

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Е.А. Шушляпин

**АНАЛИЗ И СИНТЕЗ
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
НА ОСНОВЕ ПРОГНОЗА
КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ
НЕУПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ**

Монография

Севастополь
СевГУ
2023

УДК 681.511.2:519.714

ББК 32.965

Ш986

Р е ц е н з е н т ы:

Ю. Е. Обжерин - д-р техн. наук, профессор,
профессор кафедры «Высшая математика»

ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

В. Я. Копп - д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры
«Приборные системы и автоматизация технологических процессов»
ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

Шушляпин Е. А.

Ш986 Анализ и синтез нелинейных систем на основе прогноза конечного состояния неуправляемого движения : монография / Е. А. Шушляпин ; Севастопольский государственный университет. – Севастополь : СевГУ, 2023. – 306 с. – Текст : электронный. – ISBN 978-5-6949992-3-3.

Рассмотрены методы анализа и синтеза нелинейных систем по идентифицируемым моделям на основе переменных, которые зависят от конечного и текущего времени, а также от текущего состояния, и представляют собой по смыслу прогноз неуправляемого конечного состояния

УДК 681.511.2:519.714
ББК 32.965

Рассмотрена и рекомендована на заседании кафедры «Информатика и управление в технических системах», протокол № 8 от 03 мая 2023 г.

ISBN 978-5-6049992-3-3



9 785604 999233

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1	10
ПЕРЕМЕННЫЕ И МОДЕЛИ КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ.....	10
1.1. Формула Алексеева В.М. для конечного состояния нелинейных аффинных дифференциальных систем и определение соответствующих переменных конечного состояния	10
1.2. Обобщение формулы Алексеева В.М. на нелинейные системы с переменными запаздываниями и определение соответствующих переменных конечного состояния	14
1.2.1. Линейные системы с запаздываниями (Ю.И. Томин)	14
1.2.2. Нелинейные системы с запаздываниями	17
1.2.3. Модель конечного состояния	20
1.2.4. Пример	21
1.3. Переменные конечного состояния для дискретных и гибридных нелинейных систем...	22
1.4. Переменные конечного состояния для дискретных систем с распределенными параметрами	26
1.5. Выводы	33
ГЛАВА 2	38
МЕТОД КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ	38
2.1. Терминальное управление дифференциальными и дифференциально- функциональными системами	38
2.1.1. Дифференциальные системы	38
2.1.2. Дифференциально-функциональные системы.....	45
2.1.3. Ускоренный метод для дифференциальных систем на основе приближенных аналитических выражений для элементов моделей конечного состояния	48
2.1.4. Ускоренный метод для дифференциальных систем на основе двухэтапного подхода.....	57
2.2. Терминальное управление системами с переменными запаздываниями	58
2.3. Терминальное управление гибридными системами	60
.....	66
2.4. Терминальное управление дискретными многоиндексными системами.....	69
2.5. Управление выходом посредством сигнальной самонастройки по эталонной модели .	72
2.6. Выводы	89
ГЛАВА 3	94
ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ И МОДЕЛЕЙ КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ	94
3.1. Применение моделей конечного состояния для поиска оптимального управления в линейно-квадратической задаче	94
3.1.1. Альтернативные формы оптимального управления в линейно-квадратической задаче	94
3.1.2. Определение параметрической чувствительности оптимального конечного состояния линейно-квадратической задачи	105
3.2. Эквивалентные по конечному состоянию релейные управления	109
3.2.1. Постановка задачи и расчет моментов переключений	109
3.2.2. Погрешность конечного состояния при замене произвольного ограниченного управления приближенно эквивалентным управлением.....	117
3.3. Ковариационный анализ.....	121
3.3.1. Линейные системы	121
3.3.2. Нелинейные системы.....	124
3.3.3. Исследование и оценка ковариаций D_{xR}	134

3.3.3.1. Простой пример с аналитическим решением	134
3.3.3.2. Пример статистического анализа усложненной системы без учета ковариаций D_{xR}	135
3.3.3.3. Оценивание ковариации D_{xR}	139
3.4. Идентификация переменных и моделей конечного состояния	144
3.4.1. Постановка задачи	144
3.4.2. Идентификация дифференциальных уравнений объекта управления на основе аналитических представлений переменных конечного состояния и нелинейной переходной матрицы	147
3.4.3. Идентификация модели конечного состояния объекта управления на основе искусственных нейронных сетей	150
3.5. Сравнительный анализ метода конечного состояния и линеаризационного по входу/выходу метода	150
3.6. Выводы	156
ГЛАВА 4	164
ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ	164
4.1. Общая характеристика прикладных задач управления и особенностей моделей	164
4.2. Управляемый разгон электродвигателей постоянного тока	166
4.2.1. Математические модели электродвигателей постоянного тока и задача управляемого разгона	166
4.2.2. Управляемый разгон на основе базового варианта метода конечного состояния	168
4.2.3. Управляемый разгон на основе ускоренного варианта метода конечного состояния	175
4.2.3.1. Ускоренный вариант на основе приближенных решений	175
4.2.3.2. Ускоренный вариант на основе двухэтапного подхода	183
4.2.4. Идентификация и управление с использованием идентифицированных моделей	193
4.2.4.1. Идентификация и управление для электродвигателя постоянного тока с последовательным возбуждением	193
4.2.4.2. Идентификация и управление для электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением	201
4.2.4.3. Выводы по результатам идентификации двигателя постоянного тока	209
4.2.5. Управляемый разгон по заданной кривой переходного процесса скорости	211
4.2.6. Управляемый разгон с помощью релейного управления	225
4.3. Управление насосами в системе динамического хранения питьевой воды	228
4.4. Управление химическим реактором с рециркуляцией	234
4.5. Управление запасами	239
4.6. Управление скоростью изменения давления газа	245
4.7. Управление роботами	251
4.7.1. Управление маломерным судном-катамараном с винто-рулевыми колонками ..	251
4.7.2. Управление двухколесным двухколейным роботом	259
4.7.3. Управление трехзвенным манипулятором подводного робота	268
4.7.4. Управление квадрокоптером	282
4.8. Выводы	292
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	294
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	298

ВВЕДЕНИЕ

Многообразные и постоянно усложняющиеся задачи управления в высокотехнологичных отраслях народного хозяйства требуют адекватного методического обеспечения, которое должна предоставлять теория управления.

Отметим две особенности современных систем управления, требующие соответствующих методов – функционирование при изменяющихся в широких пределах условиях и наличие управляющих компьютеров. Эти особенности отражаются в математических моделях объектов и систем управления, которые зачастую существенно нелинейные и требуют разнородных средств математического описания. Усложнились и цели управления, отображающиеся в критериях и дополнительных (помимо физических) ограничениях. Теория управления постепенно осваивает новые виды моделей и целей, формируя арсенал соответствующих методов. Однако при этом наблюдается определенный парадокс – на практике в подавляющем большинстве случаев используются простые законы управления в виде пропорционально-интегрально-дифференциальных (ПИД) регуляторов и их алгоритмических аналогов. Это обстоятельство, отмеченное в обзоре [1] как признак кризиса теории управления, косвенно подтверждается составом разработанной в США (и постоянно обновляемой) программной системы MatLab, ориентированной на задачи управления. Если для управления линейными системами представленный там арсенал методов включает многие из известных методов управления линейными системами, то в части управления нелинейными системами, реализуемой подсистемой NCD (Nonlinear Control Design Blockset), имеется всего один тип регулятора – упомянутый выше ПИД-регулятор. Причиной такой популярности ПИД-регулятора является простота и необязательность знания математической модели объекта для его параметрической настройки. В то же время данный вид регулятора ориентирован на простейшую структуру системы автоматического управления с одним входом (задающим воздействием) и одним выходом (управляемой координатой) и простейшую цель управления – обеспечение заданных параметров переходного процесса. Из отмеченных причин, на наш взгляд, определяющей является вторая – необязательность знания математической модели. Здесь мы соприкасаемся, пожалуй, с основной причиной наблюдаемого кризиса теории управления. Жесткие сроки создания новой техники, использу-

ющей системы автоматического управления, как правило, не дают времени на разработку адекватных структурных моделей объектов управления, без которых современные усложненные алгоритмы управления функционировать не могут. Только в тех отраслях, где накоплен большой опыт разработки структурных моделей и имеется соответствующая техническая база, где объекты управления настолько дорогие, что оправдывают проведение дорогостоящих научных исследований, – такие модели создаются. Однако даже и в таких отраслях сложные алгоритмы управления используются сравнительно редко. Здесь, пожалуй, основную роль играет определенный консерватизм проектировщиков систем управления, когда при мощных и относительно недорогих управляющих компьютерах для целей формирования управления используется незначительная часть их вычислительных ресурсов. В кругах специалистов бытует мнение, что усложненные алгоритмы (в частности, оптимальные) чувствительны к неточностям моделей объектов. Наш опыт этого не подтверждает. Причина, скорее, в другом: постановки оптимизационных задач, для которых известны алгоритмы управления, отображают цели управления не напрямую, а опосредованно – через некоторые настроечные параметры, подбираемые в ходе проектирования. Получается, что дополнительные затраты на реализацию усложненных алгоритмов как бы бесполезны ввиду нечеткости критериев. И несмотря на то, что при должном навыке подбор указанных параметров особых затруднений не вызывает, факт остается фактом – алгоритмы управления, использующие математические модели объектов управления, используются нечасто.

Решить часть проблем сближения теории и практики может переход от структурных моделей к функциональным, формируемым по данным экспериментов над объектом управления. Традиционно эти вопросы разрабатываются в рамках теории идентификации и теории планирования экспериментов. Функциональные модели идентифицируются намного легче структурных ввиду того, что они напрямую связаны с откликом объекта на некоторые стандартные входные воздействия. Например, для линейных динамических объектов функциональные модели могут быть представлены в той или иной форме через частотные характеристики, переходные (единичные или импульсные) функции. Для нелинейных объектов также известны функциональные модели, например ряды Вольтерра [2], ядра которых могут быть идентифицированы. Однако почти все существующие методы управления, использующие математические модели, опираются на их структурные представления (модели состояния, структурные схемы) и используют в явном виде параметры этих моделей в виде коэффициентов усиления, обратных связей, постоянных времени и пр. Поэтому для перехода к функциональным

моделям необходима модификация многих методов управления, целью которой является представление алгоритмов управления через конструкции, аналогичные переходным матрицам. Часть методов, например, методы определения условий управляемости и наблюдаемости для линейных нестационарных систем [3], уже сформулированы через переходные матрицы. Однако большинство методов анализа и синтеза опираются все же на структурные модели. Особого внимания требуют нелинейные системы, поскольку выбор удачной формы функциональной модели для них в значительной степени определяет успех разработки методов управления. Упомянутые выше ряды Вольтерра применяются для относительно узкого класса слаболинейных систем простой структуры, довольно громоздки и неудобны для анализа, синтеза и идентификации. История развития математических методов теории управления показывает, что выбор той или иной формы модели системы определяющим образом сказываются как на методах решения задач, так и на самом перечне задач.

В настоящей монографии, вобравшей в себя результаты многолетних исследований в области анализа и синтеза нелинейных систем, представлен функциональный способ описания в общем случае нелинейных систем с линейно (аддитивно) входящими управляющими воздействиями, а также соответствующие данному способу описания методы анализа и синтеза.

В качестве способа описания предложены так называемые переменные конечного состояния (ПКС) $\bar{x}(t_f, t, x(t))$, смысл которых – прогноз конечного (в момент времени t_f) состояния неуправляемой системы, имеющей в некоторый текущий момент времени t состояние $x(t)$. Исходя из приведенного определения ПКС, они могут быть определены как функции конечного и текущего времени, а также состояния, с помощью набора экспериментов, каждый из которых представляет собой простой «прогон» системы при отсутствии управляющих воздействий. При этом значениями ПКС будут конечные состояния системы. Помимо ПКС, как функций первого аргумента t_f , определяемых путем регистрации отклика системы (по всем ее координатам) при фиксированных t и $x(t)$, представляет особый интерес ПКС, как функции второго аргумента t . Соответствующие модели названы нами моделями конечного состояния. Получение таких моделей – нетривиальная задача, особенно для дискретных по времени систем. Необходимость же моделей конечного состояния вызвана тем, что именно эти модели содержат в себе управляющие воздействия, вследствие чего появляется возможность использования ПКС для синтеза управляющих воздействий. В первой главе монографии определены ПКС и получены модели конечного состояния для

различных видов математических моделей систем: обыкновенных дифференциальных и дифференциально-функциональных систем, дифференциальных систем с переменными запаздываниями, конечно-разностных и гибридных систем, многоиндексных дискретных систем (дискретного аналога систем с распределенными параметрами).

Оказалось, что ПКС – более универсальное средство описания систем, чем другие альтернативные функциональные средства (переходные матрицы, ядра Вольтера, частотные характеристики и т.п.), поскольку они могут быть определены для любых типов систем с аддитивными управляющими воздействиями. Однако сама по себе форма описания самостоятельного смысла не имеет, если только она не подкреплена методами анализа и синтеза, основанными на этой форме. В монографии предложены несколько вариантов одного метода синтеза аддитивного управления, опирающихся на ПКС, для всех упомянутых выше видов математических моделей систем. Данный метод, названный «метод конечного состояния (МКС)», и относящийся к группе методов обратной задачи динамики, предназначен для расчета управления в терминальных задачах, т.е. задачах управления системами на конечном интервале времени с целью достижения заданного значения для некоторой функции конечного состояния системы. Приведены варианты МКС для упомянутых выше видов систем, а также его ускоренные реализации для управления в реальном времени и для обеспечения движения по заданной траектории. Соответствующие результаты приведены во второй главе.

Кроме МКС, описаны и другие приложения ПКС и моделей конечного состояния: для получения новых форм оптимального управления в линейно-квадратической задаче, для ковариационного анализа нелинейных систем. Приведены разработки алгоритмов идентификации моделей конечного состояния дифференциальных систем на основе приближенных решений нелинейных дифференциальных уравнений на основе полиномиальной аппроксимации и искусственных нейронных сетей. Кроме этого, представлен метод расчета моментов переключений релейного управления, приближенно эквивалентного по своему воздействию произвольному ограниченному управлению. Соответствующие результаты приведены в третьей главе.

Четвертая глава посвящена применению МКС для решения различных задач управления. На примере задачи управляемого разгона электродвигателя постоянного тока с независимым и последовательным возбуждением продемонстрированы: МКС для дифференциальных систем; ускоренный МКС; идентификация и управление с использованием идентифицированных моделей; реализация заданной кривой переходного процесса скорости (здесь

наряду с соответствующим вариантом МКС использован один известный метод аналогичного назначения и произведен их сравнительный анализ); управляемый разгон с помощью релейного управления. На примере задачи управление насосами в системе динамического хранения питьевой воды показана возможность управления процессами в гидросистемах сетевого типа с дифференциально-функциональными математическими моделями. МКС для систем с запаздываниями продемонстрирован на примере задачи управления температурой химического реактора с рециркуляцией. Дискретные варианты МКС проиллюстрированы на динамической задаче управления запасами и задаче управления давлением газа в газотранспортной системе. При этом первая задача решена с помощью МКС для гибридных систем, а вторая – с помощью МКС для двухиндексных систем.

Данная монография является измененной и дополненной версией монографии [Управление нелинейными системами на основе прогноза конечного состояния неуправляемого движения / Е.А. Шушляпин. – Севастополь: СевГУ, 2012. – 282 с], где основные дополнения сосредоточены в главе 2 (пункт 2.1.4) и главе 4 (подпункт 4.2.3.2, подраздел 4.7). Главное же изменение – исключение приложений с текстами компьютерных программ. При этом в пункте 2.1.4 описан двухэтапный метод конечного состояния, в подпункте 4.2.3.2 – его применение в задачах управляемого разгона электродвигателей постоянного тока. В подразделе 4.7 приведены дополнительные примеры применения МКС для управления роботами (беспилотного судна, мобильного робота, трехзвенного манипулятора, квадрокоптера).

Исследования выполнялись в течение многих лет силами автора монографии, а также его коллег: Канова Л.Н. (4.2.1, 4.2.2), Подольской О.Г. (1.3, 2.3, 4.5), Безуглой (Шушляпиной) А.Е. (2.1.3, 2.1.4, 4.7), Виноградова Е.А. (1.2.2, 2.2, 4.4), Работнова А.Е. (1.4, 2.4, 4.6), Байздренко Е.А. (3.2, 4.2.6), Афонина А.А. (4.7.1) В разработке компьютерных программ и их тестировании также принимали участие студенты и аспиранты. Всем, принимавшим участие в исследованиях, приношу благодарность.

Благодарю также своего учителя и научного консультанта д.т.н., профессора Барабанова Александра Трифоновича, а также коллег, принимавших участие в совместных исследованиях в рамках госбюджетных НИР «Корунд» (№0198U002904); «Топаз» (№0101U001179); «Изумруд» (№0104U000567); «Аметист» (№0106U012599); «Малахит» (№0109U4009072); «Пионер» (№ АААА-А17-117122070070-0); «Андроид» (№ АААА-А18-118122590087-6) Дубовика С.А., Краснодубца Л.А., Козырева В.Г., Скорохода Б.А. и др.

ГЛАВА 1

ПЕРЕМЕННЫЕ И МОДЕЛИ КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ

1.1. Формула Алексеева В.М. для конечного состояния нелинейных аффинных дифференциальных систем и определение соответствующих переменных конечного состояния

Рассмотрим в общем случае нелинейные системы с аддитивно входящим управлением, которые имеют название «аффинными»:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \Phi(t, x(t)) + B(t) \cdot u(t), \\ t \in [t_0, t_f], x(t_0) &= x^0. \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

В системе (1.1.1) x – n -мерный вектор состояния, Φ – непрерывная вместе со своими частными производными первого порядка вектор-функция, $B – (n \times r)$ - матрица коэффициентов при r -мерном векторе управления u . Аддитивность управления не является принципиальным ограничением, так как для всех неаддитивных управлений (например, управляемых параметров) можно ввести дифференциальные уравнения с неопределенными правыми частями, которые и будут новыми управляющими сигналами. При такой замене, правда, класс исходных управлений ограничен дифференцируемыми функциями.

Предполагается, что внешние воздействия на систему известны заранее на всем интервале времени $[t_0, t_f]$ и входят в вектор Φ . Следует отметить, что данное предположение традиционно для многих методов оптимального управления, хотя в практических ситуациях оно справедливо не так часто. В практических задачах вместо неизвестного внешнего возмущения можно использовать его прогнозные значения либо управлять с ошибкой от его неучета.

В частном случае

$$\Phi(t, x) \equiv A(t) \cdot x + C(t) \cdot f(t), \quad (1.1.2)$$

где $f(t) – m$ - мерный вектор внешних возмущений, имеем линейную нестационарную систему.

Наряду с (1.1.1) будем рассматривать также соответствующую однородную систему с переменными, обозначенными $\bar{x}(\vartheta, t, x(t))$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= \Phi[\vartheta, \bar{x}(\vartheta, t, x(t))], \\ \vartheta \in [t, t_f], \bar{x}(t, t, x(t)) &= x(t). \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Переменные $\bar{x}(\mathcal{G}, t, x(t))$ назовем переменными конечного состояния. Их смысл при $\mathcal{G} = t_f$ следует из определения (1.1.3) – это прогноз конечного состояния неуправляемой системы, имеющей в момент t состояние $x(t)$.

Известно выражение, определяющее решение неоднородной системы (1.1.1) через решение однородной системы (1.1.3), называемое интегральной формулой Алексева [4], которое в принятых здесь обозначениях имеет вид

$$x(t_f) = \bar{x}(t_f, t, x(t)) + \int_t^{t_f} W(t_f, \tau, x(\tau)) \cdot B(\tau) \cdot u(\tau) d\tau. \quad (1.1.4)$$

В формуле (1.1.4) $x, \bar{x}$ – переменные состояния и конечного состояния, определяемые соответственно выражениями (1.1.1), (1.1.5) при начальных условиях в момент t ; $W(t_f, \tau, x(\tau))$ – $(n \times n)$ -матрица, определяемая как функция первого аргумента $\mathcal{G}$ системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dW(\mathcal{G}, t, x(t))}{d\mathcal{G}} &= A(\mathcal{G}, x(t)) \cdot W(\mathcal{G}, t, x(t)), \\ W(t, t, x(t)) &= I, \\ A(\mathcal{G}, x(t)) &\equiv \left\{ \frac{\partial \Phi_i(\mathcal{G}, x)}{\partial x_j} \right\} \bigg|_{x=\bar{x}(\mathcal{G}, t, x(t))}, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

где символом I обозначена единичная матрица. В (1.1.5) показана зависимость переходной матрицы W и якобиана A от $x(t)$ в силу аналогичной зависимости переменных конечного состояния $\bar{x}(\mathcal{G}, t, x(t))$, определяемых (1.1.3). Для определения W как функции первого аргумента системы (1.1.3) и (1.1.5) необходимо интегрировать совместно.

Отметим, что для линейных систем уравнения (1.1.5) при $A(t)$ из (1.1.2) определяют матрицу переходных функций как функцию первого аргумента.

Формула (1.1.4) является обобщением известной формулы Коши-Лагранжа, которая для линейной системы (1.1.1), (1.1.2) имеет вид

$$\begin{aligned} x(t_f) &= \bar{x}(t_f, t, x(t)) + \int_t^{t_f} W(t_f, \tau) \cdot B(\tau) \cdot u(\tau) d\tau, \\ \bar{x}(t_f, t, x(t)) &= W(t_f, t) \cdot x(t) + \int_t^{t_f} W(t_f, \tau) \cdot C(\tau) \cdot f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

При этом линейная матрица переходных функций $W(t_f, \tau)$ как функция второго аргумента определяется известной системой уравнений

$$\frac{dW(t_f, t)}{dt} = -W(t_f, t) \cdot A(t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad W(t_f, t_f) = I. \quad (1.1.7)$$

Сравнивая определения переходных матриц для нелинейного и линейного случая, видим, что нелинейная матрица W зависит от текущего со-

стояния x , что превращает (1.1.4) в интегральное уравнение в отличие от выражения (1.1.6), являющегося квадратурной формулой. Однако, как будет показано далее, более сложный класс зависимости (1.1.4), тем не менее, может быть источником методов управления.

Переменные же конечного состояния, определенные выше как функции первого аргумента $\mathcal{G}$, можно определить и как функции второго аргумента t . Для этого продифференцируем левую и правую часть формулы Алексеева (1.1.4) по t вдоль интегральной кривой системы уравнений (1.1.1) $x(t)$.

Поскольку $x(t_f)$ в данном случае не зависит от t , производная левой части (1.1.4) равна нулю, а в итоге получится

$$\frac{d\bar{x}(t_f, t, x(t))}{dt} = W(t_f, t, x(t)) \cdot B(t) \cdot u(t), \quad (1.1.8)$$

$t \in [t_0, t_f], \bar{x}(t_f, t_0, x(t_0))$ - начальные условия, рассчитываемые по (1.1.3)

Этот же результат другим способом получен в лемме 2 [4]. Для линейных систем вида (1.1.1), (1.1.2) аналогичное уравнение также известно (см., например, [5], с.30).

Отметим одно кажущееся противоречие, касающееся смысла переменной $\bar{x}(t_f, t, x(t))$. Указанная переменная связана с однородной системой (1.1.3), не зависящей от управления, а в то же время как функция второго аргумента она зависит от $u(t)$, что следует из (1.1.8). Это противоречие объясняется как раз тем, что производная берется вдоль интегральной кривой системы (1.1.1).

Алексеевым В.М. получено еще одно соотношение для переменных конечного состояния:

$$W(\mathcal{G}, t, x(t)) = \frac{\partial \bar{x}(\mathcal{G}, t, x(t))}{\partial x}, \quad (1.1.9)$$

откуда следует, что в качестве универсального единого средства математического описания нелинейной системы может выступать переменная конечного состояния как функция трех аргументов – скалярных временных аргументов $\mathcal{G}, t$ и векторного пространственного аргумента $x(t)$. Из (1.1.3) следует и метод определения указанной функции, которое может быть положено в основу ее идентификации.

Векторно-матричное уравнение (1.1.8), которое мы называем моделью конечного состояния, играет определяющую роль для синтеза управлений.

Вообще говоря, (1.1.8) не является моделью в пространстве переменных конечного состояния в чистом виде. Ее можно назвать смешанной моделью, так как в (1.1.8) входит как переменная конечного состояния $\bar{x}(t_f, t, x(t))$

, так и текущее состояние $x(t)$. В линейном же случае переходная матрица от $x(t)$ не зависит и модель имеет замкнутый вид. Ценность моделей конечного состояния для последующих применений определяется тремя свойствами.

Свойство 1.

$$\bar{x}(t, t, x(t)) = x(t) \quad \forall t \in [t_0, t_f], \quad (1.1.10)$$

что следует из определения (1.1.3) переменной конечного состояния.

Свойство 2. Для линейных систем выполняется соотношение

$$W(t, \tau) \cdot \bar{x}(\tau, t, x(t)) = \text{const}.$$

Это свойство известно и именуется соотношением Лагранжа для решений сопряженной и однородной систем [3]. В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{d[W(t, \tau)\bar{x}(\tau, t, x(t))]}{d\tau} &= \frac{dW(t, \tau)}{d\tau} \bar{x}(\tau, t, x(t)) + W(t, \tau) \frac{d\bar{x}(\tau, t, x(t))}{d\tau} = \\ &= -W(t, \tau)A(\tau)\bar{x}(\tau, t, x(t)) + W(t, \tau)A(\tau)\bar{x}(\tau, t, x(t)) = 0. \end{aligned}$$

Для нелинейных же систем уравнение для переходной матрицы, как функции второго аргумента, неизвестно (во всяком случае, его правая часть не равна $-W(t, \tau)\Phi(\tau, x(\tau))$), следовательно, в данном случае указанное свойство не выполняется.

Свойство 3. Правые части дифференциального уравнения (1.1.8), определяющие $\bar{x}(t_f, t, x(t))$ как функции второго аргумента t , не зависят от $\bar{x}(t_f, t, x(t))$. В линейном случае, когда $W(t_f, t)$ не зависит от $x(t)$, каждое из уравнений (1.1.8) имеет вид независимых от других уравнений квадратур. При этом в уравнениях (1.1.8) $x(t)$ отсутствует и зависимость переменных конечного состояния от $x(t)$ проявляется только в начальных условиях $\bar{x}(t_f, t_0, x(t_0))$, которые можно определить, проинтегрировав систему (1.1.3) при $t = t_0$. В нелинейном случае остается неявная (через $x(t)$) зависимость между уравнениями.

Как указывалось выше, выражение (1.1.8) давно известно и получено в [4]. Однако очевидная связь между переменными состояния и конечного состояния, выраженная в свойстве 1, насколько нам известно, не использовалась. А наличие этой связи позволяет формулировать терминальные задачи управления относительно переменных конечного состояния. Так, для любой целевой функции терминальной задачи управления выполняется равенство $J(x(t_f)) = J[\bar{x}(t_f, t_f, x(t_f))]$ и на этой основе можно строить алгоритмы управления вектором переменных конечного состояния $\bar{x}(t_f, t, x(t))$. При этом автоматически будет достигнута и цель управления по переменным состояния $x(t)$.

1.2. Обобщение формулы Алексеева В.М. на нелинейные системы с переменными запаздываниями и определение соответствующих переменных конечного состояния

Рассмотрим нелинейные системы с переменными запаздываниями вида:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \Phi(t, X(t)) + B(t)u(t), \quad (1.2.1)$$

где $X(t) = \text{colon}(x^0(t), x^1(t), \dots, x^N(t))$, $x^m(t) = x(t - h_m(t))$, $m = 0, \dots, N$, $h^0(t) \equiv 0$, h_m – неотрицательные непрерывные и дифференцируемые функции времени, $t \in [t_0, t_f]$, $x(L_{t_0})$ – n -мерный вектор начальных условий, заданный на полубесконечном интервале $L_{t_0} = (-\infty, t_0]$. Нелинейная вектор-функция правых частей Φ , по предположению, непрерывна и непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам.

Для вывода требуемых соотношений нам понадобится обобщение формулы Коши на линейные системы с переменными запаздываниями (получено Ю.И. Томиным), приведенное в одном научно-техническом отчете. В силу недоступности этого отчета для широкого круга специалистов приведем несколько видоизмененный вывод указанного соотношения.

1.2.1. Линейные системы с запаздываниями (Ю.И. Томин)

Рассмотрим линеаризованный вариант системы (1.2.1) в виде системы уравнений:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{m=0}^N A_m(t)x^m(t) + B(t)u(t) \quad (1.2.2)$$

с такими же, как в (1.2.1), начальными условиями и определениями функций переменного запаздывания $h_m(t)$ и переменных $x^m(t)$.

Следуя известной [6] схеме метода неопределенных множителей Лагранжа, умножим левую и правую части (1.2.2) на некоторую неособенную квадратную матрицу $Y(t)$ слева и проинтегрируем полученное уравнение в пределах от t_0 до t_f . В результате получим:

$$\int_{t_0}^{t_f} Y(t) \frac{dx(t)}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{m=0}^N Y(t) A_m(t) x^m(t) dt + \int_{t_0}^{t_f} Y(t) B(t) u(t) dt = I_1 + I_2. \quad (1.2.3)$$

Интегрируем левую часть (1.2.3) по частям (допустимость этой операции применительно к системам с запаздыванием, в том числе и переменным, а также условия существования и единственности решений, см., например, в [7]):

$$\int_{t_0}^{t_f} Y(t) \frac{dx(t)}{dt} dt = Y(t_f)x(t_f) - Y(t_0)x(t_0) - \int_{t_0}^{t_f} \frac{dY(t)}{dt} x(t) dt. \quad (1.2.4)$$

Далее займемся первым интегралом правой части (1.2.3), поменяв местами операции суммирования и интегрирования:

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{m=0}^N Y(t) A_m(t) x^m(t) dt = \sum_{m=0}^N \int_{t_0}^{t_f} Y(t) A_m(t) x^m(t) dt. \quad (1.2.5)$$

Введем замену переменной $z = t - h_m(t)$ и выразим отсюда t , определив обратную функцию $t = r_m(z)$. Требование существования обратной функции, а также ее дальнейшее использование накладывает некоторые ограничения на возможный вид $h_m(t)$. Будем считать, что $h_m(t)$ таковы, что все дальнейшие операции над соответствующими обратными функциями законны. Выполняя указанную выше замену с учетом того, что $dt = \partial r_m / \partial z dz$, а $x^m(t) \equiv x(t - h_m(t)) = x(z)$, получаем для m -го слагаемого I_1 :

$$\begin{aligned} I_{1m} &= \int_{t_0}^{t_f} Y(t) A_m(t) x^m(t) dt = \\ &= \int_{t_0 - h_m(t_0)}^{t_f - h_m(t_f)} Y(r_m(z)) A_m(r_m(z)) \frac{\partial r_m(z)}{\partial z} x(z) dz = \\ &= \int_{t_0 - h_m(t_0)}^{t_0} f(z) x(z) dz + \int_{t_0}^{t_f} f(z) x(z) dz - \int_{t_f - h_m(t_f)}^{t_f} f(z) x(z) dz, \\ &f(z) = Y(r_m(z)) A_m(r_m(z)) \frac{\partial r_m(z)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Возвращаясь к (1.2.3) с учетом (1.2.4) – (1.2.6), получаем:

$$\begin{aligned} Y(t_f)x(t_f) &= Y(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} Y(t)B(t)u(t)dt + \sum_{m=0}^N \int_{t_0 - h_m(t_0)}^{t_0} f(z)x(z)dz + \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{dY(t)}{dt} + \sum_{m=0}^N f(t) \right) x(t) dt - \int_{t_f - h_m(t_f)}^{t_f} f(z)x(z)dz. \end{aligned}$$

Умножим последнее выражение слева на $Y^{-1}(t_f)$ и, с учетом обозначения для переходной матрицы

$$W(t_f, t) \equiv Y^{-1}(t_f)Y(t), \quad (1.2.7)$$

запишем:

$$\begin{aligned}
x(t_f) = & W(t_f, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} W(t_f, t)B(t)u(t)dt + \\
& + \sum_{m=0}^N \int_{t_0-h_m(t_0)}^{t_0} W(t_f, r_m(z))A_m(r_m(z))\frac{\partial r_m(z)}{\partial z}x(z)dz + \\
& + \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{dW(t_f, t)}{dt} + \sum_{m=0}^N W(t_f, r_m(t))A_m(r_m(t))\frac{\partial r_m(t)}{\partial t} \right) x(t)dt - \\
& - \int_{t_f-h_m(t_f)}^{t_f} W(t_f, r_m(z))A_m(r_m(z))\frac{\partial r_m(z)}{\partial z}x(z)dz.
\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Определим переходную матрицу $W(t_f, t)$ как функцию второго аргумента векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned}
\frac{dW(t_f, t)}{dt} = & - \sum_{m=0}^N W(t_f, r_m(t))A_m(r_m(t))\frac{\partial r_m(t)}{\partial t}, \\
t \in [t_0, t_f], \quad W(t_f, t_f) = & I.
\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

Тогда при $h_m(t)$ таких, что

$$r_m(z) > t_f \text{ при } z > t_f - h_m(t_f), \tag{1.2.10}$$

предпоследний и последний интегралы из (1.2.8) равны нулю в силу (1.2.9) и (1.2.10). В частности, для постоянного запаздывания $h_m(t) = a_m > 0$ имеем $r_m(z) = z + a_m$. Тогда при z , равном значению нижнего предела последнего интеграла, т.е. при $z = t_f - h_m(t_f) = t_f - a_m$, $r_m(z) = t_f - a_m + a_m = t_f$. Для значения z , равного верхнему пределу этого интеграла, т.е. при $z = t_f$, $r_m(z) = t_f + a_m$, что больше t_f . Таким образом, помимо требований непрерывности, дифференцируемости $h_m(t)$ и существования обратной функции, в общем случае должно выполняться и условие (1.2.10).

Тогда из (1.2.8) следует обобщение формулы Коши на системы с переменными запаздываниями в виде:

$$\begin{aligned}
x(t_f) = & W(t_f, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} W(t_f, t)B(t)u(t)dt + \\
& + \sum_{m=0}^N \int_{t_0-h_m(t_0)}^{t_0} W(t_f, r_m(z))A_m(r_m(z))\frac{\partial r_m(z)}{\partial z}x(z)dz.
\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Заметим, что последний интеграл (1.2.11), помимо определяемой по (1.2.9) переходной матрицы, содержит и известный на интервале $z \in [t_0 - h_m(t_0), t_0]$ вектор начальных условий $x(z)$.

1.2.2. Нелинейные системы с запаздываниями

Далее перейдем к решению основной задачи – выводу аналогичных (1.2.9), (1.2.11) соотношений для нелинейной системы (1.2.1). Заметим, что вывод В.М. Алексеевым [4] формулы (1.1.4) и соотношений (1.1.5) опирается на ряд теорем для обыкновенных дифференциальных систем, которые для систем с запаздываниями нам неизвестны. Поэтому для вывода указанных соотношений применим другой подход.

Прежде всего, по аналогии с (1.1.4) определим ПКС системы (1.2.1) как функции первого аргумента в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}(t, \tau, x(L_\tau))}{dt} &= \Phi(t, \bar{X}(t, \tau, x(L_\tau))), \\ t \in [\tau, t_f], \quad \bar{x}(\tau, \tau, x(L_\tau)) &= x(L_\tau), \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

т.е. как решение однородной системы, следующей из (1.2.1), возбужденной в момент τ интервальным начальным условием $x(L_\tau)$. В (1.2.12) переменной $\bar{X}$ обозначен (по аналогии с X в (1.2.1)) вектор с компонентами $\bar{x}^m(t, \tau, x(L_\tau))$, $m = 0, \dots, N$, $\bar{x}^0(t, \tau, x(L_\tau)) = \bar{x}(t, \tau, x(L_\tau))$, $\bar{x}^m(t, \tau, x(L_\tau)) = \bar{x}(t - h_m(t), \tau, x(L_\tau))$.

Представим (1.2.1), разложив правые части в ряд Тейлора в окрестности переменных конечного состояния как функций первого аргумента.

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \Phi(t, \bar{X}(t, \tau, x(L_\tau))) + \sum_{m=0}^N A_m(t, \bar{X}(t, \tau, x(L_\tau))) \delta^m(t, \tau, x(L_\tau)) + \\ &+ \sum_{m=0}^N o(\delta^m(t, \tau, x(L_\tau))) + B(t)u(t), \\ \delta^m(t, \tau, x(L_\tau)) &= x^m(t) - \bar{x}^m(t, \tau, x(L_\tau)), \quad m = 0, \dots, N, \quad x^0 \equiv x, \quad \bar{x}^0 \equiv \bar{x}, \\ A_m(t, \bar{X}(t, \tau, x(L_\tau))) &= \left. \frac{\partial \Phi(t, X)}{\partial x^m} \right|_{X=\bar{X}(t, \tau, x(L_\tau))}. \end{aligned}$$

Вычитая (1.2.12) из последнего уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta(t, \tau, x(L_\tau))}{dt} &= \sum_{m=0}^N A_m(t, \bar{X}(t, \tau, x(L_\tau))) \delta^m(t, \tau, x(L_\tau)) + B(t)u(t) + \\ &+ \sum_{m=0}^N o(\delta^m(t, \tau, x(L_\tau))), \\ t \in [\tau, t_f], \quad \delta(\tau, \tau, x(L_\tau)) &= x(\tau) - \bar{x}(\tau, \tau, x(L_\tau)) = 0. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Обратим внимание на то, что матрицы A_m системы (1.2.13) не зависят от переменной δ , поэтому система (1.2.13) почти линейная в том смысле, что вся ее нелинейная часть сосредоточена в последней сумме, являющейся суммой бесконечно малых величин более высокого порядка, чем δ^m , в малой окрестности точки разложения. Может показаться, что матрицы A_m зависят от δ^m , поскольку элементы $\bar{x}^m(t, \tau, x(L_\tau)) = x^m(t) - \delta^m(t, \tau, x(L_\tau))$ векто-

ра $\bar{X}$ выражаются через δ^m . Однако, поскольку здесь $x^m(t)$ – произвольный параметр, то и $\bar{x}^m$ – произвольный параметр. Отмеченное обстоятельство важно для последующих выкладок, поскольку аддитивно входящий нелинейный член может быть заменен ограниченным внешним воздействием, максимальная норма $M(\Delta)$ которого стремится к нулю при стремлении к нулю длины интервала Δ , на котором рассматривается система (1.2.13).

