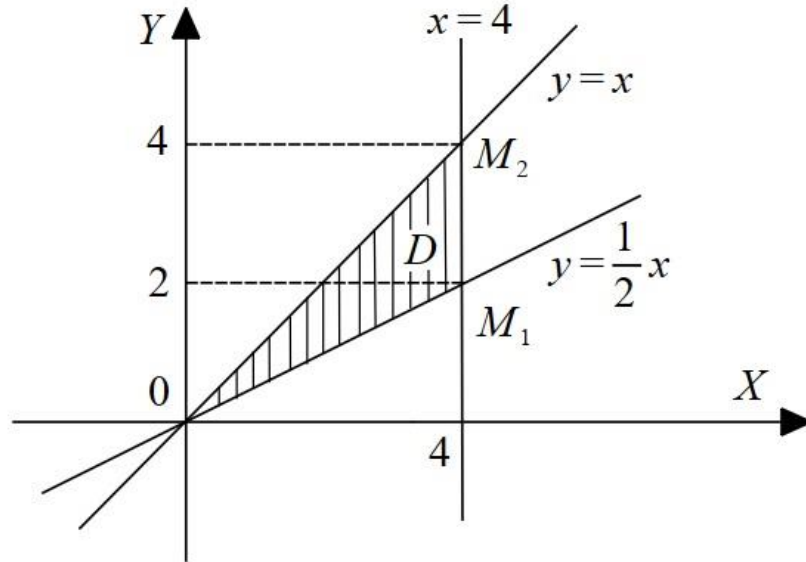


Рис. 6

Замечание: интегрируя вначале по x , затем по y , получаем:

$$\iint_D (x+y) dx dy = \int_0^2 dy \int_y^{2y} (x+y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^y (x+y) dx.$$

4. Вычислить $\iint_D y^2 x \cdot dx dy$, где область D ограничена линиями $x^2 + y^2 = 4$,

$x+y-2=0$.

Решение: Выполним построение области интегрирования (рис.7). Полученная область будет правильной и простой в направлении, как оси OX , так и оси OY . Действительно, любая прямая параллельная оси OX пересекает область в двух точках и точки «входа» лежат на прямой, точки «выхода» – на окружности. (Аналогично, в направлении оси OY). Следовательно, интегрирование можно вести в любом порядке. Будем интегрировать вначале по y , затем по x .

Имеем:

$$\begin{aligned}\iint_D y^2 x \cdot dx dy &= \int_0^2 x dx \int_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} y^2 dy = \frac{1}{3} \int_0^2 \left(y^3 \Big|_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} \right) \cdot x dx = \frac{1}{3} \int_0^2 \left(\sqrt{(4-x^2)^3} - (2-x)^3 \right) \cdot x dx = \\ &= \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}} d(4-x^2) - \frac{1}{3} \int_0^2 (8x-12x^2+6x^3-x^4) dx = -\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \sqrt{(4-x^2)^5} \Big|_0^2 - \\ &-\frac{1}{3} \left(4x^2-4x^3+\frac{3}{2}x^4-\frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = -\frac{1}{15} (0-32) - \frac{1}{3} \left(15-32+24 \cdot \frac{32}{5} \right) = \frac{32}{15} - \frac{8}{15} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}.\end{aligned}$$

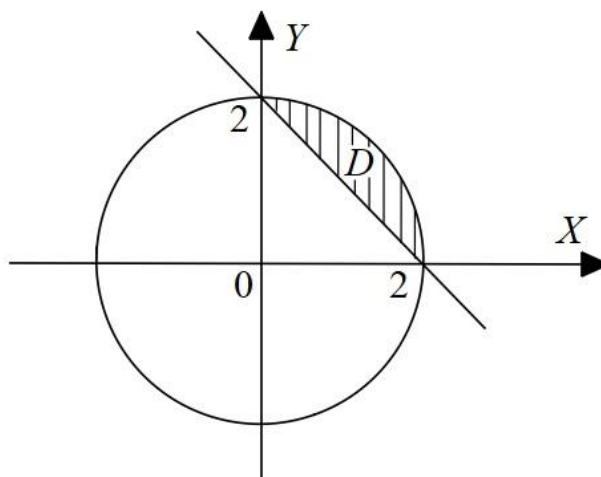


Рис. 7

5. Вычислить $\iint_D \rho^2 \cdot \sin \varphi d\rho d\varphi$, где область D ограничена линиями $\rho = 1$, $\rho = 2 + \cos \varphi$, полярной осью и расположена выше этой оси.

Решение: область имеет вид, изображенный на рис.8.

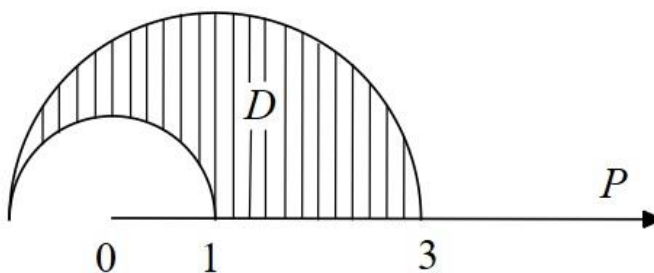


Рис. 8

Данный интеграл необходимо вычислить в полярных координатах. Внутренний интеграл всегда берут по переменной ρ , внешний – по φ .

Проводим луч из начала координат (полюса). Так как граница пересекается только в двух точках, то область правильная, учитывая, что «вход» и «выход» определяются только одним аналитическим выражением, следовательно, область простая. Т.е., ρ будет меняться от $\rho_1 = 1$ до $\rho_2 = 2 + \cos \varphi$, при фиксированном φ из промежутка $[0, \pi]$. Угол φ меняется в пределах от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$.

Таким образом:

$$\begin{aligned}
\iint_D \rho^2 \cdot \sin \varphi d\rho d\varphi &= \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_1^{2+\cos \varphi} \rho^2 d\rho = \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin \left(\rho^3 \Big|_1^{2+\cos \varphi} \right) d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^\pi \left((2+\cos \varphi)^3 - 1 \right) \sin \varphi d\varphi = \\
&= -\frac{1}{3} \int_0^\pi (2+\cos \varphi)^3 d(2+\cos \varphi) - \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(2+\cos \varphi)^4}{4} \Big|_0^\pi + \frac{1}{3} \cos \varphi \Big|_0^\pi = \\
&= -\frac{1}{12} (1^4 - 3^4) + \frac{1}{3} (-1 - 1) = \frac{80}{12} - \frac{2}{3} = \frac{20}{3} - \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6
\end{aligned}$$

6. Преобразовать к полярным координатам и затем вычислить $\iint_D (x^2 + y^2) \cdot dx dy$, где область D ограничена линиями $y = x$, $y = \sqrt{3} \cdot x$ и дугой окружности $x^2 + y^2 = 8$, лежащей в первой четверти.

Решение: построим область D (рис.9). Для преобразования двойного интеграла в прямоугольных координатах, полагаем $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $dx dy = \rho d\rho d\varphi$.

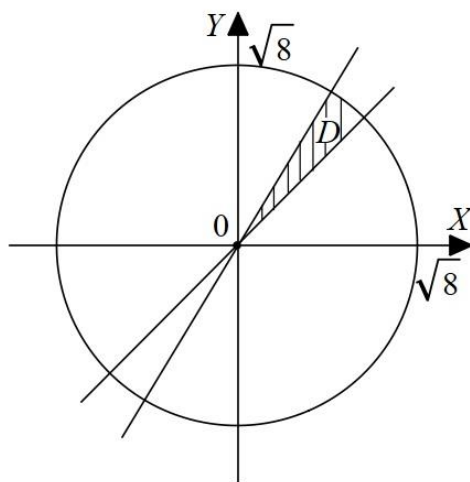


Рис. 9

Подынтегральное выражение преобразуется следующим образом:

$$(x^2 + y^2) \cdot dx dy = (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi) \rho d\rho d\varphi = \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi = \rho^3 d\rho d\varphi.$$

Уравнения линий, ограничивающих область интегрирования, также преобразуются к полярным координатам.

$$y = x \text{ в } \rho \sin \varphi = \rho \cos \varphi, \text{ т.е. } \operatorname{tg} \varphi = 1, \text{ т.е. } \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$y = \sqrt{3} \cdot x \text{ в } \rho \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot \rho \cos \varphi, \text{ т.е. } \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}, \text{ т.е. } \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$x^2 + y^2 = 8 \text{ в } \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 8, \text{ т.е. } \rho^2 = 8, \text{ т.е. } \rho = \sqrt{8}$$

Получаем:

$$\iint_D (x^2 + y^2) \cdot dx dy = \iint_D \rho^3 \cdot d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{\sqrt{8}} \rho^3 d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{4} \cdot \rho^4 \Big|_0^{\sqrt{8}} \right) d\varphi = \frac{1}{4} \cdot 64 \cdot \varphi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= 16 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = 16 \frac{\pi}{12} = \frac{4}{3} \pi$$

Замечание: вычисление этого интеграла в прямоугольных координатах было бы связано с большим объемом вычислительной работы.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

I. Вычислить повторные интегралы:

$$7. \int_0^1 dy \int_2^4 xy^2 dx \quad \text{Ответ: 2.}$$

$$8. \int_0^2 dx \int_0^1 (x^3 + y^3) dy \quad \text{Ответ: 4.}$$

$$9. \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \rho \cos \varphi d\rho \quad \text{Ответ: 2.}$$

$$10. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho^3 d\rho \quad \text{Ответ: } \frac{\pi a^4}{4}.$$

$$11. \int_0^1 dx \int_x^{2x} (x - y + 1) dy \quad \text{Ответ: 1/3.}$$

$$12. \int_1^3 dy \int_0^{y^3} \frac{3x}{y^4} dx \quad \text{Ответ: 13.}$$

II. Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах, предварительно изобразив на графике область интегрирования:

$$13. \int_{-6}^8 dx \int_{\frac{1}{x^3}}^{\frac{x+6}{7}} f(x, y) dy \quad \text{Ответ: } \int_{-\frac{3}{\sqrt{6}}}^0 dy \int_{-6}^{y^3} f(x, y) dx + \int_0^2 dy \int_{7y-6}^{y^3} f(x, y) dx.$$

$$14. \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \quad \text{Ответ: } \int_0^3 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy.$$

$$15. \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx \quad \text{Ответ: } \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy.$$

$$16. \int_{-\sqrt{3}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dy \quad \text{Ответ: } \int_{-2}^{-\sqrt{3}} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx.$$

III. Вычислить двойные интегралы:

$$17. \iint_D xy dx dy, \quad D \text{ ограничена линиями } y = x^2, \quad y^2 = x. \quad (\text{Ответ: } 1/12).$$

18. $\iint_D e^{x+y} dx dy$, D ограничена линиями $y = e^x$, $x = 0$, $y = 2$. (Ответ: e).

19. $\iint_D x^4 \cdot y dx dy$, D ограничена линиями $xy = 1$, $y - x = 0$, $x = 2$. (Ответ: $7\frac{19}{21}$).

20. $\iint_D \cos 2\varphi \cdot d\rho d\varphi$, D определена неравенствами $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, $2 \leq \rho \leq 4$. (Ответ: 1).

IV. Вычислить двойные интегралы, перейдя к полярным координатам:

21. $\iint_D \frac{x \cdot dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, D ограничена линиями $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 16$, $(x \geq 0, y \geq 0)$. (Ответ: 6).

22. $\iint_D \sqrt{25 - x^2 - y^2} dx dy$, D – круг $x^2 + y^2 \leq 9$. (Ответ: $\frac{122}{3}\pi$).

23. $\iint_D (x^2 - y^2) dx dy$, D ограничена лемнискатой $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. (Ответ: $\frac{a^4}{3}$).

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Расставить пределы интегрирования в повторных интегралах, к которым сводятся двойные интегралы $\iint_D f(x, y) dx dy$.

24. D ограничена линиями $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.

Ответ: $\int_1^6 dx \int_{\frac{6}{x}}^{7-x} f(x, y) dy = \int_1^6 dy \int_{\frac{6}{y}}^{7-y} f(x, y) dx$.

25. D – прямоугольник с вершинами $A(2, 4)$, $B(5, 4)$, $C(5, -2)$, $D(2, -2)$.

Ответ: $\int_2^5 dx \int_{-2}^4 f(x, y) dy = \int_{-2}^4 dy \int_2^5 f(x, y) dx$.

26. Вычислить: $\iint_D (2x + y) dx dy$, D ограничена линиями: $x - 2y - 2 = 0$,

$x - 2y + 5 = 0$, $4x - y + 6 = 0$, $2x + 3y - 18 = 0$.

Ответ: $93\frac{1}{2}$.

27. Вычислить: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} \sqrt{R^2 - \varphi^2} \rho^2 \cos \varphi d\rho$

Ответ: $\frac{R^4}{30}$.

28. Вычислить: $\iint_D \rho^3 \sin \varphi d\rho d\varphi$, D ограничена полярной осью, $\rho = 1 + \cos \varphi$ и расположена выше полярной оси.

Ответ: $1\frac{3}{5}$.

29. Вычислить: $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, D определена неравенствами $x^2 + y^2 \leq 2Rx$ ($y \geq 0$).

Ответ: $\frac{16}{9} R^3$.

30. Вычислить: $\iint_D xy dx dy$, D ограничена осями координат и частью астроида

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^2 t \\ y = a \cdot \sin^2 t \end{cases}, (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}).$$

Ответ: $\frac{a^4}{80}$.

ВАРИАНТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ

Вычислить:

31. $\int_1^3 dy \int_2^4 \frac{x}{y^3} dx$

Ответ: $2\frac{2}{3}$.

32. $\int_1^e dx \int_0^{x^3} \frac{dy}{x^4}$

Ответ: 1.