Разобьем интервал $[\tau, t_f]$ на K участков длиной $\Delta > 0$ и для первого участка $t \in [\tau, \tau + \Delta]$ запишем по формуле (1.2.11) приближенное выражение для $\delta(t + \Delta, \tau, x(L_\tau))$, заменив в (1.2.13) последнюю сумму постоянным и не зависящим от положения участка вектором $M(\Delta)$. При этом вместо t_0, t_f подставим $\tau, \tau + \Delta$ соответственно, вместо $x(t_0) - \delta(\tau, \tau, x(L_\tau)) = 0$. Учтем также, что последнее слагаемое (1.2.11) в данном случае равно нулю ввиду того, что во всех точках полуинтервала L_τ ПКС $\bar{x}$ равна x согласно начальным условиям из (1.2.12). Таким образом, получаем:

$$\delta(\tau + \Delta, \tau, x(L_\tau)) = \int_{\tau}^{\tau + \Delta} W^{\delta}(\tau + \Delta, t) B(t) u(t) dt + \int_{\tau}^{\tau + \Delta} W^{\delta}(\tau + \Delta, t) M(\Delta) dt. \quad (1.2.14)$$

Здесь учтено, что в (1.2.13) два аддитивных внешних воздействия – $u(t)$ и $M(\Delta)$, заменившие $\sum_{m=0}^N o(\delta^m(t, \tau, x(L_\tau)))$. Сведя их в блочный вектор внешних воздействий $colon(u(t) \ M(\Delta))$ с блочной матрицей коэффициентов при них $(B(t) \ I_n)$, где I_n – единичная $(n \times n)$ – матрица, и применив (1.2.11), получим в итоге (1.2.14).

Определим переходную матрицу системы (1.2.13) W^{δ} как функцию первого аргумента по уравнениям (1.2.2) при начальных условиях и внешнем воздействии, которые следуют из (1.2.11). Из соотношения (1.2.11) видно, что при $u(t) = 0$ и начальных условиях $x(t_0) = e_i$, $x(t) = 0$ при $t < t_0$, где e_i – вектор-столбец, i -й элемент которого равен единице, а остальные – нулю, получаем $x(t_f) = W_i(t_f, t_0)$ – i -й столбец переходной матрицы. Применительно к (1.2.13) система уравнений для переходной матрицы имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dW^{\delta}(t, \tau)}{dt} &= \sum_{m=0}^N A_m(t, \bar{X}(t, \tau, x(L_\tau))) W_m^{\delta}(t, \tau), \\ t \in [\tau, t_f], \quad W^{\delta}(\tau, \tau) &= I, \quad W^{\delta}(t, \tau) \Big|_{t < \tau} = 0, \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

где $W_m^{\delta}(t, \tau) \equiv W(t - h_m(t), \tau)$, $W_0^{\delta}(t - h_0(t), \tau) \equiv W(t, \tau)$.

Далее рассмотрим решение (1.2.13) в момент $t = \tau + 2\Delta$.

$$\begin{aligned}
\delta(\tau + 2\Delta, \tau, x(L_\tau)) &= W^\delta(\tau + 2\Delta, \tau + \Delta) \delta(\tau + \Delta, \tau, x(L_\tau)) + \\
&+ \int_{\tau+\Delta}^{\tau+2\Delta} W^\delta(\tau + 2\Delta, t) B(t) u(t) dt + \int_{\tau+\Delta}^{\tau+2\Delta} W^\delta(\tau + 2\Delta, t) M(\Delta) dt = \\
&= W^\delta(\tau + 2\Delta, \tau + \Delta) \times \\
&\times \left(\int_{\tau}^{\tau+\Delta} W^\delta(\tau + \Delta, t) B(t) u(t) dt + \int_{\tau}^{\tau+\Delta} W^\delta(\tau + \Delta, t) M(\Delta) dt \right) + \\
&+ \int_{\tau+\Delta}^{\tau+2\Delta} W^\delta(\tau + 2\Delta, t) B(t) u(t) dt + \int_{\tau+\Delta}^{\tau+2\Delta} W^\delta(\tau + 2\Delta, t) M(\Delta) dt = \\
&= \int_{\tau}^{\tau+\Delta} W^\delta(\tau + 2\Delta, t) B(t) u(t) dt + \int_{\tau}^{\tau+\Delta} W^\delta(\tau + 2\Delta, t) M(\Delta) dt \\
&+ \int_{\tau+\Delta}^{\tau+2\Delta} W^\delta(\tau + 2\Delta, t) B(t) u(t) dt + \int_{\tau+\Delta}^{\tau+2\Delta} W^\delta(\tau + 2\Delta, t) M(\Delta) dt = \\
&= \int_{\tau}^{\tau+2\Delta} W^\delta(\tau + 2\Delta, t) B(t) u(t) dt + \int_{\tau}^{\tau+2\Delta} W^\delta(\tau + 2\Delta, t) M(\Delta) dt.
\end{aligned}$$

При получении последнего выражения использовано свойство $W^\delta(t_1, t_2) W^\delta(t_2, t_3) = W^\delta(t_1, t_3)$, вытекающее из (1.2.7).

Продвигая первый аргумент K раз с шагом Δ вплоть до момента t_f , в итоге получаем:

$$\delta(t_f, \tau, x(L_\tau)) = \int_{\tau}^{t_f} W^\delta(t_f, t) B(t) u(t) dt + \int_{\tau}^{t_f} W^\delta(t_f, t) M(\Delta) dt.$$

Обратим внимание на то, что параметр Δ остался только в последнем интеграле. Устремляя его к нулю и заменяя переменную δ определяющим ее выражением, получаем в силу $\lim_{\Delta \rightarrow 0} M(\Delta) = 0$, уравнений (1.2.12), (1.2.15) и определения A_m :

$$x(t_f) = \bar{x}(t_f, \tau, x(L_\tau)) + \int_{\tau}^{t_f} W^\delta(t_f, t, x(L_\tau)) B(t) u(t) dt, \quad (1.2.16)$$

$$\frac{d\bar{x}(t, \tau, x(L_\tau))}{dt} = \Phi(t, \bar{X}(t, \tau, x(L_\tau))),$$

$$\frac{dW^\delta(t, \tau, x(L_\tau))}{dt} = \sum_{m=0}^N A_m(t, \bar{X}(t, \tau, x(L_\tau))) \cdot W_m^\delta(t, \tau, x(L_\tau)),$$

$$A_m(t, \bar{X}(t, \tau, x(L_\tau))) = \left. \frac{\partial \Phi(t, X)}{\partial X^m} \right|_{X=\bar{X}(t, \tau, x(L_\tau))},$$

$$W_m^\delta(t, \tau, x(L_\tau)) \equiv W^\delta(t - h_m(t), \tau), \quad (1.2.17)$$

$$t \in [\tau, t_f], \quad W^\delta(\tau, \tau, x(L_\tau)) = I, \quad W^\delta(t, \tau, x(L_\tau)) \Big|_{t < \tau} = 0,$$

$$\bar{x}(\tau, \tau, x(L_\tau)) = x(L_\tau).$$

В (1.2.16), (1.2.17) показана зависимость переходной матрицы не только от временных аргументов t_f, τ , но и интервального $x(L_\tau)$ в силу ее зависимости от ПКС $\bar{x}(t_f, \tau, x(L_\tau))$.

1.2.3. Модель конечного состояния

Дифференцируя (1.2.16) по переменной τ , получаем модель конечного состояния для нелинейных систем с переменными запаздываниями в той же форме (1.1.8), что и для обыкновенных дифференциальных систем:

$$\frac{d\bar{x}(t_f, \tau, x(\tau))}{d\tau} = W^\delta(t_f, \tau, x(L_\tau))B(\tau)u(\tau) \quad (1.2.18)$$

При этом различие обыкновенных систем и систем с запаздываниями проявляется только в уравнениях для переходных матриц W и W^δ . При этом, в силу зависимости переходной матрицы W^δ от запаздывающего аргумента, (1.2.18) представляет собой систему с запаздываниями.

Покажем, что для систем с запаздыванием выполняется и полученное для обыкновенных дифференциальных систем В.М. Алексеевым свойство (1.1.9). Дифференцируя (1.2.11) по пространственной переменной x , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\bar{x}(t, \tau, x(L_\tau))}{dt} \right) &= \sum_{m=0}^N \frac{\partial}{\partial x} \Phi(t, \bar{X}(t, \tau, x(L_\tau))) = \\ &= \sum_{m=0}^N \frac{\partial}{\partial \bar{X}_m} \Phi(t, \bar{X}(t, \tau, x(L_\tau))) \frac{\partial \bar{X}_m(t, \tau, x(L_\tau))}{\partial x}. \end{aligned}$$

Меняя местами порядок взятия производных в левой части (это можно делать в силу исходного предположения о непрерывности производных вектор-функции Φ), получаем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{x}(t, \tau, x(L_\tau))}{\partial x} \right) = \sum_{m=0}^N \frac{\partial}{\partial \bar{X}_m} \Phi(t, \bar{X}(t, \tau, x(L_\tau))) \frac{\partial \bar{X}_m(t, \tau, x(L_\tau))}{\partial x}. \quad (1.2.19)$$

Сравнивая последнее выражение с уравнениями для переходной матрицы как функции первого аргумента из соотношений (1.2.15), видим, что $W^\delta(t, \tau, x(L_\tau)) \equiv \partial \bar{x}(t, \tau, x(L_\tau)) / \partial x$, т.е. переходная матрица равна производной вектора переменных конечного состояния по пространственному аргументу. Отсюда видно, что основным элементом моделей конечного состояния являются именно переменные конечного состояния (ПКС), а переходные матрицы играют вспомогательную роль. Напомним, что ПКС зависят от трех аргументов – двух временных и пространственного. При этом производная ПКС по первому временному аргументу дает однородную систему вида (1.2.12), производная по второму аргументу – модель конечного состояния

(1.2.18), а производная по пространственному аргументу - уравнения для нелинейной переходной матрицы (1.2.19).

1.2.4. Пример

Рассмотрим пример нелинейной системы первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= x(t)x\left(t - \frac{1}{t+a}\right) + u(t), \\ t &\in [t_0, t_f], x(L_{t_0}) = \frac{1}{t}. \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

Согласно (1.2.1), скалярная функция $\Phi(t, X(t)) = x(t)x\left(t - \frac{1}{t+a}\right)$, $X(t) = \text{colon}(x(t) \quad x(t - h_1(t)))$, $h_1(t) = \frac{1}{t+a}$.

Проверим соотношения (1.2.10), определив обратную функцию $r_1(z)$ из соотношения $z = t - \frac{1}{t+a}$. Получим:

$$t = r_1(z) = -\frac{a-z}{2} + \sqrt{\frac{(a-z)^2}{4} + (1+az)}, \quad (1.2.21)$$

где оставлен тот из корней, который допускает положительное значение.

Пусть $t_0 = 0$, $t_f = 1$, $a = 1$. Подстановкой в (1.2.21) получаем, что при $z > 1 - \frac{1}{1+1} = 0,5$ обратная функция $r_1(0,5) > 1$, т.е. соотношения (1.2.10) выполняются. Следовательно, в данном случае формула (1.2.16) может применяться. Компьютерными экспериментами выявлено, что при $a = 1$ это имеет место для всех $t_f \geq 0,57$. При увеличении a порог уменьшается и наоборот.

Сформируем модель конечного состояния. Имея в виду, что $x_0(t) \equiv x(t)$, $x_1(t) \equiv x(t - h_1(t))$, матрицы A_m определяются выражениями:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}} = \bar{x} \left(t - \frac{1}{t+a}, \tau, x(L_\tau) \right), \\ A_1 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \Big|_{x=\bar{x}} = \bar{x}(t, \tau, x(L_\tau)). \end{aligned}$$

Тогда, согласно (1.2.16 – 1.2.18), имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{x}(t_f, \tau, x(L_\tau))}{d\tau} &= W(t_f, \tau, x(L_\tau))u(t), \\
\frac{d\bar{x}(t, \tau, x(L_\tau))}{dt} &= \bar{x}(t, \tau, x(L_\tau))\bar{x}\left(t - \frac{1}{t+a}, \tau, x(L_\tau)\right), \\
\frac{dW(t, \tau, x(L_\tau))}{dt} &= \bar{x}\left(t - \frac{1}{t+a}, \tau, x(L_\tau)\right)W(t, \tau, x(L_\tau)) + \\
&+ \bar{x}(t, \tau, x(L_\tau))W\left(t - \frac{1}{t+a}, \tau, x(L_\tau)\right), \\
t \in [\tau, t_f], \quad \bar{x}(\tau, \tau, x(L_\tau)) &= x(L_\tau), \quad W(\tau, \tau, x(L_\tau)) = 1, \\
W(t, \tau, x(L_\tau))|_{t < \tau} &= 0.
\end{aligned}$$

В итоге для нелинейных систем (1.2.1) с гладкими правыми частями, переменными запаздываниями и аддитивным управляющим воздействием получена модель конечного состояния (1.2.17), (1.2.18) и формула связи между конечным состоянием системы, ее начальными условиями и аддитивными внешними воздействиями (1.2.16), являющаяся обобщением формулы В.М. Алексеева (1.1.4) для обыкновенных дифференциальных систем. Полученные соотношения могут быть использованы для терминального управления системами с запаздыванием методом конечного состояния (см. пункт 2.1.2), а также гибридных систем с подсистемами, включающими элементы запаздывания.

1.3. Переменные конечного состояния для дискретных и гибридных нелинейных систем

Рассмотрим математическую модель гибридной системы, заданную в форме дифференциальной системы с разрывами решений:

$$\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= \Phi_1(t, x(t-0)) + B_1(t) \cdot u_1(t), \\
x(t_j) &= \Phi_2(t_{j-1}, x(t_j-0)) + B_2(t_j)u_2(t_j), \\
t \in [t_0, t_f], \quad x(t_0) &= x^0, \quad j=1, 2, \dots, N, \\
t_1 < t_2 < \dots < t_N, \quad t_N &\leq t_f,
\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

где $u_1(t)$, $u_2(t_j)$ – $(r_1 \times 1)$, $(r_2 \times 1)$ - векторы управляющих воздействий на непрерывном и дискретном входах соответственно; x^0 – $(n \times 1)$ -вектор начальных условий. Известные на всем интервале детерминированные внешние воздействия, по предположению, входят в непрерывную и непрерывно дифференцируемую по всем своим аргументам $(n \times 1)$ -мерную вектор-функцию

Φ_1 и определенную при всех своих аргументах $(n \times 1)$ -мерную вектор-функцию Φ_2 .

Подобная форма записи [8] гибридных систем в виде уравнений с разрывами решений позволяет соответствующим выбором Φ_1 и Φ_2 описывать как чисто непрерывные (при $\Phi_2 \equiv 0$, $B_2 \equiv 0$), чисто дискретные с произвольным количеством переменных во времени тактов и соотношений между ними (при $\Phi_1 \equiv 0$, $B_1 \equiv 0$), так и смешанные системы. Использование в качестве аргументов функций Φ_1, Φ_2 значения состояния в точках $t-0$, t_j-0 , т.е. при пределах слева соответствующих времен, позволяет учитывать влияние состояния в предшествующий скачку момент времени. При этом, очевидно, порядок записи уравнений в системе (1.3.1) может быть произвольный.

Определим, по аналогии с рассмотренными ранее случаями, векторную переменную конечного состояния как решение неуправляемой системы, следующей из (1.3.1) при $u_1(t) = 0$, $u_2(t_j) = 0$. В результате получим уравнения со скачками для переменной конечного состояния гибридной системы (1.3.1) как функции первого аргумента $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}(\mathcal{G}, t, x(t))}{d\mathcal{G}} &= \Phi_1(\mathcal{G}, \bar{x}(\mathcal{G}-0, t, x(t))), \\ \bar{x}(t_j, t, x(t)) &= \Phi_2(t_{j-1}, \bar{x}(t_j-0, t, x(t))), \\ \mathcal{G} \in [t, t_f], \bar{x}(t, t, x(t)) &= x(t), \quad j = 1, 2, \dots, N, \\ t_1 < t_2 < \dots < t_N, \quad t_N \leq t_f, \quad t &\in [t_0, t_f] \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Далее получим модель конечного состояния, т.е. векторно-матричное дифференциальное уравнение для переменной конечного состояния как функции второго аргумента t . На непрерывном участке переменная конечного состояния как функция второго аргумента определяется моделью конечного состояния, соответствующую непрерывной подсистеме (по аналогии с (1.1.8)):

$$\frac{d\bar{x}(t_j, t, x(t))}{dt} = W(t_j, t, x(t))B_1(t)u_1(t). \quad (1.3.3)$$

Получим аналогичное конечно-разностное уравнение для дискретной части задачи (1.3.1), введя для краткости записей обозначения: $\Phi_2(t_j, x) \equiv \Phi_2(j, x)$, $\bar{x}(t_j, t_k, x(t_k)) \equiv \bar{x}_{j,k}(x_k)$, $B_2(t_j) \equiv B_{2j}$, $u_2(t_j) \equiv u_{2j}$.

Из (1.3.1) и (1.3.2) следует:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{j,j-0}(x_{j-0}) &= \Phi_2(j-1, \bar{x}_{j-0,j-0}(x_{j-0})) = \\ &= \Phi_2(j-1, x_{j-0}) = x_j - B_{2j}u_{2j} = \\ &= \bar{x}_{j,j}(x_j) - B_{2j}u_{2j}, \\ j &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\bar{x}_{j,j}(x_j) - \bar{x}_{j,j-0}(x_{j-0}) = B_{2j}u_{2j}, \quad (1.3.4)$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

Полученное соотношение не является дискретным аналогом (1.3.3), поскольку в нем первый и второй индексы зависимы в отличие от (1.3.3), где аргументы t_j и t могут изменяться независимо друг от друга при соблюдении ограничения $t_{j-1} \leq t \leq t_j$. Общим же между (1.3.3) и (1.3.4) является то, что в обоих выражениях управление определяется через переменные конечного состояния как функции второго аргумента (индекса).

Исходя из определения (1.3.2) и выражения (1.3.4), получим последовательность аналогичных (1.3.4) выражений для увеличивающихся на единицу значений первого индекса.

Выпишем отдельно разностное уравнение из (1.3.2) для первого аргумента t_{j+1} и второго $t_j - 0$, соответствующее второму слагаемому левой части (1.3.4) с увеличенным на единицу первым индексом:

$$\bar{x}(t_{j+1}, t_{j-0}, x(t_j - 0)) = \Phi_2(t_{j+1-1}, \bar{x}(t_{j+1} - 0, t_j - 0, x(t_j - 0))) . \quad (1.3.5)$$

Рассмотрим аргумент $\bar{x}(t_{j+1} - 0, t_j - 0, x(t_j - 0))$. Для тех элементов вектора $\bar{x}$, которые изменяются только в дискретных точках, имеет место равенство

$$\bar{x}(t_{j+1} - 0, t_j - 0, x(t_j - 0)) = \bar{x}(t_j, t_j - 0, x(t_j - 0)) \equiv \bar{x}_{j,j-0}(x_{j-0}),$$

поскольку между моментами t_j и t_{j+1} дискретные переменные сохраняют одно и то же значение. Те же элементы, которые соответствуют входам непрерывной подсистемы в дискретную, поступают в дискретную подсистему, в том числе и в момент, непосредственно предшествующий t_{j+1} , т.е. в $t_{j+1} - 0$. Кроме того, переменная конечного состояния $\bar{x}(t_{j+1} - 0, t_j - 0, x(t_j - 0))$, входящая в правую часть (1.3.5), рассчитывается по (1.3.2) в два этапа – вначале по разностному уравнению, образуя

$$\begin{aligned} \bar{x}(t_j, t_j - 0, x(t_j - 0)) &= \Phi_2(t_{j-1}, \bar{x}(t_j - 0, t_j - 0, x(t_j - 0))) = \\ &= \Phi_2(t_{j-1}, x(t_j - 0)) \equiv \Phi_2(j-1, x_{j-0}) \end{aligned}$$

и далее по дифференциальному уравнению на интервале $\mathcal{S} \in [t_j, t_{j+1})$, т.е. до момента $t_{j+1} - 0$. При этом полученное на первом этапе значение $\bar{x}(t_j, t_j - 0, x(t_j - 0))$ используется на втором этапе в качестве начального условия. Этот процесс удобно представить последовательностью состояний и действий (процессом) $\{x_{j-0} \langle \Phi_2 \rangle \bar{x}_{j,j-0} \langle \Phi_1 \rangle \bar{x}_{j+1-0,j-0}\}$, где слева показано начальное условие для дискретной подсистемы, посередине – вычисление по дискретной части (1.3.2) через преобразование Φ_2 и результатом – началь-

ным условием для интегрирования на j -м интервале непрерывной части (1.3.2), справа – результат интегрирования с использованием Φ_1 . Введем также и более короткое обозначение указанного процесса $\Phi_{21}(j-1, x_{j-0})$ и перепишем (1.3.5) в виде:

$$\bar{x}_{j+1,j-0}(x_{j-0}) = \Phi_2(j, \Phi_{21}(j-1, x_{j-0})) \quad (1.3.6)$$

Первое слагаемое левой части (1.3.4) с увеличенным первым индексом получим, заменяя в разностном уравнении из (1.3.2) j на $j+1$ и записывая вместо t аргумент t_j . В результате имеем в сокращенных обозначениях с учетом (1.3.1):

$$\begin{aligned} \bar{x}_{j+1,j}(x_j) &\equiv \bar{x}(t_{j+1}, t_j, x(t_j)) = \Phi_2(t_{j+1-0}, \bar{x}(t_{j+1-0}, t_j, x(t_j))) = \\ &= \Phi_2(j, \bar{x}_{j+1-0,j}(x_j)). \end{aligned}$$

Переменная конечного состояния $\bar{x}_{j+1-0,j}(x_j)$ вычисляется по непрерывной части системы (1.3.2) при начальном условии $\bar{x}_{j,j}(x_j) \equiv x_j = \Phi_2(j-1, x_{j-0}) + B_{2j}u_{2j}$ и $\vartheta \in [t_j, t_{j+1})$. Таким образом, для $\bar{x}_{j+1-0,j}(x_j)$ вновь имеем двухэтапный процесс $\{x_{j-0} \langle \Phi_2 \rangle \Phi_2(j-1, x_{j-0}) + B_{2j}u_{2j} \langle \Phi_1 \rangle \bar{x}_{j+1-0,j}\}$, который обозначим $\Phi_{21}(j-1, x_{j-0}) + B_{2j}u_{2j}$, а для $\bar{x}_{j+1,j}(x_j)$ имеем:

$$\bar{x}_{j+1,j}(x_j) = \Phi_2(j, \Phi_{21}(j-1, x_{j-0}) + B_{2j}u_{2j}). \quad (1.3.7)$$

Вычитая (1.3.6) из (1.3.7), получаем:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{j+1,j}(x_j) - \bar{x}_{j+1,j-0}(x_{j-0}) &= \\ &= \Phi_2(j, \Phi_{21}(j-1, x_{j-0}) + B_{2j}u_{2j}) - \\ &- \Phi_2(j, \Phi_{21}(j-1, x_{j-0})). \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Для сокращения последующих записей введем обозначение:

$$\Phi_{2[j]}^{[k]}(x) \equiv \Phi_2(j, \Phi_{21}(j-1, \Phi_{21}(j-2, \dots \Phi_{21}(j-k+1, x))))), \quad (1.3.9)$$

где Φ_2 имеет k рекурсивных вхождений, дополненных операциями интегрирования непрерывной части системы (1.3.2). Начальным условием рекурсии является $\Phi_{2[j]}^{[1]}(x) \equiv \Phi_2(j, x)$. В новых обозначениях вместо (1.3.8) запишем:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{j+1,j}(x_j) - \bar{x}_{j+1,j-0}(x_{j-0}) &= \Phi_{2[j]}^{[1]}(\Phi_{21}(j-1, x_{j-0}) + B_{2j}u_{2j}) - \\ &- \Phi_{2[j]}^{[1]}(\Phi_{21}(j-1, x_{j-0})). \end{aligned}$$

Для того, чтобы увидеть закономерность, произведем в (1.3.4) еще одно увеличение на единицу первого индекса. Пользуясь, как и прежде, определением (1.3.2), получаем:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{j+2,j}(x_j) - \bar{x}_{j+2,j-0}(x_{j-0}) &= \\ &= \Phi_2(j+1, \bar{x}_{j+2-0,j}(x_j)) - \Phi_2(j+1, \bar{x}_{j+2-0,j-0}(x_{j-0})). \end{aligned}$$

Для $\bar{x}_{j+2-0,j}(x_j)$ имеем процесс:

$$\{\bar{x}_{j+1,j} = \Phi_2(j, \Phi_{21}(j-1, x_{j-0}) + B_{2j}u_{2j}) \langle \Phi_1 \rangle \bar{x}_{j+2-0,j} \},$$

т.е. $\Phi_{21}(j, \Phi_{21}(j-1, x_{j-0}) + B_{2j}u_{2j})$ в сокращенном обозначении.

Для $\bar{x}_{j+2-0,j-0}(x_{j-0})$ имеем процесс:

$$\{x_{j+1,j-0} = \Phi_2(j, \Phi_{21}(j-1, x_{j-0})) \langle \Phi_1 \rangle \bar{x}_{j+2-0,j-0} \}$$

или $\Phi_{21}(j, \Phi_{21}(j-1, x_{j-0}))$ в сокращенном обозначении.

В итоге получаем:

$$\begin{aligned} & \bar{x}_{j+2,j}(x_j) - \bar{x}_{j+2,j-0}(x_{j-0}) = \\ & = \Phi_2(j+1, \bar{x}_{j+2-0,j}(x_j)) - \Phi_2(j+1, \bar{x}_{j+2-0,j-0}(x_{j-0})) = \\ & = \Phi_2(j+1, \Phi_{21}(j, \Phi_{21}(j-1, x_{j-0}) + B_{2j}u_{2j})) - \\ & - \Phi_2(j+1, \Phi_{21}(j, \Phi_{21}(j-1, x_{j-0}))) = \\ & = \Phi_{2[j+1]}^{[2]}(\Phi_{21}(j-1, x_{j-0}) + B_{2j}u_{2j}) - \Phi_{2[j+1]}^{[2]}(\Phi_{21}(j-1, x_{j-0})). \end{aligned}$$

В общем случае имеет место:

$$\begin{aligned} & \bar{x}_{j+k,j}(x_j) - \bar{x}_{j+k,j-1}(x_{j-1}) = \\ & = \Phi_{2[j+k-1]}^{[k]}(\Phi_{21}(j-1, x_{j-0}) + B_{2j}u_{2j}) - \Phi_{2[j+k-1]}^{[k]}(\Phi_{21}(j-1, x_{j-0})). \end{aligned}$$

Из последнего выражения при $k = N - j$ следует:

$$\begin{aligned} & \bar{x}_{N,j}(x_j) - \bar{x}_{N,j-1}(x_{j-1}) = \\ & = \Phi_{2[N-1]}^{[N-j]}(\Phi_{21}(j-1, x_{j-0}) + B_{2j}u_{2j}) - \Phi_{2[N-1]}^{[N-j]}(\Phi_{21}(j-1, x_{j-0})). \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

При этом в процессе Φ_{21} нижнего уровня рекурсии производится интегрирование непрерывной части системы (1.3.2) на интервале $[t_1, t_2]$, а на предшествующих уровнях – $[t_2, t_3], \dots, [t_{N-1}, t_N]$ соответственно с уменьшением глубины.

Выражение (1.3.10) является дискретным аналогом модели конечного состояния для непрерывного случая (1.3.3). Особенностью модели (1.3.10) является неявное вхождение управления u_{2j} , которое «спрятано» на нижнем уровне рекурсивных вложений.

1.4. Переменные конечного состояния для дискретных систем с распределенными параметрами

Ниже представлен вывод соотношений для переменных конечного состояния применительно к дискретным системам с распределенными параметрами, представленными в виде многоиндексных конечно-разностных математических моделей в нормальной форме. Выбор данного класса моделей обусловлен, главным образом, тем, что нам неизвестен аналог формулы Ко-

ши-Лагранжа (1.1.6) для нормальных линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных, а попытки ее получения оказались безуспешными. Указанный же аналог является необходимым элементом для получения модели конечного состояния в непрерывной форме. Тем более, что, с практической точки зрения, использование дискретизации дифференциальных уравнений имеет определенные достоинства. Первое достоинство – существенное ослабление требований к функциям правых частей соответствующих нормальных форм уравнений. Так, сравнивая определения переменных конечного состояния для непрерывных (1.1.3), (1.1.5), (1.1.8) и дискретных (1.3.2), (1.3.10) систем обыкновенного типа, видим, что в (1.1.5) используются значения производных функций правых частей, а в (1.3.10) – значения функций правых частей. Это же следует ожидать и для систем с распределенными параметрами. Другое достоинство – отсутствие необходимости применения специальных разностных схем численного интегрирования.

Для упрощения последующих выкладок рассмотрим вначале двухиндексный случай, соответствующий уравнениям в частных производных с двумя независимыми переменными, а затем получим обобщение для многоиндексного случая. Рассмотрим двухиндексную терминальную задачу с аддитивным управлением в нормальной форме:

$$\begin{aligned} 1) \quad x(i, j-1) &= \Phi_1(i-1, j-1, x(i-1, j-1)) + B_1(i-1, j-1) \cdot u_1(i, j), \\ 2) \quad x(i-1, j) &= \Phi_2(i-1, j-1, x(i-1, j-1)) + B_2(i-1, j-1) \cdot u_2(i, j), \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

где $i = 1, 2, \dots, N_1$; $j = 1, 2, \dots, N_2$; $x(i, 0)$, $x(0, j)$ – заданные «левые» граничные условия; x, Φ_1, Φ_2 – n -мерные векторы; $B_1 - (n \times r_1)$ -мерная матрица при управлении u_1 , $B_2 - (n \times r_2)$ -мерная матрица при управлении u_2 .

Переменные конечного состояния (ПКС) в дискретном двухиндексном случае должны зависеть от двух пар индексов. Уравнения для ПКС как функции первой пары индексов, по смыслу ПКС как прогноза конечного состояния неуправляемого движения, определим из однородного уравнения, следующего из (1.4.1). Вектор ПКС как функция второй пары индексов, т.е. $x(N_1, N_2, i-1, j-1, x(i-1, j-1))$, имеет смысл конечного состояния однородной системы, следующей из (1.4.1) и имеющей в дискретные моменты $i-1, j-1$ состояние $x(i-1, j-1)$. Оказывается, что, как функция второй пары индексов, ПКС зависит от управления (показано ниже), что позволяет, при рациональных требованиях к поведению ПКС как функции второй пары индексов, его определять. Систему рекуррентных соотношений, определяющей ПКС как функцию второй пары индексов, мы, как и ранее, называем моделью конечного состояния.

Определим переменную конечного состояния (ПКС) как решение однородного уравнения, следующего из (1.4.1), в смысле функции первой пары индексов (первое уравнение – функция k , второе уравнение – функция l).

$$\begin{aligned}
 1) \bar{x}(k, l-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) &= \\
 &= \Phi_1[k-1, l-1, \bar{x}(k-1, l-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1))], \\
 2) \bar{x}(k-1, l, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) &= \\
 &= \Phi_2[k-1, l-1, \bar{x}(k-1, l-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1))], \\
 3) \bar{x}(i-1, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) &= x(i-1, j-1), \\
 4) \bar{x}(k, l, k, l, x(k, l)) &= x(k, l),
 \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

где $k = i, i+1, \dots, N_1$; $l = j, j+1, \dots, N_2$.

Последнее выражение в (1.4.2) имеет место, так как первая пара индексов означает дискретный момент вычислений по рекуррентным формулам (1.4.2), а вторая – момент начала при начальных условиях $x(k, l)$. Следовательно, при совпадающих парах выход будет совпадать с начальным условием.

Далее получим алгоритм для расчета ПКС как функций второй пары индексов. Вначале – для второй пары индексов, отличающихся на единицу от значений первой пары. Это следует из (1.4.1) при $k = i$, $l = j$.

$$\begin{aligned}
 1) \bar{x}(i, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) &= \\
 &= \Phi_1[i-1, j-1, \bar{x}(i-1, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1))] = \\
 &= \Phi_1[i-1, j-1, x(i-1, j-1)] = x(i, j-1) - B_1(i-1, j-1) \cdot u_1(i, j), \\
 2) \bar{x}(i-1, j, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) &= \\
 &= \Phi_2[i-1, j-1, \bar{x}(i-1, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1))] = \\
 &= \Phi_2[i-1, j-1, x(i-1, j-1)] = x(i-1, j) - B_2(i-1, j-1) \cdot u_2(i, j).
 \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

В соотношениях (1.4.3) заменяем в соответствии с (1.4.2) переменные состояния переменными конечного состояния:

$$\begin{aligned}
 x(i, j-1) &= \bar{x}(i, j-1, i, j-1, x(i, j-1)), \\
 x(i-1, j) &= \bar{x}(i-1, j, i-1, j, x(i-1, j)).
 \end{aligned}$$

После подстановок и переноса слагаемых в левые части имеем:

$$\begin{aligned}
 1) \bar{x}(i, j-1, i, j-1, x(i, j-1)) - \bar{x}(i, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) &= \\
 &= B_1(i-1, j-1) \cdot u_1(i, j), \\
 2) \bar{x}(i-1, j, i-1, j, x(i-1, j)) - \bar{x}(i-1, j, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) &= \\
 &= B_2(i-1, j-1) \cdot u_2(i, j).
 \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Здесь уменьшаемое и вычитаемое в левой части имеют одинаковые первые пары $\{i, j-1\}$ в первом выражении и $\{i-1, j\}$ во втором выражении,

а индексы вторых пар отличаются на единицу: в первом выражении – первый индекс, во втором выражении – второй индекс.

Теперь в (1.4.4) будем увеличивать индексы первой пары: в первом выражении – первый индекс, во втором выражении – второй индекс.

Первое слагаемое выражения 1 из (1.4.4) запишем с учетом выражения 1 из (1.4.2) с учетом подстановок: вместо $k - i$ и т.д., как показано ниже:

$$\begin{aligned} x(k|_i, (l-1)|_{j-1}, (i-1)|_i, j-1, x(i, j-1)) = \\ = \Phi_1[i-1, j-1, x(i-1, j-1, i, j-1, x(i, j-1))]. \end{aligned}$$

Теперь увеличим i первой пары ПКС на единицу:

$$\begin{aligned} \bar{x}(i+1, j-1, i, j-1, x(i, j-1)) = \\ = \Phi_1[i, j-1, \bar{x}(i, j-1, i, j-1, x(i, j-1))]. \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

То же сделаем и со вторым слагаемым выражения 1 из (1.4.4), где первый индекс j второй пары на единицу меньше:

$$\begin{aligned} \bar{x}(i, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) = \\ = \Phi_1[i-1, j-1, \bar{x}(i-1, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1))]. \end{aligned}$$

Увеличивая первый индекс первой пары, получаем:

$$\begin{aligned} \bar{x}(i+1, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) = \\ = \Phi_1[i, j-1, \bar{x}(i, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1))]. \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Таким образом, левая часть соотношения 1 из (1.4.4) с увеличенным на единицу первым индексом первой пары получена. Эта левая часть уже не будет равна $B_1 u_1$. Вычислим ее, учитывая выражение 2 из (1.4.1). Найдем разность выражений 1 и 2 из (1.4.5):

$$\begin{aligned} \bar{x}(i+1, j-1, i, j-1, x(i, j-1)) - \bar{x}(i+1, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) = \\ = \Phi_1[i, j-1, \bar{x}(i, j-1, i, j-1, x(i, j-1))] - \\ - \Phi_1[i, j-1, \bar{x}(i, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1))]. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Используя соотношение 4 из (1.4.2) и соотношение 2 из (1.4.1), запишем:

$$\begin{aligned} \bar{x}(i, j-1, i, j-1, x(i, j-1)) = x(i, j-1) = \\ = \Phi_1[i-1, j-1, x(i-1, j-1)] + B_1(i-1, j-1) \cdot u_1(i, j). \end{aligned}$$

Используя соотношение 1 из (1.4.2) при $k=i$, $l=j$ и соотношение 3 из (1.4.2), запишем:

$$\begin{aligned} \bar{x}(i, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) = \\ = \Phi_1[i-1, j-1, \bar{x}(i-1, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1))] = \\ = \Phi_1[i-1, j-1, x(i-1, j-1)]. \end{aligned}$$

Таким образом, разность (1.4.7) представлена в виде:

$$\begin{aligned} & \bar{x}(i+1, j-1, i, j-1, x(i, j-1)) - \bar{x}(i+1, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) = \\ & = \Phi_1[i, j-1, \Phi_1[i-1, j-1, x(i-1, j-1)] + B_1(i-1, j-1) \cdot u_1(i, j)] - \\ & - \Phi_1[i, j-1, \Phi_1[i-1, j-1, x(i-1, j-1)]]]. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Введем обозначение:

$$\begin{aligned} \Phi_q^{[k]}[i, j, x(i, j)] &= \underbrace{\Phi_q[i, j, \Phi_q[i-1, j, \dots, \Phi_q[i-k, j, x(i, j)]]]}_{k \text{ раз}}, \\ \Phi_q^{[1]} &\equiv \Phi_q, q=1,2. \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

С учетом (1.4.9) разность (1.4.8) при $k=l$ равна:

$$\begin{aligned} & \bar{x}(i+k, j-1, i, j-1, x(i, j-1)) - \bar{x}(i+k, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) = \\ & = \Phi_1^{[k]}[i, j-1, \Phi_1[i-1, j-1, x(i-1, j-1)] + B_1(i-1, j-1) \cdot u_1(i, j)] - \\ & - \Phi_1^{[k]}[i, j-1, \Phi_1[i-1, j-1, x(i-1, j-1)]]]. \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

В общем случае при $k > l$ выражение (1.4.10) сохраняется. Для $k = N_1 - i$ получаем, перенося второе слагаемое в правую часть:

$$\begin{aligned} & \bar{x}(N_1, j-1, i, j-1, x(i, j-1)) = \bar{x}(N_1, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) + \\ & = \Phi_1^{[N_1-i]}[i, j-1, \Phi_1[i-1, j-1, x(i-1, j-1)] + B_1(i-1, j-1) \cdot u_1(i, j)] - \\ & - \Phi_1^{[N_1-i]}[i, j-1, \Phi_1[i-1, j-1, x(i-1, j-1)]]]. \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

Проводя аналогичные действия для второго индекса первой пары выражения 2 из (1.4.4), получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \bar{x}(i-1, N_2, i-1, j, x(i-1, j)) = \bar{x}(i-1, N_2, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) + \\ & = \Phi_2^{[N_2-j]}[i-1, j, \Phi_2[i-1, j-1, x(i-1, j-1)] + B_2(i-1, j-1) \cdot u_2(i, j)] - \\ & - \Phi_2^{[N_2-j]}[i-1, j, \Phi_2[i-1, j-1, x(i-1, j-1)]]]. \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

Выражения (1.4.11) и (1.4.12) представляют собой рекуррентные формулы для вычисления ПКС как функций второй пары аргументов, а именно: (1.4.11) – как функцию i при фиксированном j ; (1.4.12) – как функцию j при фиксированном i . Такую систему рекуррентных формул, по аналогии с непрерывным случаем, назовем «Дискретной многомерной моделью конечного состояния» (ДММКС). Переменные ДММКС при известных граничных условиях, заданных соотношениями 3 из (1.4.1) и управлениях $u_1(i, j)$, $u_2(i, j)$ могут быть определены как функции аргументов i и j .