33. $\int_1^3 dy \int_0^{\sqrt{y}} \sqrt{y} dx$

Ответ: 4.

34. $\int_0^{\pi} d\varphi \int_1^2 \rho^3 \cdot \sin 3\varphi d\rho$

Ответ: $2\frac{2}{3}$.

35. $\iint_D \frac{y}{x^3} dx dy$, D ограничена $x=1$, $x=2$, $y=4$, $y=8$

Ответ: 9.

36. $\iint_D \rho \cos \varphi d\rho d\varphi$, D – круговой сектор, ограниченный линиями $\rho = R$, $\varphi = 0$,

$\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{R^2}{2}$.

Изменить порядок интегрирования:

37. $\int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy$

Ответ: $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$.

38. $\int_{-2}^{-1} dx \int_{\frac{1}{2}x-1}^{4x+6} f(x, y) dy + \int_{-1}^6 dy \int_{\frac{1}{2}x-1}^2 f(x, y) dy + \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy$

Ответ: $\int_{-2}^2 dy \int_{\frac{1}{4}y-\frac{3}{2}}^{2y+2} f(x, y) dx$.

Вычислить:

$$39. \iint_D (xy^2 + 1) dx dy, D \text{ определена неравенствами } 0 \leq x \leq 2, \frac{x}{2} \leq y \leq \sqrt{\frac{x}{2}}.$$

Ответ: 47/105.

$$40. \iint_D (x + 2y) dx dy, D \text{ определена линиями } y = 4x + 6, y = \frac{1}{2}x - 1, x = -1.$$

Ответ: $-4\frac{1}{12}$.

$$41. \iint_D xy dx dy, D - \text{эллипс } 4x^2 + y^2 \leq 4.$$

Ответ: 0.

$$42. \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, D \text{ определена неравенствами } \frac{\pi^2}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2.$$

Ответ: $2\pi - \pi^2$.

$$43. \iint_D (x + y) dx dy, D \text{ определена линиями } x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4, (y \geq 0).$$

Ответ: 14/3.

$$44. \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}, D \text{ определена линиями } x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 3, y = x, \\ y = \sqrt{3} \cdot x, (x \geq 0, y \geq 0).$$

Ответ: $\frac{\pi}{12}(\sqrt{15} - \sqrt{13})$.

$$45. \iint_D e^{x^2 + y^2} dx dy, D - \text{круг } x^2 + y^2 \leq 1.$$

Ответ: $\pi(e - 1)$.

Тема. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Основные сведения из теории

Площадь S плоской области D в прямоугольных координатах вычисляется по формуле $S = \iint_D dx dy$, в полярных координатах $S = \iint_D \rho d\rho d\varphi$.

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей из плоскости OXY область D , вычисляется по формуле $V = \iint_D f(x, y) dx dy$.

Вычисление двойного интеграла, стоящего в правой части формулы, в некоторых случаях упрощается при переходе к полярным координатам.

Площадь S поверхности $z = z(x, y)$ выражается формулой $S = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$, где D – проекция данной поверхности на плоскость OXY . Если поверхность имеет уравнение вида $y = y(x, z)$ или $x = x(y, z)$, то площадь поверхности находится по формулам $S = \iint_D \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} dx dz$ или $S = \iint_D \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dy dz$ соответственно, где D – проекция поверхности на плоскость OXZ или OYZ соответственно.

Если D – область плоскости OXY , занятая пластинкой, а $\gamma(x, y)$ – поверхностная плотность пластинки в точке $M(x, y)$, то её масса M выражается формулой: $M = \iint_D \gamma(x, y) dx dy$, а статические моменты S_x и S_y относительно осей OX и OY определяются двойными интегралами:

$$S_x = \iint_D y \cdot \gamma(x, y) dx dy \text{ и } S_y = \iint_D x \cdot \gamma(x, y) dx dy.$$

Координаты центра тяжести x_C и y_C пластинки выраженные формулами $x_C = \frac{S_y}{M}$, $y_C = \frac{S_x}{M}$, где M – масса пластинки, S_x , S_y – её статические моменты относительно осей координат. Моменты инерции пластинки относительно осей OX , OY и начала координат соответственно определяются формулами:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 \cdot \gamma(x, y) dx dy, \\ I_y &= \iint_D x^2 \cdot \gamma(x, y) dx dy, \\ I_o &= \iint_D (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Замечание: при вычислении двойных интегралов в ряде случаев целесообразно перейти к полярным координатам.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Вычислить площадь области, ограниченной линиями:

46. $y = x^2 + 1$, $x - y + 3 = 0$.

47. $xy = 4$, $x^2 = 2y$, $y = 4$, $x = 0$.

48. $x^2 + y^2 = R^2$, $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$, $x = 0$.

49. $\rho = 4 \cdot \sin 3\varphi$.

Решения:

46. Данная область ограничена параболой и прямой. Построим ее (рис.10).

Точки пересечения $y = x + 3$ и $y = x^2 + 1$ находим, решая систему $\begin{cases} x + 3 - y = 0 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$. Получаем $M_1(-1, 2)$, $M_2(2, 5)$.

Применяя формулу $S = \iint_D dx dy$. При переходе от двойного интеграла к повторному учтем, что область D – правильная и простая в направлении оси OY (любая прямая, проходящая через внутренние точки области, параллельно оси OY пересекает область только в двух точках. И точки «входа» и «выхода» определяются каждая только одним аналитическим выражением).

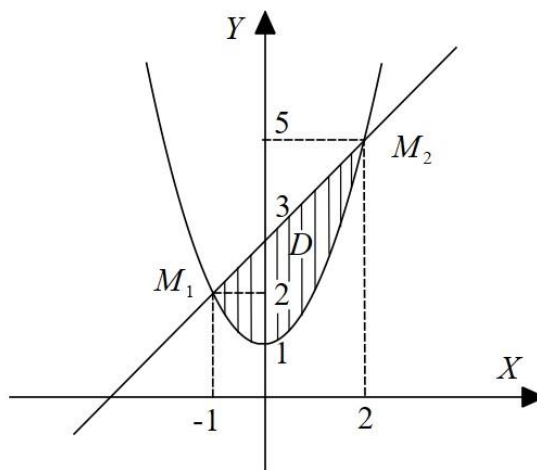


Рис. 10

Таким образом, внутренний интеграл берем по переменной y , внешний – по x .

$$S = \iint_D dx dy = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2+1}^{x+3} dy = \int_{-1}^2 (y|_{x^2+1}^{x+3}) dx = \int_{-1}^2 (x+3-x^2-1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 =$$

$$= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} + 4 + 2 - \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = 4\frac{1}{2}$$

47. Область, ограниченную линиями $xy = 4$, $x^2 = 2y$, $y = 4$, $x = 0$, изображена на рис.11.

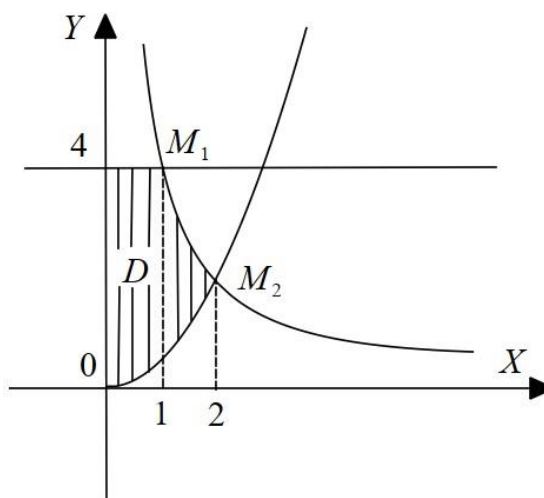


Рис. 11

Область правильная в направлении как оси OY , так и оси OX . Но не является простой в направлении ни одной координатной оси. Поэтому разобьем область на две линии $y=1$. Тогда $S = S_1 + S_2$.

Решая $\begin{cases} y = 4 \\ y = \frac{4}{x} \end{cases}$ и $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = \frac{4}{x} \end{cases}$, находим абсциссы точек M_1 и M_2 – точек пересечения линий, ограничивающих область D . Имеем $x_{M_1} = 1$, $x_{M_2} = 2$. Интегрируя сначала по y , затем по x , получаем

$$S_1 = \int_0^1 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^4 dy dx = \int_0^1 \left(4 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(4x - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^1 = 5\frac{1}{3}$$

$$S_2 = \int_1^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{\frac{4}{x}} dy = \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(4 \ln x - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_1^2 = 4 \ln 2$$

$$S = S_1 + S_2 = 5\frac{1}{3} + \ln 16$$

48. Область ограничивают окружности $x^2 + y^2 = R^2$ и $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$, прямая $x=0$ (рис.12). Перейдем к полярным координатам.

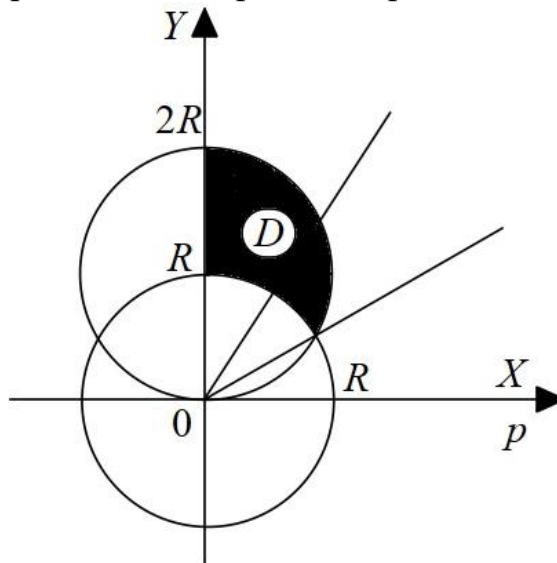


Рис. 12

Тогда $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $dx dy = \rho d\rho d\varphi$.

Уравнения окружностей примут вид

$$x^2 + y^2 = R^2 : \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = R^2, \text{ т.е. } \rho = R.$$

$$x^2 + y^2 - 2Ry = 0 : \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi - 2R\rho \sin \varphi = 0, \text{ т.е. } \rho = 2R \sin \varphi.$$

Угол изменяется от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{2}$ $\left(\begin{cases} \rho = R \\ \rho = 2R \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{1}{2}, \text{ т.е. } \varphi = \frac{\pi}{6} \right)$.

Поэтому

$$\begin{aligned}
S &= \iint_D \rho d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_R^{2R\sin\varphi} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\rho^2 \Big|_R^{2R\sin\varphi} \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (4R^2 \sin^2 \varphi - R^2) d\varphi = \\
&= \frac{1}{2} R^2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4 \cdot \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} - 1 \right) d\varphi = \frac{1}{2} R^2 \left(2\varphi \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \sin 2\varphi \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \varphi \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)
\end{aligned}$$

49. Кривая $\rho = 4 \cdot \sin 3\varphi$ – трехлепестковая роза. В силу симметрии достаточно вычислить площадь одной шестой части данной фигуры (рис.13).

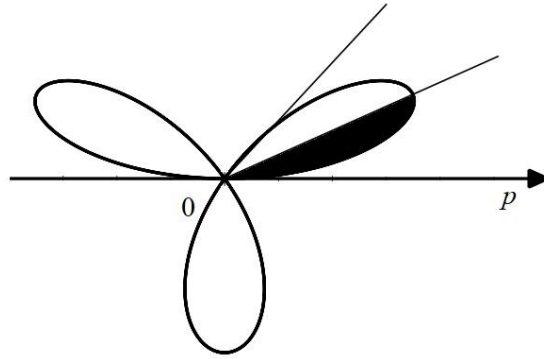


Рис. 13

Определим, как изменяется угол φ в этой части области D .

При $\varphi = 0$ получаем $\rho = 0$. С увеличением угла φ полярный радиус увеличивается. При $\varphi = \frac{\pi}{6}$ он принимает наибольшее значение ($\rho = 4$). Затем ρ уменьшается, при $\varphi = \frac{\pi}{3}$ имеем $\rho = 0$.

Таким образом, при изменении угла φ от 0 до $\frac{\pi}{3}$, получаем третью часть области.

Итак,

$$\begin{aligned}
\frac{S}{6} &= \iint_D \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^{4\sin 3\varphi} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} 16 \cdot \sin^2 3\varphi d\varphi = 8 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \cos 6\varphi}{2} d\varphi = \\
&= 8 \left(\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{12} \sin 6\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{3} \pi
\end{aligned}$$

Следовательно, $S = 4\pi$ (кв.ед).

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

50. $x^2 = y$, $y = 1$, $x + y + z = 4$, $z = 0$.

51. $y = \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{1}$, $y = 1$.

52. $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$, $x^2 + y^2 + 3z - 7 = 0$.

Решение: 50. В результате пересечений параболического цилиндра $y = x^2$ с плоскостями $y = 1$, $z = 4 - x - y$, $z = 0$ получаем тело, изображенное на

рис.14. Область D есть часть плоскости XOY , ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y=1$.