Двухиндексную модель конечного состояния (1.4.11), (1.4.12) можно обобщить на случай многих индексов. Для этого введем следующие обозначения для множеств индексов:

$$\begin{aligned}
M_p(i) &= \{i_1, i_2, \dots, i_p\} \\
M_{p \setminus q \setminus a}(i) &= \{i_1, i_2, \dots, i_{q-1}, a, i_{q+1}, \dots, i_p\}, \\
M_{p \setminus q \setminus +1}(i) &= \{i_1, i_2, \dots, i_{q-1}, i_q + 1, i_{q+1}, \dots, i_p\},
\end{aligned} \tag{1.4.13}$$

где второе и третье соотношения означают, что на q -м месте значение индекса на единицу больше (второе соотношение) или равно значению a (третье соотношение)

С учетом принятых обозначений постановка многоиндексной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}
x(M_{p \setminus j \setminus +1}(i-1)) &= \Phi_j(M_p(i-1), x(M_p(i-1))) + \\
&+ B_j(M_p(i-1)) \cdot u_j(M_p(i)),
\end{aligned} \tag{1.4.14}$$

где $i_j = 1, 2, \dots, N_j$; $j = 1, 2, \dots, p$;

$x(M_{p \setminus 1 \setminus i_1}(0)), \dots, x(M_{p \setminus p \setminus i_p}(0))$ – заданные «левые» граничные условия;

$x, \Phi_1, \dots, \Phi_p$ – n – мерные векторы;

$B_j - (n \times r_j)$ – мерная матрица при управлении u_j .

Например, в трехиндексном случае, т.е. при $p = 3$, получим:

$$\begin{aligned}
x(i_1 + 1, i_2, i_3) &= \Phi_1(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1, x(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1)) + B_1(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1) \cdot u_1(i_1, i_2, i_3), \\
x(i_1, i_2 + 1, i_3) &= \Phi_2(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1, x(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1)) + B_2(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1) \cdot u_2(i_1, i_2, i_3), \\
x(i_1, i_2, i_3 + 1) &= \Phi_3(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1, x(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1)) + B_3(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1) \cdot u_3(i_1, i_2, i_3),
\end{aligned}$$

В приведенном представлении предполагается, как и в двухиндексном случае, что в каждом разностном векторно-матричном уравнении имеется свой вектор управляющих воздействий. В частном случае допускается, что вектор управлений может быть и одинаковым для всех уравнений, как и матрицы коэффициентов при них.

Обобщая представления (1.4.11), (1.4.12) на p -индексный случай, получим два векторных соотношения для переменных конечного состояния.

Первое векторно-матричное соотношение, определяющее ПКС как функции индекса i_j первого обобщенного аргумента $M_{p \setminus j \setminus i_j}(i-1)$, имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\bar{x}(M_{p \setminus j \setminus k_j}(k-1), M_p(i-1), x(M_p(i-1))) = \\
&= \Phi_j(M_p(k-1), \bar{x}(M(k-1), M_p(i-1), x(M_p(i-1)))) \\
&\bar{x}(M_p(i-1), M_p(i-1), x(M_p(i-1))) = x(M_p(i-1)).
\end{aligned} \tag{1.4.15}$$

$k_j = 1, 2, \dots, N_j, j = 1, 2, \dots, p.$

Второе векторно-матричное соотношение, определяющее ПКС как функции индекса i_j второго обобщенного аргумента $M_{p \setminus j i_j}(i-1)$ и являющееся по смыслу моделью конечного состояния, имеет вид:

$$\begin{aligned} & \bar{x}(M_{p \setminus j N_j}(i-1), M_{p \setminus j i_j}(i-1), x(M_{p \setminus j i_j}(i-1))) = \\ & = \bar{x}(M_{p \setminus j N_j}(i-1), M_p(i-1), x(M_p(i-1))) + \\ & + \Phi_j^{[N_j-i_j]}(M_{p \setminus j i_j}(i-1), \Phi_j(M_p(i-1), x(M_p(i-1)))) + B_j(M_p(i-1))u_j(M_p(i)) - \\ & - \Phi_j^{[N_j-i_j]}(M_{p \setminus j i_j}(i-1), \Phi_j(M_p(i-1), x(M_p(i-1))))), \quad j=1, 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

Для трехиндексного случая после подстановки элементов множеств (1.4.13) соотношения (1.4.15) представятся тремя конечно-разностными уравнениями:

$$\begin{aligned} & \bar{x}(k_1, k_2 - 1, k_3 - 1, i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1, x(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1)) = \\ & = \Phi_1(k_1 - 1, k_2 - 1, k_3 - 1, \bar{x}(k_1 - 1, k_2 - 1, k_3 - 1, i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1, x(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1))), \\ & \bar{x}(k_1 - 1, k_2, k_3 - 1, i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1, x(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1)) = \\ & = \Phi_2(k_1 - 1, k_2 - 1, k_3 - 1, \bar{x}(k_1 - 1, k_2 - 1, k_3 - 1, i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1, x(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1))), \\ & \bar{x}(k_1 - 1, k_2 - 1, k_3, i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1, x(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1)) = \\ & = \Phi_3(k_1 - 1, k_2 - 1, k_3 - 1, \bar{x}(k_1 - 1, k_2 - 1, k_3 - 1, i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1, x(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1))), \\ & k_j = 1, 2, \dots, N_j, \quad j = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Соотношения (1.4.16) для трехиндексного случая представятся также тремя уравнениями:

$$\begin{aligned} & \bar{x}(N_1, i_2 - 1, i_3 - 1, i_1, i_2 - 1, i_3 - 1, x(i_1, i_2 - 1, i_3 - 1)) = \\ & = \bar{x}(N_1, i_2 - 1, i_3 - 1, i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1, x(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1)) + \\ & + \Phi_1^{N_1-i_1} \left(i_1, i_2 - 1, i_3 - 1, \Phi_1(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1, x(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1)) + \right. \\ & \left. + B_1(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1)u_1(i_1, i_2, i_3) \right) - \\ & - \Phi_1^{N_1-i_1}(i_1, i_2 - 1, i_3 - 1, \Phi_1(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1, x(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1))), \\ \\ & \bar{x}(i_1 - 1, N_2, i_3 - 1, i_1 - 1, i_2, i_3 - 1, x(i_1 - 1, i_2, i_3 - 1)) = \\ & = \bar{x}(i_1 - 1, N_2, i_3 - 1, i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1, x(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1)) + \\ & + \Phi_2^{N_2-i_2} \left(i_1 - 1, i_2, i_3 - 1, \Phi_2(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1, x(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1)) + \right. \\ & \left. + B_2(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1)u_2(i_1, i_2, i_3) \right) - \\ & - \Phi_2^{N_2-i_2}(i_1 - 1, i_2, i_3 - 1, \Phi_2(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1, x(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{x}(i_1 - 1, i_2 - 1, N_3, i_1 - 1, i_2 - 1, i_3, x(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3)) = \\
& = \bar{x}(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3, i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1, x(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1)) + \\
& + \Phi_3^{N_3 - i_3} \left(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3, \Phi_3(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1, x(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1)) + \right. \\
& \left. + B_3(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1) u_3(i_1, i_2, i_3) \right) - \\
& - \Phi_3^{N_3 - i_3} (i_1 - 1, i_2 - 1, i_3, \Phi_3(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1, x(i_1 - 1, i_2 - 1, i_3 - 1))).
\end{aligned}$$

Аналогичным образом составляются соотношения вида (1.4.16) и для большего числа индексов.

1.5. Выводы

Выпишем полученные в настоящей главе результаты в виде следующей сводной таблицы, сохранив нумерацию соответствующих формул.

Таблица 1.1 – Модели состояния и конечного состояния

Обыкновенные дифференциальные системы	
Модель состояния	$\frac{dx(t)}{dt} = \Phi(t, x(t)) + B(t) \cdot u(t), \quad (1.1.1)$ $t \in [t_0, t_f], x(t_0) = x^0.$ В системе (1.1.1) x – n-мерный вектор состояния, Φ – непрерывная вместе со своими частными производными первого порядка вектор-функция, B – $(n \times r)$-матрица коэффициентов при r-мерном векторе управления u.
Определение переменной конечного состояния и переходной матрицы	$\frac{d\bar{x}(\mathcal{G}, t, x(t))}{d\mathcal{G}} = \Phi[\mathcal{G}, \bar{x}(\mathcal{G}, t, x(t))], \quad (1.1.3)$ $\mathcal{G} \in [t, t_f], \bar{x}(t, t, x(t)) = x(t).$ $\frac{dW(\mathcal{G}, t, x(t))}{d\mathcal{G}} = A(\mathcal{G}, x(t)) \cdot W(\mathcal{G}, t, x(t)),$ $W(t, t, x(t)) = I, \quad (1.1.5)$ $A(\mathcal{G}, x(t)) \equiv \left\{ \frac{\partial \Phi_i(\mathcal{G}, x)}{\partial x_j} \right\} \bigg _{x=\bar{x}(\mathcal{G}, t, x(t))}, i, j=1 \dots n.$
Модель конечного состояния	$\frac{d\bar{x}(t_f, t, x(t))}{dt} = W(t_f, t, x(t)) \cdot B(t) \cdot u(t),$ $t \in [t_0, t_f], \bar{x}(t_f, t_0, x(t_0)) - \text{начальные условия, рассчитываемые по (1.1.3)}$ (1.1.8)
Дифференциальные системы с переменными во времени запаздываниями	
Модель состояния	$\frac{dx(t)}{dt} = \Phi(t, X(t)) + B(t)u(t), \quad (1.2.1)$ где $X(t) = \text{colon}(x^0(t), x^1(t), \dots, x^N(t)); \quad x^m(t) = x(t - h_m(t)),$ $m = 0, \dots, N, \quad h^0(t) \equiv 0; \quad h_m - \text{неотрицательные непрерывные и}$

	дифференцируемые функции времени, удовлетворяющие условию $r_m(z) > t_f \text{ при } z > t_f - h_m(t_f), \quad (1.2.10)$ где $r_m(z)$ – обратная от $z = t - h_m(t)$ функция; $t \in [t_0, t_f]$; $x(L_{t_0})$ – n-мерный вектор начальных условий, заданный на полубесконечном интервале $L_{t_0} = (-\infty, t_0]$. Нелинейная вектор-функция правых частей Φ, по предположению, непрерывна и непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам.
Определение переменной конечного состояния и переходной матрицы	$\frac{d\bar{x}(t, \tau, x(L_\tau))}{dt} = \Phi(t, \bar{X}(t, \tau, x(L_\tau))),$ $\frac{dW^\delta(t, \tau, x(L_\tau))}{dt} = \sum_{m=0}^N A_m(t, \bar{X}(t, \tau, x(L_\tau))) \cdot W_m^\delta(t, \tau, x(L_\tau)),$ $A_m(t, \bar{X}(t, \tau, x(L_\tau))) = \left. \frac{\partial \Phi(t, X)}{\partial X^m} \right _{X=\bar{X}(t, \tau, x(L_\tau))},$ $W_m^\delta(t, \tau, x(L_\tau)) \equiv W^\delta(t - h_m(t), \tau), \quad (1.2.17)$ $t \in [\tau, t_f], W^\delta(\tau, \tau, x(L_\tau)) = I, W^\delta(t, \tau, x(L_\tau)) _{t=\tau} = 0,$ $\bar{x}(\tau, \tau, x(L_\tau)) = x(L_\tau).$ В (1.2.17) переменной $\bar{X}$ обозначен (по аналогии с X в (1.2.1)) вектор с компонентами $\bar{x}^m(t, \tau, x(L_\tau))$, $m = 0, \dots, N$, $\bar{x}^0(t, \tau, x(L_\tau)) = \bar{x}(t, \tau, x(L_\tau))$, $\bar{x}^m(t, \tau, x(L_\tau)) = \bar{x}(t - h_m(t), \tau, x(L_\tau))$.
Модель конечного состояния	$\frac{d\bar{x}(t_f, \tau, x(\tau))}{d\tau} = W^\delta(t_f, \tau, x(L_\tau)) B(\tau) u(\tau). \quad (1.2.18)$
Гибридные системы	
Модель состояния в форме «с разрывами решений (скачками)»	$\frac{dx(t)}{dt} = \Phi_1(t, x(t-0)) + B_1(t) \cdot u_1(t),$ $x(t_j) = \Phi_2(t_{j-1}, x(t_j-0)) + B_2(t_j) u_2(t_j), \quad (1.3.1)$ $t \in [t_0, t_f], x(t_0) = x^0, j = 1, 2, \dots, N,$ $t_1 < t_2 < \dots < t_N, t_N \leq t_f,$ где $u_1(t)$, $u_2(t_j)$ – $(r_1 \times 1)$, $(r_2 \times 1)$- векторы управляющих воздействий на непрерывном и дискретном входах соответственно; x^0 – $(n \times 1)$-вектор начальных условий. Известные на всем интервале детерминированные внешние воздействия, по предположению, входят в непрерывную и непрерывно дифференцируемую по всем своим аргументам $(n \times 1)$-вектор-функцию Φ_1 и определенную при всех своих аргументах $(n \times 1)$-вектор-функцию Φ_2.

Определение переменной конечного состояния	$\frac{d\bar{x}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} = \Phi_1(\vartheta, \bar{x}(\vartheta - 0, t, x(t))),$ $\bar{x}(t_j, t, x(t)) = \Phi_2(t_{j-1}, \bar{x}(t_j - 0, t, x(t))),$ $\vartheta \in [t, t_f], \bar{x}(t, t, x(t)) = x(t), \quad j = 1, 2, \dots, N,$ $t_1 < t_2 < \dots < t_N, \quad t_N \leq t_f, \quad t \in [t_0, t_f]$ (1.3.2)
Модель конечного состояния	$\frac{d\bar{x}(t_j, t, x(t))}{dt} = W(t_j, t, x(t))B_1(t)u_1(t),$ (1.3.3) $\Phi_{21}(j-1, x_{j-0})$ определяется как $\{x_{j-0} \langle \Phi_2 \rangle \Phi_2(j-1, x_{j-0}) \langle \Phi_1 \rangle \bar{x}_{j+1-0, j}\}$ $\Phi_{2[j]}^{[k]}(x) \equiv \Phi_2(j, \Phi_{21}(j-1, \Phi_{21}(j-2, \dots \Phi_{21}(j-k+1, x))))$ (1.3.9) $\bar{x}_{N,j}(x_j) - \bar{x}_{N,j-1}(x_{j-1}) =$ $= \Phi_{2[N-1]}^{[N-j]}(\Phi_{21}(j-1, x_{j-0}) + B_{2j}u_{2j}) - \Phi_{2[N-1]}^{[N-j]}(\Phi_{21}(j-1, x_{j-0})).$ (1.3.10)
Двухиндексные системы (дискретный аналог дифференциальных уравнений в частных производных в нормальной форме с двумя независимыми переменными)	
Модель состояния	$x(i, j-1) = \Phi_1(i-1, j-1, x(i-1, j-1)) + B_1(i-1, j-1) \cdot u_1(i, j),$ $x(i-1, j) = \Phi_2(i-1, j-1, x(i-1, j-1)) + B_2(i-1, j-1) \cdot u_2(i, j)$ (1.4.1) где $i = 1, 2, \dots, N_1$; $j = 1, 2, \dots, N_2$; $x(i, 0)$, $x(0, j)$ – заданные «левые» граничные условия; x, Φ_1, Φ_2 – n-мерные векторы; $B_1 - (n \times r_1)$-мерная матрица при управлении u_1, $B_2 - (n \times r_2)$-мерная матрица при управлении u_2.
Определение переменной конечного состояния	$\bar{x}(k, l-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) =$ $= \Phi_1[k-1, l-1, \bar{x}(k-1, l-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1))],$ $\bar{x}(k-1, l, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) =$ $= \Phi_2[k-1, l-1, \bar{x}(k-1, l-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1))],$ (1.4.2) $\bar{x}(i-1, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) = x(i-1, j-1),$ $\bar{x}(k, l, k, l, x(k, l)) = x(k, l),$
Модель конечного состояния	$\Phi_q^{[k]}[i, j, x(i, j)] = \underbrace{\Phi_q[i, j, \Phi_q[i-1, j, \dots, \Phi_q[i-k, j, x(i, j)]]]}_{k \text{ раз}},$ (1.4.9) $\Phi_q^{[1]} \equiv \Phi_q, \quad q = 1, 2.$ $\bar{x}(N_1, j-1, i, j-1, x(i, j-1)) = \bar{x}(N_1, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) +$ $= \Phi_1^{[N_1-i]}[i, j-1, \Phi_1[i-1, j-1, x(i-1, j-1)] + B_1(i-1, j-1) \cdot u_1(i, j)] -$ $- \Phi_1^{[N_1-i]}[i, j-1, \Phi_1[i-1, j-1, x(i-1, j-1)]].$ (1.4.11) $\bar{x}(i-1, N_2, i-1, j, x(i-1, j)) = \bar{x}(i-1, N_2, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) +$ $= \Phi_2^{[N_2-j]}[i-1, j, \Phi_2[i-1, j-1, x(i-1, j-1)] + B_2(i-1, j-1) \cdot u_2(i, j)] -$ $- \Phi_2^{[N_2-j]}[i-1, j, \Phi_2[i-1, j-1, x(i-1, j-1)]].$ (1.4.12)

Многоиндексные системы (дискретный аналог дифференциальных уравнений в частных производных в нормальной форме с произвольным числом независимых переменных)	
Модель состояния	Определения множеств индексов: $M_p(i) = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}, M_{p \setminus q \setminus +1}(i) = \{i_1, i_2, \dots, i_{q-1}, i_q + 1, i_{q+1}, \dots, i_p\}, \quad (1.4.13)$ $M_{p \setminus q \setminus a}(i) = \{i_1, i_2, \dots, i_{q-1}, a, i_{q+1}, \dots, i_p\}$ Модель: $x(M_{p \setminus j \setminus +1}(i-1)) = \Phi_j(M_p(i-1), x(M_p(i-1))) + B_j(M_p(i-1)) \cdot u_j(M_p(i)),$ где $i_j = 1, 2, \dots, N_j; j = 1, 2, \dots, p; x(M_{p \setminus 1 \setminus i_1}(0)), \dots, x(M_{p \setminus p \setminus i_p}(0))$ – заданные «левые» граничные условия; $x, \Phi_1, \dots, \Phi_p$ – n – мерные векторы; $B_j - (n \times r_j)$ – мерная матрица при управлении u_j.
Определение переменной конечного состояния	$\bar{x}(M_{p \setminus j \setminus k_j}(k-1), M_p(i-1), x(M_p(i-1))) =$ $= \Phi_j(M_p(k-1), \bar{x}(M(k-1), M_p(i-1), x(M_p(i-1))))), \quad (1.4.15)$ $\bar{x}(M_p(i-1), M_p(i-1), x(M_p(i-1))) = x(M_p(i-1)).$ $k_j = 1, 2, \dots, N_j, j = 1, 2, \dots, p.$
Модель конечного состояния	$\Phi_q^{[k]}[i, j, x(i, j)] = \underbrace{\Phi_q[i, j, \Phi_q[i-1, j, \dots, \Phi_q[i-k, j, x(i, j)]]]}_{k \text{ раз}},$ $\Phi_q^{[1]} \equiv \Phi_q, q = 1, 2, \dots, p.$ $\bar{x}(M_{p \setminus j \setminus N_j}(i-1), M_{p \setminus j \setminus i_j}(i-1), x(M_{p \setminus j \setminus i_j}(i-1))) =$ $= \bar{x}(M_{p \setminus j \setminus N_j}(i-1), M_p(i-1), x(M_p(i-1))) +$ $+ \Phi_j^{[N_j - i_j]}(M_{p \setminus j \setminus i_j}(i-1), \Phi_j(M_p(i-1), x(M_p(i-1)))) + B_j(M_p(i-1)) u_j(M_p(i-1)) -$ $- \Phi_j^{[N_j - i_j]}(M_{p \setminus j \setminus i_j}(i-1), \Phi_j(M_p(i-1), x(M_p(i-1))))), j = 1, 2, \dots, p. \quad (1.4.16)$

Из анализа приведенных в таблице 1.1 соотношений следуют выводы, которые перечислены ниже.

1. Наиболее общим, альтернативным моделям состояния, средством описания нелинейных систем следует считать переменные конечного состояния, которые как функции первого и второго (для многоиндексных – первого и второго множеств индексов) определены для всех рассмотренных случаев.
2. Во всех рассмотренных случаях сохраняются равенства значений переменных конечного состояния при одинаковых значениях первого и второго аргумента (для многоиндексных – первого и второго множеств индексов) и переменных состояния при таком же значении данного аргумента.

3. Модели конечного состояния, соответствующие соотношениям для определения переменных конечного состояния как функций второго аргумента (для многоиндексных – второго множества индексов), зависят от управляющих воздействий, что позволяет использовать эти модели, совместно со свойством предыдущего пункта выводов, для определения управлений.
4. В дискретных системах (в том числе многоиндексных) управления «спрятаны» на нижних уровнях рекурсий функций правых частей (для дискретных подсистем гибридных систем – правых частей дискретных подсистем).
5. Переходные матрицы, которые традиционно используются как альтернативные средства описания линейных систем (см. (1.1.6)), в нелинейном случае эту роль не сохраняют (см. (1.1.4)). В дискретном случае (в том числе многоиндексном) переходных матриц (в смысле обобщений матрицы В.М. Алексеева) получить не удалось, и, скорее всего, это вообще невозможно.

ГЛАВА 2

МЕТОД КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

2.1. Терминальное управление дифференциальными и дифференциально-функциональными системами

2.1.1. Дифференциальные системы

Предлагаемый в настоящем подразделе метод относится к группе методов обратной задачи динамики. Характерной особенностью обратной задачи является задание в той или иной форме желаемого движения, для реализации которого ищется управляющая функция. Отличием предлагаемого метода от его прототипов является то, что желаемое движение задается не в пространстве переменных состояния, а в пространстве переменных конечного состояния.

Другим истоком предлагаемого метода является метод синтеза управлений на основе функций Ляпунова (МФЛ) [9]. В отличие от МФЛ, в методе конечного состояния (МКС) вместо функции Ляпунова используется так называемая критериальная функция. Критериальная функция представляет собой целевую функцию конечного состояния терминального критерия, где вектор состояния в конечный момент времени заменен вектором переменных конечного состояния в виде зависимости от второго временного аргумента. Общим между МФЛ и МКС является то, что в обоих методах управление явно определяется из выражения для производной функции Ляпунова (для МФЛ) или критериальной функции (для МКС) по времени в силу уравнений системы. При этом для МФЛ система представляется моделью состояния, а для МКС – моделью конечного состояния.

Общая схема метода, независимо от средств математического описания системы, базируется на двух элементах. Первый элемент – использование модели конечного состояния, связывающей вектор переменных конечного состояния $\bar{x}(t_f, t, x(t))$ как функции второго аргумента t (текущего времени) и конечного времени функционирования системы t_f с управлением. Второй элемент – равенства типа (1.1.10) значений переменных конечного состояния при одинаковых значениях первого и второго аргументов соот-

ветствующим переменным состояния $x(t)$. Последнее, как уже отмечалось в подразделе 1.1, позволяет, в силу равенства $J(x(t_f)) = J[\bar{x}(t_f, t_f, x(t_f))]$, задачу управления системой на конечном интервале $t \in [t_0, t_f]$ с критерием вида

$$J = J(x(t_f)) \rightarrow J^* \quad (2.1.1)$$

заменить задачей с критерием

$$J = J(\bar{x}(t_f, t, x(t))) \rightarrow J^*. \quad (2.1.2)$$

Указанные критерии показывают одну и ту же цель управления в виде достижения системой в момент t_f некоторого состояния, обеспечивающего заданное значение J^* . При этом критерий (2.1.1) является терминальным, а критерий (2.1.2) с целевой функцией, зависящей от времени, – критерием для задач стабилизации. Напомним, что задача стабилизации, или регулирования, формулируется как задача поддержания выходной переменной на заданном уровне $J = J^* = \text{const}$, а задача слежения – это задача соблюдения заданного закона $J = J^*(t)$ (см. например, определения из электронного учебника http://de.ifmo.ru/bk_netra/page.php?tutindex=20&index=6).

При этом задача с критерием (2.1.1) эквивалентна задаче (2.1.2), если последняя рассматривается на конечном интервале $t \in [t_0, t_f]$, а поведение во времени критериальной функции $J(\bar{x}(t_f, t, x(t)))$ таково, что к моменту t_f эта функция имеет значение J^* . В практических задачах точная эквивалентность может быть заменена приближенной, когда $J(x(t_f)) \cong J[\bar{x}(t_f, t_f, x(t_f))]$.

Появление текущего времени в критерии порождает неопределенность в выборе желаемой формы $J(\bar{x}(t_f, t, x(t)))$. С этой точки зрения представляет интерес, каким образом ведут себя критериальные функции оптимальных систем. На рисунке 2.1 показаны графики оптимальных критериальных функций, обозначенных $\bar{J}(t_f, t, x(t)) \equiv J(\bar{x}(t_f, t, x(t)))$, для одной линейно-квадратической задачи со скалярным управлением на конечном интервале времени $[0, 5]$.

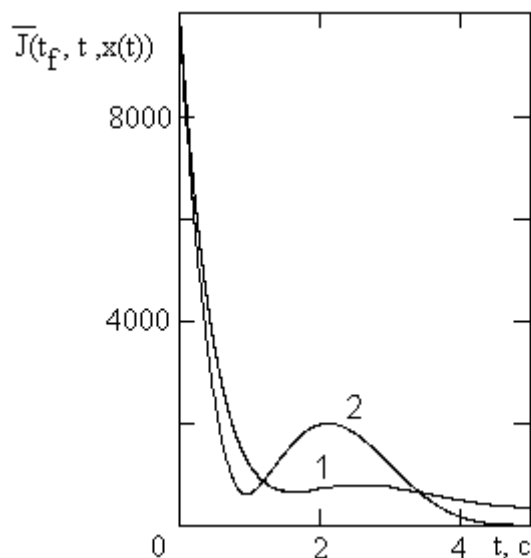


Рисунок 2.1 – Зависимости от времени оптимальных критериальных функций для одной линейно-квадратической задачи

- 1 – для большего значения весового коэффициента критерия при управлении;
- 2 – для меньшего значения весового коэффициента критерия при управлении

Как видим, это могут быть кривые довольно сложного вида. Тем не менее, представляется целесообразным производить выбор формы, исходя, прежде всего, из простоты расчета управляющего воздействия (поскольку оптимальные критериальные функции в большинстве случаев неизвестны). С этой точки зрения, наиболее простыми представляются линейная и экспоненциальная формы. Тем более, что, например, кривая 1 на рисунке 2.1 имеет форму, близкую к экспоненциальной.

Для конструирования управления методом конечного состояния для обыкновенных дифференциальных систем производим перечисленные ниже действия.

1. Задаемся желаемой формой критериальной функции $\bar{J}(t_f, t, x(t))$ такой, чтобы к моменту t_f она имела значение, в точности или приближенно равное заданному значению терминального критерия J^* .
2. Формируем дифференциальное уравнение
$$\frac{d\bar{J}(t_f, t, x(t))}{dt} = f_J(\bar{J}(t_f, t, x(t))),$$
 где правая часть f_J подбирается таким образом, чтобы его решением являлась желаемая форма критериальной функции.

3. Вычисляем полную производную по времени от фактической критериальной функции:

$$\begin{aligned} \frac{dJ(\bar{x}(t_f, t, x(t)))}{dt} &= \left(\frac{\partial J(x)}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}(t_f, t, x(t))} \right) \cdot \frac{d\bar{x}(t_f, t, x(t))}{dt} = \\ &= \left(\frac{\partial J(x)}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}(t_f, t, x(t))} \right) \cdot W(t_f, t, x(t))B(t)u(t) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

4. Приравниваем правые части уравнения для желаемой и фактической критериальных функций в предположении, что они равны друг другу, и получаем скалярное уравнение относительно вектора неизвестных управляющих воздействий вида:

$$\left(\frac{\partial J(x)}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}(t_f, t, x(t))} \right) \cdot W(t_f, t, x(t))B(t)u(t) = f_J(J(\bar{x}(t_f, t, x(t)))) \quad (2.1.4)$$

5. Решаем с помощью псевдообращения уравнение (2.1.4) и получаем искомый вектор управления в виде:

$$\begin{aligned} u(t) &= G^+ f_J(J(\bar{x}(t_f, t, x(t)))), \\ G^+ &= G^T (GG^T)^{-1}, \quad G = \left(\frac{\partial J(x)}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}(t_f, t, x(t))} \right) \cdot W(t_f, t, x(t))B(t). \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Для систем с запаздываниями процедура получения управлений в принципе такая же, а для дискретных систем (одноиндексных и многоиндексных) изменяется таким образом, что вместо дифференциальных уравнений используются соответствующие конечно-разностные уравнения. Кроме того, в дискретных системах уравнения для управлений получаются нелинейными, которые приходится решать численно.

Детали применения описанной общей схемы для систем с разными типами математических моделей приведены ниже.

В процессе конструирования управления методом конечного состояния (МКС-управления) имеют место проблемы выбора достижимого значения J^* и дифференциального уравнения для желаемой критериальной функции, а также разрешимости указанного выше скалярного уравнения. Эти проблемы взаимосвязаны и в настоящее время не решены, хотя некоторые результаты и получены. Тем не менее, для многих задач удалось получить управляющие воздействия, решающие поставленные задачи. Имеются ре-

зультаты сравнительного анализа МКС-управления и других, в том числе оптимальных, управлений, которые свидетельствуют о достаточно высоком качестве МКС-управления.

Рассмотрим терминальную задачу с критерием $J = J[x(t_f)] \rightarrow J^*$ и дифференциальными ограничениями (1.1.1). Преобразуем ее в эквивалентную задачу на основе модели конечного состояния (1.1.8):

$$\begin{aligned} J &= J[\bar{x}(t_f, t_f, x(t_f))] \rightarrow J^*, \\ \frac{d\bar{x}(t_f, t, x(t))}{dt} &= W(t_f, t, x(t))B(t)u(t), \\ t &\in [t_0, t_f], \bar{x}(t_f, t_0, x(t_0)) = \bar{x}^0. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Применяя общую схему метода конечного состояния, изложенную в предыдущем подразделе, получаем выражение для управления (2.1.5), где размерности $G = (1 \times r)$, $GG^T = (1 \times 1)$, $G^+ = (r \times 1)$, а r – размерность вектора управлений. Покажем, что в данном случае псевдообращение в общем случае не единственно. Для этого проверим известные условия единственности псевдообращения [10]

$$\begin{aligned} G^+G &= I, \\ GG^+z &= z. \end{aligned}$$

Для второго условия при подстановке вместо G^+ соответствующего выражения из (2.1.5) имеем

$$GG^+z = GG^T[GG^T]^{-1}z \equiv z,$$

т.е. второе условие выполняется.

Что же касается первого условия, то при той же подстановке в него получаем $G^T(GG^T)^{-1}G = G^TG(GG^T)^{-1}$.

Правая часть равна единичной матрице (точнее – просто единице) только для скалярного управления, когда $r = 1$. Следствием этого является то, что в рассматриваемой задаче при одинаковых критериях и желаемых траекториях векторное управление не единственное, а скалярное – единственное.

Одним из часто используемых критериев является квадратический критерий вида $J = x^T(t_f)Fx(t_f) \rightarrow \min$ для терминальных задач оптимизации или $J = x^T(t_f)Fx(t_f) \rightarrow J^*$ для терминальных задач достижения заданного значения критерия.

Покажем, что для устойчивости на конечном интервале [11] системы с управлением (2.1.5) и терминальным квадратическим критерием $J = x^T(t_f)Fx(t_f) \rightarrow J^*$ с положительно определенной матрицей F достаточно, чтобы функция f_J была отрицательной. Для доказательства этого при-

меним второй метод Ляпунова, выбрав функцией Ляпунова соответствующую критериальную функцию:

$$V = [\bar{x}(t_f, t, x(t))]^T \cdot F \cdot \bar{x}(t_f, t, x(t))$$

и определив $\tau = 1/(t_f - t)$ с целью преобразования конечного времени функционирования системы в бесконечное (при $t \rightarrow t_f$ время $\tau \rightarrow \infty$).

Вычисляя производную по времени в силу уравнений (2.1.6) по $\tau \in [0, \infty)$ и с учетом $G = 2F\bar{x}WB$ и (2.1.5), получаем (аргументы для краткости записей опустим):

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\tau} &= \frac{1}{\tau^2} 2\bar{x}^T F \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{1}{\tau^2} 2\bar{x}^T FWBu = \\ &= \frac{1}{\tau^2} 2\bar{x}^T FWBG^T (GG^T)^{-1} f_J = \\ &= \frac{1}{\tau^2} 4\bar{x}^T FWBB^T W^T F\bar{x} (4\bar{x}^T FWBB^T W^T F\bar{x})^{-1} f_J = \frac{1}{\tau^2} f_J. \end{aligned}$$

Поскольку по второй теореме Ляпунова для асимптотической устойчивости достаточна отрицательность $dV/d\tau$, то доказана устойчивость на конечном интервале как (2.1.6), так и (1.1.1) в силу соотношения $\bar{x}(t, t, x(t)) = x(t) \forall t \in [t_0, t_f]$. Следует иметь в виду, что, в силу достаточности условия Ляпунова, оно может и не выполняться в устойчивых системах. Так, например, при использовании функции правых частей $f_J = \frac{J^* - J}{T} = \frac{J^* - \bar{x}^T F\bar{x}}{T}$, соответствующей экспоненциальной желаемой критериальной функции, устойчивость гарантирована только при $J^* < \bar{x}^T F\bar{x}$, что соответствует норме желаемого вектора конечного состояния, меньшей нормы начального вектора. В то же время при выводе системы из начала координат в заданное ненулевое положение мы имеем дело с обратной ситуацией, когда $J^* > \bar{x}^T F\bar{x}$. Тем не менее, при компьютерном моделировании выявлено, что и в этом случае устойчивость систем с управлением вида (2.1.5) сохраняется.

Из (2.1.5) следует, что достижимость заданной траектории определяется свойствами скалярной функции GG^T , (в частности, наличием ее нулевых значений в каких-то точках временной оси), от выбора f_J и параметра J^* . Особенности знаменателя (2.1.5) в изолированных точках временной оси можно преодолеть двумя способами: обходом таких точек в процессе расчета управления либо добавлением к знаменателю некоторого малого значения. Однако в случаях, когда терминальное значение J^* недостижимо, особые точки GG^T сгущаются, образуя барьер, который критериальная функция преодолеть не может, как показано на рисунке 2.2.

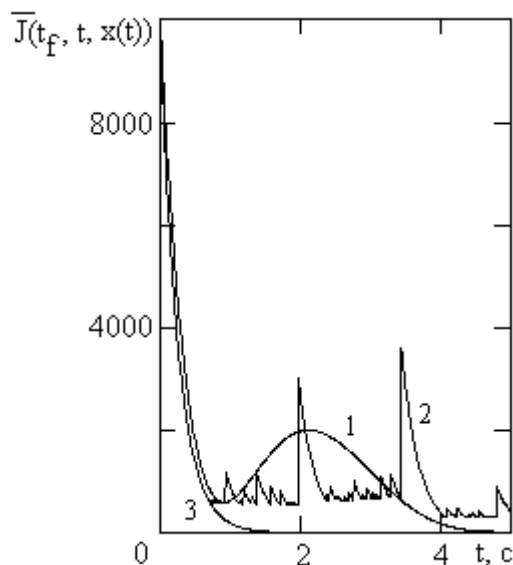


Рисунок 2.2 – Пример зависимости критерияльной функции от времени в случае недостижимости желаемого значения терминального критерия

- 1 – оптимальная критерияльная функция одной линейно-квадратической задачи (ЛКЗ);
- 2 – критерияльная функция для МКС, примененного к той же ЛКЗ ;
- 3 – желаемая критерияльная функция, заложенная в алгоритм МКС

Для линейных систем, где переходная матрица не зависит от текущего состояния и, как функция второго аргумента, может быть предварительно рассчитана по известным уравнениям вида

$$\frac{dW(t_f, t)}{dt} = -W(t_f, t) \cdot A(t), t \in [t_0, t_f], W(t_f, t_f) = I,$$

и сохранена в компьютерной памяти в узлах интерполяции. Ниже приведены данные о малой чувствительности алгоритмов вида (2.1.5) к погрешностям переходной матрицы. По этой причине количество узлов интерполяции может быть невелико, а видом аппроксимации может быть выбрана кусочно-линейная аппроксимация. Переменные конечного состояния в данном случае рассчитываются по выражению (1.1.6).

Для нелинейных систем расчет переходной матрицы и переменных конечного состояния производится совместным интегрированием систем (1.1.3) и (1.1.5) по $\mathcal{Q} \in [t, t_f]$ для каждого момента t . При этом начальные условия для переходной матрицы – единичная матрица, а для переменных конечного состояния – текущее состояние $x(t)$. Искомые значения переходной матрицы и переменных конечного состояния – это $W(\mathcal{Q}, t, x(t))$ и

$\bar{x}(\vartheta, t, x(t))$ при $\vartheta = t_f$, т.е. в конце интегрирования. Таким образом, в данном случае процесс расчета управления для каждого момента времени весьма трудоемок. Однако, в отличие от методов оптимального управления, здесь используется единственный численный метод – метод интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений для задачи Коши, например – метод Рунге-Кутты. В отдельных случаях уравнения (1.1.3), (1.1.5) могут быть решены аналитически. В этом случае управления (2.1.5) могут рассчитываться в реальном времени. Далее, в пункте 2.1.3, рассмотрены приближенные методы ускоренного расчета указанных функций, позволяющих использовать (2.1.5) для определения управления в реальном времени.

2.1.2. Дифференциально-функциональные системы

Дополнительные ограничения в виде функциональных (алгебраических или трансцендентных) уравнений часто имеют место в электротехнических, гидромеханических и других моделях, где используются различные законы сохранения, выраженные в функциональной форме. Для сведения таких моделей к чисто дифференциальным используют дифференцирование алгебраических уравнений с последующей приведением полученных дифференциальных уравнений к нормальной форме. Эта процедура приводит к увеличению порядка модели, иногда весьма значительному. Другой используемый прием – введение штрафных функций в критерий. Некоторые методы расчета управлений предполагают прямой учет подобных ограничений, однако усложнение соответствующего алгоритма при этом значительное. Например, при использовании принципа максимума Понтрягина [12] это приводит к существенному усложнению поиска максимума гамильтониана.

В настоящем пункте метод конечного состояния обобщается на системы с дифференциально-функциональными ограничениями.

Рассмотрим задачу терминального управления

$$\begin{aligned} J &= J[x(t_f)] \rightarrow J^*, \\ \frac{dx}{dt} &= \Phi(t, x, v), \\ f(x, v) &= 0, \\ \dim\{x, \Phi\} &= (n \times 1), \dim f = (m \times 1), \dim v = (s \times 1), s \geq m, \\ t &\in [t_0, t_f], x(t_0) = x^0, \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

где вектор-функция f функциональной подсистемы предполагается непрерывной и дифференцируемой по x и по v .

Особенность (2.1.7) - смешанная система ограничений в виде дифференциальных и функциональных уравнений. Функциональные уравнения при этом отображают неявную связь между вектором переменных состояния x через компоненты вектора управлений v .

Поскольку между v и x имеется связь, разобьем вектор v на два подвектора – свободный v^c и базисный v^δ . Далее свободный подвектор будет представлять независимые управляющие воздействия, а базисный – зависимые. Для v^c введем дополнительные дифференциальные уравнения, определяющие их через аддитивные управляющие воздействия u

$$\begin{aligned} J &= J[x(t_f)] \rightarrow J^*, \\ \frac{dx}{dt} &= \Phi(t, x, v^c, v^\delta), \\ \frac{dv^c}{dt} &= u, \\ f(x, v^c, v^\delta) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

$$\begin{aligned} \dim\{x, \Phi\} &= (n \times 1), \dim f = (m \times 1), \dim v = (s \times 1), \\ \dim\{v^c, u\} &= (m^c \times 1), \dim v^\delta = (m \times 1), m^c + m = s, \\ t &\in [t_0, t_f], x(t_0) = x^0. \end{aligned}$$

Если векторное функциональное уравнение связей имеет аналитическое решение $v^\delta = \tilde{f}^{-1}(x, v^c)$, где $\tilde{f}^{-1}$ – некоторая зависимость, определяемая f , то (2.1.8) сводится к обычному виду, для которого $u(t)$ (или непосредственно $v^c(t)$) может быть найдено любым из известных методов. Однако такой путь может быть применен для линейных зависимостей f либо для нелинейных при достаточно малых m . В общем же случае наличие неизвестной или очень сложной аналитической зависимости $\tilde{f}^{-1}$ не позволяет напрямую применять методы, требующие вычисления якобиана от Φ . А метод конечных состояний как раз использует якобиан, поэтому требуется определенная его модификация.

Выпишем соответствующую (2.1.8) совместную систему для определения переходной матрицы и переменных конечного состояния $W(\mathcal{G}, t, x(t)), \bar{x}(\mathcal{G}, t)$ (см. (1.1.3) и (1.1.5)).

$$\begin{aligned} \frac{dW(\mathcal{G}, t, x(t))}{d\mathcal{G}} &= A_w \cdot W(\mathcal{G}, t, x(t)), \\ A_w &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi(\mathcal{G}, x, v^c, v^\delta)}{\partial x} & \frac{\partial \Phi(\mathcal{G}, x, v^c, v^\delta)}{\partial v^c} \\ 0_{m^c \times n} & 0_{m^c \times m^c} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{x = \bar{x}(\mathcal{G}, t), \\ v^c = \bar{v}^c(\mathcal{G}, t),}} \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= \Phi[\vartheta, \bar{x}(\vartheta, t), \bar{v}^c(\vartheta, t), v^\delta], \\ v^\delta &= \tilde{f}^{-1}(\bar{x}(\vartheta, t), \bar{v}^c(\vartheta, t)),\end{aligned}\quad (2.1.10)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{v}^c(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= 0, \\ \vartheta &\in [t, t_f], \quad W(t, t, x(t)) = I, \quad \bar{x}(t, t) = x(t), \quad \bar{v}^c(t, t) = v^c(t).\end{aligned}\quad (2.1.11)$$

Система (2.1.9) – (2.1.11) интегрируется многократно, для каждого значения t процесса численного интегрирования (2.1.8), а используются в дальнейшем конечные (при $\vartheta = t_f$) значения W и $\bar{x}$.

Матрица $B(t)$ коэффициентов при управляющих воздействиях применительно к (2.1.8) имеет структуру

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0_{n \times m^c} \\ I_{m^c \times m^c} \end{pmatrix}. \quad (2.1.12)$$

В приведенных выше выражениях $0_{a \times b}$, $I_{a \times b}$ обозначены соответственно нулевая и единичная матрицы размерности $a \times b$.

Специфика модели (2.1.8), требующая модификации приведенного в 2.1.1 описания метода конечных состояний, заключается в трудностях непосредственного вычисления частной производной $\partial\Phi/\partial v^c$, входящей в A_w , из-за наличия связи между v^δ и v^c .

Вычисляя частную производную вектора правых частей дифференциальных уравнений (2.1.7) по вектору независимых управлений с учетом «двойной» зависимости Φ от v^c – непосредственно и неявно через v^δ , получаем

$$\frac{\partial\Phi(\vartheta, x, v^c, v^\delta)}{\partial v^c} = \frac{\partial\Phi(\vartheta, x, v^c, v^\delta)}{\partial v^c} + \frac{\partial\Phi(\vartheta, x, v^c, v^\delta)}{\partial v^\delta} \cdot \frac{\partial v^\delta}{\partial v^c}. \quad (2.1.13)$$

Для устранения необходимости непосредственного дифференцирования обратной зависимости $v^\delta = \tilde{f}^{-1}$ найдем частную производную уравнения связи по v^c .

$$\frac{\partial \tilde{f}(x, v^c, v^\delta)}{\partial v^c} = \frac{\partial \tilde{f}(x, v^c, v^\delta)}{\partial v^c} + \frac{\partial \tilde{f}(x, v^c, v^\delta)}{\partial v^\delta} \cdot \frac{\partial v^\delta}{\partial v^c} = 0.$$

Предполагая невырожденность якобиана связей $\partial \tilde{f}/\partial v^\delta$, что должно иметь место при корректно заданных связях, получаем:

$$\frac{\partial v^\delta}{\partial v^c} = - \left[\frac{\partial \tilde{f}(x, v^c, v^\delta)}{\partial v^\delta} \right]^{-1} \cdot \frac{\partial \tilde{f}(x, v^c, v^\delta)}{\partial v^c}. \quad (2.1.14)$$

Подставляя (2.1.14) в (2.1.13), получаем искомую $\partial\Phi/\partial v^c$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(\mathcal{G}, x, v^c, v^\delta)}{\partial v^c} &= \frac{\partial \Phi(\mathcal{G}, x, v^c, v^\delta)}{\partial v^c} - \\ &- \frac{\partial \Phi(\mathcal{G}, x, v^c, v^\delta)}{\partial v^\delta} \cdot \left[\frac{\partial \tilde{f}(x, v^c, v^\delta)}{\partial v^\delta} \right]^{-1} \cdot \frac{\partial \tilde{f}(x, v^c, v^\delta)}{\partial v^c}. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Входящие в (2.1.9) и (2.1.15) частные производные правых частей дифференциальных уравнений и уравнений связи существуют в силу указанных выше предположений о свойствах функций Φ и f .

Таким образом, от использования обратной зависимости при определении якобиана удалось избавиться. Осталась зависимость $\tilde{f}^{-1}$ в (2.1.10), но от нее уже избавиться невозможно. Однако в этом нет необходимости, так как аналитическое выражение этой зависимости при интегрировании (2.1.10) в принципе и не нужно. С учетом нулевой правой части третьего уравнения (2.1.10) и начальных условий (2.1.11) выражение (2.1.10) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}(\mathcal{G}, t, x(t))}{d\mathcal{G}} &= \Phi[\mathcal{G}, \bar{x}(\mathcal{G}, t, x(t)), v^c(t), v^\delta], \\ f(\bar{x}(\mathcal{G}, t, x(t)), v^c(t), v^\delta) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Так как $\bar{x}(\mathcal{G}, t)$, $v^c(t)$ при интегрировании (2.1.16) по $\mathcal{G}$ известны на каждом шаге численного интегрирования, то для определения v^δ необходимо на каждом шаге решать систему в общем случае нелинейных функциональных уравнений. Не имея аналитической зависимости $\tilde{f}^{-1}$, это можно делать и численно. Это обстоятельство, естественно, значительно усложняет алгоритм расчета управления. Однако эта сложность естественна ввиду исходной постановки задачи.

Расчет терминального управления с использованием (2.1.9) – (2.1.12), (2.1.15), (2.1.16) производится по алгоритму (2.1.5).

2.1.3. Ускоренный метод для дифференциальных систем на основе приближенных аналитических выражений для элементов моделей конечного состояния

Основная проблема расчетов МКС-управления вида (2.1.5) – большие затраты времени на получение переменных конечного состояния и переходных матриц, производимого путем интегрирования совместной системы в общем случае нелинейных дифференциальных уравнений (1.1.3), (1.1.5). Для ускорения расчетов можно использовать соответствующие приближенные методы [13], [14], [15]. Могут быть найдены и другие методы либо варианты методов. Основанием для указанного поиска является то, что указанные методы, основанные на тейлоровских разложениях решений, не всегда

применимы ввиду лавинообразного нарастания сложности выражений для тейлоровских коэффициентов при высоких степенях t .

Одна из идей, позволяющая в ряде случаев несколько смягчить указанный недостаток – использовать в качестве объекта разложения не решения, а правые части соответствующих дифференциальных уравнений, поскольку во многих случаях кривизна производных меньше кривизны функций. Например, для $f(x) = x^2$ производная $f'(x) = 2x$. А для функций с меньшей кривизной можно ограничиться меньшим числом членов ряда Тейлора. Кроме того, как будет показано ниже, на этом пути могут быть получены новые формы приближенных решений.

Рассмотрим динамическую систему вида

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \Phi(t, y), \quad t \in [t_0, t_f], \quad y(t_0) = y^0, \\ \dim y &= (n \times 1), \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

где вектор-функции Φ предполагаются непрерывными и дифференцируемыми по всем своим аргументам достаточное число раз.

Предположим, что процессы в системе таковы, что нелинейные функции правых частей $R_{i0}(t, y(t)) = \Phi_i(t, y(t))$ имеют сходящиеся тейлоровские разложения с достаточно быстро убывающими (с возрастанием номера) коэффициентами

$$\begin{aligned} R_{i0}(\vartheta, y(\vartheta)) &= R_{i0}(t, y(t)) + R_{i1}(t, y(t)) \cdot (\vartheta - t) + \dots \\ &\dots + R_{ik}(t, y(t)) \cdot (\vartheta - t)^k + \dots, \\ R_{ik}(t) &= \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\vartheta^k} R_{i0}(\vartheta, y(\vartheta)) \Big|_{\vartheta=t}. \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

Составим дифференциальные уравнения для $R_{ik}(\vartheta, y(\vartheta))$, получив предварительно из (2.1.18) выражения для коэффициентов. Аргументы для сокращения записей покажем только в первом соотношении.

$$\begin{aligned} R_{i1}(\vartheta, y(\vartheta)) &= \frac{dR_{i0}(\vartheta, y(\vartheta))}{d\vartheta} = \frac{\partial R_{i0}(\vartheta, y(\vartheta))}{\partial \vartheta} + \frac{\partial R_{i0}(\vartheta, y(\vartheta))}{\partial y} \frac{dy(\vartheta)}{d\vartheta}, \\ R_{i2} &= \frac{1}{2} \frac{d^2 R_{i0}}{d\vartheta^2} = \frac{1}{2} \frac{dR_{i1}}{d\vartheta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R_{i1}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial R_{i1}}{\partial y} \frac{dy}{d\vartheta} \right), \\ R_{i3} &= \frac{1}{3!} \frac{d^3 R_{i0}}{d\vartheta^3} = \frac{1}{3!} \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{d^2 R_{i0}}{d\vartheta^2} \right) = \frac{1}{3!} \frac{d}{d\vartheta} (2R_{i2}) = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial R_{i2}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial R_{i2}}{\partial y} \frac{dy}{d\vartheta} \right), \\ R_{i4} &= \frac{1}{4!} \frac{d^4 R_{i0}}{d\vartheta^4} = \frac{1}{4!} \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{d^3 R_{i0}}{d\vartheta^3} \right) = \frac{1}{4!} \frac{d}{d\vartheta} (3! R_{i3}) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial R_{i3}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial R_{i3}}{\partial y} \frac{dy}{d\vartheta} \right), \dots, \\ R_{ik} &= \frac{1}{k} \left(\frac{\partial R_{i(k-1)}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial R_{i(k-1)}}{\partial y} \frac{dy}{d\vartheta} \right), \dots \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Из (2.1.19) следует система дифференциальных уравнений бесконечного порядка для тейлоровских коэффициентов (вновь аргументы запишем только в первом из них):

$$\begin{aligned} \frac{dR_{i0}}{d\vartheta}(\vartheta, y(\vartheta)) &= R_{i1}(\vartheta, y(\vartheta)), \\ \frac{dR_{i1}}{d\vartheta} &= 2R_{i2}, \quad \frac{dR_{i2}}{d\vartheta} = 3R_{i3}, \quad \dots, \quad \frac{dR_{ik_i}}{d\vartheta} = (k_i + 1)R_{i(k_i+1)}, \dots \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

Система (2.1.20) – незамкнута, поэтому для ее практического использования обнулим правые части k_i -х уравнений для каждого i . Основанием для этого является то, что для сходящихся тейлоровских разложений при $k > k_i$ коэффициенты $R_{ik} \approx 0$. В итоге получится линеаризованная система ограниченного порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{d\vartheta}(\vartheta, t) &= R_{i0}(\vartheta, y(\vartheta)), \\ \frac{dR_{i0}}{d\vartheta} &= R_{i1}, \quad \frac{dR_{i1}}{d\vartheta} = 2R_{i2}, \quad \frac{dR_{i2}}{d\vartheta} = 3R_{i3}, \quad \dots, \\ \frac{dR_{ik_i}}{d\vartheta} &= 0, \quad \vartheta \in [t, t_f], \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Начальные условия линеаризованной системы получаются из (2.1.19) при $\vartheta = t$:

$$\begin{aligned} y_i(t) &= y_i^0, \quad R_{i0}(t, y(t)) = \Phi(t, y(t)), \\ R_{i1}(t, y(t)) &= \left. \frac{\partial \Phi_i(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_i(t, y)}{\partial y} \right|_{y=y(t)} \Phi(t, y(t)), \\ R_{ik}(t, y(t)) &= \frac{1}{k} \left(\left. \frac{\partial R_{i(k-1)}(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial R_{i(k-1)}(t, y(t))}{\partial y} \right|_{y=y(t)} \Phi(t, x(t)) \right), \\ k &= 2, 3, \dots, k_i. \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

Для системы (2.1.21), (2.1.22) нетрудно получить аналитическое решение. Начиная с последнего уравнения (2.1.21), последовательно получаем:

$$\begin{aligned} R_{ik_i}(\vartheta) &= R_{ik_i}(t), \\ R_{i(k_i-1)}(\vartheta) &= R_{i(k_i-1)}(t) + k_i \int_t^{\vartheta} R_{ik_i}(\tau) d\tau = R_{i(k_i-1)}(t) + k_i R_{ik_i}(t)(\vartheta - t), \\ R_{i(k_i-2)}(\vartheta) &= R_{i(k_i-2)}(t) + (k_i - 1) \int_t^{\vartheta} R_{i(k_i-1)}(\tau) d\tau = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R_{i(k_i-2)}(t) + (k_i - 1) \int_t^{\mathcal{G}} \left(R_{i(k_i-1)}(t) + k_i R_{ik_i}(t)(\mathcal{G}-t) \right) d\tau = \\
&= R_{i(k_i-2)}(t) + (k_i - 1) R_{i(k_i-1)}(t)(\mathcal{G}-t) + (k_i - 1) k_i R_{ik_i}(t) \frac{(\mathcal{G}-t)^2}{2}, \\
R_{i(k_i-3)}(\mathcal{G}) &= R_{i(k_i-3)}(t) + (k_i - 2) \int_t^{\mathcal{G}} R_{i(k_i-2)}(\tau) d\tau = \\
&= R_{i(k_i-3)}(t) + \\
&+ (k_i - 2) \int_t^{\mathcal{G}} \left(R_{i(k_i-2)}(t) + (k_i - 1) R_{i(k_i-1)}(t)(\mathcal{G}-t) + (k_i - 1) k_i R_{ik_i}(t) \frac{(\mathcal{G}-t)^2}{2} \right) d\tau = \\
&= R_{i(k_i-3)}(t) + (k_i - 2) R_{i(k_i-2)}(t)(\mathcal{G}-t) + (k_i - 2)(k_i - 1) R_{i(k_i-1)}(t) \frac{(\mathcal{G}-t)^2}{2} + \\
&+ (k_i - 2)(k_i - 1) k_i R_{ik_i}(t) \frac{(\mathcal{G}-t)^3}{2 \cdot 3}.
\end{aligned}$$

Здесь уже видна закономерность и для $R_{i(k_i-k)}(\mathcal{G})$ получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
R_{i(k_i-k)}(\mathcal{G}) &= R_{i(k_i-k)}(t) + (k_i - k + 1) R_{i(k_i-k+1)}(t)(\mathcal{G}-t) + \\
&+ (k_i - k + 1)(k_i - k + 2) R_{i(k_i-k+2)}(t) \frac{(\mathcal{G}-t)^2}{2} + \dots + \\
&+ (k_i - k + 1)(k_i - k + 2) \dots k_i R_{ik_i}(t) \frac{(\mathcal{G}-t)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Из последнего выражения при $k = k_i$ следует:

$$\begin{aligned}
R_{i0}(\mathcal{G}) &= R_{i0}(t) + 1 \cdot R_{i1}(t)(\mathcal{G}-t) + 1 \cdot 2 \cdot R_{i2}(t) \frac{(\mathcal{G}-t)^2}{2} + \dots \\
&\dots + (k_i)! R_{ik_i}(t) \frac{(\mathcal{G}-t)^{k_i}}{(k_i)!} = \\
&= R_{i0}(t) + R_{i1}(t)(\mathcal{G}-t) + R_{i2}(t)(\mathcal{G}-t)^2 + \dots + R_{ik_i}(t)(\mathcal{G}-t)^{k_i}.
\end{aligned} \tag{2.1.23}$$

Выполняя последнее интегрирование, получаем выражение для иско-
мых переменных

$$y_i(\mathcal{G}) = y_i(t) + \sum_{k=0}^{k_i} \frac{1}{k+1} R_{ik}(t, x(t)) (\mathcal{G}-t)^{k+1}. \tag{2.1.24}$$

Аналитическое решение (2.1.24) – приближенное, поэтому определен-
ный интерес представляет оценка его точности. Известна [16] теорема о
сравнительной оценке решений двух систем дифференциальных уравнений с
непрерывными по времени и состоянию функциями правых частей, т.е. вида

(2.1.17), (2.1.20) (ее решение обозначим $\bar{y}$) и (2.1.21) (ее решение обозначим $\tilde{y}$), норма разности которых определяется выражением:

$$\sum_{i=1}^n |\bar{y}_i(\vartheta) - \tilde{y}_i(\vartheta)| \leq \frac{\varepsilon}{L} \left(e^{nL(\vartheta-t)} - 1 \right), \quad (2.1.25)$$

где ε – верхняя оценка модуля разности соответствующих правых частей указанных систем $|\bar{\Phi}_i(t) - \tilde{\Phi}_i(t)|$, $i=1,2,\dots,n$, представленных в виде функций времени, L – константа Липшица. Практическое использование (2.1.25) применительно к (2.1.17), (2.1.20) и (2.1.21) затруднено наличием двух неопределенных параметров – $L = \max_{i,\vartheta} \left\{ |\bar{\Phi}_i(\vartheta) - \tilde{\Phi}_i(\vartheta)| / \sum_{k=1}^n |\bar{y}_k(\vartheta) - \tilde{y}_k(\vartheta)| \right\}$ и

$\varepsilon = \max_{i,\vartheta} |\bar{\Phi}_i(t) - \tilde{\Phi}_i(t)|$. Из (2.1.24) можно получить другую оценку с одним

неопределенным параметром и другими полезными свойствами. Вспомним, что при выводе (2.1.24) правая часть последнего дифференциального уравнения (2.1.21) обнулялась. Теперь же нуль заменим некоторым постоянным ε_i и повторим вывод (2.1.24), обозначив решение системы (2.1.21) $\tilde{y}$, а системы с ε_i – $\bar{y}$. Основанием для этого является то, что по теореме о среднем решение последнего дифференциального уравнения системы (2.1.20) может быть записано в виде

$$R_{ik_i}(\vartheta) = R_{ik_i}(t, x(t)) + \varepsilon_i \cdot (\vartheta - t), \quad \varepsilon_i = (k_i + 1) R_{i(k_i+1)}(\xi_i, x(\xi_i)), \quad \xi_i \in [t, \vartheta].$$

С учетом равенства $\bar{y}(t) = \tilde{y}(t)$ (так как начальное состояние систем одно и то же) и следующего из этого равенства $\bar{R}_{ik}(t, x(t)) = \tilde{R}_{ik}(t, x(t)) = R_{ik}(t, x(t))$ получаем:

$$\bar{y}_i(\vartheta) = y_i(t) + \sum_{k=0}^{k_i} \frac{1}{k+1} R_{ik}(t, x(t)) (\vartheta - t)^{k+1} + \frac{1}{k_i+1} \varepsilon_i (\vartheta - t)^{k_i+1}. \quad (2.1.26)$$

Искомую оценку получим вычитанием из (2.1.26) выражения (2.1.24):

$$\bar{y}_i(\vartheta) - \tilde{y}_i(\vartheta) = \frac{1}{k_i+1} \varepsilon_i (\vartheta - t)^{k_i+1}, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (2.1.27)$$

Отметим, что полученная оценка, в отличие от (2.1.25), определена для каждой компоненты решения, имеет для каждой компоненты всего один неизвестный параметр ε_i , и получена в виде равенства. По существу, оценка (2.1.27) представляет собой остаточный член ряда Тейлора для решения y_i в форме Коши. При этом ε_i представляет собой $(k_i + 1)$ -ю производную решения в некоторой точке из интервала (t, ϑ) .

Выражение (2.1.26) можно рассматривать как альтернативное (2.1.24) представление для приближенного решения на основе тейлоровского разложения, имеющее регулировочный параметр ε .

Для уменьшения k_i в правых частях (2.1.17) можно выделить линейную часть, а оставшиеся нелинейные члены представить разложениями вида (2.1.18) с соответствующими дифференциальными уравнениями (2.1.21). В таком случае можно получить аналитические решения для нелинейных членов R_{i0} , которые определяются по (2.1.24). Эти решения представляют собой известные функции времени, параметров и начальных условий. Таким образом, в итоге получится некоторая линейная система с известными внешними воздействиями $R_{i0}(t, y^0)$.

Приведенный способ приближенного решения дифференциальных систем, несмотря на его простоту, нам в литературе не встречался, хотя определенный аналог цепочечной процедуры является составной частью приведения нелинейных дифференциальных уравнений к канонической форме Бруновского [17 – 19].

Сравнивая процедуру получения линейной канонической формы Бруновского для нелинейных систем с процедурой цепочечной линеаризацией, отметим общий момент: и в одном и в другом случае используется вычисление производных Ли вдоль векторного поля Φ . Однако при этом есть и существенные различия. Во-первых, предлагаемые нами способы линеаризации приводят к приближенной линеаризованной системе, содержащей как исходные координаты, так и искусственные, в отличие от системы Бруновского, где строится (при определенных условиях) точный линейный эквивалент нелинейной системы, который содержит только искусственные переменные. Во-вторых, предлагаемая нами цепочечная линеаризация производится значительно проще за счет того, что здесь вообще не производятся нелинейные преобразования координат, что исключает необходимость получения (достаточно трудоемкого) и решения систем дифференциальных уравнений в частных производных (это является компенсацией принципиальной приближенности линеаризованной системы). В-третьих, в канонической форме Бруновского не фиксируются начальные условия для цепочечной системы. Это связано с тем, что дальнейшее использование указанной формы предполагает построение управления методами теории линейных систем и последующему возврату к первоначальным координатам. При этом начальные условия для преобразованных координат y_i оказываются ненужными. В нашем же подходе производные Ли используются именно для получения начальных условий для искусственных координат, которые далее используются. В-четвертых, предлагаемый нами подход применим для нестационар-

ных (неавтономных) систем, хотя, с учетом возможности представления явно входящего в уравнения времени дифференциальным уравнением с единичной правой частью, данная особенность непринципиальна. И, наконец, каноническая форма Бруновского применима лишь для случая, когда в системе есть управляющие воздействия или, хотя бы, аддитивные внешние воздействия. В случае же системы (2.1.17) наличие аддитивных членов не предполагается (хотя они могут и быть).

На основе предлагаемого подхода могут разрабатываться разнообразные аналитические и численные методы анализа и синтеза многомерных нелинейных систем. Один из таких методов применялся для уточнения оценок матрицы ковариаций в обобщенном методе Дункана [20], изложенный в третьей главе. В дальнейшем будем именовать этот подход «цепочечной линеаризацией».

Проиллюстрируем метод (2.1.24) на примере уравнений Ван-дер-Поля:

$$\begin{aligned}\frac{dx_0}{dt} &= x_1 \equiv R_{00}(x), \\ \frac{dx_1}{dt} &= -x_0 + m(1 - x_0^2)x_1 \equiv R_{10}(x), \\ t &\in [0, t_f], \quad x_0(0) = x_0^0, \quad x_1(0) = x_1^0.\end{aligned}\tag{2.1.28}$$

Согласно (2.1.28) и (2.1.24) при $\mathcal{G} \equiv t$, $t \equiv 0$ и $k_i = 2$ имеем:

$$\begin{aligned}x_i(t) &\equiv x_i^0 + R_{i0}(0, x^0) \cdot t + \frac{1}{2} R_{i1}(0, x^0) \cdot t^2 + \frac{1}{3} R_{i2}(0, x^0) \cdot t^3, \quad i = 0, 1, \\ R_{10}(t, x(t)) &= \frac{\partial R_{00}}{\partial x_0} \cdot \frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial R_{00}}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} = -x_0 + m(1 - x_0^2)x_1, \\ R_{11}(t, x(t)) &= \frac{\partial R_{10}}{\partial x_0} \cdot \frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial R_{10}}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} = (-2m \cdot x_1 - 1)x_1 + \\ &+ m(1 - x_0^2)(-x_0 + m(1 - x_0^2)x_1), \\ R_{20}(t, x(t)) &= \frac{\partial R_{10}}{\partial x_0} \cdot \frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial R_{10}}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} =\end{aligned}\tag{2.1.29}$$

Таким образом, в случае представления нелинейной системы в виде эквивалентной (с точностью до ε_i) линейной системы (2.1.21), состоящей из цепочки интеграторов, на вход которой ничего не подается, а начальные условия рассчитываются по (2.1.22), получилось приближенное решение в известных формах. Однако на основе предлагаемого подхода могут быть получены и другие формы приближенных решений. Указанные формы можно строить на основе варьирования функциональных зависимостей для правых частей эквивалентной системы, которые должны быть такими, чтобы, во-первых, эквивалентная система аналитически интегрировалась, и, во-вторых, влияние от обнуления правой части последнего уравнения было не-

значительным. Кроме того, при этом можно ввести регулировочные параметры, влияющие на точность приближенных решений. Например, эквивалентную систему (2.1.21) для уравнений Ван-дер-Поля можно модифицировать, заменив последний интегратор инерционным звеном с регулировочным параметром в виде постоянной времени T :

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= R_{i0}, \\ \frac{dR_{i0}}{dt} &= R_{i1}, \\ \frac{dR_{i1}}{dt} &= 2R_{i2}, \\ \frac{dR_{i2}}{dt} &= -\frac{1}{T} R_{i2}.\end{aligned}\tag{2.1.30}$$

Решение системы (2.1.30) при начальных условиях, рассчитываемых по (2.1.22), где вместо y_i используются обозначения x_i , имеет вид:

$$\begin{aligned}x_i(t) &= x_i^0 - 2R_{02}(0, x^0)T_i^3 \exp\left(-\frac{t}{T_i}\right) + \frac{(2R_{02}(0, x^0)T_i + R_{01}(0, x^0)) \cdot t^2}{2} + \\ &+ (-2R_{02}(0, x^0)T_i^2 + R_{00}(0, x^0)) \cdot t + 2R_{02}(0, x^0)T_i^3, \quad i = 0, 1.\end{aligned}\tag{2.1.31}$$

Выражение (2.1.31) одновременно же является приближенным решением уравнений Ван-дер-Поля (2.1.28).

Проиллюстрируем также описанный выше прием, когда линеаризованная система строится на основе выделенных нелинейных частей уравнений. Для уравнений Ван-дер Поля воспользуемся эквивалентной системой с двумя членами тейлоровского разложения нелинейной части:

$$\begin{aligned}\frac{dx_0}{dt} &= x_1, \\ \frac{dx_1}{dt} &= -x_0 + mx_1 + r_0, \quad r_0 = -mx_0^2 x_1, \\ \frac{dr_0}{dt} &= r_1, \\ \frac{dr_1}{dt} &= 0.\end{aligned}\tag{2.1.32}$$

Начальные условия рассчитаем по аналогии с тем, как были получены соотношения (2.1.22):

$$\frac{dr_0}{dt} = \frac{\partial r_0}{\partial x_0} \cdot \frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial r_0}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} = -2mx_0x_1^2 - mx_0^2(-x_0 + m(1-x_0^2)x_1) = r_1.$$

Таким образом, начальные условия в момент $t=0$ вычисляются по выражениям:

$$\begin{aligned}x_i(0) &= x_i^0; \quad r_0(0) = -m(x_0^0)^2; \\ r_1(0) &= -2mx_0^0(x_1^0)^2 - m(x_0^0)^2(-x_0^0 + m(1-(x_0^0)^2)x_1^0).\end{aligned}$$

Решение (2.1.32), оно же приближенное аналитическое решение уравнений (2.1.28), имеет вид:

$$\begin{aligned}x_0(t) &= \frac{-2f_1(t)f_2(t) + 2\exp(k_1 t) \cdot f_3(t) + 4r_0(0)}{(m+2b)(m-2b)}, \\x_1(t) &= \frac{1}{4}(-f_1(t)f_2(t)m - \exp(k_2 t)k_3 + \exp(k_1 t)f_3(t)m - \exp(k_1 t)k_4), \\k_1 &= a-b, \quad k_2 = a+b, \quad k_3 = c+d, \quad k_4 = c-d, \\a &= m/2, \quad b = (\sqrt{m^2-4})/2, \quad c = -mr_0(0) + mx_0^0 - 2x_1^0, \quad d = 2b(r_0(0) - x_0^0)\end{aligned}\quad (2.1.33)$$

Решения систем (2.1.30), (2.1.32) можно получить в аналитическом виде разными способами, например, с помощью преобразования Лапласа. Можно также воспользоваться средствами математических пакетов Maple, Mathcad, Matlab, где имеются средства аналитического решения дифференциальных уравнений. Решения (2.1.31), (2.1.33) получены с помощью функции dsolve пакета Matlab. Несмотря на возможность мнимых значений b и комплексных значений k_1, k_2 при $m < 2$, (2.1.33) справедливо и в данном случае, что проверено экспериментально.

Далее вернемся к задаче ускоренного расчета переменных конечного состояния $\bar{x}(t_f, t, x(t))$ и нелинейных переходных матриц $W(t_f, t, x(t))$, определяемых (1.1.3), (1.1.5). Положив в основу рассмотренные выше способы получения приближенных аналитических решений систем дифференциальных уравнений, можно предложить следующие два подхода 1) получение решений совместной системы для $\bar{x}$ и требуемых столбцов W ; 2) получение решений дифференциальных уравнений только для $\bar{x}$ и последующее использование соотношения (1.1.9) для получения требуемых элементов переходной матрицы. Каждый из указанных способов имеет свои преимущества и недостатки. Преимущества первого способа в том, что при одном и том же количестве членов разложений правых частей дифференциальных уравнений для $\bar{x}$ и для W требуется меньший на единицу порядок производных Ли, чем в случае использования соотношения (1.1.9). Поскольку получение производных Ли является самой трудоемкой частью применения всех рассмотренных в разделе 2 методов получения приближенных решений, то иногда (это зависит от сложности функций правых частей) выгоднее лишних несколько раз вычислить производные Ли меньшего порядка, чем вычислить даже одну производную Ли увеличенного на единицу порядка. На самом же деле производных увеличенного порядка при использовании (1.1.9) требуется столько, сколько элементов матрицы W требуется при расчете МКС-управления (2.1.5). Преимущества второго способа в том, что в данном способе не нужно рассчитывать полные столбцы переходной матрицы, как в первом способе, а только требуемые ее элементы, количество и координаты которых определяются нулевыми элементами градиента критерия

$\partial J / \partial x$ и матрицы B . В итоге, в зависимости от постановки задачи и принятым количеством членов разложения, могут оказаться выгодными как первый, так и второй описанные способы.

Другая возможность ускорения расчетов МКС-управления (2.1.5) – использование аналитических представлений для переменных конечного состояния $\bar{x}(t_f, t, x(t))$ и нелинейных переходных матриц $W(t_f, t, x(t))$ в виде функциональных моделей. Указанные модели могут быть построены как традиционными способами на основе регрессионных представлений, так и современными типа искусственных нейронных сетей.

В пунктах 4.2.3, 4.2.4 четвертой главы указанные подходы применены для управляемого пуска электродвигателей постоянного тока.

2.1.4. Ускоренный метод для дифференциальных систем на основе двухэтапного подхода

Цель данной модификации – ускорение расчетов МКС-управлений за счет подходящего преобразования модели объекта управления. Проще всего это можно сделать в случае, когда размер вектора управляющих воздействий u в представлении (1.1.1) совпадает с размером вектора состояний x . Такой случай имеет место, например, при управлении приводами сочленений антропоморфного манипулятора (см. пункт 4.7.3), когда число управляющих воздействий совпадает с числом соответствующих приводов. В этом случае суть двухэтапного метода следующая: на первом этапе вместо задачи (1.1.1), (1.1.2) формируем задачу

$$\begin{aligned} J &= J(x(t_f)) \rightarrow J^*, \\ \frac{dx(t)}{dt} &= v, \\ t &\in [t_0, t_f], x(t_0) = x^0, \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

и ищем для неё управление v с помощью базового МКС (1.1.3 – 1.1.5, 2.1.3 – 2.1.5).