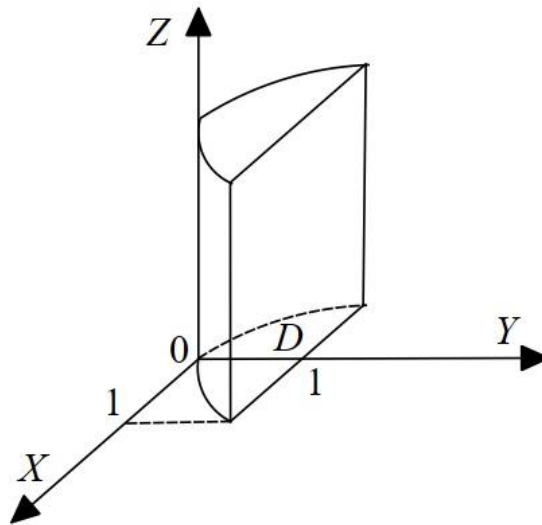


Рис. 14

Используя формулу $V = \iint_D z dx dy$, находим

$$\begin{aligned} V &= \iint_{OAC} z dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (4-x-y) dy = \int_{-1}^1 \left(\left(4y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^1 \right) dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left(4 - x - \frac{1}{2} - 4x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(3\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} - 4 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} \right) \Big|_{-1}^1 = \\ &= \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \right) - \left(-\frac{7}{2} - \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10} \right) = \frac{68}{15} \end{aligned}$$

51. $y = \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{1}$ – эллиптический параболоид. Отсекая от него плоскостью $y=1$, получаем тело (рис.15). Объем которого найдем, используя формулу $V = \iint_D y dx dy$. Область D – эллипс $y = \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{1}$. Вычислим объем четверти тела, лежащего в I-ом октанте.

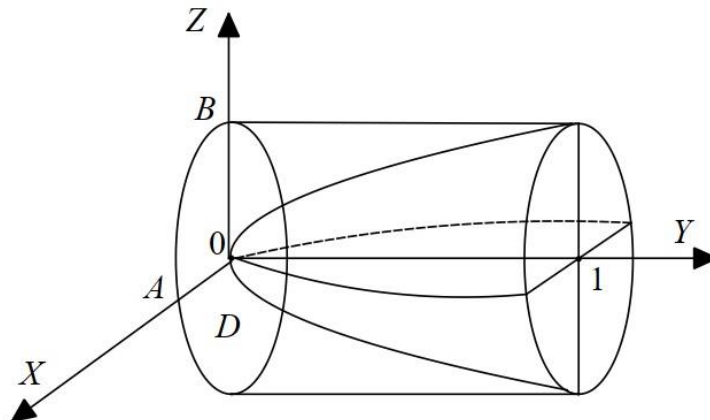


Рис. 15

$$\begin{aligned}\frac{V}{4} &= \iint_{AOB} y dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \left(\frac{x^2}{4} + z^2 \right) dz = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} z + \frac{z^3}{3} \right) \bigg|_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dx = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}{8} \right) dx = \frac{1}{8} \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx + \frac{1}{24} \int_0^2 \sqrt{(4-x^2)^3} dx = I_1 + I_2\end{aligned}$$

Для вычисления I_1 и I_2 сделаем подстановку $x = 2 \sin t$.

Тогда

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 t \cdot 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t \cdot \cos t)^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \\ &= \frac{1}{4} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{1}{24} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8 \cos^3 t \cdot 2 \cos t dt = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) dt = \frac{1}{6} \left(t + \sin 2t + \frac{1}{2} t + \frac{1}{8} \sin 4t \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{V}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \text{ и } V = \pi (\text{куб.ед.}).$$

52. Данное тело ограничено двумя параболоидами. Решая систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = z - 1 \\ x^2 + y^2 = -3z + 7 \end{cases}$, находим уравнение линии их пересечения: $x^2 + y^2 = 1, z = 2$.

(Рис.16)

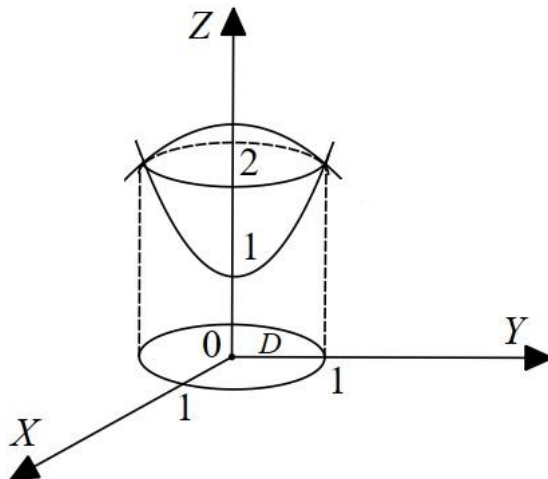


Рис. 16

Искомый объем равен разности объемов двух цилиндрических тел с одним основанием (круг $x^2 + y^2 \leq 1$) и ограниченных сверху и снизу соответственно поверхностями $z = \frac{1}{3}(7 - x^2 - y^2)$, $z = 1 + x^2 + y^2$.

$$V = V_1 - V_2 = \iint_D \frac{1}{3}(7 - x^2 - y^2) dx dy - \iint_D (1 + x^2 + y^2) dx dy, \text{ где } D - \text{ круг } x^2 + y^2 \leq 1.$$

Перейдя к полярным координатам, находим:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \iint_D (7 - \rho^2) \rho d\rho d\varphi - \iint_D (1 + \rho^2) \rho d\rho d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (7\rho - \rho^3) d\rho - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho + \rho^3) d\rho = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{4} \right) d\varphi - \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) d\varphi = \frac{13}{12} \varphi \Big|_0^{2\pi} - \frac{3}{4} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{3} \pi \end{aligned}$$

Вычислить площадь поверхностей:

53. Шара радиуса R .

54. Плоскости $x + y + z = 2$, отсекаемой плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$.

Решение: 53. Вычислим площадь $1/8$ части поверхности шара, расположенную в первом октанте (рис.17). Здесь $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Воспользуемся формулой $S = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$, D – проекция данной поверхности на плоскость HOY . Из уравнения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ находим $z = +\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$.

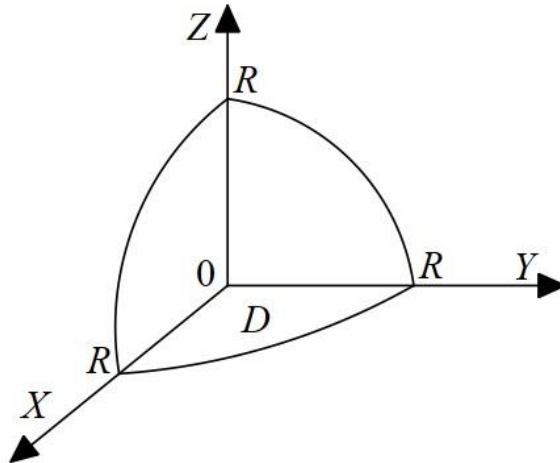


Рис. 17

Поэтому

$$z_x'^2 = \left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right)^2 = \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2}, \quad z_y'^2 = \left(\frac{-2y}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right)^2 = \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

и

$$\frac{1}{8} \cdot S = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = R \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \text{ где } D - \text{ часть}$$

круга $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Для вычисления полученного интеграла удобно перейти к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Находим

$$\begin{aligned}\frac{1}{8} \cdot S &= R \iint_D \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = R \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = -\frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R (R^2 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}} d(R^2 - \rho^2) = \\ &= -\frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{R^2 - \rho^2} \Big|_0^R d\varphi = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = R^2 \cdot \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \cdot R^2\end{aligned}$$

Поэтому

$$S = 8 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R^2 = 4\pi R^2.$$

54. Изобразим на графике ту часть поверхности, площадь которой требуется найти (рис.18). Проекцией плоскости $z = 2 - x - y$ на плоскость XOY (1-ый октант) является область D – квадрат $OABC$. Находим z'_x , z'_y : $z'_x = -1$ и $z'_y = -1$.

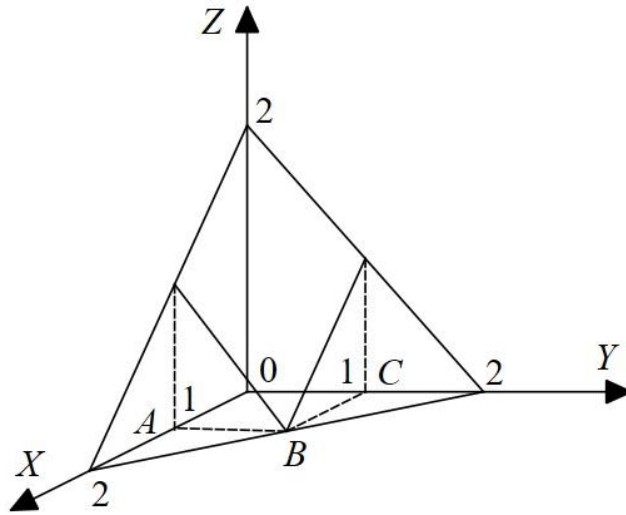


Рис. 18

Поэтому

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy = \iint_D \sqrt{3} dx dy = \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^1 dy = \sqrt{3} \int_0^1 (y \Big|_0^1) dx = \sqrt{3} x \Big|_0^1 = \sqrt{3}$$

55. Найти массу, статические моменты S_x и S_y , координаты центра тяжести фигуры, лежащей в 1-ой четверти, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ и координатными осями. Поверхностная плотность в каждой точке фигуры пропорциональна произведению координат точки.

Решение: по формуле $M = \iint_D \gamma dx dy$ находим массу пластинки (рис.19).

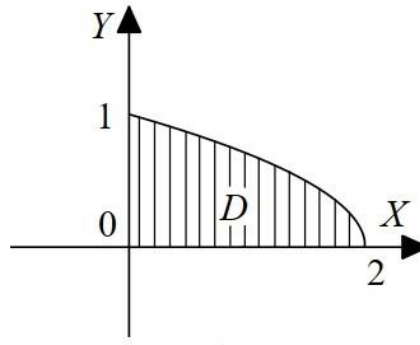


Рис. 19

По условию $\gamma = \gamma(x, y) = \kappa \cdot xy$, где κ — коэффициент пропорциональности.

$$M = \kappa \iint_D xy dx dy = \kappa \int_0^2 x dx \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} y dy = \frac{\kappa}{2} \int_0^2 x \cdot \left(y^2 \Big|_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \right) dx = \frac{\kappa}{2} \cdot \frac{1}{4} \int_0^2 x (4 - x^2) dx =$$

$$= \frac{\kappa}{8} \left(\frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \frac{\kappa}{8} (8 - 4) = \frac{\kappa}{2}$$

Найдем теперь статистические моменты пластинки:

$$S_x = \iint_D \kappa xy \cdot y dx dy = \kappa \int_0^2 x dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y^2 dy = \frac{\kappa}{3} \int_0^2 x \cdot \left(y^3 \Big|_0^{\sqrt{4-x^2}} \right) dx = \frac{\kappa}{24} \int_0^2 x \sqrt{(4-x^2)^3} dx =$$

$$= -\frac{\kappa}{48} \cdot \frac{2}{5} \sqrt{(4-x^2)^5} \Big|_0^2 = \frac{4}{15} \kappa$$

$$S_y = \iint_D \kappa xy \cdot x dx dy = \kappa \int_0^2 x^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y dy = \frac{\kappa}{2} \int_0^2 x^2 \cdot \frac{4-x^2}{4} dx = \frac{\kappa}{8} \left(4 \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{15} \kappa$$

По формулам $x_0 = \frac{S_y}{M}$, $y_0 = \frac{S_x}{M}$ находим координаты центра тяжести пластинки: $x_0 = \frac{8}{15} \kappa : \frac{\kappa}{2} = \frac{16}{15}$, $y_0 = \frac{4}{15} \kappa : \frac{\kappa}{2} = \frac{8}{15}$.

56. Найти массу и момент инерции однородного лепестка (одного) лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ относительно начала координат.

Решение: по условию $\gamma(x, y) = \gamma = \text{const}$, $M = \iint_D \gamma dx dy$. Для вычисления интеграла перейдем к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Уравнение кривой будет иметь вид

$$(\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)^2 = 2a^2 (\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi), \quad \text{т.е.} \quad \rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi, \quad \text{где}$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

Поэтому

$$M = \iint_D \gamma dx dy = \gamma \iint_D \rho d\rho d\varphi = \gamma \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho d\rho = \frac{\gamma}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cdot \cos 2\varphi d\varphi = \gamma a^2$$

Момент инерции находим по формуле $I_o = \iint_D \gamma (x^2 + y^2) \cdot dx dy$.

Имеем

$$\begin{aligned} I_o &= \gamma \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi = \gamma \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho^3 d\rho = \frac{\gamma}{4} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\rho^4 \Big|_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \right) d\varphi = \frac{\gamma}{4} \cdot a^4 \cdot 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi d\varphi = \\ &= \gamma \cdot a^4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} d\varphi = \gamma \cdot a^4 \left(\frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\gamma \cdot \pi \cdot a^4}{4} \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

57. $y = x$, $y = x^2$.

Ответ: $1/6$.

58. $x + y \cdot z = 0$, $xy = 6$.

Ответ: $\frac{35}{2} - 6 \cdot \ln 6$.

59. $x^2 + 1 - y = 0$, $y - 6 = 0$.

Ответ: $32/3$.

60. $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $y = 0$.

Ответ: $2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

61. $y = 4 - x^2$, $3x - 2y - 6 = 0$.

Ответ: $1331/48$.

62. $\rho = a \cdot \cos 2\varphi$.

Ответ: $\frac{\pi a^2}{2}$.

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

63. $2x + y - z = 0$, $x - 2y + 5 = 0$, $2x + 3y - 18 = 0$, $z = 0$.

Ответ: $58 \frac{1}{3}$.

64. $x^2 + y^2 - z = 0$, $x - 3 = 0$, $y - 2 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Ответ: 26 .

65. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

Ответ: $\frac{2}{3} \pi a^3$.

66. $z = 1 - x^2 - y^2$, $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $z = 0$.

Ответ: $\frac{\pi}{48}$.

67. $z = 1 - x^2$, $x + y = 1$, $y = 2x$, $y = 0$, $z = 0$.

Ответ: $41/162$.

Вычислить площадь поверхности:

68. Цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, отсекаемого плоскостями $z = 0$, $z = kx$.

Ответ: $2kR^2$.

69. Конуса $y^2 + z^2 = x^2$, отсекаемого цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$.