На втором этапе находим искомое управление u из уравнения

$$v(t) = \Phi(t, x(t)) + B(t, x(t)) \cdot u(t), \quad (2.1.35)$$

если данное уравнение разрешимо (например, если матрица B квадратная и неособая). Поскольку в представлении (2.1.34) матрица $\Phi = 0$, а матрица B – единичная, расчеты по (2.1.3 – 2.1.5) существенно упрощаются. В результате получается:

$$\bar{x}(\vartheta, t, x(t)) = \bar{x}(t, t, x(t)) = x(t),$$

$$W(\vartheta, t, x(t)) = W(t, t, x(t)) = I$$

для любого $\vartheta \in [t, t_f]$, в том числе и для $\vartheta = t_f$. А поскольку в расчетных выражениях для управлений (2.1.3 – 2.1.5) используются $\bar{x}(t_f, t, x(t)) = x(t)$ и $W(t_f, t, x(t)) = I$, то алгоритм (2.1.3 – 2.1.5) превращается в соотношения, исключающие необходимость численного интегрирования дифференциальных уравнений (1.1.3 – 1.1.5). Пример применения двухэтапного подхода для модели вида (2.1.34) приведен в пункте 4.7.3.

Более сложный случай возникает тогда, когда число компонент вектора управления меньше числа уравнений модели системы. В этом случае нужно искать приемы, позволяющие, с одной стороны, ускорить расчеты, а, с другой стороны – сохранить приемлемую точность достижения заданной цели управления. Соответствующий пример приведен в пункте 4.2.3.

2.2. Терминальное управление системами с переменными запаздываниями

Системы с запаздываниями являются достаточно распространенным видом управляемых систем, особенно при управлении на большом расстоянии либо при использовании сложной обработки измерительной информации. Имеются и другие области, где адекватными математическими моделями являются именно системы с запаздываниями. В арсенале современной теории автоматического управления имеется ряд подходов и методов, позволяющих управлять системами данного класса, но практически все они либо накладывают большие ограничения на модель объекта управления и параметры запаздывания, либо являются узко направленными и предназначены для решения конкретной задачи. Одно из направлений – использование методов управления и анализа для систем без запаздываний. Здесь можно выделить два подхода: замена звеньев модели, содержащих запаздывание, апе-

риодическими звеньями с подходящей постоянной времени, либо игнорирование малых запаздываний. В работах [21], [22], [23] рассматриваются подходы, при которых строятся специальные прогнозирующие устройства или наблюдатели, но при этом классы рассматриваемых систем имеют ряд существенных ограничений.

Среди достаточно общих методов, пригодных для синтеза нелинейных систем, выделим линеаризационный метод А.Исидори (linearization I/O design method). Его обобщение на системы с одним постоянным запаздыванием и скалярным управлением предложено в [24], где, наряду с теоретической частью, приведен пример задачи терминального управления производительностью химического реактора с рециркуляцией вещества.

Покажем, что для расчета управляющих воздействий для терминальных систем с переменными запаздываниями, не зависящими от состояния, может быть применен и метод конечного состояния.

Рассмотрим терминальную задачу:

$$\begin{aligned} J &= J(x(t_f)) \rightarrow J^* \\ \frac{dx(t)}{dt} &= \Phi(t, X(t)) + B(t)u(t) \\ X(t) &= colon(x^0(t), x^1(t), \dots, x^N(t)) \\ x^m(t) &= x(t - h_m(t)), \quad m = 0, \dots, N, \quad h^0(t) \equiv 0 \\ t &\in [t_0, t_f], \quad x(t_0) = x(L_{t_0}), \quad L_{t_0} = (-\infty, t_0] \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

где J – целевая функция критерия, зависящая от вектора состояния, J^* – желаемое значение целевой функции, а остальные обозначения такие же, как в (1.2.1).

Определим управление на основании модели конечного состояния (1.2.18). Выполнив эквивалентную замену $J(x(t_f)) = J(\bar{x}(t_f, t_f, x(L_{t_f})))$, представим задачу (2.2.1) в эквивалентной форме через переменные конечного состояния:

$$\begin{aligned} J &= J(\bar{x}(t_f, t_f, x(L_{t_f}))) \rightarrow J^*, \\ \frac{d\bar{x}(t_f, t, x(L_t))}{dt} &= W(t_f, t, x(L_t))B(t)u(t), \\ t &\in [t_0, t_f], \quad x(t_0, t_0, x(L_{t_0})) = x(t_0) = x^0. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Для получения управления определим вначале критериальную функцию времени t :

$$\bar{J}(t) = J(\bar{x}(t_f, t, x(L_t))).$$

Продифференцируем критериальную функцию по времени в силу уравнений (2.2.2):

$$\frac{d\bar{J}(t)}{dt} = \frac{\partial J(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{d\bar{x}(t_f, t, x(L_t))}{dt} = \frac{\partial J(\bar{x})}{\partial \bar{x}} W(t_f, t, x(L_t))B(t)u(t), \quad (2.2.3)$$

где $\frac{\partial J(\bar{x})}{\partial \bar{x}}$ – градиент целевой функции (вектор-строка) критерия с подставленными вместо аргумента $x(t)$ ПКС $\bar{x}(t_f, t, x(t))$.

Зададим желаемое поведение критериальной функции (КФ) во времени, но не в явном виде, а посредством дифференциального уравнения с желаемым решением:

$$\frac{d\bar{J}(t)}{dt} = f_J(\bar{J}(t)). \quad (2.2.4)$$

Например, задав $f_J(\bar{J}(t)) = \frac{J^* - \bar{J}(t)}{T_u}$, получим экспоненциальное поведение КФ от некоторого значения, определяемого начальными условиями, к желаемому значению J^* с постоянной времени T_u . При переменном во времени $T_u = t_f - t$ критериальная функция изменяется во времени линейно.

Приравняв правые части (2.2.3) и (2.2.4), получаем:

$$\left. \frac{\partial J(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=\bar{x}(t_f, t, x(t_f))} W(t_f, t, x(t_f)) B(t) u(t) = f_J(t).$$

Вводя обозначение $G = \frac{\partial J}{\partial \bar{x}} WB$ и используя операцию псевдообращения для матрицы G , можно получить выражение для управляющего воздействия:

$$u(t) = \frac{G^T}{GG^T} f_J(t), \quad (2.2.5)$$

которое совпадает по виду с управлением для обыкновенных дифференциальных систем (2.1.5) с тем отличием, что входящие в (2.2.5) вектор-функции G размерности $(1 \times r)$, зависят от переменных конечного состояния $\bar{x}(t_f, t, x(t))$ и переходной матрицы $W(t_f, t, x(t))$, рассчитываемых по (1.2.17).

2.3. Терминальное управление гибридными системами

Рассмотрим терминальную задачу управления объектом (1.3.1):

$$\begin{aligned} J &= J(x(t_f)) \rightarrow J^*, \\ \frac{dx(t)}{dt} &= \Phi_1(t, x(t-0)) + B_1(t) \cdot u_1(t), \\ x(t_j) &= \Phi_2(t_{j-1}, x(t_j-0)) + B_2(t_j) u_2(t_j), \\ t &\in [t_0, t_f], \quad x(t_0) = x^0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \\ t_1 &< t_2 < \dots < t_N, \quad t_N \leq t_f, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

где, как и ранее, J^* – желаемое значение терминального критерия. Остальные обозначения пояснены при описании (1.3.1).

Рассмотрим последовательно дискретные интервалы времени и на каждом из них найдем непрерывное управление $u_1(t)$, приводящее состояние системы (2.3.1) в некоторое заданное промежуточное состояние, задаваемое значением $J_j = J(x(t_j))$, где j – номер дискретного интервала. Для этого, следуя основной схеме метода конечного состояния, определим критериальную функцию в виде целевой функции критерия, где аргумент $x(t_j)$ заменен переменной конечного состояния $\bar{x}(t_j, t, x(t))$. Переменная конечного состояния вместе с нелинейной переходной матрицей в соответствии с (1.3.2) определяется совместной системой

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= \Phi_1(\vartheta, \bar{x}(\vartheta, t, x(t))), \\ \frac{dW(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= \left. \frac{\partial \Phi_1(\vartheta, x)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}(\vartheta, t, x(t))} \cdot W(\vartheta, t, x(t)), \\ \vartheta &\in [t_{j-1}, t_j], \quad W(t, t, x(t)) = I, \\ \bar{x}(t_{j-1}, t_{j-1}, x(t_{j-1})) &= x(t_{j-1}), \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

где I – единичная матрица.

Продифференцируем на участке $[t_{j-1}, t_j)$ введенную выше критериальную функцию $\bar{J}(t) = J(\bar{x}(t_j, t, x(t)))$ по t в силу уравнений (2.3.1) и с учетом (1.3.3).

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{J}(t)}{dt} &= \frac{\partial J(\bar{x}(t_j, t, x(t)))}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{d\bar{x}(t_j, t, x(t))}{dt} = \\ &= \frac{\partial J(\bar{x}(t_j, t, x(t)))}{\partial \bar{x}} W(t_j, t, x(t)) B_1(t) u_1(t). \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

При этом, в силу свойства $\bar{x}(t, t, x(t)) = x(t)$ при любом t , задача приведения к желаемому значению J_j эквивалентна задаче $\bar{J}(t) \rightarrow J_j$, $t \rightarrow t_j, t. > t_{j-1}$.

Далее в соответствии со схемой метода конечного состояния определим желаемый вид критериальной функции в виде решения некоторого дифференциального уравнения

$$\frac{d\bar{J}(t)}{dt} = f_{J_1}(t, \bar{J}(t)). \quad (2.3.4)$$

Тем самым, фактически, задание указанного вида сводится к выбору такой зависящей от текущего значения $\bar{J}$ функции правых частей (2.3.4), при которой решение (2.3.4) и определяет желаемый вид критериальной функции. Заметим, что зависимость f_{j1} от $\bar{J}$ в принципе необязательна (это может быть просто некоторая функция времени), но желательна для обеспечения свойства грубости управления u_1 . Например, при

$$f_{j1}(t, \bar{J}(t)) = \frac{J_j - \bar{J}(t)}{T_{u1}} \quad (2.3.5)$$

$\bar{J}(t)$ из любой начальной точки по экспоненте с постоянной времени T_{u1} приближается к J_j .

Приравнивая правые части (2.3.3) и (2.3.4) и выполняя операцию псевдообращения с учетом того, что $G = \frac{\partial J(x)}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}(t_j, t, x(t))} \cdot W(t_j, t, x(t)) B_1(t)$ является вектором-строкой, а GG^T скаляром, получаем алгоритм для расчета непрерывного управления:

$$u_1(t) = G^+ f_{j1}(J(\bar{x}(t_j, t, x(t)))), \quad G^+ = G^T / GG^T, \\ G = \frac{\partial J(x)}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}(t_j, t, x(t))} \cdot W(t_j, t, x(t)) B_1(t), \quad t \in [t_{j-1}, t] \quad (2.3.6)$$

Для получения дискретного управления определим желаемые значения критериальной функции в дискретных точках как решение конечно-разностного уравнения с некоторой правой частью f_{j2} :

$$\bar{J}_j = f_{j2}(\bar{J}_{j-1}). \quad (2.3.7)$$

Так, если задаться

$$f_{j2} = \bar{J}_{j-1} + \frac{(J^* - \bar{J}_{j-1})}{T_{u2}}, \quad (2.3.8)$$

то решение (2.3.7) с увеличением индекса j будет по экспоненте с постоянной времени $T_{u2} \geq 1$ приближаться к J^* (при $T_{u2} < 1$ дискретное инерционное звено (2.3.7), (2.3.8) неустойчиво).

Вернемся к методу конечного состояния. По аналогии с непрерывным случаем приравняем (2.3.8), где $\bar{J}_{j-1} \equiv J(\bar{x}_{N,j-1}(x_{j-1}))$, выражению для критериальной функции в силу конечно-разностного уравнения (1.3.10). Для этого перепишем (1.3.10) в виде

$$\bar{x}_{N,j}(x_j) = \bar{x}_{N,j-1}(x_{j-1}) + \\ + \Phi_{2[N-1]}^{[N-j]}(\Phi_{21}(j-1, x_{j-0}) + B_{2j}u_{2j}) - \Phi_{2[N-1]}^{[N-j]}(\Phi_{21}(j-1, x_{j-0}))$$

и над левой и правой частями выполним функциональное преобразование J .

$$\bar{J}_j \equiv J(\bar{x}_{N,j}(x_j)) = J \left(\begin{array}{l} \bar{x}_{N,j-1}(x_{j-1}) + \\ + \Phi_{2[N-1]}^{[N-j]}(\Phi_{21}(j-1, x_{j-0}) + B_{2j}u_{2j}) - \\ - \Phi_{2[N-1]}^{[N-j]}(\Phi_{21}(j-1, x_{j-0})) \end{array} \right).$$

После приравнивания (2.3.8) и последнего выражения получаем:

$$f_{J2}(\bar{J}_{j-1}) = J \left(\begin{array}{l} \bar{x}_{N,j-1}(x_{j-1}) + \\ + \Phi_{2[N-1]}^{[N-j]}(\Phi_{21}(j-1, x_{j-0}) + B_{2j}u_{2j}) - \\ - \Phi_{2[N-1]}^{[N-j]}(\Phi_{21}(j-1, x_{j-0})) \end{array} \right), \quad (2.3.9)$$

$$\bar{J}_{j-1} \equiv J(\bar{x}_{N,j-1}(x_{j-1})).$$

Нелинейное относительно управления u_{2j} уравнение (2.3.9) и является тем соотношением, из которого определяется искомое управление в дискретные моменты времени методом конечного состояния. В отличие от непрерывного случая, где управление (2.3.6) получается в явном виде, здесь для его определения в каждый дискретный момент j необходимо решать скалярное нелинейное уравнение с r_2 неизвестными (по числу компонент вектора u_2), т.е. фактически – r_2 -мерную задачу нелинейного программирования.

Таким образом, расчет непрерывного и дискретного управлений для задачи (2.3.1) состоит из следующих шагов:

- 1) задаются исходные данные в виде переменных во времени (в общем случае) вектор-функций Φ_1, B_1, Φ_2, B_2 , начального состояния x^0 , времен $t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N$, времени функционирования системы $t_f \geq t_N$; полагается $j = 1$;
- 2) проверяется условие $j \leq N$; если условие выполнено, переход к шагу 3, в противном случае производится расчет непрерывного управления по алгоритму (2.3.2), (2.1.44) на оставшемся интервале $(t_N, t_f]$;
- 3) производится расчет непрерывного управления по алгоритму (2.3.2), (2.1.44) на интервале $[t_{j-1}, t_j]$;
- 4) производится расчет дискретного управления по алгоритму (2.3.9); в процессе расчета используется процедура, реализующая рекурсивное вложение правых частей Φ_2 дискретной части (1.3.9) и интегрирование непрерывной части (2.3.2) на интервале $[t_{j-1}, t_j]$ в соответствии с определением (1.3.3); после формирования всех данных для уравне-

ния (2.3.9) производится его численное решение относительно u_{2j} ; полагается $j = j + 1$ и осуществляется переход к шагу 2.

Рассмотрим пример терминальной задачи для гибридной системы:

$$\begin{aligned} J &= F_1(x_1(t_f) - x_1^*)^2 + F_2(x_2(t_f) - x_2^*)^2 + F_3(x_3(t_f) - x_3^*)^2 \rightarrow J^*, \\ \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) + a_0 x_3(t - 0), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -a_1 x_1(t) + a_2 (x_2(t))^3 + u_1(t), \\ x_3(t_j) &= x_3(t_j - 0) + a_3 (x_2(t_j - 0))^3 + u_2(t_j), \\ t \in [0, t_f], \quad x_1(0) &= x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad x_3(0) = x_3^0, \end{aligned}$$

где квадратический терминальный критерий при достижимом значении $J^* = 0$ имеет смысл точного приведения одной или нескольких координат системы к желаемым значениям x_1^*, x_2^*, x_3^* в зависимости от выбора весовых коэффициентов критерия F_1, F_2, F_3 .

Производился расчет управлений $u_1(t)$, $u_2(t_j)$ методом конечного состояния при следующих значениях параметров задачи: $a_0 = a_1 = 0,01$; $a_2 = 0,02$; $a_3 = 0,0003$; $t_f = 0,5$; $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$. Желаемые конечные значения выходных координат $x_1^* = 1$; $x_2^* = 3$; $x_3^* = 2$. Весовые коэффициенты критерия в четырех экспериментах, результаты которых приведены в таблице 2.1 и показаны на графиках рисунков 2.3 – 2.6, выбирались в различных сочетаниях. Интервалы дискретности взяты одинаковыми длиной $t_f/N = 0,5/3 = 0,167$, а $t_1 = 0,167$, $t_2 = 0,333$, $t_3 = 0,5$. В качестве функций f_{J1} , f_{J2} , определяющих желаемое поведение непрерывной и дискретной критериальных функций, взяты зависимости (2.3.5) и (2.3.9) соответственно при $T_{u1} = 0,02$, $T_{u2} = 1$.

В первых трех экспериментах ставилась задача приведения в заданное положение первой (эксперимент 1), второй (эксперимент 2) и третьей (эксперимент 3) координат. В эксперименте 4 приводились к заданным значениям все три координаты. На графиках рисунках 2.3 – 2.6, помимо координат, показаны зависимости теоретической (штриховые кривые) и фактической (сплошные кривые) критериальных функций, а также управляющих воздействий от времени.

Таблица 2.1 – Коэффициенты критерия и конечные значения координат

Номер экспери- мента	F_1	F_2	F_3	$x_1(t_f), x_1^* = 1$	$x_2(t_f), x_2^* = 3$	$x_3(t_f), x_3^* = 2$
1	1	0	0	0,987	-1,148	-100,45
2	0	1	0	1,230	3,003	-99,91
3	0	0	1	0	0	1,992
4	1	1	1	1.430	3,186	2,001

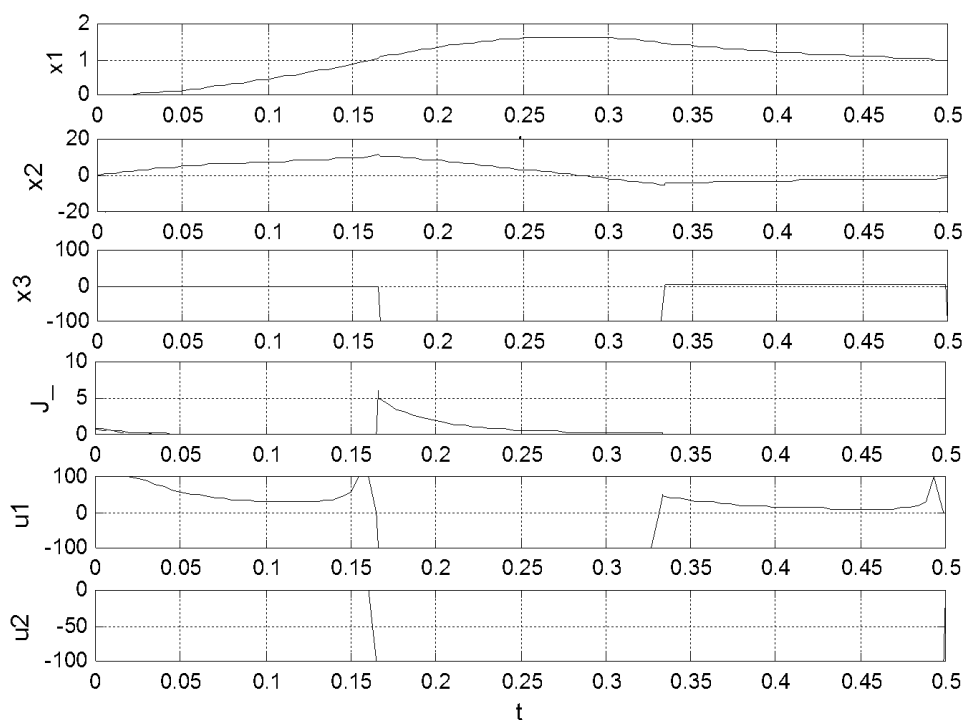


Рисунок 2.3 – Результаты компьютерного эксперимента 1

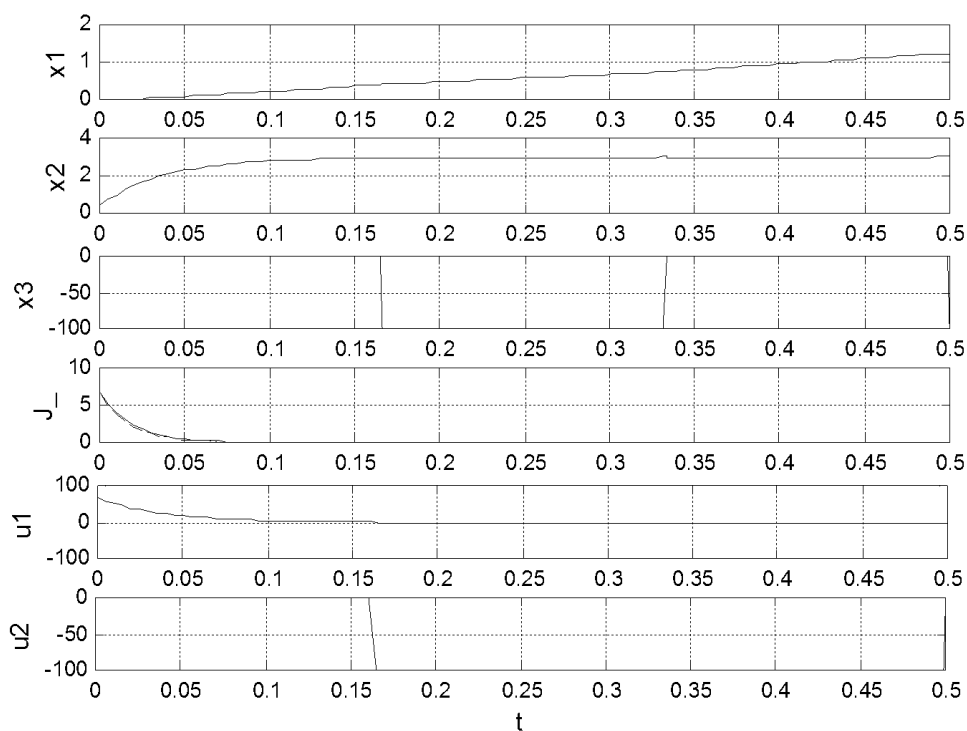


Рисунок 2.4 – Результаты компьютерного эксперимента 2

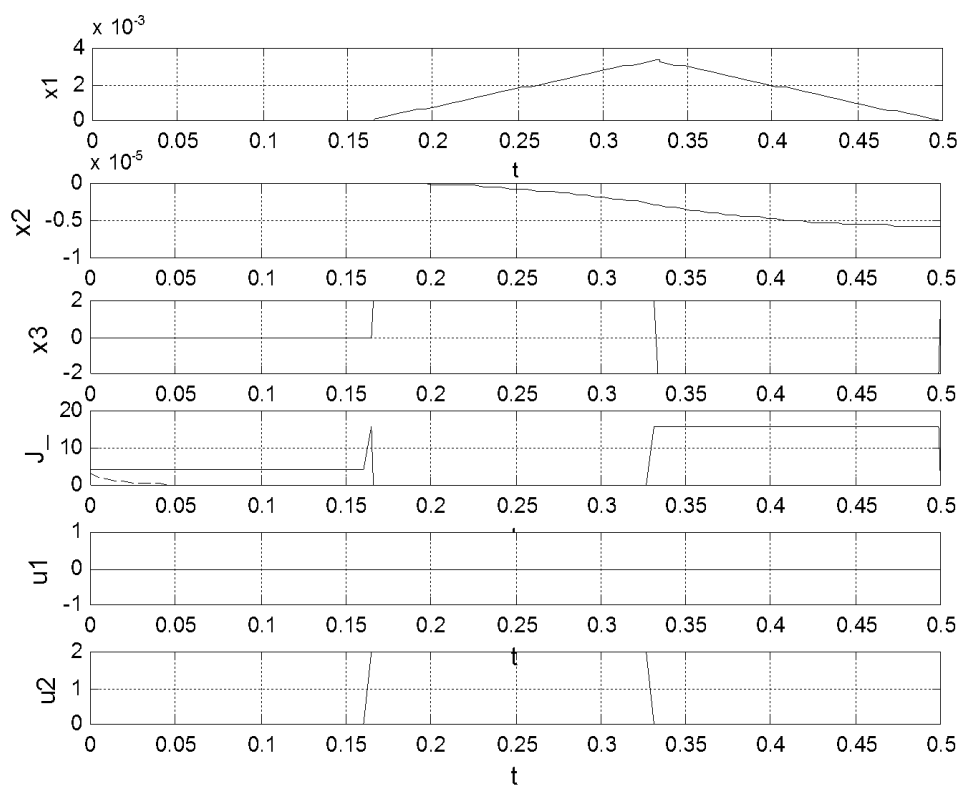


Рисунок 2.5 – Результаты компьютерного эксперимента 3

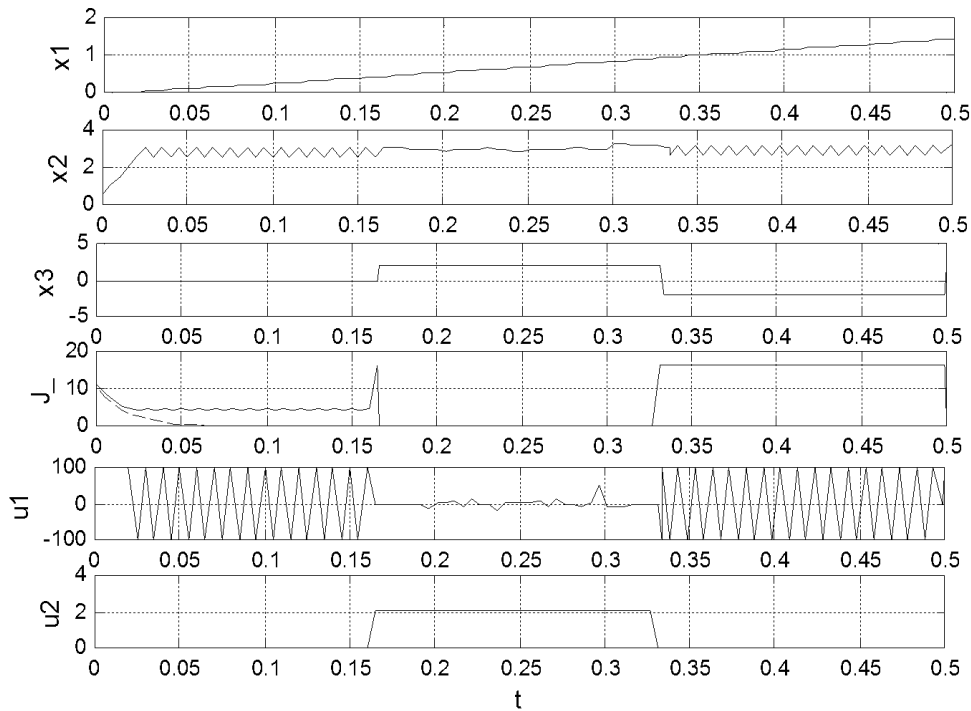


Рисунок 2.6 – Результаты компьютерного эксперимента 4

По поведению критериальных функций можно судить о степени достижимости поставленной цели. Так, при совпадении конечных значений теоретической и фактической критериальных функций выполняется и цель управления, т.е. достижимость нулевого значения критерия. Если, более того, теоретическая и фактическая критериальные функции совпадают на всем интервале, при расчете управлений не возникало особых случаев.

Особый случай при расчете непрерывного управления – равенство нулю знаменателя псевдообратной матрицы G^+ в выражении (2.1.44). В этом случае развивается локальный неустойчивый процесс, который практически мгновенно переводит систему в точку устойчивости, характеризуемую условием $GG^T \neq 0$, откуда критериальная функция вновь в соответствии с f_{j1} приближается к заданному значению J_j . При подходе к границе области достижимости точки потери устойчивости сгущаются и в пределе образуют сплошной барьер, препятствующий фактической критериальной функции иметь недостижимые значения. При этом критериальная функция «движется» вдоль границы достижимости по принципу скользящего режима. Указанная граница чаще всего имеет вид горизонтальной прямой, хотя наблюдались и криволинейные границы области достижимости. Другая причина недостижимости, проявляющаяся в появлении горизонтальных участков критериальных функций – неуправляемость системы на всем интервале функ-

ционирования системы или его части. В этом случае числитель (2.1.44), а вместе с ним и управление u_1 , оказываются нулевыми. Для ослабления влияния особых случаев при реализации управления (2.1.44) необходимо добавить малую константу того же знака, что и знак GG^T , в знаменатель G^+ . Целесообразно также ввести ограничения по модулю на управляющие воздействия, которые выбираются индивидуально для каждой конкретной задачи.

Особый случай при расчете дискретного управления – неразрешимость нелинейного уравнения (2.3.9), которая может иметь место по двум причинам. Первая причина – недостижимость цели управления в виде значения параметра J^* , входящего в выражение для функции f_{J_2} (для данного примера – выражение (2.3.9)). Вторая причина – вычислительные проблемы в процессе поиска решения уравнения (2.3.9). Последние выявляются по остаточным ненулевым невязкам в итерационном процессе решения уравнения (2.3.9). Следует отметить, что зависимость (2.3.9) от управления может иметь самый разный вид. В частности, отмечены зависимости с протяженными горизонтальными участками, когда многие стандартные процедуры останавливаются на первых же шагах по заложенному в них и повсеместно используемому критерию останова, когда вычисленная в различных точках разность значений невязки становится меньше заданной точности.

Анализ приведенных результатов приводит к следующим выводам.

- 1) Цели управления каждой из координат в отдельности (эксперименты 1 – 3) достигнуты с высокой точностью; отклонения достигнутых конечных значений от заданных не превышают 1,3%, что находится в пределах вычислительных погрешностей. Управление без особых случаев имело место в эксперименте 2, где теоретическая и фактическая критериальные функции на четвертом графике рисунка 2.1.4 визуально неразличимы. В эксперименте 1 в момент перехода на второй участок произошел скачок x_3 , а вместе с ним и критериальной функции, которая на втором участке вновь по экспоненте приближается к ее желаемому значению. Из-за того, что на данном участке управление вышло за заданное ограничение -100 , скорость убывания и время достижения желаемого нулевого значения критериальной функции меньше экспоненциального с постоянной времени $T_{ц1} = 0,02$, что видно из четвертого графика рисунка 2.1.4.
- 2) Цель управления, связанная с приведением всех трех координат к заданным значениям, достигнута с несколько большими погрешностями (43%, 7%, 0,1% соответственно для первой, второй и третьей координат), что связано с недостижимостью точного приведения всех координат; о недостижимости свидетельствует поведение фактической критериальной функции (сплошная кривая на четвертом графике рисунка 2.1.6), которая

на первом и третьем участках «движется» вдоль достижимых горизонтальных уровней в форме скользящего режима, а на втором участке сливается с теоретической кривой.

2.4. Терминальное управление дискретными многоиндексными системами

Рассмотрим вначале двухиндексную терминальную задачу достижения желаемого значения J^* :

$$J = J(x(N_1, N_2)) \rightarrow J^*, \quad (2.4.1)$$

$$x(i, j-1) = \Phi_1(i-1, j-1, x(i-1, j-1)) + B_1(i-1, j-1) \cdot u_1(i, j), \quad (2.4.2)$$

$$x(i-1, j) = \Phi_2(i-1, j-1, x(i-1, j-1)) + B_2(i-1, j-1) \cdot u_2(i, j), \quad (2.4.3)$$

где $i=1,2,\dots,N_1$; $j=1,2,\dots,N_2$; J^* – желаемое значение терминального критерия J ; $x(i,0)$, $x(0,j)$ – заданные «левые» граничные условия; x , Φ_1 , Φ_2 – n -мерные векторы; B_1 – $(n \times r_1)$ -мерная матрица при управлении u_1 , B_2 – $(n \times r_2)$ -мерная матрица при управлении u_2 .

В соответствии с методикой конструирования управления методом конечного состояния введем критериальную функцию (КФ) второй пары индексов, заменив аргумент критерия (2.4.1) на ПКС:

$$\bar{J}(i, j) = J(\bar{x}(N_1, N_2, i, j, x(i, j))) \rightarrow J^*. \quad (2.4.4)$$

В силу свойства 4 из (1.4.2) имеем:

$$\bar{J}(N_1, N_2) = J(\bar{x}(N_1, N_2, N_1, N_2, x(N_1, N_2))) = J(x(N_1, N_2)) \equiv J.$$

Таким образом, при выборе управлений u_1 и u_2 таких, что при $i \rightarrow N_1$, $j \rightarrow N_2$ критериальная функция (2.4.4) $\bar{J}(N_1, N_2) \rightarrow J^*$, будет решена и эквивалентная задача (2.4.1).

К сожалению, соотношение (2.4.4) пока нельзя использовать ввиду его зависимости от неизвестного $\bar{x}(N_1, N_2, i, j, x(i, j))$. По этой причине определим

$$\bar{J}(k, l, i, j) = J[\bar{x}(k, l, i, j, x(i, j))], \quad (2.4.5)$$

который при $k, i \rightarrow N_1$, $l, j \rightarrow N_2$ в силу свойства 4 из (1.4.2) стремится к J^* .

Частными случаями (2.4.5) будут

$$\bar{J}(N_1, j-1, i, j-1) = J[\bar{x}(N_1, j-1, i, j-1, x(i, j-1))] \quad (2.4.6)$$

и

$$\bar{J}(i-1, N_2, i-1, j) = J[\bar{x}(i-1, N_2, i-1, j, x(i-1, j))] , \quad (2.4.7)$$

для которых известны $\bar{x}$ (это выражения (1.4.11) и (1.4.12), зависящие от управляющих воздействий u_1 и u_2).

Для определения u_1 и u_2 зададим желаемое поведение критериальной функции $\bar{J}$ в виде пары рекуррентных формул:

$$\bar{J}(N_1, j-1, i, j-1) = f_{J_1}(\bar{J}(N_1, j-1, i-1, j-1)), \quad (2.4.8)$$

$$\bar{J}(i-1, N_2, i-1, j) = f_{J_2}(\bar{J}(i-1, N_2, i-1, j-1)) \quad (2.4.9)$$

при граничных условиях

$$\bar{J}(N_1, 0, i, 0) = J(\bar{x}(N_1, 0, i, 0, x(i, 0))), \quad (2.4.10)$$

$$\bar{J}(0, N_2, 0, j) = J(\bar{x}(0, N_2, 0, j, x(0, j))). \quad (2.4.11)$$

Для получения $\bar{x}(N_1, 0, i, 0, x(i, 0))$ воспользуемся первым выражением из (1.4.2) при $k = \overline{1, N_1}, l = 1, j = 1$ для каждого $i = 1, 2, \dots, N_1$, то есть расчет по (1.4.2) производится вначале для $i = 1$, и т.д. до $i = N_1$.

Аналогично, но по второму выражению из (1.4.2) при $k = 1, l = \overline{1, N_2}$, $i = 1$ для каждого $j = 1, 2, \dots, N_2$ рассчитывается $\bar{x}(0, N_2, 0, j, x(0, j))$.

Следует отметить, что для получения управления выражения (2.4.10) и (2.4.11) не требуются. Они нужны лишь для построения трехмерных графиков, если есть потребность в визуальном сравнении поверхностей желаемой и фактической критериальных функций.

Для получения же управления нужны f_{J_1} и f_{J_2} , которыми необходимо задаться таким образом, чтобы решение (2.4.8) и (2.4.9) при достижении $i \rightarrow N_1, j \rightarrow N_2$ подходило (точно или приближенно) к J^* .

Определим

$$f_{J_1} = \bar{J}(N_1, j-1, i-1, j-1) + \frac{1}{T_{u_1}}(J^* - \bar{J}(N_1, j-1, i-1, j-1)), \quad (2.4.12)$$

$$f_{J_2} = \bar{J}(i-1, N_2, i-1, j-1) + \frac{1}{T_{u_2}}(J^* - \bar{J}(i-1, N_2, i-1, j-1)). \quad (2.4.13)$$

Тогда (2.4.8) и (2.4.9) при $T_{u_1}, T_{u_2} \geq 1$ будет иметь решение, по близкой к экспоненте траектории приближающееся к J^* (при $T_{u_1}, T_{u_2} < 1$ разностные уравнения (2.4.8), (2.4.9) с правыми частями соответственно (2.4.12) и (2.4.13) неустойчивы).

При $T_{u_1} = T_{u_2} = 1$ имеем из (2.4.8), (2.4.9) с учетом (2.4.12), (2.4.13):

$$\bar{J}(N_1, j-1, i, j-1) = J^*, \quad \bar{J}(i-1, N_2, i-1, j) = J^*$$

при любых i и j , больших нуля. То есть задание $T_{u_1} = T_{u_2} = 1$ за один шаг выводит критериальную функцию на уровень J^* , который далее не изменяется. Напомним, что здесь речь идет о теоретическом поведении КФ.

Теперь вернемся к получению управления.

Для этого приравняем правые части (2.4.6), (2.4.7) и (2.4.8) и (2.4.9) (или в частном случае (2.4.12) и (2.4.13)) соответственно с подстановкой (1.4.11) и (1.4.12) вместо $\bar{x}$ в (2.4.6) и (2.4.7).

В итоге получим два скалярных нелинейных уравнения относительно векторов $u_1(i, j)$ и $u_2(i, j)$, которые решаются для каждого i и j . Для частного случая f_{J_1}, f_{J_2} имеем:

$$\begin{aligned} & J[\bar{x}(N_1, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) + \\ & + \Phi_1^{[N_1-i]}(\arg_{11}(u_1)) - \Phi_1^{[N_1-i]}(\arg_{12})] = \\ & = \left(1 - \frac{1}{T_{u_1}}\right) J(\bar{x}(N_1, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1))) + \frac{J^*}{T_{u_1}}, \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

$$\begin{aligned} & J[\bar{x}(i-1, N_2, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) + \\ & + \Phi_2^{[N_2-j]}(\arg_{21}(u_2)) - \Phi_2^{[N_2-j]}(\arg_{22})] = \\ & = \left(1 - \frac{1}{T_{u_2}}\right) J(\bar{x}(i-1, N_2, i-1, j-1, x(i-1, j-1))) + \frac{J^*}{T_{u_2}}, \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

$$\begin{aligned} \arg_{11}(u_1) &= N_1, j-1, \Phi_1(i-1, j-1, x(i-1, j-1)) + B_1(i-1, j-1) \cdot u_1(i, j), \\ \arg_{12} &= N_1, j-1, \Phi_1(i-1, j-1, x(i-1, j-1)), \\ \arg_{21}(u_2) &= i-1, N_2, \Phi_2(i-1, j-1, x(i-1, j-1)) + B_2(i-1, j-1) \cdot u_2(i, j), \\ \arg_{22} &= i-1, N_2, \Phi_2(i-1, j-1, x(i-1, j-1)). \end{aligned}$$

Присутствующие в (2.4.14) и (2.4.15) аргументы $\bar{x}(N_1, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1))$ и $\bar{x}(i-1, N_2, i-1, j-1, x(i-1, j-1))$ вновь рассчитываются по (1.4.2), если $x(i-1, j-1)$ уже известно.

Для общего, многоиндексного случая с терминальным критерием

$$J = J(N_1, N_2, \dots, N_p) \rightarrow J^* \quad (2.4.16)$$

и ограничениями (1.4.14) вместо (2.4.14), (2.4.15), с учетом (1.4.16) и обозначений (1.4.13) имеем:

$$\begin{aligned} & \left(x(M_{p \setminus j \setminus N_j}(i-1), M_p(i-1), x(M_p(i-1))) + \right. \\ & \left. + \Phi_j^{[N_j-i_j]}(M_{p \setminus j \setminus N_j}(i-1), \Phi_j(M_p(i-1), x(M_p(i-1))) + B_j(M_p(i-1)u_j(M_p(i)))) - \right. \\ & \left. - \Phi_j^{[N_j-i_j]}(M_{p \setminus j \setminus N_j}(i-1), \Phi_j(M_p(i-1), x(M_p(i-1)))) \right) = \quad (2.4.17) \\ & = f_{J_p} \left(J(x(M_{p \setminus j \setminus N_j}(i-1), M_p(i-1), x(M_p(i-1)))) \right), \quad j=1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Для критериальных функций с желаемой экспоненциальной траекторией имеем:

$$\begin{aligned} & f_{J_p} \left(J(x(M_{p \setminus j \setminus N_j}(i-1), M_p(i-1), x(M_p(i-1)))) \right) = \\ & = \left(1 - \frac{1}{T_{u_j}} \right) J(x(M_{p \setminus j \setminus N_j}(i-1), M_p(i-1), x(M_p(i-1)))) + \frac{J^*}{T_{u_j}}, \quad j=1, 2, \dots, p. \quad (2.4.18) \end{aligned}$$

2.5. Управление выходом посредством сигнальной самонастройки по эталонной модели

Рассмотрим один из классов адаптивных систем – системы с сигнальной самонастройкой по эталонной модели при параллельной схеме ее включения [25]. Целью систем данного класса является воспроизведение динамических свойств эталонной модели путем формирования некоторого управляющего сигнала на входе. При этом управляющий сигнал зависит от ошибки между откликом исходной системы и эталонной модели, а также измеряемых внешних воздействий. Обычно подобные системы строят на основе подхода, когда по измеренному вектору ошибки формируется сигнал обратной связи, рассчитываемой из условия асимптотической устойчивости самонастройки (например, с использованием функций Ляпунова). При использовании подхода на основе функций Ляпунова чаще всего выбирают ее в виде неотрицательно определенной квадратической формы от текущей ошибки, а затем находят производную от этой функции в силу уравнений для ошибки. Завершающим этапом является выбор такого управления, которое обеспечивает отрицательность указанной производной. При этом, если исходный объект и эталонная модель линейны, в результате получается разрывное управление, так как уравнение для ошибки содержит линейно входящее искомое управление.

Сформулированная задача имеет и некоторое сходство с известной задачей приводимости. Классическая задача приводимости систем и соответствующие теоремы и методы, сформулированные А.М.Ляпуновым и раз-

в работе в работах Н.П.Еругина, В.В. Немыцкого и других авторов [26], ставят своей целью такое преобразование фазового пространства, чтобы в итоге получилась система, более удобная для анализа. Чаще всего ищут такие преобразования, чтобы исходная система приводилась к линейной стационарной системе заданного вида (диагональной, блочно-диагональной, треугольной и др.). Получены условия приводимости для некоторых классов систем, установлены правила восстановления их свойств по свойствам приведенной системы. Достаточно полно задача решена для линейных стационарных систем и частных видов нестационарных систем. Для нелинейных же систем, насколько нам известно, имеются лишь теоремы существования, устанавливающие необходимые и достаточные условия приводимости в форме, не дающей практически пригодного способа приведения нелинейной системы к линейной [27], [28]. Упомянем здесь также и методы точной линеаризации [17 – 19], [29], которые основаны на преобразованиях фазового пространства и не вполне подходят для решения сформулированной задачи. Следует при этом иметь в виду, что в классической задаче приводимости имеются в виду такие преобразования, что исходная и приведенная системы оказываются эквивалентными с любой наперед заданной точностью во всей области начальных условий и при всех внешних воздействиях. При этом важно, что эквивалентность систем достигается путем формирования нужного управляющего сигнала, а пространство фазовых координат, и, соответственно, цель управления для исходной и приведенной системы, остаются неизменными. Можно предположить, что множество приводимых в классическом смысле нелинейных систем весьма невелико. В то же время задача придания свойств линейности нелинейным системам остается актуальной, так как при этом появляется возможность использовать какие-то элементы теории линейных систем для нелинейных задач управления.

Задачу сигнальной самонастройки можно сформулировать и как задачу приводимости, однако вместо классического определения приводимости по Ляпунову целесообразно ввести другое определение, которое можно назвать «неклассическим».

Система в векторно-матричной записи

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(t, x) + B(t)u(t), \quad u(t) \in U(t), t \in [t_0, t_f], x(t_0) = x^0 \quad (2.5.1)$$

приводится к векторно-матричной эталонной системе

$$\frac{dy}{dt} = A(t) \cdot y + C(t) f(t), \quad f(t) \in F(t), t \in [t_0, t_f], y(t_0) = x^0, \quad (2.5.2)$$

если можно найти такое управление $u(t) = u(t, x(t), y(t), f(t))$, что интеграл от нормы разности $\Delta(t) = x(t) - y(t)$ не превышает наперед заданного числа Δ^* . В (2.5.1) и (2.5.2) x, y – векторы состояний одинаковой размерности. В каче-

стве нормы можно использовать квадратическую форму с неотрицательно определенной матрицей F . При этом указанное ограничение примет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \Delta(t)^T \cdot F \cdot \Delta(t) dt \leq \Delta^* .$$

Вместо последнего ограничения можно рассматривать критерий

$$J(t) = \Delta(t)^T F \Delta(t) \rightarrow \min \quad \forall t \in [t_0, t_f], \quad (2.5.3)$$

который отражает принцип локальной оптимизации и легче реализуем на практике.

Данное определение приводимости основано не на линейном преобразовании пространства состояния, как классическое определение приводимости [26], а на, в общем случае, нелинейном преобразовании пространства управлений. Следует также отметить, что можно было обобщить задачу приводимости, рассматривая вместо (2.5.2) другую нелинейную систему. Полученные ниже результаты очевидным образом обобщаются и на такую задачу. Из (2.5.3) также следует, что приводимость может иметь место не для всего вектора состояний, а для его отдельных координат. Для этого достаточно задать единственный ненулевой элемент матрицы F в соответствующей позиции на главной диагонали. Можно рассматривать приводимые системы разной размерности, однако для упрощения выкладок остановимся именно на системах вида (2.5.1), (2.5.2) с критерием (2.5.3).

Наряду с приводимостью на всем интервале времени, введем также неклассическое определение приводимости для конечного времени. Данное определение отличается от приведенного тем, что вместо критерия (2.5.3) в нем используется ограничение

$$J = \Delta(t_f)^T \cdot F \cdot \Delta(t_f) \leq \Delta^* . \quad (2.5.4)$$

Приводимость для конечного времени может также оказаться полезной, если свойство линейности требуется только для вектора состояния в конечный момент времени.

Далее поставленную задачу будем трактовать как задачу приводимости только по той причине, что термин «приводящее управление», как нам кажется, короче и точнее отражает поставленную цель, чем термин «сигнальная самонастройка по эталонной модели». По существу же подход, который изложен ниже, во многом похож на описанный выше подход с использованием функций Ляпунова, хотя имеет и одно существенное отличие. Это отличие обусловлено использованием для поиска приводящего управления метода конечного состояния.

Введем переменные конечного состояния (ПКС) для систем (2.5.1) и (2.5.2), которые обозначим соответственно $\bar{x}(\mathcal{G}, t, x(t))$ и $\bar{y}(\mathcal{G}, t, y(t))$. ПКС связаны с переменными состояния соотношениями вида (1.1.3), (1.1.5):

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{x}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= \Phi(\vartheta, \bar{x}(\vartheta, t, x(t))), \\
\frac{d\bar{x}(t_f, t, x(t))}{dt} &= W^N(t_f, t, x(t)) \cdot B(t) \cdot u(t), \\
\frac{dW^N(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= \left[\frac{\partial \Phi(\vartheta, x)}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}(\vartheta, t)} \cdot W^N(\vartheta, t, x(t)), \quad (2.5.5)
\end{aligned}$$

$$\vartheta \in [t, t_f], \bar{x}(t, t, x(t)) = x(t), W^N(t, t, x(t)) = I,$$

$$t \in [t_0, t_f], \bar{x}(t_f, t_0, x(t_0)) = \bar{x}^0.$$

$$\frac{d\bar{y}(\vartheta, t, y(t))}{d\vartheta} = A(\vartheta) \cdot \bar{y}(\vartheta, t, y(t)),$$

$$\frac{d\bar{y}(t_f, t, y(t))}{dt} = W^L(t_f, t) \cdot C(t) \cdot f(t),$$

$$\frac{dW^L(\vartheta, t)}{d\vartheta} = A(\vartheta) \cdot W^L(\vartheta, t), \quad (2.5.6)$$

$$\frac{dW^L(t_f, t)}{dt} = -W^L(t_f, t) \cdot A(t),$$

$$\vartheta \in [t, t_f], \bar{y}(t, t, y(t)) = y(t), W^L(t, t) = I,$$

$$t \in [t_0, t_f], \bar{y}(t_f, t_0, y(t_0)) = W^L(t_f, t_0) \cdot y(t_0), W^L(t_f, t_f) = I.$$

В соотношениях (2.5.5) и (2.5.6) I – единичная матрица, W^N, W^L – переходные матрицы для систем (2.5.1) и (2.5.2), $\bar{x}^0$ – начальное условие по ПКС $\bar{x}$, которое может быть определено интегрированием первого векторно-матричного однородного уравнения из (2.5.5). Поскольку эталонная система линейная, ее переходная матрица W^L от состояния $y(t)$ не зависит.

Одним из основных соотношений, составляющих основу метода конечных состояний, является равенство переменных состояния и ПКС при одинаковых значениях первого и второго аргументов. В (2.5.5) и (2.5.6) указанное соотношение для переменных нелинейной и линейной моделей записано дважды в виде начальных условий $\bar{x}(t, t) = x(t)$, $\bar{y}(t, t) = y(t)$. Аналогичные выражения можно записать и для конечного момента t_f :

$$\bar{x}(t_f, t_f, x(t_f)) = x(t_f), \bar{y}(t_f, t_f, y(t_f)) = y(t_f). \quad (2.5.7)$$

Решим вначале задачу приводимости для конечного времени. Для этого запишем терминальный критерий, выраженный через ПКС и эквивалентный левой части (2.5.4) при $t = t_f$ в силу (2.5.7).

$$\begin{aligned}
\bar{J}(t_f, t) &= \bar{\Delta}(t_f, t, x(t))^T \cdot F \cdot \bar{\Delta}(t_f, t, x(t)), \quad \bar{J}(t_f, t_f) = J, \\
\bar{\Delta}(t_f, t, x(t)) &= \bar{x}(t_f, t, x(t)) - \bar{y}(t_f, t, y(t)). \quad (2.5.8)
\end{aligned}$$

Продифференцируем (2.5.8) по t с учетом (2.5.5) и (2.5.6).

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{J}(t_f, t)}{dt} &= 2\bar{\Delta}(t_f, t, x(t))^T F \frac{d\bar{\Delta}(t_f, t, x(t))}{dt} = \\ &= 2\bar{\Delta}(t_f, t, x(t))^T F [W^N(t_f, t, x(t))B(t)u(t) - W^L(t_f, t)C(t)f(t)] \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Потребуем, чтобы $\bar{J}(t_f, t)$ изменялся по траектории, приходящей в конечный момент времени в точку, равную заданному минимально достижимому значению $J^* \leq \Delta^*$. Этого можно достичь, если, например, $\bar{J}(t_f, t)$ определено дифференциальным уравнением

$$\frac{d\bar{J}(t_f, t)}{dt} = \frac{J^* - \bar{J}(t_f, t)}{T_u}, \quad (2.5.10)$$

где $T_u = t_f - t$.

Если не требовать точного равенства $\bar{J}(t_f, t_f)$ и J^* , можно взять дифференциальное уравнение (2.5.10) с $T_u = T$, дающее экспоненциальное приближение $\bar{J}(t_f, t)$ к J^* с постоянной времени T . Могут быть использованы и другие желаемые траектории вместе с соответствующими им дифференциальными уравнениями.

При этом, если достижимо нулевое значение J^* , система (2.5.1) приводима к (2.5.2) по конечному времени. В противном случае можно лишь утверждать, что при выбранном законе изменения $\bar{J}(t_f, t)$ (2.5.10) приводимость не достигается. Критерием достижимости при заданных начальных условиях, функции $f(t)$ и моменте t_f является выполнение (2.5.4) с учетом того, что $\Delta(t_f) = \bar{\Delta}(t_f, t_f)$.

Приравнявая (2.5.9) и (2.5.10) и выполняя псевдообращение, получаем выражение для приводящего управления:

$$\begin{aligned} u(t) &= G^+ b, \\ G^+ &= G^T (GG^T)^{-1}, \\ G &= \bar{\Delta}^T(t_f, t, x(t)) \cdot F \cdot W^N(t_f, t, x(t)) \cdot B(t), \\ b &= \frac{J^* - \bar{J}(t_f, t)}{2T_u} + \bar{\Delta}^T(t_f, t, x(t)) \cdot F \cdot W^L(t_f, t) \cdot C(t) \cdot f(t). \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

Полученное управление зависит от ПКС $\bar{x}(t_f, t, x(t))$, линейной и нелинейной переходных матриц W^L, W^N как функций второго аргумента, текущего состояния нелинейной системы $x(t)$ и текущего состояния линейной системы $y(t)$. Последние две зависимости - неявные через

$$\bar{\Delta}(t_f, t, x(t)) = \bar{x}(t_f, t, x(t)) - \bar{y}(t_f, t, y(t)) = \bar{x}(t_f, t, x(t)) - W^L(t_f, t) \cdot y(t).$$

Линейная переходная матрица как функция второго аргумента может быть вычислена заранее и сохранена в памяти. Что же касается $\bar{x}(t_f, t, x(t))$ и

нелинейной переходной матрицы, то они могут быть получены как функции первого аргумента при совместном интегрировании первого и третьего векторно-матричных уравнений системы (2.5.5) для каждого текущего момента t . При этом требуемые в (2.5.11) их значения получаются при $\vartheta = t_f$.

Таким образом, приводимость по конечному времени производится совместным интегрированием систем (2.5.1), (2.5.13) при управлении (2.5.11), для расчета которого в каждый момент времени дополнительно интегрируются первое и третье уравнения из (2.5.5).

Перейдем теперь к задаче приводимости с критерием (2.5.3), т.е. приводимости на всем интервале времени. Для ее решения разобьем весь временной интервал $[t_0, t_f]$ на малые интервалы $[t_i, t_i + h), i = 1, 2, \dots, N$ длительностью h и для каждого из таких интервалов воспользуемся алгоритмом (2.5.11), считая $t \sim t_i, t_f \sim t_i + h \equiv t_{i+1}, T_u = h$. При этом ввиду малости интервала расчет ПКС и нелинейной переходной матрицы можно упростить, заменив интегрирование дифференциальных уравнений (2.5.11) разностными уравнениями

$$\begin{aligned} \bar{x}(t_{i+1}, t_i, x(t_i)) &= \bar{x}(t_i, t_i, x(t_i)) + \Phi(t_i, \bar{x}(t_i, t_i, x(t_i))) \cdot h, \\ W^N(t_{i+1}, t_i, x(t_i)) &= W^N(t_i, t_i, x(t_i)) + \\ &+ \left[\frac{\partial \Phi(t_i, x)}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}(t_i, t_i, x(t_i))} \cdot W^N(t_i, t_i, x(t_i)) \cdot h. \end{aligned}$$

С учетом начальных условий из (2.5.5) последние выражения приобретают более простой вид

$$\begin{aligned} \bar{x}(t_{i+1}, t_i, x(t_i)) &= x(t_i) + \Phi(t_i, x(t_i)) \cdot h, \\ W^N(t_{i+1}, t_i, x(t_i)) &= I + \left[\frac{\partial \Phi(t_i, x)}{\partial x} \right]_{x=x(t_i)} \cdot h. \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

Для линейной переходной матрицы запишем аналогичное равенство

$$W^L(t_{i+1}, t_i) = I + A(t_i) \cdot h. \quad (2.5.13)$$

Теперь управление (2.5.11) зависит только от текущих значений переменных состояния систем (2.5.1) и (2.5.2), т.е. расчет управлений для приводимости на всем интервале времени осуществляется значительно проще, чем для приводимости по конечному времени, если известна структурная модель системы.

Рассмотрим пример. Пусть

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2^3, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u, \quad x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = v, \quad y_1(0) = x_{10}, \quad y_2(0) = x_{20}, \quad t \in [0, t_f]. \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

Согласно (2.5.5), (2.5.6), (2.5.8) переходные матрицы и другие составляющие управления (2.5.11) определяются выражениями:

$$W^L(t_f, t) = \begin{pmatrix} 1 & t_f - t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W^N(t_f, t, x(t)) = \begin{pmatrix} 1 & -x_2^2(t) \exp(-3(t_f - t) - 1) \\ 0 & \exp(-(t_f - t)) \end{pmatrix},$$

$$\bar{\Delta}(t_f, t, x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} x_1(t) - \frac{1}{3} x_2^3(t) \exp(-3(t_f - t) - 1) - y_1(t) - y_2(t) \cdot (t_f - t) \\ x_2(t) \exp(-(t_f - t)) - y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$B = C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Результаты компьютерного моделирования систем (2.5.5), (2.5.6) с приводящим управлением отражены в таблице 2.2, где помещены конечные значения $x_1(t_f)$, $x_2(t_f)$, $y_1(t_f)$, $y_2(t_f)$ для различных значений варьируемых параметров. Кроме того, в этой же таблице приведены относительные погрешности $\varepsilon_i = \left| \frac{x_i(t_f) - y_i(t_f)}{y_i(t_f)} \right|$, $i = 1, 2$. Результаты получены для $t_f = 1$, $T = 0,05$, шага интегрирования метода Рунге-Кутты четвертого порядка 0,001, $F_{11} = 1$, $F_{22} = 0,01$, $F_{12} = F_{21} = 0$, $J^* = 0$.

Таблица 2.2 – Результаты компьютерного моделирования приводимости по конечному состоянию

№ экс-перимента	x_{10}	x_{20}	$v(t)$	$x_1(t_f)$	$x_2(t_f)$	$y_1(t_f)$	$y_2(t_f)$	ε_1 %	ε_2 %
1	-0,1	1	$2\sin(6\pi \cdot t)$	1,052	0,944	1,006	1,000	4,6	5,6
2	-0,1	1	$2 \cdot t$	1,336	1840	1,233	2,000	8,3	8,0
3	-0,1	1	$-2 \cdot t$	0,652	0,003	0,567	0,000	15,1	-
4	-0,1	1	$-2\sin(6\pi \cdot t)$	0,826	0,922	0,734	1,000	4,0	7,8
5	1	-0,1	$2\sin(6\pi \cdot t)$	1,007	-0,016	1,006	-0,100	0,1	84,5
6	1	-0,1	$2 \cdot t$	1,224	0,839	1,233	0,900	0,7	6,8
7	1	-0,1	$-2 \cdot t$	0,555	-0,977	0,567	-1,100	2,0	11,2
8	1	-0,1	$-2\sin(6\pi \cdot t)$	0,796	-0,217	0,794	-0,100	0,3	116,6

Таким образом, при различных начальных условиях и внешних воздействиях конечные состояния приведенной нелинейной и эталонной линейной моделей совпадают со средней относительной погрешностью около

19%, в том числе для первой координаты – 4%, для второй – 34%. Различие в точности объясняется разницей весовых коэффициентов.

Получим теперь управление, реализующее приводимость на всем интервале времени работы системы.

Из (2.5.12) и (2.5.13) следует:

$$W^N(t_i + h, t_i, x(t_i)) \approx \begin{pmatrix} 1 & 3x_2^2(t_i) \cdot h \\ 0 & 1 - h \end{pmatrix}, \quad W^L(t_i + h, t_i) \approx \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.5.15)$$

$$\begin{aligned} \Delta(t_{i+1}, t_i, x(t_i)) &= \bar{x}(t_{i+1}, t_i, x(t_i)) - \bar{y}(t_{i+1}, t_i, y(t_i)) = \\ &= \begin{pmatrix} x_1(t_i) + x_2^3(t_i) \cdot h - y_1(t_i) - y_2(t_i) \cdot h \\ x_2(t_i) \cdot (1 - h) - y_2(t_i) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

Для расчета приводящего управления в каждый дискретный момент t_i используем (2.5.8), (2.5.11) при $T_u = h$, где W^N, W^L, Δ рассчитываем по (2.5.15), (2.5.16).

Результаты компьютерного моделирования приводимости на интервале по алгоритму (2.5.8), (2.5.11) при $T_u = h$, (2.5.15), (2.5.16) приведены на рисунках 2.7, 2.8, где показаны зависимости от времени координат приведенной и эталонной систем для $x_1^0 = y_1^0 = 1$; $x_2^0 = y_2^0 = -1$; $t_f = 2$; $F_{11} = 1$; $F_{22} = 0,1$; $J^* = 0,001$, шаге интегрирования дифференциальных уравнений и периоде дискретности вычисления приводящего управления $h = 0,02$. Графики получены для внешних воздействий $v(t) = 0,5t$ и $v(t) = 4\sin\left(\frac{4\pi}{t_f}t\right)$.

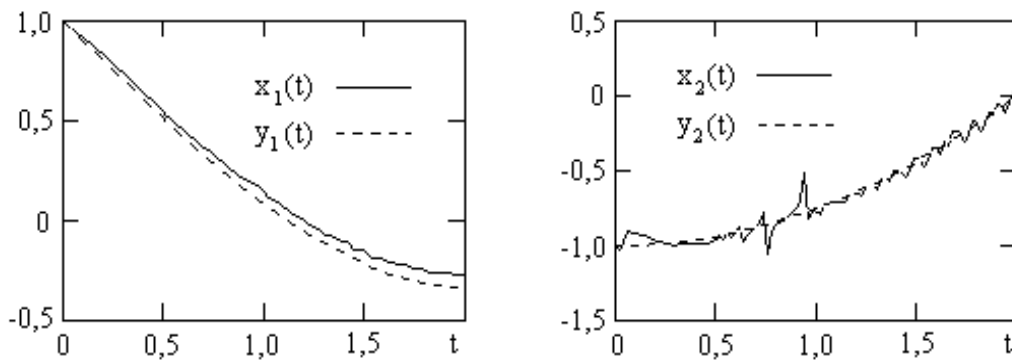


Рисунок 2.7 – Результаты компьютерного моделирования приводимости на интервале для $v(t) = 0,5t$

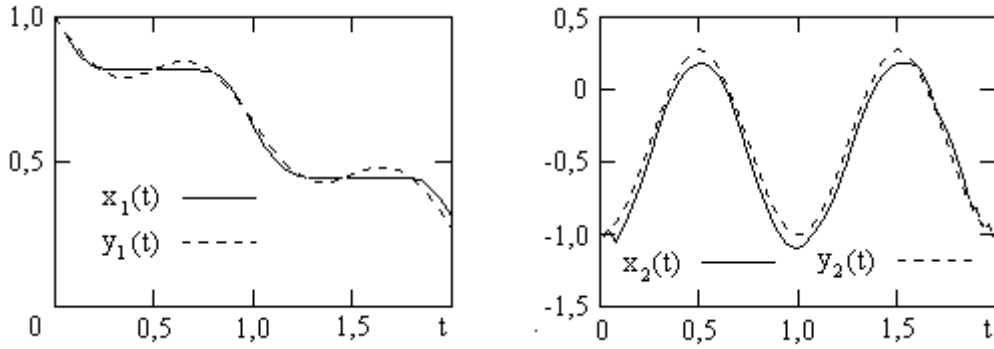


Рисунок 2.8 – Результаты компьютерного моделирования

приводимости на интервале для $v(t) = 4\sin\left(\frac{4\pi}{t_f}t\right)$

Как видим, отклики приведенной и эталонной систем достаточно близки по обеим координатам. Наблюдающиеся на втором графике рисунка 2.7 пилообразные колебания в предельном случае $h \rightarrow 0$ вырождаются в скользящий режим вдоль эталонной кривой.

Для иллюстрации приближенной эквивалентности приведенной и эталонной систем рассмотрим задачу линейной коррекции приведенной системы. Указанную коррекцию получим на основе эталонной линейной системы (2.5.14), для которой введем две обратные связи, превращающие систему в устойчивое инерционное звено второго порядка. Указанные обратные связи соответствуют $v(t) = -y_2(t) - y_1(t) + f(t)$, где $f(t)$ – задающее воздействие. При этом в эквивалентных приведенной и эталонной системах отклики на различные задающие воздействия должны быть близки. Соответствующие результаты компьютерного моделирования приведены на рисунках 2.9, 2.10, где показаны зависимости от времени координат приведенной и эталонной систем при $x_1^0 = y_1^0 = x_2^0 = y_2^0 = 0$;

$t_f = 20$; $F_{11} = 1$; $F_{22} = 0,001$; $J^* = 0,001$, шаге интегрирования дифференциальных уравнений и периоде дискретности вычисления приводящего управления $h = 0,04$. Графики получены для задающих воздействий $f(t) = 3$ и

$$f(t) = 4\sin\left(\frac{4\pi}{t_f}t\right).$$

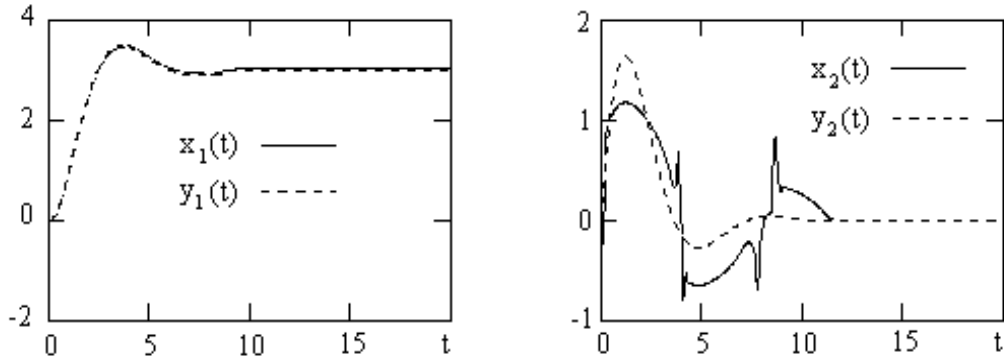


Рисунок 2.9 – Результаты компьютерного моделирования приводимости на интервале для $v(t) = -y_2(t) - y_1(t) + 3$

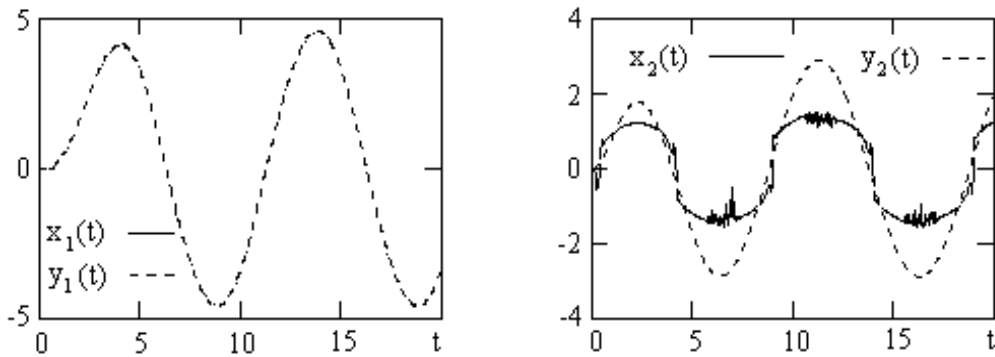


Рисунок 2.10 – Результаты компьютерного моделирования

приводимости на интервале для $v(t) = -y_2(t) - y_1(t) + 4\sin\left(\frac{4\pi}{t_f}t\right)$

Из приведенных на рисунках 2.9, 2.10 графиков видно, что отклики по первой координате практически одинаковы, отклики же по второй координате несколько отличаются. Следует, однако, заметить, что весовой коэффициент критерия F_{22} для второй координаты в тысячу раз меньше коэффициента для первой координаты. Попытка же увеличить этот коэффициент и сблизить отклики по второй координате в данном случае безуспешны. При небольшом увеличении (в несколько раз) отклики по второй координате несколько сближаются, однако на отклике приведенной системы по первой координате появляются выбросы. При большем увеличении коэффициента F_{22} (на порядок и больше) приведенная система теряет устойчивость. Данный факт отражает недостижимость цели приведения. Как указывалось выше, достижимость регулируется параметром J^* . Однако в задаче приводимости на интервале, когда сведение критериальной функции (2.5.8) к J^* происходит многократно (t_f/h раз), накапливается ошибка, которая зависит не только от J^* , но и от h и коэффициентов критерия F . По этой причине уменьшение h не означает автоматического увеличения точности процесса управ-

ляемого приведения. Для каждого случая параметры J^* , h , F_{ij} необходимо подбирать индивидуально. Что касается J^* , то его подбор нужно начинать со значения $J^* = 0$. Так например, в задаче линейной коррекции $J^* = 0$ подходит для случая $f(t) = 3$, однако для $f(t) = 4 \sin(4\pi \cdot t / t_f)$ на кривых отклика приведенной системы появляются выбросы большой амплитуды. По этой причине J^* взят ненулевым, в результате чего указанные выбросы исчезли.

Следует отметить, что реакция приводимой и эталонной систем рассматриваемого примера на одно и то же воздействие, т.е. в случае $u(t) = v(t)$, совершенно различна. Так, для $u(t) = v(t) = 2t$ отклики приводимой и эталонной систем $x_1(t_f) = 4,09$; $y_1(t_f) = 2,67$. Это свидетельствует о значительном влиянии приводящего управления на динамику рассматриваемой системы.

Приведенные выше примеры соответствовали сформулированным выше критериям приводимости, когда размерности приводимой и эталонной систем одинаковы. Однако больший практический интерес представляет случай, когда указанные размерности различны. Техника получения приводящего управления при этом принципиально не меняется. Проиллюстрируем ее на примере управления асинхронным двигателем, заданным математической моделью [30]:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\omega_p}{dt} &= \frac{p}{J} \cdot (M_e - M_c), \\
 \frac{d\Psi_\alpha^s}{dt} &= U_m \cdot \cos(\omega \cdot t) - a\Psi_\alpha^s + b\Psi_\alpha^r, \\
 \frac{d\Psi_\beta^s}{dt} &= U_m \cdot \sin(\omega \cdot t) - a\Psi_\beta^s + b\Psi_\beta^r, \\
 \frac{d\Psi_\alpha^r}{dt} &= -c\Psi_\alpha^r + d\Psi_\alpha^s - \omega_p \cdot \Psi_\beta^r, \\
 \frac{d\Psi_\beta^r}{dt} &= -c\Psi_\beta^r + d\Psi_\beta^s + \omega_p \cdot \Psi_\alpha^r, \\
 M_e &= e \cdot (\Psi_\beta^s \Psi_\alpha^r - \Psi_\alpha^s \Psi_\beta^r), \\
 G &= L^s \cdot L^r - M^2, \\
 a &= \frac{R^s \cdot L^r}{G}, b = \frac{R^s \cdot M}{G}, c = \frac{R^r \cdot L^s}{G}, d = \frac{R^r \cdot M}{G}, \\
 e &= \frac{m \cdot p \cdot M}{2G},
 \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

Ниже приведены описания координат модели, а также численные значения параметров для электродвигателя типа А42-6.

ω_s – угловая скорость вращения ротора;

Ψ с соответствующими индексами – проекции векторов потокоцеплений ротора (индекс r) и статора (индекс s) на взаимно перпендикулярные оси α и β неподвижной системы координат;

$p=3$ – число пар полюсов;

$m=3$ – число фаз;

$J=0.00152$ кГм² – момент инерции;

$M=0.263$ Гн – взаимная индуктивность;

L и R с индексами – соответственно индуктивности и активные сопротивления ротора и статора; их значения (в генри и омах) приведены ниже;

$$L^r = 0,289; L^s = 0,279; R^r = 3,8; R^s = 3,57;$$

$\omega=314$ с⁻¹ – круговая частота питающего напряжения;

M_c – момент сопротивления.

Переходный процесс для скорости вращения ротора, как показано на рисунке 2.11, имеет сильно колебательный характер.

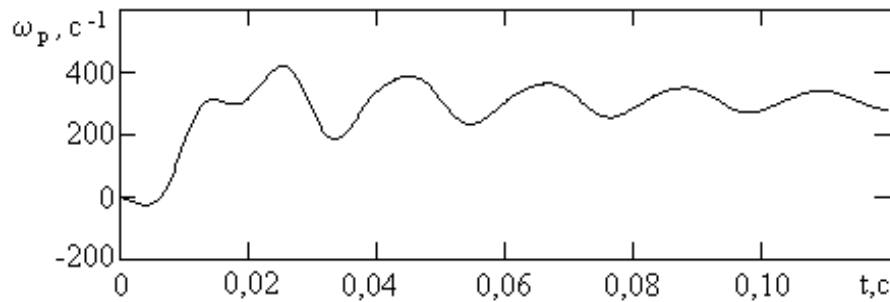


Рисунок 2.11 – Переходный процесс для скорости вращения ротора асинхронного двигателя

Поставим задачу синтеза приводящего управления, придающего двигателю свойства звена с передаточной функцией $W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$, на вход которого подается внешнее воздействие в виде амплитуды питающего напряжения $f(t) = U_m$, что соответствует системе дифференциальных уравнений (2.5.2) с матрицами и векторами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ k/T^2 \end{pmatrix}, a_{21} = -1/T^2, a_{22} = -2\xi/T.$$

Приведенная система должна реагировать на произвольное внешнее воздействие $f(t)$ так же, как эталонное звено. При этом приводящее управление, зависящее от $f(t)$, должно подаваться на систему (2.5.17) как добавок к U_m . Таким образом, мы имеем задачу приводимости на всем интервале

ле. Как и при получении (2.5.11), (2.5.12), введем $\Delta(t) = \omega_p(t) - y_1(t)$ и критерий $J = \Delta(t+h) \rightarrow J^*$. Определим критериальную функцию

$$\bar{J}(t+h, t) = \bar{\Delta}(t+h, t, x(t)), \quad \bar{\Delta}(t+h, t, x(t)) = \bar{\omega}_p(t+h, t, x(t)) - \bar{y}_1(t+h, t, y(t)),$$

где $\bar{\omega}_p(t+h, t, x(t))$, $\bar{y}_1(t+h, t, y(t))$ – переменные конечного состояния, определяемые как функции второго аргумента выражениями

$$\frac{d\bar{\omega}_p(t+h, t)}{dt} = [W_{12}^N(t+h, t)\cos(\omega t) + W_{13}^N(t+h, t)\sin(\omega t)]\mu(t), \quad (2.5.18)$$

$$\frac{d\bar{y}(t+h, t)}{dt} = W_{12}^L(t+h, t)\frac{k}{T^2}f(t). \quad (2.5.19)$$

Определим локальную цель управления на малом интервале $[t, t+h]$ – обеспечение как можно меньшего отклонения $\Delta(t+h)$, что соответствует $J^* = 0$ и критерию (2.5.3). Напомним, что $J^* = 0$ – это идеальная цель, которая на каких-то интервалах может оказаться недостижимой.

Далее получаем $\frac{d\bar{\Delta}(t+h, t, x(t))}{dt} = \frac{d\bar{\omega}_p(t+h, t, x(t))}{dt} + \frac{d\bar{y}(t+h, t, y(t))}{dt}$ и после подстановки (2.5.18), (2.5.19) приравняем полученное выражение правой части дифференциального уравнения для желаемой критериальной функции вида (2.5.10) с $T_u = h$, когда $\bar{J}(t+h, t) = J^*$. В результате получаем приводящее управление:

$$u(t) = \frac{J^* - \bar{\omega}_p(t+h, t) + \bar{y}_1(t+h, t) + hW_{12}^L(t+h, t)k/T^2}{h[W_{12}^N(t+h, t)\cos(\omega t) + W_{13}^N(t+h, t)\sin(\omega t)]} \quad (2.5.20)$$

Интегрируя уравнения для переходной матрицы линейной стационарной эталонной системы из (2.5.17), получаем:

$$W_{11}^L(t) = \exp(\alpha t) \frac{(\alpha - a_{22})\sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t)}{\beta}, \quad W_{12}^L(t) = \exp(\alpha t) \frac{\sin(\beta t)}{\beta},$$

$$W_{21}^L(t) = a_{21} \left(\exp(\alpha t) \frac{\sin(\beta t)}{\beta} \right), \quad W_{22}^L(t) = \exp(\alpha t) \left(\frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta t) + \cos(\beta t) \right),$$

$$\alpha = \operatorname{Re}(\lambda_1), \quad \beta = \operatorname{Im}(\lambda_1), \quad \lambda_1 = \frac{a_{22}}{2} + \sqrt{\frac{a_{22}^2}{4} + a_{21}}.$$

Переменная конечного состояния эталонной линейной системы определяется выражением $\bar{y}_1(t+h, t, y(t)) = W_{11}^L(h)y_1(t) + W_{12}^L(h)y_2(t)$.