Ответ: $2\pi a^2$.

70. Параболоида $y^2 + z^2 = 2x$, отсекаемого параболическим цилиндром $y^2 = x$ и плоскостью $x = 1$.

Ответ: $\frac{1}{3}\pi(3\sqrt{3}-1)$.

71. Конуса $z^2 = x^2 + y^2$, отсекаемого плоскостью $z = 2$.

Ответ: $3\pi\sqrt{2}$.

72. Найти массу пластинки, имеющей форму круга радиуса R , если плотность в любой точке обратно пропорциональна расстоянию ее до центра круга.

Ответ: $2\pi Rk$.

73. Вычислить массу квадратной пластинки со стороной a , в каждой точке которой поверхностная плотность пропорциональна сумме ее расстояний до диагоналей квадрата.

Ответ: $\frac{ka^3\sqrt{2}}{3}$.

74-75. Найти статические моменты относительно осей OX и OY однородных пластинок, имеющих формы:

а) полукруга $0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$;

б) прямоугольника $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

Ответ: а) $\frac{2}{3}R^3$; 0.

б) $\frac{ab^2}{2}$; $\frac{a^2b}{2}$.

76-77. Найти координаты центра тяжести однородных пластинок, ограниченных:

а) полукруга $y = x^2$, $x + y = 2$;

б) прямоугольника $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $y = 0$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

Ответ: а) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{8}{5}\right)$.

б) $\left(\pi, \frac{5}{6}\right)$.

78. Найти момент инерции относительно начала координат пластинки, ограниченной линиями $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

Ответ: $\frac{ab(a^2 + b)}{3}$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

79. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидами $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $\left(\begin{matrix} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{matrix}\right)$, где $0 \leq t \leq 2\pi$.

Ответ: $3/8\pi a^2$.

80-81. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

а) $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = 2y$, $z = 0$;

b) $z = a^2 - x^2, y = b, y = 0, z = 0.$

Ответ: а) $32/9.$

б) $4/3a^3b.$

82. Вычислить площадь поверхности части цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, отсеченной плоскостями $z = 0, z = H.$

Ответ: $2\pi RH.$

83. Доказать, что центр тяжести однородной треугольной пластинки находится в точке пересечения медиан.

84. Найти моменты инерции относительно осей координат OX, OY однородной пластинки, ограниченной линиями $xy = a^2, xy = 2a^2, x = 2y, 2x = y, (x > 0, y > 0).$

Ответ: $I_x = I_y = \frac{9}{8}a^4.$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

85. $y = x, y = 3x, x = 2$

Ответ: 4.

86. $x^2 + y^2 = a^2, x + y = a$

Ответ: $\frac{\pi - 2}{4} \cdot a^2.$

87. $y = 2^x, y = 2^{-2x}, y = 4$

Ответ: $12 - \frac{9}{\ln 4}.$

88. $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$

Ответ: $2a^2.$

Найти объем тела, ограниченного следующими поверхностями:

89. $x^2 + y^2 + 4 - z = 0, x - 2 = 0, y - 3 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$

Ответ: 50.

90. $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = a^2, z = 0$

Ответ: $\frac{\pi a^4}{2}.$

91. $x^2 + y^2 = a^2, z = 0, x + y + z = 2a$

Ответ: $2\pi a^3.$

Вычислить площадь поверхности, ограниченной:

92. $x^2 + y^2 = 1 (x > 0, y > 0), x + y + z = 2, z = 0$

Ответ: $\pi - 2.$

93. $x^2 + y^2 - z^2 = 0, x^2 + y^2 - 2ax = 0$

Ответ: $2\pi a^2 \sqrt{2}.$

94. $x + y + z = 2a, x^2 + y^2 = a^2$

Ответ: $\pi a^2 \sqrt{3}.$

95. Найти центр тяжести однородной фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 4x + 4$ и прямой $y = 2 - x.$

Ответ: $M = \frac{64}{3}a^2,$

$x_0 = \frac{12}{5}a, y_0 = -2a.$

96. Вычислить массу кругового кольца, если в каждой его точке поверхностная плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния ее до центра кольца.

$$\text{Ответ: } 2\pi\kappa \ln \frac{R}{2}.$$

97. Найти статические моменты относительно осей OX , OY однородной пластинки, имеющей форму треугольника с вершинами $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(0,b)$.

$$\text{Ответ: } S_x = \frac{ab^2}{6}; S_y = \frac{a^2b}{6}.$$

98. Найти момент инерции прямоугольника относительно его основания a и высоты h .

$$\text{Ответ: } I_x = \frac{ah^3}{3}; I_y = \frac{a^3h}{3}.$$

Тема. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ, ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Основные сведения из теории

Тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области V называется предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$ при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей, т.е.

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Существует теорема согласно которой для любой функции $f(x, y, z)$, непрерывной в области V , существует тройной интеграл. Если $f(x, y, z)$ считать объемной плотностью вещества в области V , то тройной интеграл $\iiint_V f(x, y, z) dV$ представляет собой массу всего вещества, заключенного в объеме V .

Основные свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов: область интегрирования можно разбить на части; интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых; постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

В прямоугольной системе координат элемент dV объема вычисляется по формуле $dv = dxdydz$.

Тройной интеграл обычно записывают в виде: $\iiint_V f(x, y, z) dxdydz$.

Вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех обыкновенных определенных интегралов по каждой из трех переменных координат.

Для дальнейшего рассмотрения введем понятия об областях интегрирования.

Определение. Тело V называется правильным в направлении оси OZ , если произвольная прямая параллельная оси OZ , пересекающая область D , пересекает тело V только в двух точках.

Точка ближайшая к плоскости XOY называется точкой «входа», вторая точка – точка «выхода».

Определение. Правильное тело V относительно оси называется простым, если точки «входа» и «выхода» лежат на поверхностях, причем каждое уравнение поверхности определяется только одним аналитическим выражением.

Если тело не является правильным или непростое, то разбивают его на несколько частей таких, что каждое из полученных тел является простым.

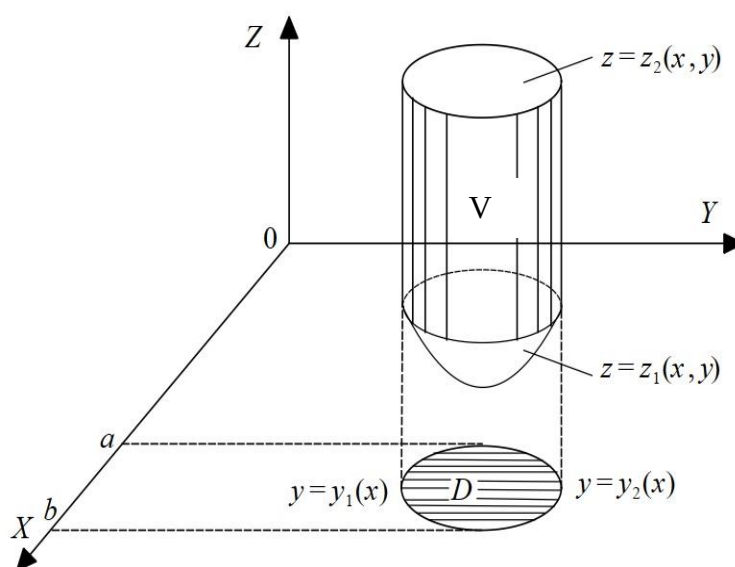


Рис. 20

Если область интегрирования V определяется неравенствами: $a \leq x \leq b$; $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$; $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ – непрерывные функции своих аргументов (рис.20), то тройной интеграл вычисляется по формуле:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

При вычислении внутреннего интеграла $\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$ переменные

x и y следует рассматривать как постоянные, z – переменная величина. Обозначив через $F_1(x, y)$ результат вычисления, вычисляем затем интеграл

$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F_1(x, y) dy$, где переменную x следует считать постоянной, y – переменной

величиной. Затем вычисляем интеграл $\int_a^b F_2(x)dx$, где $F_2(x)$ – результат вычисления предыдущего интеграла. Отметим, что порядок интегрирования может быть изменен.

Правило расстановки пределов в трехкратном интеграле

1. Построить область.
2. Выяснить вдоль какой оси она является простой, тогда первый внутренний интеграл будет зависеть от переменной соответствующей этой оси.
3. Провести произвольную прямую, параллельную этой оси так, чтобы она пересекала область V .
4. Уравнение поверхности, на которой лежит точка входа, является нижним пределом первого внутреннего интеграла. Уравнение поверхности, на которой лежит точка выхода, является верхним пределом этого интеграла.
5. В оставшемся двойном интеграле пределы рассматриваются известным методом.

Положение точки в пространстве может быть однозначно задано следующими соображениями. Возьмем точку $M(x, y, z)$ и спроектируем ее на плоскость XOY . Получим точку $N(x, y)$. Из начала координат проведем луч ON , тогда точка M будет определяться координатами (ρ, φ, z) , называемые цилиндрическими.

Здесь r – полярный радиус проекции точки $M(x, y, z)$ на плоскость XOY ; φ – полярный угол проекции точки $M(x, y, z)$ на плоскость XOY ; z – аппликата точки $M(x, y, z)$.

При переходе от декартовых координат x, y, z к **цилиндрическим** координатам r, φ, z (рис.21), связанным с x, y, z формулами (1) и (2).

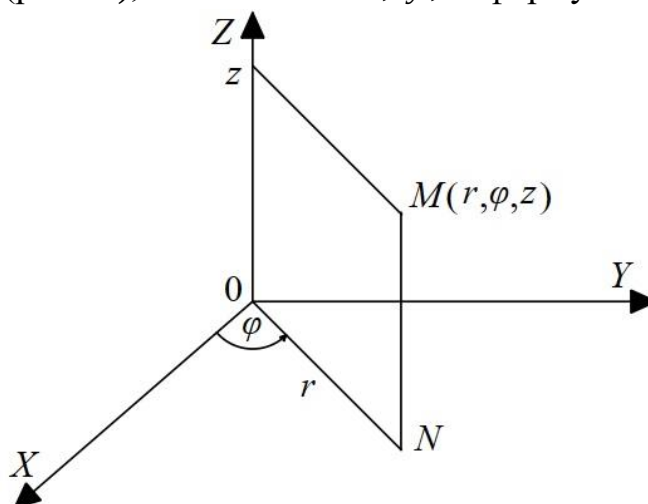


Рис. 21

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \begin{pmatrix} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Элемент dV объема вычисляется по формуле

$$dV = r dr d\varphi dz \quad (2)$$

В тройном интеграле $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, x , y , z заменяем по формулам

(1), а элемент объема $dx dy dz$ – по формуле (2). Затем вычисляем тройной интеграл тремя последовательными интегрированиями.

Вычисляем тройной интеграл в ЦСК с помощью трехкратного. Порядок интегрирования в трехкратном интеграле: первый внутренний – по z ; второй внутренний – по φ ; внешний – по r .

Замечание. В цилиндрические координаты удобно переходить в том случае, если проекция тела есть область, ограниченная полярными кривыми в частности окружностью или ее частью.

Рассмотрим, как можно определить координаты точки, если ввести следующие соображения. Проведем луч выходящий из начала координат, тогда этот луч образует угол θ с осью OZ . Спроектируем на плоскость XOY точку M с ее лучом (рис.22).

Определение. Сферическими координатами пространственной точки M называется тройка чисел (r, φ, θ) , где r – длина радиус-вектора точки M , φ – полярный угол проекции точки M на плоскость XOY , θ – угол между осью OZ и радиус-вектором точки M .

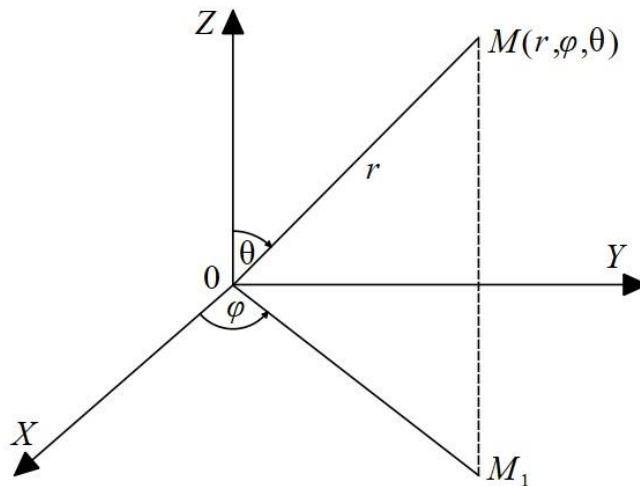


Рис. 22

При переходе от декартовых координат x , y , z к сферическим координатам r , φ , θ , связанным с x , y , z соотношениями

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases} \begin{pmatrix} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Элемент dV объема вычисляется по формуле

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \quad (4)$$

В тройном интеграле $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, x , y , z заменим по формулам (3), а элемент объема $dx dy dz$ – по формуле (4). Затем вычисляем его тремя последовательными интегрированиями.

Порядок интегрирования в трехкратном интеграле: первый внутренний – по r ; второй внутренний – по θ ; внешний – по φ .

Переход к сферическим координатам особенно удобен в том случае, когда областью интегрирования является шар.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

99. Вычислить:

$$\int_0^3 dx \int_0^{2x} dy \int_0^{\sqrt{xy}} z dz.$$

Решение: вычисляем внутренний интеграл

$$\int_0^{\sqrt{xy}} z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{xy}} = \frac{1}{2} xy.$$

Вычисляем теперь средний интеграл:

$$\int_0^{2x} \frac{1}{2} xy dy = \frac{1}{2} x \int_0^{2x} y dy = \frac{1}{2} x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^{2x} = x^3.$$

Вычисляем внешний интеграл:

$$\int_0^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^3 = \frac{81}{4}$$

Ответ: 81/4.

100. Вычислить $\iiint_V x dx dy dz$, где V – ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=6$, $x+z=2$ (рис.23).

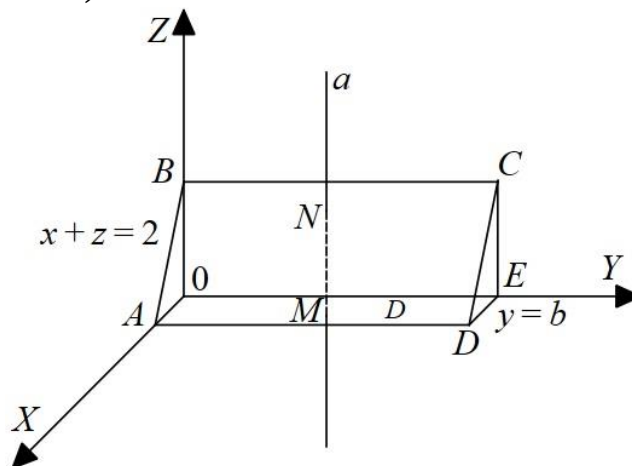


Рис. 23

Решение: V – призма $AOBDEC$ она правильная и простая в направлении оси OZ . Она проектируется в область D – прямоугольник $DAOE$ на плоскости XOY . Действительно, взяв в области D произвольную точку M , проведем через нее прямую a . Эта прямая пресекает область V в двух точках и входит в нее в точке M , принадлежащей плоскости $z=0$, выходит из области V в точке N , принадлежащей плоскости $x+z=2$. Отсюда $z=2-x$.

Очевидно, в области D x изменяется от 0 до 2, т.е. $0 \leq x \leq 2$. При этом y изменяется от 0 до 6, т.е. $0 \leq y \leq 6$.

Таким образом,

$$\iiint_V dx dy dz = \int_0^2 x dx \int_0^6 dy \int_0^{2-x} dz.$$

Вычисляем внутренний интеграл:

$$\int_0^{2-x} dz = z \Big|_0^{2-x} = 2-x.$$

Затем средний интеграл:

$$\int_0^6 (2-x) dy = (2-x) \cdot y \Big|_0^6 = 6(2-x).$$

Затем внешний интеграл:

$$\int_0^2 x \cdot 6 \cdot (2-x) dx = 6 \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 8$$

Замечание: этот же результат можно получить, меняя порядок интегрирования. Так, проецируя призму на плоскость XOZ , сводим интеграл к следующему

$$\iiint_V dx dy dz = \int_0^2 dz \int_0^{2-z} x dx \int_0^6 dy = \int_0^2 dz \int_0^{2-z} x dx (y \Big|_0^6) = 6 \int_0^2 dz \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^{2-z} \right) = 3 \int_0^2 (2-z)^2 dz = 8$$

Ответ: 8.

101. Вычислить $\iiint_V \frac{xy}{\sqrt{z}} dx dy dz$, где область V расположена в 1-й октанте и ограничена конусом $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$ и плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=1$.

Решение: изобразим на чертеже область V (рис.24).

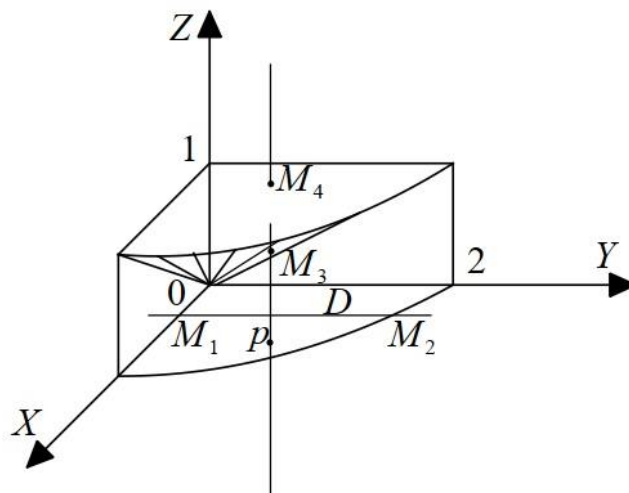


Рис. 24

Взяв в области D произвольную точку P , проведем через нее прямую, параллельную оси OZ . Она пересекает область V в двух точках M_3 и M_4 . Для этих точек имеем $z_1 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}$ и $z_2 = 1$. Поэтому, область V правильная в направлении оси OZ и проецируется на плоскость HOY в виде четвертой части круга $x^2 + y^2 = 4$, ограниченного прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 2$ (пересечение конуса $x^2 + y^2 = 4z^2$ с плоскостью $z = 1$ дает $x^2 + y^2 = 4$). В области D x изменяется от 0 до 2, т.е. $0 \leq x \leq 2$. При фиксированной x ($x \in [0, 2]$) прямая, параллельная оси OY , пересекает область D в точках M_1 и M_2 . Ордината точки M_1 есть $y = 0$, а точки M_2 есть $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Таким образом,

$$\iiint_V \frac{xy}{\sqrt{z}} dx dy dz = \int_0^2 x dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y dy \int_{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}^1 \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Вычисляем сначала первый внутренний интеграл:

$$\int_{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}^1 \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} \Big|_{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}^1 = 2 - 2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{4}}$$

Далее второй внутренний интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} 2y \left(1 - \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4}} \right) dy &= 2 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{4-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{4}} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}} d(x^2 + y^2) = \\ &= 4 - x^2 - \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot \frac{4}{5} \cdot \sqrt{(x^2 + y^2)^5} \Big|_0^{\sqrt{4-x^2}} = 4 - x^2 - \frac{4}{5\sqrt{2}} \left(\sqrt[4]{4^5} - \sqrt[4]{x^{10}} \right) = \\ &= 4 - x^2 - \frac{4}{5\sqrt{2}} \left(\sqrt[4]{32} - \sqrt[4]{x^5} \right) = 4 - x^2 - \frac{16}{5} + \frac{4x^2}{5\sqrt{2}} = \frac{4}{5} - x^2 + \frac{4}{5\sqrt{2}} \cdot x^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Внешний интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \left(\frac{4}{5} - x^2 + \frac{4}{5\sqrt{2}} \cdot x^{\frac{5}{2}} \right) dx &= \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{4}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{9} \sqrt{x^9} \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{5} - 4 + \frac{4\sqrt{2}}{45} \cdot \sqrt{2^9} = \\ &= -\frac{12}{5} + \frac{4 \cdot 32}{45} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Ответ: $4/9$.

102. Вычислить $\iiint_V z dx dy dz$, где V область, ограниченная верхней частью конуса $x^2 + y^2 = z^2$ и плоскостью $z = 1$.

Решение: построим область V в прямоугольной системе координат (рис.25). Вычислим интеграл путем перехода к цилиндрическим координатам: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$, тогда $dv = \rho d\rho d\varphi dz$. Уравнение конуса примет

вид $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = z^2$, т.е. $z = \rho$. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = 1$ (границы области D) запишется так: $\rho = 1$. Новые переменные изменяются в следующих пределах: ρ от 0 до 1, φ от 0 до 2π , а z от ρ до 1 (прямая, параллельная оси OZ , пересекающая область V входит в конус $z = \rho$ и выходит из него на высоте $z = 1$).

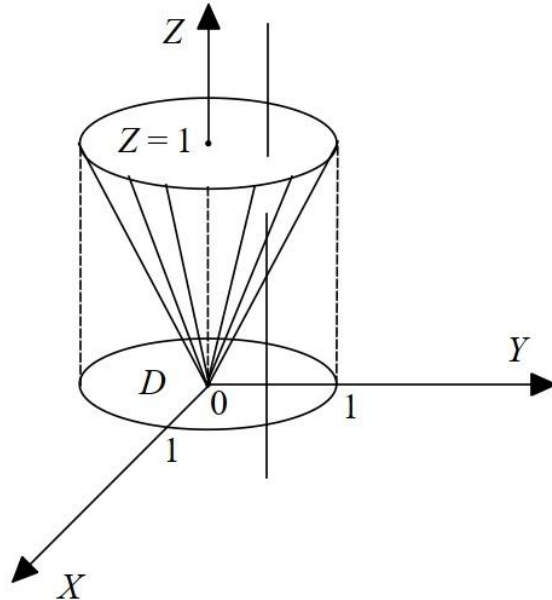


Рис. 25

Таким образом,

$$\begin{aligned} \iiint_V z dx dy dz &= \iiint_V z \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_\rho^1 z dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \left(\frac{z^2}{2} \Big|_\rho^1 \right) = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{\rho^2}{2} \right) \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{4} - \frac{\rho^4}{8} \right) \Big|_0^1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} d\varphi = \frac{1}{8} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Ответ: $\pi/4$.

Замечание: не переходя к цилиндрическим координатам, получим

$$\iiint_V z dx dy dz = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 z dz.$$

103. Вычислить $\iiint_V \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$, где область V — шар

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

Решение: построим область V в прямоугольной системе координат (рис.26).

Вычислим интеграл путем перехода к сферическим координатам: $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$. Тогда $dV = dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$. Уравнение сферы примет вид

$$r^2 \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \theta + r^2 \cdot \cos^2 \theta = 1.$$

т.е.

$$r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \cdot \cos^2 \theta = 1.$$

т.е.

$$r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cdot \cos^2 \theta = 1.$$

т.е.

$$r^2 = 1$$

Откуда $r = 1$

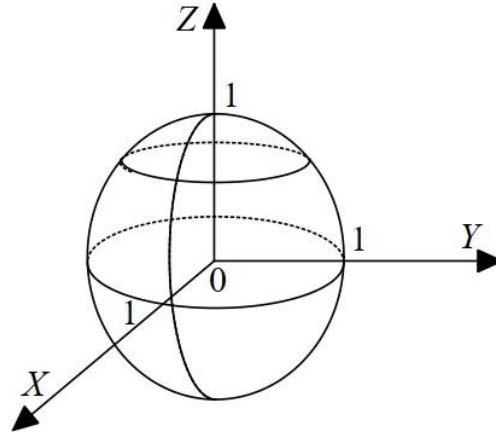


Рис. 26

Подынтегральная функция примет вид $\sqrt{1+(r^2)^{\frac{3}{2}}}$, т.е. $\sqrt{1+r^3}$. Новые переменные изменяются в следующих пределах: r от 0 до 1, φ от 0 до 2π , θ от 0 до π .

Таким образом,

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz &= \iiint_V \sqrt{1+r^3} \cdot r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+r^3} \cdot r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

Вычисляем первый внутренний интеграл:

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta = -\cos \theta \Big|_0^\pi = -1(-1-1) = 2.$$

Второй внутренний интеграл:

$$\int_0^1 2\sqrt{1+r^3} \cdot r^2 dr = \frac{2}{3} \int_0^1 (1+r^3)^{\frac{1}{2}} d(1+r^3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(1+r^3)^3} \Big|_0^1 = \frac{4}{9} (\sqrt{8}-1).$$

Внешний интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{4}{9} (\sqrt{8}-1) d\varphi = \frac{4}{9} (\sqrt{8}-1) \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{9} \pi (\sqrt{8}-1)$$

Ответ: $\frac{8}{9} \pi (\sqrt{8}-1)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

104. Вычислить $\int_0^2 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+2y} dz$ Ответ: 4.

Вычислить следующие тройные интегралы по указанным областям:

105. $\iiint_V y dx dy dz$, где V – треугольная пирамида, ограниченная плоскостью $2x + y + z - 4 = 0$ и плоскостями координат.

Ответ: 16/3.

106. $\iiint_V (x + 2y + 3z + 4) dx dy dz$, где V есть $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 1$.

Ответ: 54.

107. $\iiint_V (3x + 4y) dx dy dz$, где V ограничена поверхностями $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $z = 0$, $y = 1$.

Ответ: 160/63.

108. Перейти к цилиндрическим координатам, вычислить: $\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, где V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 3$.

Ответ: 8.

109. Перейдя к сферическим координатам вычислить $\iiint_V z dx dy dz$, где V – часть шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, находящаяся в первом октанте.

Ответ: $\frac{\pi R^4}{16}$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

110. Вычислить $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^4}$, где V есть $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 1$.

Ответ: 41/630.

111. Вычислить $\iiint_V z^3 dx dy dz$, где V ограничена конусом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$), плоскостью $z = c$ и координатными плоскостями.

Ответ: $\pi/4 \cdot \frac{abc^4}{6}$.

112. $\iiint_V \frac{xyz}{x^2 + y^2} dx dy dz$, где V ограничена снизу плоскостью $z = 0$, а сверху поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 \cdot xy$.

Указание: перейти к сферическим координатам

Ответ: $a^4/144$.

113. Вычислить, перейдя к сферическим координатам, $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, где V ограничена поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = y$.

Ответ: $\pi/10$.

114. Вычислить, перейдя к цилиндрическим координатам $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)^3 dx dy dz$, где V ограничена поверхностями $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

Ответ: $3/2 \pi$.

115. Вычислить $\iiint_V x^2 dx dy dz$, где V ограничена поверхностями $z = y^2$, $z = 4y^2$, $z = x$, $z = 2x$, $z = 3$.

Ответ: $\frac{21\sqrt{3}}{8}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ

116. Вычислить $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{x^2 + y^2}} 2dz$

Ответ: $1/6$.

117. Вычислить $\iiint_V (2x + y - z) dx dy dz$, где V — куб: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

Ответ: 1 .

118. Вычислить $\iiint_V z dx dy dz$, где V определена неравенствами: $0 \leq x \leq 1/2$, $x \leq y \leq 2x$, $0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Ответ: $7/192$.

119. Вычислить $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, где V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 0$, $z = 1$.

Ответ: $\pi/6$.

120. Вычислить, перейдя к сферическим координатам $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, где V — шар: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

Ответ: $\pi \cdot R^4$.