Нелинейная переходная матрица, согласно (2.5.12), равна $W^N(t+h, t) = I + \frac{\partial \Phi}{\partial x}h$, где

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & -gx_5(t) & gx_4(t) & gx_3(t) & -gx_2(t) \\ 0 & -a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & b \\ -x_5(t) & d & 0 & -c & -x_1(t) \\ x_4(t) & 0 & d & x_1(t) & -c \end{pmatrix},$$

а переменная конечного состояния нелинейной системы

$$\bar{\omega}_p(t+h, t) = \omega_p(t) + \Phi h,$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{p}{J} \cdot (M_e - M_c) \\ (U_m + f(t)) \cdot \cos(\omega \cdot t) - a\Psi_\alpha^s + b\Psi_\alpha^r \\ (U_m + f(t)) \cdot \sin(\omega \cdot t) - a\Psi_\beta^s + b\Psi_\beta^r \\ -c\Psi_\alpha^r + d\Psi_\alpha^s - \omega_p \cdot \Psi_\beta^r \\ -c\Psi_\beta^r + d\Psi_\beta^s + \omega_p \cdot \Psi_\alpha^r \end{pmatrix}.$$

Заметим, что управление (2.5.20) придает системе (2.5.17) свойство квазилинейности только по отношению к управляющему воздействию $f(t)$ и начальному условию $\omega_p(0)$. Что же касается момента сопротивления M_c и начальных условий по другим переменным, то по отношению к этим факторам система остается нелинейной. Для приведения системы с учетом всех воздействий и начальных условий должна быть поставлена другая задача приводимости, однако следует иметь в виду, что при этом вероятность недостижимости поставленной цели (при тех же пределах изменения начальных условий и воздействий) возрастет.

Результаты моделирования системы (2.5.17) с приводящим управлением (2.5.20) для случаев постоянного, линейно убывающего и линейно возрастающего внешнего воздействия $f(t)$ показаны на рисунках 2.12 – 2.17. Результаты получены для $t_f = 0,12\text{с}$, $M_c = 4\text{н} \cdot \text{м}$, $\omega = 314\text{с}^{-1}$ и амплитудном ограничении $|u(t)| \leq U^{\max}$. На рисунках 2.12 – 2.14 изображены графики переходных процессов, а на рисунках 2.15 – 2.17 – соответствующие графики приводящих управлений.

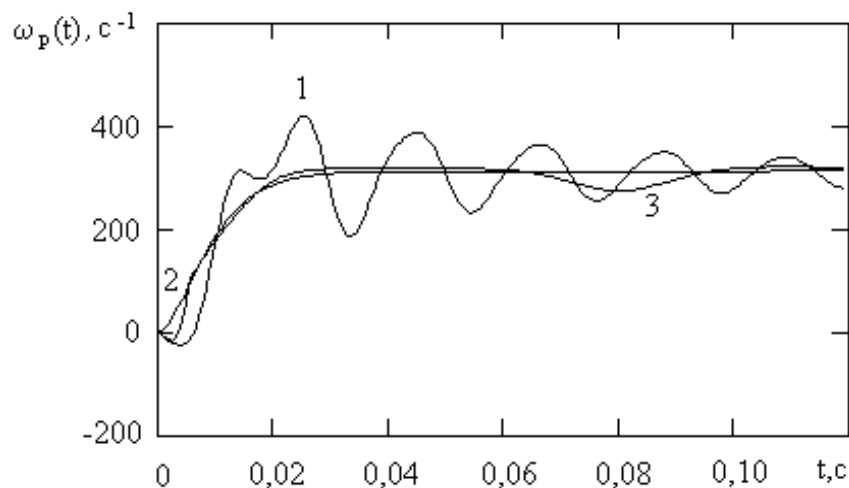


Рисунок 2.12 – Переходный процесс для скорости ротора асинхронного электродвигателя при $f(t) = 0$ и $U^{\max} = 500\text{В}$

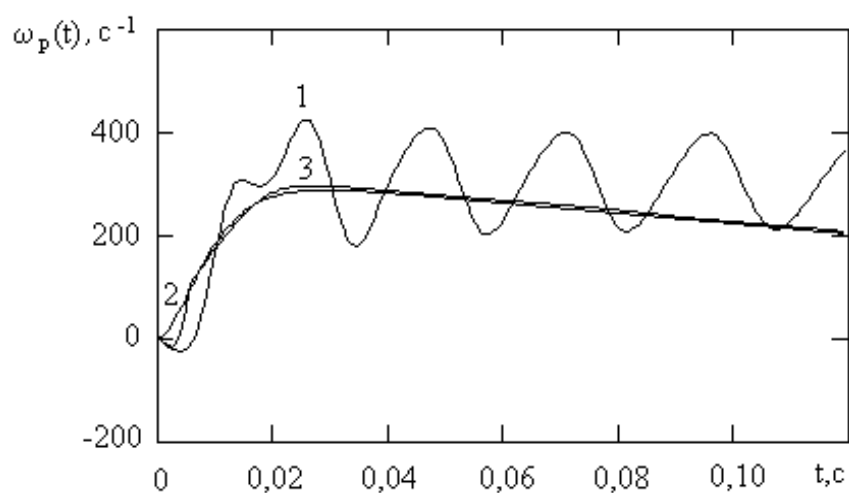


Рисунок 2.13 – Переходный процесс для скорости ротора асинхронного электродвигателя при $f(t) = -1000 \cdot t$ и $U^{\max} = 500\text{В}$

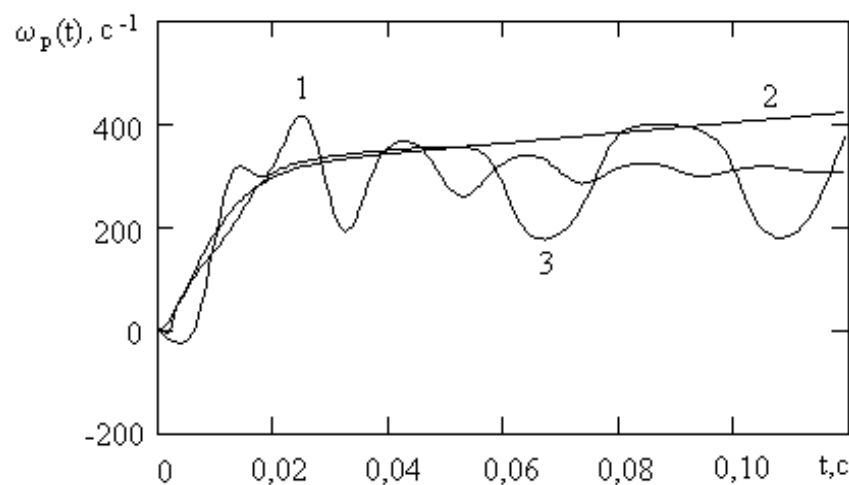


Рисунок 2.14 – Переходный процесс для скорости ротора асинхронного электродвигателя при $f(t) = 1000 \cdot t$ и $U^{\max} = 2000\text{В}$

Кривые 1 соответствуют подаче воздействия $f(t)$ в виде добавка к U_m непосредственно во второе и третье уравнения (2.5.17), кривые 2 – эталонному выходу, кривые 3 – подаче $f(t)$ в алгоритм расчета приводящего управления (2.5.20), а $u(t)$ – в виде добавка к U_m во второе и третье уравнения (2.5.17).

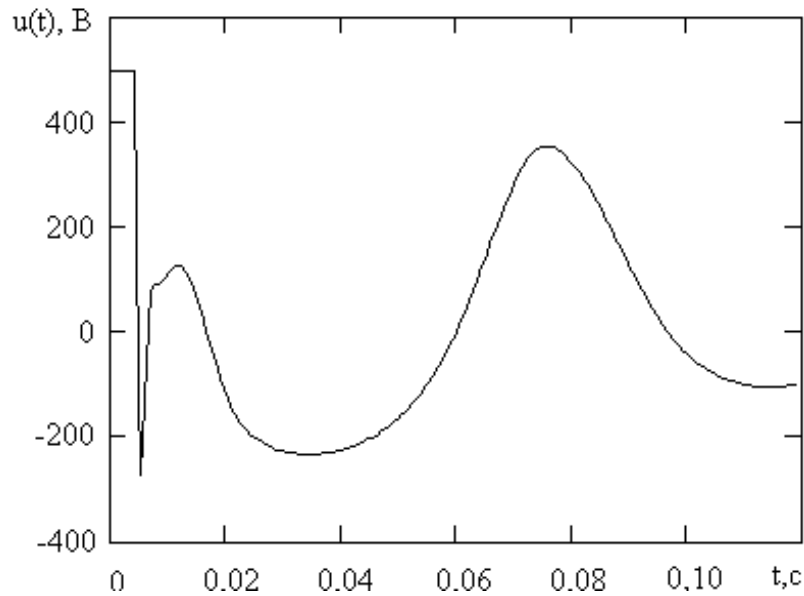


Рисунок 2.15 – Приводящее управление для асинхронного электродвигателя при $f(t) = 0$ и $U^{\max} = 500V$

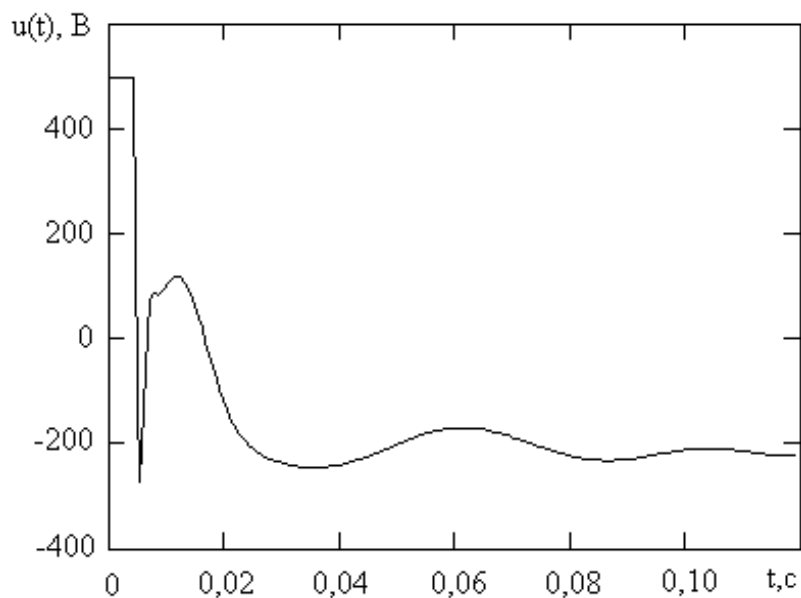


Рисунок 2.16 – Приводящее управление для асинхронного электродвигателя при $f(t) = -1000 \cdot t$ и $U^{\max} = 500V$

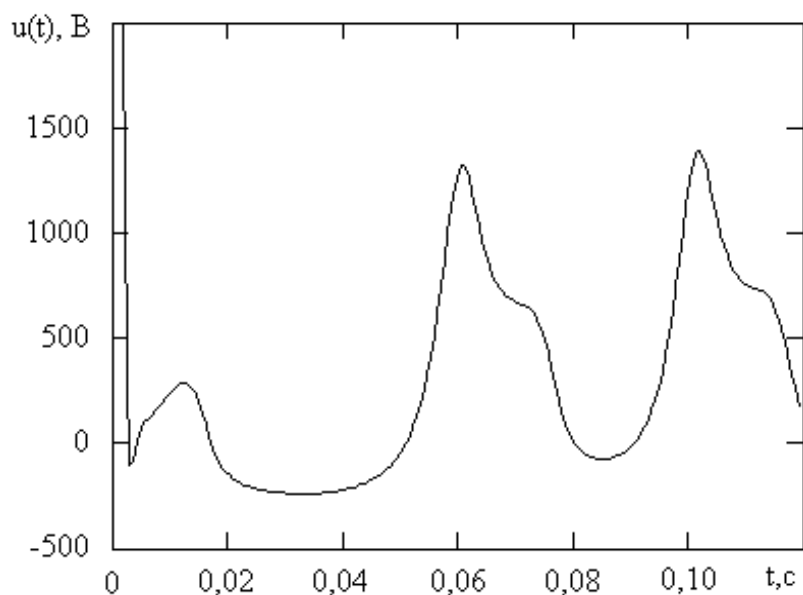


Рисунок 2.17 – Приводящее управление для асинхронного электродвигателя при $f(t) = 1000 \cdot t$ и $U^{\max} = 500V$

По представленным результатам можно сделать перечисленные ниже выводы.

- 1) При подаче различных воздействий $f(t)$ непосредственно на двигатель (кривые 1) установившаяся скорость почти не изменяется, а лишь увеличивается либо уменьшается колебательность переходного процесса; таким образом, при таком режиме использования $f(t)$ и таком диапазоне его изменения (на 120В) управлять скоростью двигателя практически нельзя.
- 2) При подаче воздействия $f(t)$ на приводящий регулятор (кривые 2) скорость близка к эталонной (кривые 3) на всем временном интервале, исключая отдельные участки; особенно близки приводимый и эталонный процессы для случая линейно убывающего $f(t)$.
- 3) Участки, где приводимый и эталонный процессы отличаются, соответствуют участкам интенсивного изменения приводящего управления, что является эффектом частичной недостижимости цели управления.
- 4) Переходный процесс рисунка 2.12 с приводящим управлением рисунка 2.15 соответствуют режиму управляемого по амплитуде питающего напряжения разгона асинхронного двигателя с существенно улучшенным качеством переходного процесса как по быстродействию, так и по колебательности, что представляет самостоятельную ценность.

Таким образом, управляемая приводимость в неклассическом смысле позволяет придавать динамической системе свойства другой системы, значительно отличающейся своей математической моделью. При этом область

начальных условий и внешних воздействий, а также точность воспроизведения фазовых траекторий существенно больше, чем при использовании ли-
неаризованных моделей.

2.6. Выводы

Выпишем полученные в настоящей главе основные результаты в виде следующей сводной таблицы, сохранив нумерацию соответствующих формул.

Таблица 2.3 – Расчет управлений и их элементов методом конечного состояния

Постановка задачи	Расчет управлений и элементов
Терминальные дифференциальные системы	
$J = J(x(t_f)) \rightarrow J^* \quad (2.1.1)$ $\frac{dx(t)}{dt} = \Phi(t, x(t)) + B(t) \cdot u(t),$ $t \in [t_0, t_f], x(t_0) = x^0.$ $(1.1.1)$	$u(t) = G^+ \cdot f_J(J(\bar{x}(t_f, t, x(t)))) ,$ $G^+ = G^T (G G^T)^{-1}, \quad (2.1.5)$ $G = \left(\frac{\partial J(x)}{\partial x} \Big _{x=\bar{x}(t_f, t, x(t))} \right) \cdot W(t_f, t, x(t)) B(t).$ $\bar{x}(t_f, t, x(t))$ и $W(t_f, t, x(t))$ определяются по (1.1.3), (1.1.5) $f_J(\bar{J}(t)) = \frac{J^* - \bar{J}(t)}{T_u}$ – для экспоненциальной желаемой траектории критериальной функции
Терминальные дифференциально-функциональные системы	
$J = J[x(t_f)] \rightarrow J^*,$ $\frac{dx}{dt} = \Phi(t, x, v^c, v^\delta),$ $\frac{dv^c}{dt} = u,$ $f(x, v^c, v^\delta) = 0,$ $\dim \{x, \Phi\} = (n \times 1), \dim f = (m \times 1),$ $\dim v = (s \times 1),$ $\dim \{v^c, u\} = (m^c \times 1), \dim v^\delta = (m \times 1),$ $m^c + m = s,$ $t \in [t_0, t_f], x(t_0) = x^0.$ $(2.1.8)$	Расчет управления по (2.1.5), где: $\frac{dW(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} = A_w \cdot W(\vartheta, t, x(t)),$ $A_w = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \Phi(\vartheta, x, v^c, v^\delta)}{\partial x} & \frac{\partial \Phi(\vartheta, x, v^c, v^\delta)}{\partial v^c} \\ 0_{m^c \times n} & 0_{m^c \times m^c} \end{array} \right] \Big _{x=\bar{x}(\vartheta, t), v^c=\bar{v}^c(\vartheta, t),}$ $(2.1.9)$ $B(t) = \begin{pmatrix} 0_{n \times m^c} \\ I_{m^c \times m^c} \end{pmatrix}. \quad (2.1.12)$

	$\frac{\partial \Phi(\vartheta, x, v^c, v^\delta)}{\partial v^c} = \frac{\partial \Phi(\vartheta, x, v^c, v^\delta)}{\partial v^c} -$ $- \frac{\partial \Phi(\vartheta, x, v^c, v^\delta)}{\partial v^\delta} \cdot \left[\frac{\partial \varphi(x, v^c, v^\delta)}{\partial v^\delta} \right]^{-1} \cdot \frac{\partial \varphi(x, v^c, v^\delta)}{\partial v^c}.$ $(2.1.15)$ $\frac{d\bar{x}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} = \Phi[\vartheta, \bar{x}(\vartheta, t, x(t)), v^c(t), v^\delta], \quad (2.1.16)$ $f(\bar{x}(\vartheta, t, x(t)), v^c(t), v^\delta) = 0.$
Ускоренный расчет $\bar{x}(t_f, t, x(t))$ и $W(t_f, t, x(t))$ на основе приближенных аналитических решений нелинейных дифференциальных уравнений	
$\frac{dy}{dt} = \Phi(t, y), \quad t \in [t_0, t_f], \quad y(t_0) = y^0,$ $\dim y = (n \times 1),$ $(2.1.17)$	Расчет y_i : $y_i(\vartheta) = y_i(t) + \sum_{k=0}^{k_i} \frac{1}{k+1} R_{ik}(t, x(t))(\vartheta - t)^{k+1}.$ $(2.1.24)$ $y_i(t) = y_i^0, \quad R_{i0}(t, y(t)) = \Phi(t, y(t)),$ $R_{i1}(t, y(t)) = \frac{\partial \Phi_i(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_i(t, y)}{\partial y} \Big _{y=y(t)} \Phi(t, y(t)),$ $R_{ik}(t, y(t)) =$ $= \frac{1}{k} \left(\frac{\partial R_{i(k-1)}(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial R_{i(k-1)}(t, y(t))}{\partial y} \Big _{y=y(t)} \Phi(t, x(t)) \right),$ $k = 2, 3, \dots, k_i.$ $(2.1.22)$ Погрешность от замены нулем правой части уравнения для k_i-го тейлоровского коэффициента с максимальным абсолютным значением ε_i : $\bar{y}_i(\vartheta) - \tilde{y}_i(\vartheta) = \frac{1}{k_i + 1} \varepsilon_i (\vartheta - t)^{k_i + 1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$ $(2.1.27)$
Терминальные системы с переменными запаздываниями	
$J = J(x(t_f)) \rightarrow J^*$ $\frac{dx(t)}{dt} = \Phi(t, X(t)) + B(t)u(t)$ $X(t) = colon(x^0(t), x^1(t), \dots, x^N(t))$ $x^m(t) = x(t - h_m(t)), \quad m = 0, \dots, N,$ $t \in [t_0, t_f], \quad x(t_0) = x(L_{t_0}), \quad L_{t_0} = (-$ $(2.2.1)$	Расчет управления по (2.1.5) или (2.2.5), где: $\frac{dx(t, \tau, x(L_\tau))}{dt} = \Phi(t, X(t, \tau, x(L_\tau))),$ $\frac{dW^\delta(t, \tau, x(L_\tau))}{dt} =$ $= \sum_{m=0}^N A_m(t, X(t, \tau, x(L_\tau))) W_m^\delta(t, \tau, x(L_\tau)),$ $A_m(t, X(t, \tau, x(L_\tau))) = \frac{\partial \Phi(t, X)}{\partial x^m} \Big _{X=X(t, \tau, x(L_\tau))},$ $W_m^\delta(t, \tau, x(L_\tau)) \equiv W^\delta(t - h_m(t), \tau),$ $t \in [\tau, t_f], \quad W^\delta(\tau, \tau, x(L_\tau)) = I, \quad W^\delta(t, \tau, x(L_\tau)) \Big _{t < \tau} = 0,$ $x(\tau, \tau, x(L_\tau)) = x(L_\tau).$

(1.2.17)	
Терминальные гибридные системы	
$J = J(x(t_f)) \rightarrow J^*,$ $\frac{dx(t)}{dt} = \Phi_1(t, x(t-0)) + B_1(t) \cdot u_1(t),$ $x(t_j) = \Phi_2(t_{j-1}, x(t_{j-1})) + B_2(t_j) u_2(t_j),$ $t \in [t_0, t_f], x(t_0) = x^0, j = 1, 2, \dots, N,$ $t_1 < t_2 < \dots < t_N, t_N \leq t_f,$ (2.3.1)	Расчет управления $u_1(t)$: $u_1(t) = G^+ f_{J1}(J(\bar{x}(t_j, t, x(t)))), G^+ = G^T / GG^T,$ $G = \frac{\partial J(x)}{\partial x} \Big _{x=\bar{x}(t_j, t, x(t))} \cdot W(t_j, t, x(t)) B_1(t), t \in [t_{j-1}, t],$ (2.3.6) где: $f_{J1}(t, \bar{J}(t)) = \frac{J_j - \bar{J}(t)}{T_{u1}}$ (2.3.5) для экспоненциальной траектории критериальной функции; $\frac{dx(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} = \Phi_1(\vartheta, x(\vartheta, t, x(t))),$ $\frac{dW(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} = \frac{\partial \Phi_1(\vartheta, x)}{\partial x} \Big _{x=x(\vartheta, t, x(t))} \times$ $\times W(\vartheta, t, x(t)),$ $\vartheta \in [t_{j-1}, t_j], W(t, t, x(t)) = I,$ $x(t_{j-1}, t_{j-1}, x(t_{j-1})) = x(t_{j-1}), t \in [t_{j-1}, t_j],$ (2.3.2) Расчет управления $u_2(t_j)$ путем решения нелинейного уравнения: $f_{J2}(J_{j-1}) =$ $= J \left[\begin{array}{l} x_{N,j-1}(x_{j-1}) + \\ + \Phi_{2[N-1]}^{[N-j]}(\Phi_{21}(j-1, x_{j-0}) + B_{2j} u_{2j}) - \\ - \Phi_{2[N-1]}^{[N-j]}(\Phi_{21}(j-1, x_{j-0})) \end{array} \right],$ (2.3.9) где обозначено $\bar{J}_{j-1} \equiv J(\bar{x}_{N,j-1}(x_{j-1}))$. $f_{J2} = \bar{J}_{j-1} + \frac{(J^* - \bar{J}_{j-1})}{T_{u2}}$ (2.3.8) для дискретно-экспоненциальной траектории критериальной функции
Терминальные двухиндексные системы (дискретный аналог дифференциальных уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными в нормальной форме)	
$J = J(x(N_1, N_2)) \rightarrow J^*,$ (2.4.1) $x(i, j-1) = \Phi_1(i-1, j-1, x(i-1, j-1)) +$ $+ B_1(i-1, j-1) \cdot u_1(i, j),$ (2.4.2) $x(i-1, j) = \Phi_2(i-1, j-1, x(i-1, j-1)) +$ $+ B_2(i-1, j-1) \cdot u_2(i, j),$	Для дискретно-экспоненциальных траекторий критериальных функций $f_{J1} = \bar{J}(N_1, j-1, i-1, j-1) +$ $+ \frac{1}{T_{u1}} (J^* - \bar{J}(N_1, j-1, i-1, j-1)),$ (2.4.12)

(2.4.3)	$f_{J_2} = \bar{J}(i-1, N_2, i-1, j-1) + \frac{1}{T_{u_2}} (J^* - \bar{J}(i-1, N_2, i-1, j-1)). \quad (2.4.13)$ расчет управлений производится путем численного решения системы нелинейных уравнений $J[x(N_1, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) + \Phi_1^{[N_1-i]}(\arg_{11}(u_1)) - \Phi_1^{[N_1-i]}(\arg_{12})] =$ $= \left(1 - \frac{1}{T_{u_1}}\right) J(x(N_1, j-1, i-1, j-1, x(i-1, j-1))) + \frac{J^*}{T_{u_1}}, \quad (2.4.14)$ $J[x(i-1, N_2, i-1, j-1, x(i-1, j-1)) + \Phi_2^{[N_2-j]}(\arg_{21}(u_2)) - \Phi_2^{[N_2-j]}(\arg_{22})] =$ $= \left(1 - \frac{1}{T_{u_2}}\right) J(x(i-1, N_2, i-1, j-1, x(i-1, j-1))) + \frac{J^*}{T_{u_2}}, \quad (2.4.15)$ где $\arg_{11}(u_1) = N_1, j-1, \Phi_1(i-1, j-1, x(i-1, j-1)) + B_1(i-1, j-1) \cdot u_1(i, j),$ $\arg_{12} = N_1, j-1, \Phi_1(i-1, j-1, x(i-1, j-1)),$ $\arg_{21}(u_2) = i-1, N_2, \Phi_2(i-1, j-1, x(i-1, j-1)) + B_2(i-1, j-1) \cdot u_2(i, j),$ $\arg_{22} = i-1, N_2, \Phi_2(i-1, j-1, x(i-1, j-1)).$
Терминальные многоиндексные системы (дискретный аналог дифференциальных уравнений в частных производных с многими независимыми переменными в нормальной форме)	
$J = J(N_1, N_2, \dots, N_p) \rightarrow J^* \quad (2.4.16)$ $x(M_{p \setminus j+1}(i-1)) = \Phi_j(M_p(i-1), x(M_p(i-1))) + B_j(M_p(i-1)) \cdot u_j(M_p(i)), \quad (1.4.14)$ $M_p(i) = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ $M_{p \setminus q \setminus a}(i) = \{i_1, i_2, \dots, i_{q-1}, a, i_{q+1}, \dots, i_p\},$ $M_{p \setminus q \setminus a+1}(i) = \{i_1, i_2, \dots, i_{q-1}, i_q + 1, i_{q+1}, \dots, i_p\}, \quad (1.4.13)$	Для дискретно-экспоненциальных траекторий критериальных функций $f_{J_p} \left(J(\bar{x}(M_{p \setminus j \setminus N_j}(i-1), M_p(i-1), x(M_p(i-1)))) \right) =$ $= \left(1 - \frac{1}{T_{u_j}}\right) J(\bar{x}(M_{p \setminus j \setminus N_j}(i-1), M_p(i-1), x(M_p(i-1)))) + \frac{J^*}{T_{u_j}}, \quad j=1, 2, \dots, p. \quad (2.4.18)$ расчет управлений производится путем численного решения системы нелинейных уравнений $\left(\bar{x}(M_{p \setminus j \setminus N_j}(i-1), M_p(i-1), x(M_p(i-1))) + \Phi_j^{[N_j-i_j]}(M_{p \setminus j \setminus i_j}(i-1), \Phi_j(M_p(i-1), x(M_p(i-1))) + B_j(M_p(i-1)) u_j(M_p(i))) - \Phi_j^{[N_j-i_j]}(M_{p \setminus j \setminus i_j}(i-1), \Phi_j(M_p(i-1), x(M_p(i-1)))) \right) =$ $= f_{J_p} \left(J(\bar{x}(M_{p \setminus j \setminus N_j}(i-1), M_p(i-1), x(M_p(i-1)))) \right), \quad j=1, 2, \dots, p. \quad (2.4.17)$

Постановки задач приводимости Система $\frac{dx}{dt} = \Phi(t, x) + B(t)u(t),$ $u(t) \in U(t), t \in [t_0, t_f], \quad (2.5.1)$ $x(t_0) = x^0$ приводится к векторно-матричной эталонной системе $\frac{dy}{dt} = A(t) \cdot y + C(t) f(t),$ $f(t) \in F(t), t \in [t_0, t_f], y(t_0) = x^0, \quad (2.5.2)$ если: $1) \begin{cases} J(t) = \Delta(t)^T F \Delta(t) \rightarrow \min \\ \forall t \in [t_0, t_f] \end{cases} \quad (2.5.3)$ что соответствует по принципу локальной оптимизации приводимости на всем интервале времени $2) J = \Delta(t_f)^T \cdot F \cdot \Delta(t_f) \leq \Delta^* \quad (2.5.4)$ что соответствует приводимости для конечного момента времени. Здесь: $\Delta(t) = x(t) - y(t),$ F – неотрицательно определенная матрица квадратичной формы	Расчет управлений. Приводимость для конечного времени (неклассическая): $\bar{J}(t_f, t) = \bar{\Delta}(t_f, t, x(t))^T \cdot F \cdot \bar{\Delta}(t_f, t, x(t)),$ $\bar{J}(t_f, t_f) = J,$ $\bar{\Delta}(t_f, t, x(t)) = \bar{x}(t_f, t, x(t)) - \bar{y}(t_f, t, y(t)). \quad (2.5.8)$ $u(t) = G^+ b,$ $G^+ = G^T (G G^T)^{-1},$ $G = \bar{\Delta}^T(t_f, t, x(t)) \cdot F \cdot W^N(t_f, t, x(t)) \cdot B(t),$ $b = \frac{J^* - J(t_f, t)}{2T_u} + \bar{\Delta}^T(t_f, t, x(t)) \cdot F \cdot W^L(t_f, t) \cdot C(t) \cdot f(t). \quad (2.5.11)$ Приводимость на всем интервале времени: расчет по (2.5.8), (2.5.11) при $t \sim t_i, t_f \sim t_i + h \equiv t_{i+1}, T_u = h$ и $\bar{x}(t_{i+1}, t_i, x(t_i)) = x(t_i) + \Phi(t_i, x(t_i)) \cdot h,$ $W^N(t_{i+1}, t_i, x(t_i)) = I + \left[\frac{\partial \Phi(t_i, x)}{\partial x} \right]_{x=x(t_i)} \cdot h. \quad (2.5.12)$ $W^L(t_{i+1}, t_i) = I + A(t_i) \cdot h. \quad (2.5.13)$

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что для объектов управления различной природы с помощью метода конечного состояния можно синтезировать управляющие воздействия, позволяющие достичь цели управления в виде заданного значения некоторой функции конечного состояния. При этом расчет управления усложняется по мере усложнения вида модели объекта: наиболее простой расчет имеет место в случае обыкновенных дифференциальных систем и осуществляется по математическим выражениям; наиболее сложный расчет производится для дискретных одноиндексных и многоиндексных систем (или такого же рода подсистем гибридных систем) путем решения нелинейных систем уравнений конечного типа. Однако общие черты метода конечного состояния – использование критериальных функций и моделей конечного состояния, – сохраняются во всех рассмотренных случаях.

ГЛАВА 3

ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ И МОДЕЛЕЙ КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ

3.1. Применение моделей конечного состояния для поиска оптимального управления в линейно-квадратической задаче

3.1.1. Альтернативные формы оптимального управления в линейно-квадратической задаче

В настоящем разделе рассмотрена классическая линейно-квадратическая задача и показано, что на основе моделей конечного состояния могут быть получены ранее неизвестные выражения для расчета оптимального управления. Указанные формы функциональны в том смысле, что их можно использовать совместно с алгоритмами идентификации по данным вход-выход, когда идентификация переходных матриц производится легче, чем структурная идентификация системы в виде матрицы системы.

Отметим вначале несколько известных форм решения линейно-квадратической задачи в постановке:

$$J = x^T(t_f)Fx(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (x^T Qx + u^T Ru) d\tau \rightarrow \min, \quad (3.1.1)$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, t \in [t_0, t_f], x(t_0) = x^0,$$

где $\dim\{F, Q, A\} = (n \times n)$, $\dim R = (r \times r)$, $\dim B = (n \times r)$ – матрицы (Q, R, A, B – в общем случае функции времени t); x, u – соответствующей размерности векторы состояния и управления.

Традиционно предполагается, что F и Q – неотрицательно определенные симметричные, R – положительно определенная симметричная матрица.

Для указанной модели широко известно [31] оптимальное управление в форме:

$$u = Kx,$$

$$K = -R^{-1}B^T P,$$

$$\frac{dP}{dt} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q, \quad (3.1.2)$$

$$t \in [t_0, t_f], P(t_f) = F,$$

называемую иногда формой Летова-Калмана. Ее особенность – наличие матричного уравнения Риккати, интегрируемого в обратном времени с сохранением в памяти управляющего компьютера и последующим использованием полученного решения в прямом времени при расчете управления. Данная форма чаще всего используется на практике и основана на структурной модели системы, что не подходит для объявленной цели – построения алгоритмов управления на основе функциональных моделей.

Другая форма [3], [32], полученная как промежуточный этап при выводе формы Летова-Калмана, выражается через переходную матрицу Ω расширенной системы с матрицей $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{pmatrix}$ и формально имеет функциональный вид:

$$u = Kx, \quad K = (\Omega_{22} - F\Omega_{12})^{-1}(F\Omega_{11} - \Omega_{21}), \quad \Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.1.3)$$

$$\frac{d}{dt}\Omega = -\Omega \cdot \tilde{A}, \quad \Omega(t_f, t_f) = I.$$

Существует еще один вариант аналогичного (3.1.3) представления в форме [33]:

$$u = Kx, \quad K = (\Omega_{21} + \Omega_{22}F)(\Omega_{11} + \Omega_{12}F)^{-1}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.1.4)$$

$$\frac{d}{dt}\Omega = -\Omega \cdot \tilde{A}, \quad \Omega(t_f, t_f) = I.$$

Однако на самом деле формы (3.1.3), (3.1.4) не функциональные, поскольку $\tilde{A}$ – это не матрица реального идентифицируемого, а искусственного объекта. Таким образом, данные формы (имеющие к тому же удвоенный порядок $2n \times 2n$ системы для расчета матрицы Ω против порядка $n(n+1)/2$ для матричного уравнения Риккати) не подходят для наших целей.

Известны и другие формы формально функционального вида с переходными матрицами искусственных объектов.

Так, в [31] приводится форма:

$$u = -R^{-1}B^T \Lambda W^{-1},$$

где Λ и W – переходные $(n \times n)$ -матрицы, получаемые интегрированием системы

$$\begin{pmatrix} \frac{dW}{dt} \\ \frac{d\Lambda}{dt} \end{pmatrix} = \tilde{A} \begin{pmatrix} W \\ \Lambda \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0, t_f], \quad W(t_f) = I, \quad \Lambda(t_f) = F \quad (3.1.5)$$

с определенной выше матрицей $\tilde{A}$.

В [34] приводится еще одна форма смешанного типа, использующая уравнения Риккати с нулевыми начальными условиями на правом конце и

переходную матрицу искусственного объекта. Эта форма применительно к задаче (3.1.2) имеет вид:

$$\begin{aligned} u &= -R^{-1}B^T P x, \\ P &= P_1 + W^T (G + F^{-1})^{-1} W, \\ \frac{dP_1}{dt} &= -P_1 A - A^T P_1 + P_1 B R^{-1} B^T P_1 - Q, \quad P_1(t_f) = 0, \\ \frac{dW}{dt} &= (A - B R^{-1} B^T P_1) W, \quad W(t_f) = I, \\ \frac{dG}{dt} &= -W B R^{-1} B^T W^T, \quad G(t_f) = 0. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Данная форма неудобна тем, что, во-первых, она требует неособенности матрицы F , что на практике часто не выполняется. Во-вторых, в общем случае здесь также используется переходная матрица искусственного объекта. Тем не менее, в частном случае $Q = 0$, данная форма удовлетворяет требованию функциональности. Далее получена другим методом похожая на (3.1.6) форма, допускающая случай $\det F = 0$ и показано, каким образом она может быть получена из (3.1.6). Похожая на (3.1.6) форма получена ранее в [35].

Для стационарных систем при частном случае критерия, когда $Q = 0$, известны две формы.

Первая из них [36] требует знания установившегося решения матричного уравнения Риккати $P(\infty)$ и имеет вид

$$\begin{aligned} P(t) &= W \cdot \left[F + \int_t^{t_f} W^T B^T R^{-1} B W d\tau \right]^{-1} \cdot W^T + P(\infty), \\ W &= \exp \left[(A - P(\infty) B^T R^{-1} B) \cdot (t_f - t) \right] \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

также использующий переходные функции W искусственного объекта с матрицей, записанной в показателе степени экспоненты перед $t_f - t$. Таким образом, и данная форма не удовлетворяет поставленным целям.

Вторая форма [37] имеет вид:

$$\begin{aligned} u &= -R^{-1}B^T P x, \\ P &= W^T F (I + G F)^{-1} W, \\ G &= \int_t^{t_f} W B R^{-1} B^T W^T d\tau, \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

выражается через переходную матрицу исходной системы $W(t_f - t)$ и удовлетворяет требованию функциональности. Единственный недостаток данной формы тот, что в [37] она получена для стационарных систем и частного случая критерия. Далее будет получено обобщение последней формы на нестационарные системы, а также смешанная форма для общего случая $Q \neq 0$ задачи (3.1.1).

Далее на основе моделей конечного состояния (МКС) (1.1.8) получены альтернативные формы оптимального управления в линейно-квадратической задаче. При этом одна из форм для частного случая задачи имеет вид квадратурной формулы, что позволяет значительно легче решать некоторые производные задачи.

Рассмотрим задачу (3.1.1) и определим оптимальное управление для эквивалентной задачи, сформулированной на основе МКС (1.1.8) для линейного случая, когда матрица переходных функций W не зависит от вектора x .