121. Вычислить, перейдя к цилиндрическим координатам $\iiint_V (x^2 - y^2) dx dy dz$, где V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 2$.

Ответ: $16/3 \pi$.

Тема. ПРИМЕНЕНИЕ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ К РЕШЕНИЮ РАЗЛИЧНЫХ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРИИ, ФИЗИКИ, МЕХАНИКИ

Основные сведения из теории

Объем тела выражается формулой $V = \iiint_V dx dy dz$.

В сферических координатах этот интеграл имеет вид $V = \iiint_V r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$, в цилиндрических $V = \iiint_V \rho d\rho d\varphi dz$.

Отметим, что во многих случаях вычисление объема при помощи тройного интеграла оказывается более простым, чем его вычисление двойным интегралом.

Масса тела определяется формулой $M = \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz$, где $\gamma(x, y, z)$ есть объемная плотность распределения массы в точке $M(x, y, z)$. Отметим, что если тело однородно, т.е. в каждой точке его плотность одна и та же $\gamma(x, y, z) = \gamma = \text{const}$, то масса тела находится по формуле $M = \gamma \cdot V$, где V – объем тела.

Координаты центра тяжести тела вычисляются по формуле $x_C = \frac{S_{yz}}{M}$, $y_C = \frac{S_{xz}}{M}$, $z_C = \frac{S_{xy}}{M}$, где M – масса тела, а S_{yz} , S_{xy} , S_{xz} – статические моменты тела относительно координатных плоскостей:

$$S_{yz} = \iiint_V x \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$S_{xz} = \iiint_V y \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$S_{xy} = \iiint_V z \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей определяются формулами:

$$I_{xy} = \iiint_V z^2 \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_{xz} = \iiint_V y^2 \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_{yz} = \iiint_V x^2 \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Моменты инерции тела относительно координатных осей Ox , Oy , Oz определяются формулами:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

$I_o = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz$ – момент инерции относительно начала координат.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

122. Найти объем тела, ограниченного следующими поверхностями:

а) $2x + 3y + 4z = 12$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 3z$.

Решение: а) данное тело представляет собой треугольную пирамиду $SAOC$ (рис.27), ограниченную сверху поверхностью $2x + 3y + 4z = 12$. Поэтому переменная z в области интегрирования изменяется от $z = 0$ до $z = \frac{12 - 2x - 3y}{4}$.

Проекцией D в области V на плоскость XOY является треугольник AOC .

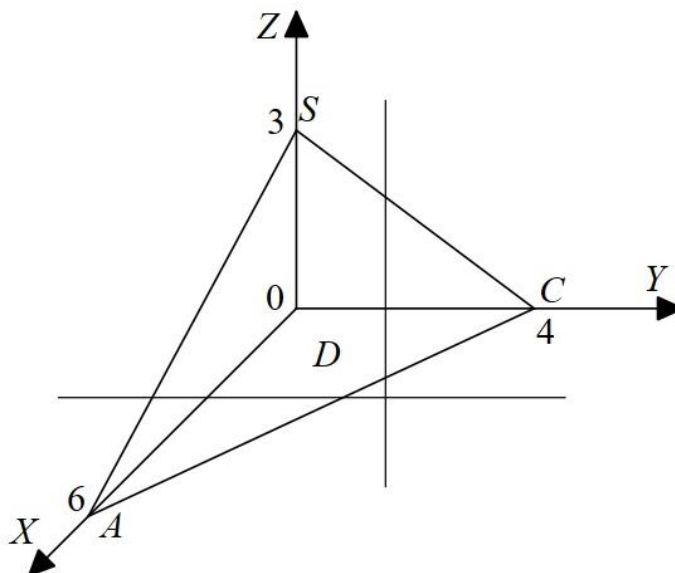


Рис. 27

Очевидно, что в области D переменная x изменяется от 0 до 6, а переменная y от 0 до $-2/3x$ (уравнение прямой AC есть $2x + 3y = 12$). Поэтому, согласно формуле $V = \iiint_V dx dy dz$, получаем:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^6 dx \int_0^{4-\frac{2}{3}x} dy \int_0^{\frac{12-2x-3y}{4}} dz = \int_0^6 dx \int_0^{4-\frac{2}{3}x} dy \left(z \Big|_0^{\frac{12-2x-3y}{4}} \right) = \int_0^6 dx \int_0^{4-\frac{2}{3}x} \left(3 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y \right) dy = \\
 &= \int_0^6 \left(3y - \frac{1}{2}xy - 3\frac{y^2}{8} \right) \Big|_0^{4-\frac{2}{3}x} dx = \int_0^6 \left(12 - 2x - 2x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{8} \left(16 - \frac{16}{3}x + \frac{4}{9}x^2 \right) \right) dx = \\
 &= \int_0^6 \left(6 - 2x + \frac{1}{6}x^2 \right) dx = \left(6x - x^2 + \frac{x^3}{18} \right) \Big|_0^6 = 36 - 36 + 12 = 12
 \end{aligned}$$

б) изобразим на рисунке данное тело (рис.28). Оно ограничено сферой и параболоидом вращения. Для вычисления объема перейдем к цилиндрическим координатам: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$.

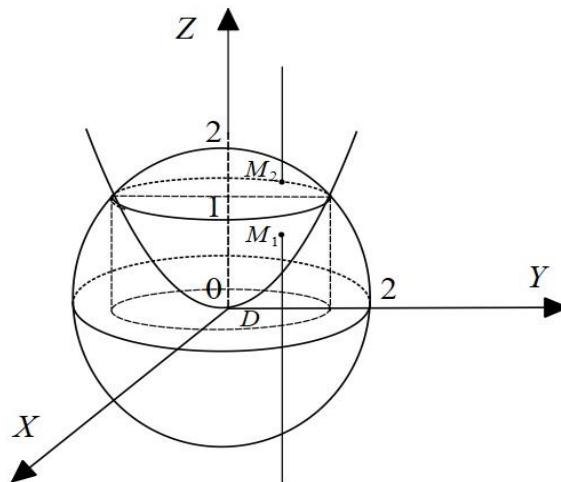


Рис. 28

Уравнение сферы примет вид

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi + z^2 = 4,$$

т.е.

$$\rho^2 + z^2 = 4$$

Откуда

$$z = \sqrt{4 - \rho^2}$$

Уравнение параболоида примет вид

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 3z$$

т.е.

$$\rho^2 = 3z$$

Откуда

$$z = \frac{\rho^2}{3}$$

Переменная z изменяется от $\frac{\rho^2}{3}$ (для точки M_1 пересечения прямой, параллельной оси OZ с поверхностью параболоида) до $z = \sqrt{4 - \rho^2}$ (для точки M_2 пересечения с верхней частью поверхности сферы).

Для линии пересечения поверхностей $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и $x^2 + y^2 = 3z$ имеем $z^2 + 3z - 4 = 0$. Откуда $z = 1$. Поэтому уравнением границы области D – проекции области на плоскость XOY – является $x^2 + y^2 = 3$, что в цилиндрических координатах примет вид $\rho^2 = 3$. Отсюда $\rho = \sqrt{3}$.

Видим, что в области D переменная φ изменяется от 0 до 2π , а ρ от 0 до $\sqrt{3}$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dx dy dz = \iiint_V \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho d\rho \int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\rho \sqrt{4-\rho^2} - \frac{\rho^3}{3} \right) d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(4-\rho^2)^3} - \frac{\rho^4}{12} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{9}{12} \right) d\varphi = \frac{19}{6} \pi \end{aligned}$$

123. Найти: а) массу шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$; б) координаты центра тяжести, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию ее от начала координат.

Решение: а) найдем сначала массу шара (рис.29).

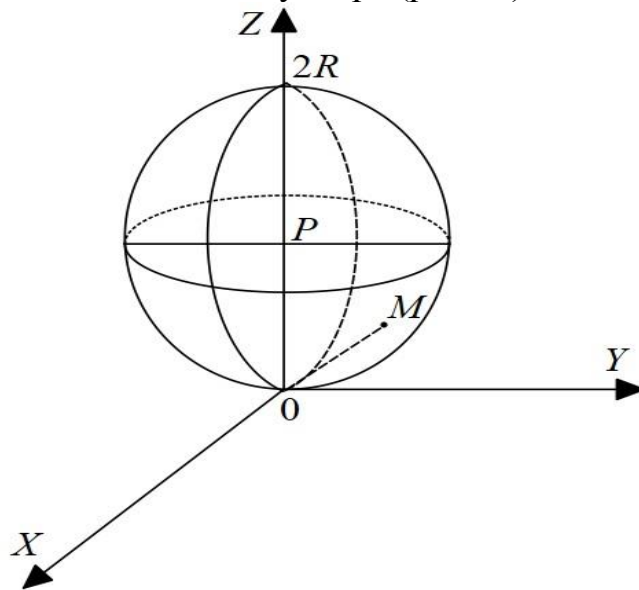


Рис. 29

Уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ можно записать так $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$. Центр шара расположен в точке $P(0, 0, R)$. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка шара. Тогда плотность γ определяется формулой $\gamma(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где k – коэффициент пропорциональности; $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = d$ – расстояние от точки M до начала координат, т.е. $d = |OM|$.

Итак,

$$M = \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz.$$

Для вычисления этого интеграла перейдем к сферическим координатам:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta; \quad y = r \sin \varphi \sin \theta; \quad z = r \cos \theta.$$

При этом $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$; уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ примет вид $r^2 = 2R \cdot r \cos \theta$, т.е. $r = 2R \cdot \cos \theta$, подынтегральная функция примет вид $\frac{k}{\sqrt{r^2}} = \frac{k}{r}$. Поэтому $M = \iiint_V \frac{k}{r} \cdot r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = k \iiint_V r \sin \theta dr d\varphi d\theta$.

Здесь φ изменяется от 0 до 2π , θ изменяется от 0 до $\pi/2$, а r изменяется от 0 до $2R \cdot \cos \theta$.

Итак,

$$\begin{aligned} M &= k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{2R \cos \theta} r dr = \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \left(r^2 \Big|_0^{2R \cos \theta} \right) d\theta = \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot 4R^2 \cdot \cos^2 \theta d\theta = \\ &= -2kR^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d(\cos \theta) = -2kR^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) d\varphi = \frac{2}{3} k \cdot R^2 \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} k \cdot \pi R^2 \\ M &= \frac{4}{3} k \cdot \pi R^2. \end{aligned}$$

б) координаты центра тяжести шара могут быть найдены по формулам:

$$x_C = \frac{1}{M} \iiint_V x \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$y_C = \frac{1}{M} \iiint_V y \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$z_C = \frac{1}{M} \iiint_V z \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Из соображений симметрии следует, что $x_C = 0$, $y_C = 0$ (в этом можно убедиться, вычислив соответствующие интегралы). Найдем z_C , перейдя к сферическим координатам:

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{1}{M} \iiint_V \frac{z \cdot k \cdot dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{3}{4k \cdot \pi R^2} \cdot k \iiint_V \frac{r \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta}{r} dr d\varphi d\theta = \\ &= \frac{3}{4\pi R^2} \iiint_V r^2 \sin \theta \cdot \cos \theta dr d\varphi d\theta = \frac{3}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot \cos \theta d\theta \int_0^{2R \cos \theta} r^2 dr = \\ &= \frac{3}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot 8R^3 \cos^3 \theta d\theta = -\frac{8R^3}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{\cos^5 \theta}{5} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{5\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4R}{5}. \end{aligned}$$

124. Неоднородное тело ограничено плоскостями $x=2$, $y=1$, $z=0$ и цилиндром $z^2 = 6x$. Объемная плотность вещества в каждой точке его пропорциональна ее расстоянию от плоскости XOY . Найти момент инерции этого тела относительно оси OZ .

Решение: (рис.30). Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка данного тела. Расстояние ее от плоскости XOY есть z . Поэтому $\gamma(x, y, z) = kz$, где k – коэффициент пропорциональности. Момент инерции находим по формуле

$$I_z = \iiint_V \gamma(x, y, z) \cdot (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

получаем

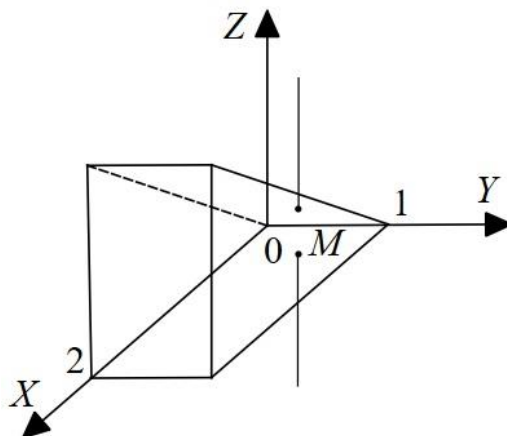


Рис. 30

$$\begin{aligned} I_z &= k \iiint_V z \cdot (x^2 + y^2) dx dy dz = k \int_0^2 dx \int_0^1 (x^2 + y^2) dy \int_0^{\sqrt{6x}} z dz = \frac{k}{2} \int_0^2 dx \int_0^1 (x^2 + y^2) 6x dy = \\ &= 6 \cdot \frac{k}{2} \int_0^2 x dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 3k \int_0^2 \left(x^3 + \frac{1}{3} x \right) dx = 3k \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{6} \right) \Big|_0^2 = 14k \end{aligned}$$

Ответ: $I_z = 14k$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

125. $2x = y^2 + z^2, x = 2$

Ответ: 4π .

126. $z = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ответ: $\frac{8}{3}\pi(6\sqrt{3} - 5)$.

127. $z = x^2 + y^2, z = x^2 + 2y^2, y = x, y = 2x, x = 1$

Ответ: $7/12$.

128. Найти массу призмы, ограниченной плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, y = 2, x + z = 1$, если плотность в каждой ее точке пропорциональна абсциссе x данной точки $M(x, y, z)$.

Ответ: $\kappa/3$.

129. Найти массу квадратной пластинки со стороной $2a$, если плотность материала пластинки пропорциональна квадрату расстояния от точки пересечения диагоналей и на углах квадрата равна единице.

Ответ: $4/3a^2$.

130. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x=0$, $y=0$, $z=1$, $z=3$, $2x+y=3$.

131. Найти момент инерции относительно координатных плоскостей однородного тела, ограниченного поверхностями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

$$\text{Ответ: } I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = \frac{1}{60}.$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Вычислить объем тел, ограниченных следующими поверхностями.

132. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = x^2 + y^2$ Ответ: $\pi/6$.

133. $z^2 = 2x$, $y^2 + z^2 = 1$, $x=1$ Ответ: $\pi/6$.

134. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ Ответ: $\frac{5}{12}\pi R^3$.

135. Вычислить массу тела, ограниченного параболоидом вращения $x^2 + y^2 = 2z$ и плоскостью $z=2$, если плотность пропорциональна сумме квадратов двух первых координат данной точки $M(x, y, z)$.

$$\text{Ответ: } 4/3a^2.$$

136. Найти массу тела, ограниченного поверхностям $2x+z=4$, $x+y=2$, $y^2=2x$ ($y>0$), если $\gamma(x, y, z) = \kappa y$.

$$\text{Ответ: } 4/3\kappa.$$

137. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2 + 2y^2 = 4z$, $z=2$.

$$\text{Ответ: } C\left(0, 0, \frac{4}{3}\right).$$

138. Найти момент инерции относительно Ox , однородного тела, ограниченного поверхностями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

$$\text{Ответ: } I_x = \frac{1}{10}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ

Вычислить объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

139. $2z = x^2 + y^2$, $z=2$ Ответ: 4π .

140. $y^2 = 4-3x$, $y^2 = x$, $z = \pm 9$ Ответ: 32 .

141. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y^2 + z^2 = 3x$ Ответ: $19/6\pi$.

142. Вычислить массу тела, ограниченного конусом $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ и плоскостью $y=2$, если плотность в каждой его точке пропорциональна ординате этой точки.

$$\text{Ответ: } 4\kappa\pi.$$

143. Найти массу части шара радиуса R , находящейся в первом октанте, если в каждой его точке плотность равна расстоянию этой точки от плоскости XOY .

Ответ: $\frac{\pi R^4}{16}$.

144. Определить координаты центра тяжести тела, ограниченного поверхностями $x+y+z=2$, $x=1$, $y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Ответ: $C\left(\frac{5}{12}; \frac{5}{12}; \frac{7}{12}\right)$.

145. Определить момент инерции относительно оси OZ однородного тела, ограниченного $x+y+z=2$, $x^2+y^2=2$, $z=0$.

Ответ: 4π .

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

Вариант 1.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = \sqrt{3x}$, $x \geq 0$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x^2 + y) dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y = x^2$, $x = y^2$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $y^2 = 4x$, $x + y = 3$, $y \geq 0$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OX однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, $x - y \leq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные тройные интегралы:

а) $\iiint_V (2x^2 + 3y + z) dx dy dz$, $V: 2 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 4$.

б) $\iiint_V z dv$, если область V ограничена плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

6. Найти статический момент относительно плоскости XOY полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$, если плотность в каждой точке $\gamma(x, y, z) = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

7. Вычислить момент инерции относительно оси OY , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $y^2 = x^2 + z^2$, $y = 4$.

Вариант 2.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $x^2 = 2y$, $5x - 2y - 6 = 0$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D xy^2 dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y = x^2$, $y = 2x$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $y = 6x^2$, $x + y = 2$, $x \geq 0$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OY однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $x + y \leq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные тройные интегралы:

а) $\iiint_V x^2 yz dx dy dz$, $V: -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, 2 \leq z \leq 3$.

б) $\iiint_V (x+y+z)dv$, если область V ограничена плоскостями $x+y+z=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

6. Найти массу однородного тела, ограниченного поверхностями $z=9-x^2-y^2$, $z=0$.

7. Вычислить момент инерции относительно оси OX , однородного тела (принять плотность $\gamma(x,y,z)=1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $x=y^2+z^2$, $x=2$.

Вариант 3.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного если область D задана линиями: $x=\sqrt{8-y^2}$, $y \geq 0$, $y=x$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x+y)dxdy$ по области D , ограниченной линиями: $y^2=x$, $y=x$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $y^2=x+2$, $x=2$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OX однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2+y^2+2ay=0$, $x-y \geq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные тройные интегралы:

а) $\iiint_V (x+y+4z^2)dxdydz$, $V: -1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $-1 \leq z \leq 1$.

б) $\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}dv$, где область V ограничена плоскостями $x=0$, $x=2$, $y=0$, $z=0$, $z=3$ и цилиндрической поверхностью $y=\sqrt{2x-x^2}$

6. Найти объем пирамиды, ограниченной плоскостями $x+2y-3z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ (с помощью тройного интеграла).

7. Вычислить момент инерции относительно оси OY , однородного тела (принять плотность $\gamma(x,y,z)=1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $y^2=x^2+z^2$, $y=2$.

Вариант 4.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного если область D задана линиями: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq 1$, $y=\ln x$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D x^2 y dxdy$ по области D , ограниченной линиями: $y=2-x$, $y=x$, $x \geq 0$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$, $x \leq 0$, $y \geq 0$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OX однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 + 2ax = 0$, $x + y \geq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные тройные интегралы:

а) $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, $V: 0 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2$.

б) $\iiint_V z dv$, где область V ограничена плоскостями $x=1$, $y=0$, $y=x$, $z=0$

и конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

6. Найти массу полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, если плотность в каждой точке $\gamma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

7. Вычислить момент инерции относительно оси OX , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $x = y^2 + z^2$, $x = 9$.

Вариант 5.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $x^2 = 2 - y$, $x + y = 0$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x^3 - 2y) dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y = x^2 - 1$, $x \geq 0$, $y \leq 0$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $y = \frac{8}{x^2 + 4}$, $x^2 = 4y$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OX однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 + 2ax \geq 0$, $x^2 + y^2 + 2ay \leq 0$, $x \leq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные тройные интегралы:

а) $\iiint_V x^2 y^2 z dx dy dz$, $V: -1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, -2 \leq z \leq 5$.

б) $\iiint_V (x^2 + y^2) dv$, где область V есть полушар $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \geq 0$.

6. С помощью тройного интеграла найти объем тела, ограниченного поверхностями $x + y + 2z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

7. Вычислить момент инерции относительно оси OX , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $x^2 = y^2 + z^2$, $x = 2$.

Вариант 6.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $y = \sqrt{2 - x^2}$, $y = x^2$.
2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (y - x) dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y = x$, $y = x^2$.
3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $y = x^2 + 1$, $x + y = 3$.
4. Вычислить статический момент относительно оси OY однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 - 2ay \geq 0$, $x^2 + y^2 + 2ax \leq 0$, $y \geq 0$, используя полярные координаты.
5. Вычислить данные тройные интегралы:
 - а) $\iiint_V (x + y + z) dx dy dz$, $V: 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0, 1 \leq z \leq 2$.
 - б) $\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_0^{\frac{x^2-y^2}{2}} \sqrt{x^2 + y^2} dz$, перейдя к цилиндрическим координатам.
6. Найти массу однородного тела, ограниченного поверхностями $x + y + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
7. Вычислить момент инерции относительно оси OY , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $y = x^2 + z^2$, $y = 2$.

Вариант 7.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $y = x^2 - 2$, $y = x$.
2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (1 + y) dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y^2 = x$, $5y = x$.
3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.
4. Вычислить статический момент относительно оси OX однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 - 2ay \leq 0$, $x^2 + y^2 - 2ax \geq 0$, $x \geq 0$, используя полярные координаты.
5. а) Вычислить $\iiint_V (2x - y^2 - z) dx dy dz$, $V: 1 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 0$.
б) Расставить пределы интегрирования в $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, где область V ограничена параболоидом $y^2 + 2z^2 = 4x$ и плоскостью $x = 2$.

6. Найти объем шара радиуса $R=2$ (с помощью тройного интеграла).

7. Вычислить момент инерции относительно оси OX , однородного тела (принять плотность $\gamma(x,y,z)=1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $x^2 = y^2 + z^2, x=3$.

Вариант 8.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $x \geq 0, y \geq 1, y \leq 3, y = x$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x+y)dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y = x^2 - 1, y = -x^2 + 1$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $y = \cos x, y \leq x+1, y \geq 0$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OY однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 - 2ax \leq 0, x^2 + y^2 + 2ay \geq 0, y \leq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные тройные интегралы:

а) $\iiint_V 2xy^2 z dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 0, 1 \leq z \leq 2$.

б) $\iiint_V (2x+3y-z) dv$, где область V ограничена плоскостями $x=0, y=0, z=0, z=3, x+y=2$.

6. Найти координаты центра тяжести (z_c) полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, если плотность в каждой точке $\gamma(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; масса полушара равна 8π .

7. Вычислить момент инерции относительно оси OX , однородного тела (принять плотность $\gamma(x,y,z)=1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $x = y^2 + z^2, x=3$.

Вариант 9.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $y^2 = 2x, x^2 = 2y, x \leq 1$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D x(y-1)dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y = 5x, y = x, x = 3$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $x = \sqrt{4-y^2}, y = \sqrt{3x}, x \geq 0$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OX однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 - 2ax \geq 0$, $x^2 + y^2 + 2ay \leq 0$, $x \geq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные интегралы:

а) $\iiint_V 5xyz^2 dx dy dz$, $V: -1 \leq x \leq 0$, $2 \leq y \leq 3$, $1 \leq z \leq 2$.

б) $\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^4 \frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, перейдя к цилиндрическим координатам.

6. Найти массу тела, ограниченного плоскостями $2x+z=2$, $x+z=1$, $y=0$ ($y \geq 0$) и цилиндром $y^2 = x$.

7. Вычислить момент инерции относительно оси OY , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z)=1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $y=2\sqrt{x^2+z^2}$, $y=2$.

Вариант 10.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $x \geq 0$, $y \geq x$, $y = \sqrt{9-x^2}$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x-2)y dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y = x$, $y = \frac{1}{2}x$, $x = 2$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $y = x^2 + 2$, $x \geq 0$, $x = 2$, $y = x$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OY однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 + 2ax \leq 0$, $x^2 + y^2 + 2ay \geq 0$, $y \leq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные тройные интегралы:

а) $\iiint_V (x^2 + 2y^2 - z) dx dy dz$, $V: 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 3$, $-1 \leq z \leq 2$.

б) $\iiint_V xyz dv$, где область V ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$.

6. Найти координаты центра тяжести (x_c) однородного тела, ограниченного поверхностями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

7. Вычислить момент инерции относительно оси OY , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z)=1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $y = x^2 + z^2$, $y = 3$.

Вариант 11.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $y^2 = 2 - x$, $y = x$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x - y^2) dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y = x^2$, $y = 1$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $y = 4x^2$, $9y = x^2$, $y \leq 2$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OX однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 - 2ay \leq 0$, $x^2 + y^2 + 2ax \geq 0$, $x \leq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные интегралы:

а) $\iiint_V (x + 2yz) dx dy dz$, $V: -2 \leq x \leq 0$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 2$.

б) $\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \frac{1}{\sqrt{z}} dz$, перейдя к сферическим координатам.

6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x + y + 6z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (с помощью тройного интеграла).

7. Вычислить момент инерции относительно оси OX , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $x^2 = y^2 + z^2$, $y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$.

Вариант 12.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $x = \sqrt{2 - y^2}$, $x = y^2$, $y \geq 0$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D x^2 y dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y = 2x^3$, $y = 0$, $x = 1$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $y = x^2$, $y = -x$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OY однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 - 2ay \geq 0$, $x^2 + y^2 - 2ax \leq 0$, $y \geq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные тройные интегралы:

а) $\iiint_V (x + yz^2) dx dy dz$, $V: 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $-1 \leq z \leq 3$.

б) $\iiint_V 3 dx dy dz$, если область V ограничена поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

6. Найти массу пирамиды, образованной плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, если $\gamma(x, y, z) = z$.

7. Вычислить момент инерции относительно оси OX , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $x = y^2 + z^2$, $y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$.

Вариант 13.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $y \geq 0$, $x + 2y - 12 = 0$, $y = \lg x$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $x = y^2$, $x = 1$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $x = y^2$, $x = \frac{3}{4}y^2 + 1$

4. Вычислить статический момент относительно оси OX однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 + 2ay = 0$, $x^2 + y^2 + ay = 0$, $x \leq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные тройные интегралы:

а) $\iiint_V (xy + 3z) dx dy dz$, $V: -1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $1 \leq z \leq 2$.

б) $\iiint_V x dV$, где область V ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = 2$ и плоскостями $z = 0$, $z = 4$.

6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, внутри конуса.

7. Вычислить момент инерции относительно оси OZ , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 3$.

Вариант 14.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $x \leq 0$, $y \geq 1$, $y \leq 3$, $y = -x$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D xy dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y = x^3$, $y = 0$, $x \leq 2$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $y = \sqrt{2 - x^2}$, $y = x^2$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OY однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $x^2 + y^2 - ax = 0$, $y \geq 0$, используя полярные координаты.

5. а) Вычислить тройной интеграл $\iiint_V (xy - z^2) dx dy dz$,

где $V: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 3$.

б) Расставить пределы интегрирования в $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, где область

V ограничена плоскостями $2x + 3y + 4z = 12$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

6. Найти статический момент относительно плоскости XOY однородного полушара $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$.

7. Вычислить момент инерции относительно оси OZ , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $z = x^2 + y^2$, $z = 3$.

Вариант 15.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $y = 0$, $y \geq x$, $y = -\sqrt{2 - x^2}$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x + y) dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y = x^3$, $y = 8$, $y = 0$, $x = 3$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OX однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 + 2ay = 0$, $x^2 + y^2 + ay = 0$, $x \geq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные тройные интегралы:

а) $\iiint_V (x^3 + yz) dx dy dz$, $V: -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

б) $\iiint_V (x^2 + y^2) dv$, где область V есть полушар $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \geq 0$.

6. Найти (тройным интегралом) объем тела, ограниченного плоскостями $x + 4y + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

7. Вычислить момент инерции относительно оси OY , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $y^2 = x^2 + z^2$, $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$.

Вариант 16.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $y \geq 0$, $x = \sqrt{y}$, $y = \sqrt{8 - x^2}$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D x(2x + y) dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y = 1 - x^2$, $y \geq 0$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $2y = \sqrt{x}$, $x + y = 5$, $x \geq 0$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OX однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, $x^2 + y^2 - ay = 0$, $x \geq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные тройные интегралы:

а) $\iiint_V (x^3 + y^3 - z) dx dy dz$, $V: 0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 0$, $0 \leq z \leq 2$.

б) $\iiint_V \frac{dv}{(x + y + z + 1)^2}$, где область V ограничена плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

6. Найти координаты центра тяжести (z_c) однородного полушара $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$. Известно, что $S_{xy} = 64\pi$ (статический момент).

7. Вычислить момент инерции относительно оси OY , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $2y = x^2 + z^2$, $y = 2$.

Вариант 17.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $y = -x$, $y^2 = x + 3$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D y(1 - x) dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y^3 = x$, $y = x$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, $x = 2$, $x = 0$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OX однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, $x^2 + y^2 - ay = 0$, $x \leq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные тройные интегралы:

а) $\iiint_V (2x^2 + y - z^3) dx dy dz$, $V: 0 \leq x \leq 1$, $-2 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

б) $\iiint_V (x^2 + y^2) dv$, где область V ограничена поверхностями $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $z = 2$.

6. Найти объем части шара радиуса R , заключенного между двумя меридианами, соответствующими долготам $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \frac{\pi}{5}$.

7. Вычислить момент инерции относительно оси OX , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $x^2 = y^2 + z^2, x = 2$.

Вариант 18.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $y = \sqrt{4 - x^2}, x \geq 0, x = 1, y = 0$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D xy^3 dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y^2 = 1 - x, x \geq 0$

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $y = -2x^2 + 2, y \geq -6$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OY однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 + 2ax = 0, x^2 + y^2 + ax = 0, y \geq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные тройные интегралы:

а) $\iiint_V x^2 y z^2 dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 0$.

б) $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, если область V верхняя половина шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

6. Найти массу однородного тела, ограниченного плоскостями $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$, если $\gamma(x, y, z) = x + y + z$.

7. Вычислить момент инерции относительно оси OZ , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $2z = x^2 + y^2, z = 2$.

Вариант 19.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $x = -1, x = -2, y \geq 0, y = x^2$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D x(y + 5) dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y = x + 5, x + y + 5 = 0, x \leq 0$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями:

$$y^2 = 4x, x = \frac{8}{y^2 + 4}.$$

4. Вычислить статический момент относительно оси OX однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $x^2 + y^2 - ax = 0$, $y \leq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные интегралы:

а) $\iiint_V (x + y - z^2) dx dy dz$, $V: 0 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 3, -1 \leq z \leq 2$.

б) $\iiint_V x^2 dv$, где область V – шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

6. Найти объем той части шара $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, которая лежит внутри цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ (в тройном интеграле перейти к цилиндрическим координатам).

7. Вычислить момент инерции относительно оси OX , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $x^2 = y^2 + z^2$, $y^2 + z^2 = 4$, $x = 0$.

Вариант 20.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $y \leq 0$, $x^2 = -y$, $x = \sqrt{1 - y^2}$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x - y) dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y = x^2 - 1$, $y = 3$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OY однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 + 2ax = 0$, $x^2 + y^2 + ax = 0$, $y \leq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные тройные интегралы:

а) $\iiint_V (x + 2y + 3z^2) dx dy dz$, $V: -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2$.

б) $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, где V – шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

6. Найти координаты центра тяжести (x_c) однородного тела, ограниченного поверхностями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

7. Вычислить момент инерции относительно оси OZ , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $2z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.

Вариант 21.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $y \geq 0, y \leq 1, y = x, x = -\sqrt{4 - y^2}$.
2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x+1)y^2 dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y = 3x^2, y = 3$.
3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $x = y^2 + 1, x + y = 3$
4. Вычислить статический момент относительно оси OX однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 + 2ay = 0, x + y \leq 0, x \geq 0$, используя полярные координаты.
5. Вычислить данные интегралы:
 - а) $\iiint_V (3x^2 + 2y + z) dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 4$.
 - б) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyz dz$.
6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = \frac{x^2 + y^2}{4}, z = 4$.
7. Вычислить момент инерции относительно оси OZ , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $z = 2(x^2 + z^2), z = 2$.

Вариант 22.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $x \leq 0, y = 1, y = 4, y = -x$.
2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D xy^2 dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y = x, y = 0, x = 1$.
3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $x^2 = 3y, y^2 = 3x$.
4. Вычислить статический момент относительно оси OX однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 - 2ay = 0, y - x \geq 0, x \geq 0$, используя полярные координаты.
5. Вычислить данные тройные интегралы:
 - а) $\iiint_V (xy - z^3) dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$.

б) $\iiint_V (x^2 + y + z^2)^3 dx dy dz$, где V ограничена поверхностями $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

6. Найти массу однородного полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$, $z \geq 0$.

7. Вычислить момент инерции относительно оси OX , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $x = 1 - y^2 - z^2$, $x = 0$.

Вариант 23.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $y = 3 - x^2$, $y = -x$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x^3 + y) dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $x + y = 1$, $x + y = 2$, $x \leq 1$, $x \geq 0$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $x = \cos y$, $x \leq y + 1$, $x \geq 0$

4. Вычислить статический момент относительно оси OY однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 + 2ax = 0$, $y - x \geq 0$, $y \leq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные тройные интегралы:

а) $\iiint_V x^3 y z dx dy dz$, $V: -1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq 1$.

б) $\iiint_V z^2 dv$, где область V ограничена параболоидом $x^2 + y^2 = z$ и плоскостью $z = 1$.

6. Найти координаты центра тяжести (y_c) однородного тела, ограниченного плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

7. Вычислить момент инерции относительно оси OY , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $y = 4 - x^2 - z^2$, $y = 0$.

Вариант 24.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $x = 0$, $x = -2$, $y \geq 0$, $y = x^2 + 4$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D xy^3 dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y = x^3$, $y \geq 0$, $y = 4x$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями:
 $x = 4 - y^2$, $x - y + 2 = 0$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OX однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, $x + y \geq 0$, $x \leq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные тройные интегралы:

а) $\iiint_V xy^2 z dx dy dz$, $V: -1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$.

б) $\iiint_V y dv$, где область V ограничена конусом $y^2 = x^2 + z^2$ и плоскостью $y = 0$, $y = 1$.

6. Найти объем тела, ограниченного плоскостями $-x + 3y - 2z = 12$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (с помощью тройного интеграла).

7. Вычислить момент инерции относительно оси OX , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $x = 3(y^2 + z^2)$, $x = 3$.

Вариант 25.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$, $(x - 3)^2 + y^2 = 1$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x^3 + 3y) dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $x + y = 1$, $y = x^2 - 1$, $x \geq 0$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $x = y^2$, $x = \sqrt{2 - y^2}$.

4. Вычислить статический момент относительно оси Oy однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 + 2ax = 0$, $x + y \leq 0$, $y \geq 0$, используя полярные координаты.

5. а) Вычислить тройной интеграл

$\iiint_V xyz^2 dx dy dz$, $V: 0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 0$, $0 \leq z \leq 4$.

б) Расставить пределы интегрирования в $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, где область V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = H$.

6. Найти объем тел, ограниченных следующими поверхностями $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (с помощью тройного интеграла).

7. Вычислить момент инерции относительно оси OZ , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $z = 9 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

Вариант 26.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $x = \sqrt{9 - y^2}$, $y = x$, $y \geq 0$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D xy dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x + y = 2$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$, $y \leq \frac{1}{2}x$, $y \geq 0$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OX однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $y - x \leq 0$, $y \geq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные тройные интегралы:

а) $\iiint_V (x + yz) dx dy dz$, $V : 0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 4$, $0 \leq z \leq 2$.

б) $\iiint_V x^2 dx dy dz$, $V : z = y^2$, $z = 3$, $y = 0$, $x = 4$.

6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 = x^2 + y^2$ и $z = x^2 + y^2$.

7. Вычислить момент инерции относительно оси OZ , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $z = 4\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 2$.

Вариант 27.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $x + 2y - 6 = 0$, $y = x$, $y \geq 0$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y = x$, $xy = 1$, $y = 2$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $y^2 = 4 - x$, $y = x + 2$, $y = 2$, $y = -2$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OY однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $y - x \leq 0$, $x + y \geq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные тройные интегралы:

а) $\iiint_V (x + y^2 - z^2) dx dy dz$, $V: -2 \leq x \leq 0, 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 5$.

б) $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)^2 dx dy dz$, если область V – верхняя половина шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $2y = x^2 + z^2$, $y = 2$.

7. Вычислить момент инерции относительно оси OZ , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $z = 3(x^2 + y^2)$, $z = 3$.

Вариант 28.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $y = -x$, $3x + y = 3$, $y = 3$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D y(1 + x^2) dx dy$ по области D , ограниченной линиями: $y = x^3$, $y = 3x$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $y = x^2$, $y = \frac{3}{4}x^2 + 1$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OX однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, $y - x \geq 0$, $x + y \geq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные тройные интегралы:

а) $\iiint_V (x + y + z^2) dx dy dz$, $V: -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1, 2 \leq z \leq 3$.

б) $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, где V ограничена поверхностями $x^2 + z^2 = z^2$, $z = 0$, $z = 1$.

6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

7. Вычислить момент инерции относительно оси OX , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $x = 2\sqrt{y^2 + z^2}$, $x = 2$.

Вариант 29.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного если область D задана линиями: $x \geq 0$, $y = 1$, $y = -1$, $y = \log_{1/2} x$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D y^2(1+2x)dxdy$ по области D , ограниченной линиями: $x=2-y^2$, $x=0$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $x=y^2$, $y^2=4-x$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OY однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2+y^2+2ax=0$, $x+y \leq 0$, $y-x \geq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные интегралы:

а) $\iiint_V (x+y^2-2z)dxdydz$, $V: 1 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq 1$.

б) $\iiint_V (x^2-y^2)dxdydz$, где V ограничена поверхностями $x^2+y^2=2x$, $z=2$, $z=0$.

6. Найти объём тел, ограниченных следующими поверхностями $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2+z^2=9$.

7. Вычислить момент инерции относительно оси OY , однородного тела (принять плотность $\gamma(x,y,z)=1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $y=3(x^2+z^2)$, $y=3$.

Вариант 30.

1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного если область D задана линиями: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y=1$, $x=\sqrt{4-y^2}$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D e^y dxdy$ по области D , ограниченной линиями: $y=\ln x$, $y=0$, $x=2$.

3. Вычислить площадь плоской области D , ограниченной линиями: $xy=1$, $x^2=y$, $y=2$, $x=0$.

4. Вычислить статический момент относительно оси OX однородной пластины D , ограниченной линиями: $x^2+y^2+2ay=0$, $y-x \leq 0$, $x+y \leq 0$, используя полярные координаты.

5. Вычислить данные тройные интегралы:

а) $\iiint_V (x-y^2-z)dxdydz$, $V: 0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 1$, $-2 \leq z \leq 1$.

б) $\iiint_V \frac{xyzdv}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где область V ограничена поверхностями $x^2+y^2+z^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

6. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$ и $2z=1-x^2-y^2$.

7. Вычислить момент инерции относительно оси OZ , однородного тела (принять плотность $\gamma(x, y, z) = 1$), занимающего область V , ограниченную поверхностями: $z = 3 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1972. – Т.П.
2. *Фролов С.В., Шостак Р.Я.* Курс высшей математики – М.: Высшая школа, 1973.
3. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике. Часть IV. – Харьков: ХГУ, 1966.
4. *Бугров Я. С.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: учеб. пособие / Я. С. Бугров. — М.: Наука, 1989. — 46 с.
5. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике: учебник: в 2 частях. Часть 2 / Д. Т. Письменный. – 11-е изд. – Москва: Айрис-Пресс, 2015. – 252 с.
6. *Бермант А. Ф.* Курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. — СПб.: Изд-во «Лань», 2005. — 736 с.
7. Сборник задач по высшей математике *К.Н. Лунгу* и др., под ред. С.Н. Федина. М.: Айрис-пресс. 2011.
8. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов: в двух частях. Часть 2 / П. Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – Москва: Мир и Образование, 2016. – 448 с.
9. *Карташов А.П., Рождественский Б.Л.* Математический анализ: Учебное пособие. 2-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2021. – 448 с.

**Чернявская Светлана Алексеевна
Царёв Валентин Геннадьевич**

ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания

В авторской редакции

Изд. № 151/2023. Объем 4,25 п.л. Усл. печ. л. 3,95. Уч.-изд. л. 4,17.
РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»