Введем переменные конечного состояния $\bar{x}(t_f, t, x(t))$, определяемые как функции аргумента t уравнениями (1.1.8), где линейная переходная матрица рассчитывается по (1.1.7). Обозначим $S(t_f)$ внеинтегральную часть критерия задачи (3.1.1), а $x_0(t_f)$ – интеграл, и заменим переменные состояния переменными конечного состояния. В итоге получаем эквивалентный критерий, выраженный через переменные конечного состояния

$$\begin{aligned}\bar{J}(t_f, t, x(t)) &= \bar{S}(t_f, t, x(t)) + \bar{x}_0(t_f, t, x(t)), \\ \bar{J}(t_f, t_f, x(t_f)) &\equiv J.\end{aligned}$$

В последующих выкладках аргумент $x(t)$ в обозначениях переменных $\bar{J}, \bar{S}, \bar{x}_0, \bar{x}$ указывать не будем.

Дифференцируя $\bar{J}(t_f, t, x(t))$ ($\bar{J}(t_f, t)$ в сокращенной записи) по t , получаем следующую эквивалентную (3.1.1) задачу оптимального управления.

$$\begin{aligned}J &= \bar{S}(t_f, t_f) + \bar{x}_0(t_f, t_f) \rightarrow \min, \\ \frac{d\bar{S}(t_f, t)}{dt} &= 2\bar{x}(t_f, t)^T F W(t_f, t) B(t) u(t), \\ \frac{d\bar{x}_0(t_f, t)}{dt} &= \bar{x}(t_f, t)^T Q_w(t_f, t) \bar{x}(t_f, t) + u(t)^T R(t) u(t), \\ \frac{d\bar{x}}{dt} &= W(t_f, t) B(t) u(t), \\ t &\in [t_0, t_f], \\ \bar{S}(t_0) &= \bar{x}^T(t_0) F \bar{x}(t_0) \equiv \bar{S}^0, \bar{x}_0(t_0) = 0, \bar{x}(t_0) = \bar{x}^0, \\ Q_w(t_f, t) &= [W(t_f, t)^{-1}]^T Q(t) W(t_f, t)^{-1}.\end{aligned}\tag{3.1.9}$$

Далее для краткости записей аргументы t_f не указываем, а аргумент t записываем лишь в некоторых случаях.

При получении (3.1.9) вместо переменной x подставлено выражение, следующее из (1.1.6) (при $C = 0$ согласно (3.1.1)):

$$x(t) = W(t_f, t)^{-1} \bar{x}(t_f, t)\tag{3.1.10}$$

Присутствующая в приведенных выше выражениях матрица W^{-1} всегда существует, если существует интеграл $\int_{t_0}^{t_f} \|A(t)\| dt$ [90], с.192 – 194.

Заметим, что эквивалентную (3.1.1) задачу, выраженную через переменные конечного состояния, можно было записать без преобразования к линейному критерию, т.е. в виде

$$\begin{aligned} J &= (\bar{x}^0)^T F \bar{x}^0 + \int_{t_0}^{t_f} (\bar{x}^T Q_w \bar{x} + u^T R u) dt \rightarrow \min, \\ \frac{d\bar{x}}{dt} &= W B u, \\ t \in [t_0, t_f], \bar{x}(t_f, t_0, x(t_0)) &= \bar{x}^0, \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

применив затем к ней алгоритм (3.1.2), приняв $A=0, B=W \cdot B, Q=Q_w$. Позже такая задача будет использована для получения функциональной формы уравнения Риккати, однако сейчас мы решим задачу (3.1.9) заново, применив для этого принцип максимума Понтрягина. Это позволит получить другие формы алгоритма оптимального управления задачи (3.1.1) и некоторые новые возможности их реализации.

Оптимальное управление определим на основе известного подхода, использующего необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

Введем сопряженные переменные размерностей: $\dim \Psi_s = (1 \times 1)$, $\dim \Psi_0 = (1 \times 1)$, $\dim \Psi = (n \times 1)$.

и гамильтониан

$$\begin{aligned} H &= \Psi_s \frac{d\bar{S}}{dt} + \Psi_0 \frac{d\bar{x}_0}{dt} + \Psi^T \frac{d\bar{x}}{dt} = \\ &= \Psi_s 2\bar{x}^T F W B u + \Psi_0 \bar{x}^T Q_w \bar{x} + \Psi_0 u^T R u + \Psi^T W B u. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Сопряженные переменные определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_s}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \bar{S}} = 0, \Psi_s(t_f) = -\frac{\partial \bar{J}}{\partial \bar{S}(t_f)} = -1, \Psi_s(t) = -1 \forall t \in [t_0, t_f], \\ \frac{d\Psi_0}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}_0} = 0, \Psi_0(t_f) = -\frac{\partial \bar{J}}{\partial \bar{x}_0(t_f)} = -1, \Psi_0(t) = -1 \forall t \in [t_0, t_f], \\ \frac{d\Psi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} = 2F W B u + 2Q_w \bar{x}, \Psi(t_f) = -\frac{\partial \bar{J}}{\partial \bar{x}(t_f)} = 0, \end{aligned}$$

где обозначено:

$$\bar{S}(t_f) \equiv \bar{S}(t_f, t_f, x(t_f)) \equiv x^T(t_f) F x(t_f),$$

$$\bar{x}_0(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} (\bar{x}^T Q_w \bar{x} + u^T R u) dt,$$

$$\bar{x}(t_f) \equiv \bar{x}(t_f, t_f) = x(t_f).$$

Найдем $\Psi(t)$, вычислив определенный интеграл в пределах от t до t_f

$$\int_t^{t_f} \frac{d\Psi}{dt} dt = \int_t^{t_f} 2FWBud\tau + 2 \int_t^{t_f} Q_w \bar{x} d\tau.$$

После интегрирования получаем:

$$\Psi(t_f) - \Psi(t) = 2F(\bar{x}(t_f) - \bar{x}) + 2 \int_t^{t_f} Q_w \bar{x} d\tau,$$

$$\Psi(t) = -2F(\bar{x}(t_f) - \bar{x}) - 2\Omega,$$

$$\Omega = \int_t^{t_f} Q_w \bar{x} d\tau.$$

Подставив $\Psi(t)$ в (3.1.11) и вычислив $\frac{\partial H}{\partial u}$, получаем:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2B^T W^T [F\bar{x}(t_f) + \Omega] - 2Ru = 0,$$

откуда следует выражение для оптимального управления

$$u = -R^{-1} B^T W^T (F\bar{x}(t_f) + \Omega). \quad (3.1.13)$$

Управление (3.1.13) зависит от неизвестного конечного состояния $\bar{x}(t_f) = x(t_f)$ и неизвестных будущих состояний, вошедших в Ω .

Задача упрощается в частном случае, когда матрица критерия $Q = 0$. В этом случае $Q_w = 0$, $\Omega = 0$, зависимость от будущих состояний пропадает и остается один неопределенный вектор — $x(t_f)$. Оказывается, его в данном случае нетрудно получить, умножив u из (3.1.13) при $\Omega = 0$ на WB слева, проинтегрировав левую и правую части в пределах от t до t_f и учтя (1.1.8).

В итоге получаем:

$$\int_t^{t_f} WBud\tau = - \int_t^{t_f} WBR^{-1} B^T W^T d\tau \cdot F \cdot \bar{x}(t_f),$$

$$\int_t^{t_f} \frac{d\bar{x}}{d\tau} d\tau = - \int_t^{t_f} WBR^{-1} B^T W^T d\tau \cdot F \cdot \bar{x}(t_f),$$

$$\bar{x}(t_f) - \bar{x} = - \int_t^{t_f} WBR^{-1} B^T W^T d\tau \cdot F \cdot \bar{x}(t_f),$$

$$\left[I + \int_t^{t_f} WBR^{-1} B^T W^T d\tau \cdot F \right] \cdot \bar{x}(t_f) = \bar{x}.$$

Выражая из последнего выражения $\bar{x}(t_f)$, имеем:

$$\begin{aligned}\bar{x}(t_f) &\equiv \bar{x}(t_f, t_f) = x(t_f) = H^{-1}\bar{x}(t_f, t) = H^{-1}W\dot{x}, \\ H &= I + GF, \quad G = \int_t^{t_f} WBR^{-1}B^TW^T d\tau,\end{aligned}\tag{3.1.14}$$

где I - единичная матрица.

Соотношение (3.1.14) устанавливает связь между оптимальным конечным и любым текущим состояниями переменных линейно-квадратической задачи в случае $Q=0$.

Таким образом, в итоге получается физически реализуемое управление:

$$u = -R^{-1}B^TW^T(I + GF)^{-1}W\dot{x}.\tag{3.1.15}$$

Сравнивая (3.1.2) и (3.1.15), получаем другое представление решения матричного уравнения Риккати из (3.1.2) (при $Q=0$) в виде

$$P(t) = W^TF(I + GF)^{-1}W.\tag{3.1.16}$$

Доказать, что (3.1.16) – решение однородного уравнения Риккати, можно и непосредственно, выполнив дифференцирование (3.1.16) по времени.

$$\begin{aligned}\dot{P} &= \dot{W}^TFH^{-1}W + W^T\dot{F}H^{-1}W + W^TFH^{-1}\dot{W} = \\ &= -A^TW^TFH^{-1}W + W^T\dot{F}H^{-1}W - W^TFH^{-1}WA.\end{aligned}\tag{3.1.17}$$

В (3.1.17) использовано определение переходной матрицы линейной системы как функции второго аргумента, точками обозначены производные по t .

Для вычисления $\dot{H}^{-1}$, где $H = I + GF$, продифференцируем (3.1.14) с учетом (3.1.1), (3.1.15) и (1.1.7), имея в виду, что $\bar{x}(t_f, t_f)$ от t не зависит.

$$\begin{aligned}0 &= \dot{H}^{-1}W\dot{x} + H^{-1}\dot{W}\dot{x} + H^{-1}W\ddot{x} = \\ &= \dot{H}^{-1}W\dot{x} - H^{-1}WA\dot{x} + H^{-1}WA\dot{x} + H^{-1}W\ddot{x},\end{aligned}$$

$$\dot{H}^{-1}W\dot{x} = -H^{-1}W\ddot{x} = -H^{-1}WBR^{-1}B^TW^TFH^{-1}W\dot{x}.$$

Сокращая левую и правую части последнего равенства на $W\dot{x}$, получаем

$$\dot{H}^{-1} = H^{-1}WBR^{-1}B^TW^TFH^{-1}.\tag{3.1.18}$$

Подставив (3.1.18) в (3.1.17), имеем

$$\begin{aligned}\dot{P} &= -A^TW^TFH^{-1}W - W^TFH^{-1}WA + \\ &+ W^TFH^{-1}WBR^{-1}B^TW^TFH^{-1}W,\end{aligned}$$

а с учетом (3.1.16) – матричное дифференциальное уравнение для $P(t)$, полностью совпадающее с уравнением Риккати из (3.1.2) при $Q=0$.

Таким образом, выражение (3.1.16) в самом деле есть решение матричного уравнения Риккати линейно-квадратической задачи (3.1.1) при $Q=0$

. Это решение удовлетворяет и граничному условию из (3.1.2) $P(t_f)=F$. Учитывая, что при $t=t_f$ $W(t_f, t_f)=I, G=0$ (см.(3.1.14)), получаем $P(t_f)=F$.

Альтернативная форма (3.1.15), (3.1.16) в частном случае $Q=0, R=I$ и не зависящих от времени матриц A, B совпадает с формой (3.1.8), а также с формой (3.1.6) при $Q=0$ при ее незначительном преобразовании. Полагая в (3.1.6) $Q=0$, получаем $P_1=0$ и переходную матрицу W , определяемую (2.7). Кроме того, преобразуем выражение $W^T(G+F^{-1})^{-1}W$ из (3.1.6) следующим образом:

$$W^T(G+F^{-1})^{-1}W = W^T(F^{-1}(FG+I))^{-1}W = W^T(FG+I)^{-1}FW,$$

которое в транспонированном виде с учетом симметричности F и G совпадает с (3.1.16). В данном преобразовании использованы известные матричные правила $(XY)^{-1}=Y^{-1}X^{-1}$, $(XY)^T=Y^T X^T$.

Форма оптимального управления (3.1.15) особенно полезна тогда, когда переходная матрица системы может быть рассчитана аналитически. В этом случае мы получаем аналитическое решение матричного уравнения Риккати, выраженное через квадратуры. Для других форм, приведенных в подразделе 1.3, это менее вероятно ввиду их большей сложности. Все это позволяет утверждать, что (3.1.16) более удобно для вычислений, чем приведенные выше другие представления решения матричного уравнения Риккати в частном случае $Q=0$.

Рассмотрим далее общий случай $Q \neq 0$ и получим физически реализуемую функциональную форму оптимального управления. Для этого, прежде всего, приведем другое доказательство того, что управление (3.1.13) оптимально. Введем переменные $v=Px$ и $v_1=W^T h, h=Fx(t_f)+\Omega$ и покажем, что v при известном (3.1.2) и v_1 при альтернативном (3.1.13) управлениях удовлетворяют одним и тем же векторно-матричным дифференциальным уравнениям. Так как v и v_1 представляют различающиеся части управлений (3.1.2) и (3.1.13), а (3.1.2) – оптимально, то равенство v и v_1 будет означать оптимальность (3.1.13).

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \dot{P}x + P\dot{x} = \dot{P}x + PAx + PBu = \\ &= -PAx - A^T Px + PBR^{-1}BPx - Qx + \\ &+ PAx - PBR^{-1}B^T Px = -A^T Px - Qx = -A^T v - Qx, \\ \dot{h} &= \dot{\Omega} = -Q_w y = -Q_w Wx, \\ \dot{v}_1 &= \dot{W}^T h + W^T \dot{h} = -A^T W^T h - W^T Q_w Wx = -A^T v_1 - Qx.\end{aligned}$$

Как видим, дифференциальные уравнения для v и v_1 одинаковы. Осталось показать, что и граничные условия для этих уравнений одинаковы. В самом деле,

$$\begin{aligned} v(t_f) &= P(t_f)x(t_f) = Fx(t_f), \\ v_1(t_f) &= W^T(t_f, t_0)Fx(t_f) + \Omega(t_f) = Fx(t_f). \end{aligned}$$

Физически реализуемое альтернативное управление при этом может быть рассчитано через введенную выше функцию h , начальное условие для которой следует из соотношений

$$\begin{aligned} v(t_0) &= P(t_0)x(t_0) = v_1(t_0) = W^T(t_f, t_0)h(t_0), \\ h(t_0) &= (W^T(t_f, t_0))^{-1}P(t_0)x(t_0). \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

Само же управление определяется соотношениями:

$$\dot{h} = -(W^{-1})^T Qx, \quad u = -R^{-1}B^T W^T h. \quad (3.1.20)$$

Можно получить и несколько отличный от (3.1.20) способ вычисления функции h , представив ее в виде $h = Kx$. Дифференцируя данное представление по t , получим:

$$\dot{h} = \dot{K}x + K\dot{x} = \dot{K}x + K(Ax + Bu) = \dot{K}x + KA x - BR^{-1}B^T K - (W^{-1})^T Qx.$$

Сокращая x и учитывая, что $W^T h \equiv P$, $P(t_f) = F$, получаем:

$$\begin{aligned} u &= -R^{-1}B^T W^T Kx, \\ \frac{dK}{dt} &= -KA + KBR^{-1}B^T K - (W^{-1})^T Q, \\ K(t_f) &= (W^T(t_f, t_0))^{-1}P(t_f) = F. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Форма (3.1.21) содержит отличное от (3.1.2) уравнение Риккати с несимметричной матрицей K .

Альтернативная форма (3.1.19), (3.1.20) и ее модификация (3.1.21) для общего случая линейно-квадратической задачи (3.1.1) содержит начальные условия, рассчитываемые через уравнения Риккати. в предположении знания структурной матрицы системы A , что не соответствует поставленной цели – получению функциональной формы управления. Кроме того, эта форма требует больших вычислительных затрат при расчете управления, чем известная форма (3.1.2), если переходная матрица не задана в аналитическом виде. Однако у формы (3.1.19), (3.1.20) имеется и одно достоинство, проявляющееся при известных аналитических выражениях для переходной матрицы. Как следует из (3.1.20), для реализации оптимального управления при заданном t_f требуется сохранять в памяти управляющего компьютера только n -мерный вектор $h(t_0)$ и интегрировать в реальном времени n дифференциальных уравнений. Это может потребовать меньших вычислительных ресурсов в сравнении с алгоритмом (3.1.2), где применимы два технических решения. Первое решение, где ускоряется вычисление управления, но занимает больше оперативной памяти, требует хранения в памяти элементов матрицы P как функции времени. При этом каждый элемент сохраняется в $N = \text{entiere}(t_f / h)$ узлах интерполяции с последующим восста-

новлением промежуточных значений по интерполяционным формулам. Второе решение связано с предварительным определением $P(0)$ и сохранением $n(n+1)/2$ начальных условий с последующим интегрированием в реальном времени $n(n+1)/2$ -мерной системы дифференциальных уравнений. Очевидно, что второе решение хуже предлагаемого как по занимаемой памяти, так и по быстродействию. Первое же решение может быть как хуже, так и лучше предлагаемого в зависимости от размерности системы, количества узлов интерполяции и используемых интерполяционных формул. Так, для примера линейно-квадратической задачи (3.1.1), где

$$x = \begin{pmatrix} z \\ v_p \\ a_p \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T} \end{pmatrix} \quad (3.1.22)$$

при $t_f = 5$, шаге численного интегрирования 0,01, $N = 500$, $R = 1$, $x^0 = \text{colon}(-100; 10; 10)$, $Q = \text{diag}(10; 1; 1)$, $F = \text{diag}(1; 1; 0)$ соотношение времен расчета классического управления (3.1.2) и альтернативного (3.1.20) около половины при соотношении необходимой оперативной памяти – около двух тысяч. Таким образом, при сравнимых временах расчета управления потребности в памяти для альтернативного алгоритма на три порядка меньше. Следует отметить, что в данном случае элементы матрицы P сохранялись в каждой дискретной точке временной оси и интерполяционные формулы не использовались. Можно было бы сократить затраты памяти в алгоритме (3.1.2) за счет интерполяции, однако при этом возросли бы временные затраты за счет вычислений по интерполяционным формулам. Имеется определенный резерв по сокращению временных затрат и в алгоритме (3.1.20), приходящихся в основном на вычисление элементов переходной матрицы (2.71), заданной аналитически. Так, элементы W_{13}, W_{23}, W_{33} , рассчитываемые через экспоненты и требующие относительно больших затрат компьютерного времени, можно рассчитать заранее и хранить в памяти аналогично элементам матрицы P . При этом вместо шести функций P имеем три функции W и двукратную экономию памяти. На данном примере видно, что альтернативная форма дает новые возможности по экономной реализации оптимального управления в задаче (3.1.1).

Можно получить и полную функциональную форму оптимального управления (3.1.20), определив $P(t_0)$ из (3.1.19) через переходную матрицу. Для этого вернемся к линейно-квадратической задаче (3.1.11), выраженной через переменные конечного состояния. Применив алгоритм (3.1.2) при $A = 0, B = WB, Q = Q_w, Q_w = (W^{-1})^T Q (W^{-1})$, получим:

$$u = Kx,$$

$$K = -R^{-1}B^T W^T(t_f, t)\bar{P},$$

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \bar{P}W(t_f, t)BR^{-1}B^T W^T(t_f, t)\bar{P}, \quad \bar{P}(t_f) = F.$$

В приведенном алгоритме используется функциональная форма матричного уравнения Риккати для матрицы $\bar{P}$, однако используемое в (3.1.19) $P(t_0)$ отличается от $\bar{P}(t_0)$. Оказывается, что они связаны простой зависимостью:

$$P(t) = W^T(t_f, t)\bar{P}(t)W(t_f, t) + \int_t^{t_f} Q(t)dt,$$

в чем нетрудно убедиться, продифференцировав последнее выражение по t :

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \dot{W}^T \bar{P} W + W^T \dot{\bar{P}} W + W^T \bar{P} \dot{W} - Q = -A^T W^T \bar{P} W + W^T \bar{P} W B R^{-1} B^T W^T \bar{P} W - \\ &- W^T \bar{P} W A - Q = -A^T P - P B R^{-1} B^T P - Q, \end{aligned}$$

что совпадает с (3.1.2). Таким образом, форма оптимального управления (3.1.20) с начальными условиями (3.1.19), где $P(t_0)$ рассчитывается по алгоритму:

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \bar{P}W(t_f, t)BR^{-1}B^T W^T(t_f, t)\bar{P}, \quad \bar{P}(t_f) = F, \quad t \in [t_0, t_f],$$

$$P(t_0) = W^T(t_f, t_0)\bar{P}(t_0)W(t_f, t_0) + \int_{t_0}^{t_f} Q(t)dt,$$

имеет функциональную форму и удовлетворяет поставленной цели.

Для частного же случая $Q = 0$ следует использовать более простую функциональную форму (3.1.15). Напомним, что основное назначение функциональных форм – совместное использование с алгоритмами идентификации по данным вход-выход, когда идентификация переходных матриц производится легче, чем структурная идентификация системы в виде матрицы A . Заметим, что матрица B , используемая как в структурных, так и в функциональной формах алгоритма управления, здесь предполагается известной.

Следует обратить внимание еще на одну возможность использования полученных результатов, в частности, соотношения (3.1.14). Это соотношение, в отличие от функционально аналогичных [3], с.318, [33], с.246, явно зависит от матриц критерия. Поэтому для частного случая $Q = 0$, подставив (3.1.14) в критерий линейно-квадратической задачи (3.1.1), получаем выражение, с помощью которого достаточно быстро можно подбирать элементы матрицы R . Хотя и считается, что задание численных значений элементам этих матриц находится вне теории оптимального управления, на практике они, как правило, неизвестны и подбираются в результате многочисленных

прогонок совместной модели объекта (3.1.1) и оптимального регулятора, заданного в одной из форм.

Компьютерное моделирование системы (3.1.1) подтвердило, что с точностью до погрешностей численного интегрирования классическое (3.1.2) и альтернативное (3.1.20) управления дают одинаковые результаты. Так, для описанного выше примера (3.1.22) графики зависимостей координат визуально неразличимы, а конечные значения получены следующие: для классического алгоритма – $x_1(t_f) = -0,026$; $x_2(t_f) = -2,799$; $x_3(t_f) = 0,587$; для альтернативного алгоритма – $x_1(t_f) = -0,032$; $x_2(t_f) = -2,811$; $x_3(t_f) = 0,565$.

Для проверки алгоритма (3.1.15) моделировалась система (3.1.1), (3.1.22) для описанных выше условий функционирования, но с нулевой матрицей Q . Получены следующие конечные значения координат: для классического алгоритма (3.1.2) – $x_1(t_f) = -11,232$; $x_2(t_f) = 18,805$; $x_3(t_f) = -0,539$; для алгоритма (3.1.15) – $x_1(t_f) = -11,371$; $x_2(t_f) = 18,819$; $x_3(t_f) = -0,512$. Эти результаты с учетом вычислительных погрешностей подтверждают эквивалентность сравниваемых алгоритмов.

3.1.2. Определение параметрической чувствительности оптимального конечного состояния линейно-квадратической задачи

Поставим задачу определения чувствительности оптимального конечного состояния задачи (3.1.1), (3.1.2) в частном случае $Q = 0$, непрерывными и дифференцируемыми матрицами A и B по отношению к вектору параметров $\dim(\alpha) = (m \times 1)$, от которого они зависят. Кроме того, предполагается непрерывность A по времени. Для этого, как это принято [38], вычислим матрицу чувствительности

$$\frac{\partial x(t_f)}{\partial \alpha} = \left\{ \frac{\partial x_i(t_f)}{\partial \alpha_j} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

В силу соотношения (1.1.10) между переменными конечного состояния $\bar{x}(t_f, t)$ и переменными состояния $x(t)$, вместо указанной матрицы будем определять матрицу

$$\frac{\partial \bar{x}(t_f, t_f)}{\partial \alpha} = \left\{ \frac{\partial \bar{x}_i(t_f, t_f)}{\partial \alpha_j} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Для этого преобразуем следующее из (3.1.14) выражение

$$\bar{x}(t_f, t_f) = (I + G(t_f, t_0) \cdot F)^{-1} \cdot \bar{x}(t_f, t_0), \quad (3.1.23)$$

умножив его слева на $(I + G(t_f, t_0)F)$, а левую и правую части результата продифференцируем по α_j .

$$\frac{\partial \bar{x}(t_f, t_f)}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial G(t_f, t_0)}{\partial \alpha_j} F \bar{x}(t_f, t_f) + G(t_f, t_0) F \frac{\partial \bar{x}(t_f, t_f)}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \bar{x}(t_f, t_0)}{\partial \alpha_j},$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

Последнее выражение запишем в сокращенном виде:

$$\frac{\partial \bar{x}(t_f, t_f)}{\partial \alpha} + \frac{\partial G(t_f, t_0)}{\partial \alpha} F \bar{x}(t_f, t_f) + G(t_f, t_0) F \frac{\partial \bar{x}(t_f, t_f)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \bar{x}(t_f, t_0)}{\partial \alpha}.$$

Аналогичные обозначения используем и в последующих выкладках.

Выражение для искомой матрицы чувствительности при этом имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{x}(t_f, t_f)}{\partial \alpha} = [I + G(t_f, t_0)F]^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \bar{x}(t_f, t_0)}{\partial \alpha} - \frac{\partial G(t_f, t_0)}{\partial \alpha} F \cdot \bar{x}(t_f, t_f) \right), \quad (3.1.24)$$

где $\bar{x}(t_f, t_f)$ вычисляется по выражению (3.1.23), а из определения G по (3.1.14) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \alpha} = & \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial W}{\partial \alpha} B R^{-1} B^T W^T + W \frac{\partial B}{\partial \alpha} R^{-1} B^T W^T \right] d\tau + \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left[W B R^{-1} \frac{\partial B^T}{\partial \alpha} W^T + W B R^{-1} B^T \frac{\partial W^T}{\partial \alpha} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Переходя к фазовым координатам $x(t)$, из (3.1.24) и соотношения (1.1.10) между переменными конечного состояния и переменными состояния получим

$$\frac{\partial x(t_f)}{\partial \alpha} = [I + G(t_f, t_0) \cdot F]^{-1} \left(\frac{\partial W(t_f, t_0)}{\partial \alpha} x(t_0) - \frac{\partial G(t_f, t_0)}{\partial \alpha} F \cdot x(t_f) \right), \quad (3.1.26)$$

где $\bar{x}(t_f, t_f)$ определяется (3.1.23), а при использовании (1.1.6) учтено, что в постановке линейно-квадратической задачи (3.1.1) матрица C нулевая.

Выражение (3.1.24) определяет искомую матрицу чувствительности оптимальной системы через ее динамические свойства в виде матрицы переходных функций W и матрицы B , через параметры критерия в виде матриц F, R , а также начальные условия по переменным конечного состояния $\bar{x}(t_f, t_0)$. Выражения (3.1.26) и (3.1.25) определяют ту же матрицу чувствительности через W, B, F, R и начальные условия $x(t_0)$. В отличие от известных подходов [38], здесь матрица чувствительности выражается через квадратуры, что легче для вычислений и последующего использования. Правда, при этом система сразу должна быть задана в виде модели конечного состояния (1.1.8) с известными аналитическими зависимостями элементов матриц W, W^{-1} и B от вектора параметров α . Если же исходно система задана в

виде (3.1.1), то для получения зависимостей $\partial W / \partial \alpha$, $\partial W^{-1} / \partial \alpha$ необходимы дополнительные вычисления в виде интегрирования дифференциальных уравнений чувствительности.

Для получения $\partial W / \partial \alpha$ продифференцируем по α левую и правую часть (1.1.7). Если элементы матрицы A непрерывны по t , то элементы переходной матрицы W непрерывны и дифференцируемы по t в любой момент времени. Если к тому же зависимости элементов A от параметров – дифференцируемые функции, то взятие производных по времени $\frac{d}{dt}$ и по

параметрам $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ можно переставить местами. Введя обозначения $W_\alpha \equiv \frac{\partial W}{\partial \alpha}$, $A_\alpha \equiv \frac{\partial A}{\partial \alpha}$, в итоге получим матричную систему

$$\begin{aligned} \frac{dW_\alpha(t_f, t)}{dt} &= -W_\alpha(t_f, t)A(t) - W(t_f, t)A_\alpha(t), \\ \frac{dW(t_f, t)}{dt} &= -W(t_f, t)A(t), \\ W(t_f, t_f) &= I, W_\alpha(t_f, t_f) = 0, t \in [t_f, t_0]. \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

Нулевые правые граничные условия для матрицы W_α из (3.1.27) следуют из того, что при определении матрицы переходных функций по уравнениям (1.1.7) правые граничные условия – всегда единичная матрица, независимо от того, для какого вектора параметров α рассчитывается переходная матрица.

Таким образом, матрица чувствительности рассчитывается по выражениям (3.1.26), (3.1.25) и дифференциальным уравнениям (3.1.27). Для удобства вычислений (3.1.25) целесообразно преобразовать в эквивалентную векторно-матричную систему дифференциальных уравнений с начальными условиями на правом конце. При этом, согласно (3.1.14), грамиан $G(t_f, t_f) = 0$ для любого α , откуда следует, что $\partial G(t_f, t_f) / \partial \alpha = 0$. Отсюда следует, что эквивалентное (3.1.25) векторно-матричное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dG_\alpha(t_f, t)}{dt} &= \frac{\partial W(t_f, t)}{\partial \alpha} B(t) R^{-1} B^T(t) W^T(t_f, t) + \\ &+ W(t_f, t) \frac{\partial B(t)}{\partial \alpha} R^{-1} B^T(t) W^T(t_f, t) + \\ &+ W(t_f, t) B(t) R^{-1} \frac{\partial B^T(t)}{\partial \alpha} W^T(t_f, t) + \\ &+ W(t_f, t) B(t) R^{-1} B^T(t) \frac{\partial W^T(t_f, t)}{\partial \alpha}, \\ t \in [t_f, t_0], G_\alpha &\equiv \frac{\partial G}{\partial \alpha}, G_\alpha(t_f, t_f) = 0. \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Уравнения (3.1.27), (3.1.28) интегрируются совместно в обратном времени (от t_f до t_0) с начальными условиями на правом конце. Далее по (3.1.26) рассчитывается искомая матрица чувствительности. При этом основные затраты компьютерного времени имеют место при решении уравнений (3.1.27), (3.1.28). Сравним вычислительные затраты на получение матрицы чувствительности со случаем, когда указанные уравнения получаются непосредственно по уравнениям (3.1.1), (3.1.2). Дифференцируя (3.1.1), (3.1.2 по α , получим уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{dx_\alpha}{dt} &= A_\alpha x + A x_\alpha + B_\alpha Kx - BK_\alpha x + BKx_\alpha, \\ \frac{dx}{dt} &= Ax + BKx, \\ K &= -R^{-1}B^T P, \quad K_\alpha = R^{-1}(B_\alpha^T P + B^T P_\alpha), \\ \frac{dP}{dt} &= -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P, \\ \frac{dP_\alpha}{dt} &= -P_\alpha A - PA_\alpha - A_\alpha^T P - A^T P_\alpha + P_\alpha BR^{-1}B^T P + \\ &+ PBR^{-1}B^T P_\alpha + PB_\alpha R^{-1}B^T P + PBR^{-1}B_\alpha P.\end{aligned}\tag{3.1.29}$$

Сравним (3.1.27), (3.1.28) с (3.1.29). Последняя система m матричных уравнений $n(n+1)/2$ порядка из (3.1.29) и такая же по m и порядку система (3.1.28) (в силу симметричности грамиана G – см. определение (3.1.14)) содержат по четыре слагаемых из произведений пяти матриц. Однако уравнения традиционного алгоритма (3.1.29), кроме того, в каждой из m систем включают еще по четыре слагаемых из произведений двух матриц. Таким образом, в предлагаемом методе трудоемкость расчетов этих сравниваемых систем уравнений существенно меньше. Порядок остальных уравнений в традиционном алгоритме (3.1.29) значительно меньше, чем в предлагаемом методе – $(m+1) \cdot n + n(n+1)/2$ против $(m+1)n^2$. Тем не менее, количество вычислений при этом не меньше, а больше. Для этого сравним количество умножений матриц в обоих подходах. В предлагаемом подходе $2m+1$ парных произведений матриц. В традиционном же подходе приведенных к парным произведений – $6m+9$. Кроме того, в традиционном подходе дополнительно имеются $5m+2$ умножений матрицы на вектор. Таким образом, трудоемкость расчетов матрицы чувствительности в предлагаемом методе существенно меньше. Для случаев же, когда переходная матрица может быть получена в аналитическом виде, расчет чувствительности сводится к аналитическому определению W_α и последующим вычислениям квадратур (3.1.25), (3.1.26). Вероятность же аналитического вычисления переходных матриц в реальных задачах более вероятна, чем аналитическое решение каких-либо уравнений из (3.1.29).

Из (3.1.26) следует и чисто функциональная форма алгоритма, когда известна аналитическая зависимость от вектора параметров переходной матрицы. Она проще структурной формы и включает только выражение (3.1.26) и уравнения (3.1.28).

По итогам приведенных в настоящем пункте результатов исследований следуют перечисленные ниже выводы.

1. Если управляемая система исходно задана моделью конечного состояния (1.1.8), где W , W^{-1} и B заданы аналитически как функции t_f, t, α , то матрица чувствительности конечного состояния определяется через квадратуры выражениями (3.1.24), (3.1.25), (3.1.14).
2. Если управляемая система исходно задана традиционной моделью состояния, где A, B заданы аналитически как функции t и α , то матрица чувствительности конечного состояния определяется выражениями (3.1.25), (3.1.26). При этом $\partial W / \partial \alpha \equiv W_\alpha$, $\partial G / \partial \alpha \equiv G_\alpha$ определяются по совместной системе (3.1.27), (3.1.28).
3. Трудоемкость вычислений матрицы чувствительности предлагаемым методом существенно меньше, чем при использовании уравнений чувствительности, полученным по известной форме (3.1.1) линейно-квадратического регулятора.
4. Наличие в критерии матрицы Q существенно усложняет алгоритм расчет чувствительности конечного состояния; соответствующий алгоритм на основе альтернативной формы (3.1.19), (3.1.20), (3.1.23) линейно-квадратического регулятора в принципе может быть получен, однако преимуществ в сравнении с (3.1.29) он не даст ввиду того, что для данной формы аналитическое выражение для решения уравнения Риккати в общем случае неизвестно.

3.2. Эквивалентные по конечному состоянию релейные управления

3.2.1. Постановка задачи и расчет моментов переключений

Актуальность задачи построения релейных управлений объясняется большей простотой технической реализации таких управлений, по сравнению с управлениями произвольной формы. При этом наиболее широко используемые методы расчета управляющих воздействий дают управления, которые имеют непрерывный или смешанный вид. В частности, метод ко-

нечного состояния для всех рассмотренных во второй главе видов математических моделей систем порождает управляющие воздействия произвольной формы, техническая реализация которых усложнена в сравнении со случаем релейных управлений.

Таким образом, возникает задача преобразования ограниченного управляющего сигнала произвольной формы в релейный сигнал, оказывающий по своему воздействию эквивалентное влияние на результат управления.

Широко известна задача конструирования релейного управления для линейных стационарных систем, решенная А.А. Фельдбаумом [39], а результат решения применительно к задаче быстрогодействия известен как «теорема об n интервалах». В [40] задача построения эквивалентных терминальных релейных управлений решена для линейных нестационарных систем с двумя управляемыми координатами и векторным управлением.

Ниже рассматривается задача получения эквивалентных по конечному состоянию управлений многомерных динамических систем с произвольным числом управляемых координат.

В [40] доказана следующая теорема:

Теорема. Для системы вида (1.1.2), (1.1.3) на каждом из интервалов разбиения $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, n$, где предполагающиеся непрерывными и определяемые

$$x_{ik}(t_f, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n W_{ij}(t_f, t) B_{jk}(t) u_k(t) dt \equiv \int_{t_0}^{t_f} h_i(t) \xi(t) dt, \quad (3.2.1)$$

$$h_i(t) \equiv \sum_{j=1}^n W_{ij}(t_f, t) B_{jk}(t), \quad \xi(t) \equiv u_k(t)$$

функции $h_i(t)$, $i = i_1, i_2$ знакопостоянны, а определяемые

$$\bar{h}_{is}(\theta) = \frac{\bar{h}_i(\theta)}{\bar{h}_s(\theta)}, \quad \bar{h}_s = \bar{h}_{i_1} + \bar{h}_{i_2} \quad (3.2.2)$$

функции $h_{is}(t)$, $i = i_1, i_2$ монотонны, любое, ограниченное нулем и единицей, управление может быть заменено эквивалентным релейным управлением с двумя переключениями вида

$$v(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\theta_1, \theta_2], \\ 0, & t \notin [\theta_1, \theta_2]. \end{cases}$$

Как видно из приведенного определения, эквивалентность по конечному состоянию здесь понимается в смысле достижения любыми двумя координатами с номерами $i = i_1, i_2$ таких же значений, которые могут быть получены при произвольном, но ограниченном нулем и единицей, управлении (нормированные ограничения на управления в данном случае не принципиальны, поскольку любую задачу с произвольными ограничениями легко све-

сти к задаче с нормированными ограничениями). Как видно из приведенной формулировки, при этом важную роль играют свойства знакопостоянства функций h_i и монотонности $\bar{h}_{is}$, определяемых (3.2.1), (3.2.2). Выражение (3.2.1) представляет собой зависящую от k -й компоненты вектора управления i -ю составляющую вектора конечного состояния $x(t_f) = W(t_f, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} W(t_f, t)B(t)u(t)dt$.

Существование решения с двумя моментами переключений в задаче с двумя управляемыми координатами неудивительно, поскольку это следует из теоремы Л.В. Канторовича [41] о существовании корней систем нелинейных уравнений в методе Ньютона.

Применительно к задаче построения эквивалентного по конечному состоянию нормированного релейного управления для линейных нестационарных систем вида (1.1.2), (1.1.3) можно записать следующую систему нелинейных уравнений относительно моментов переключений $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$:

$$\int_{t_0}^{\vartheta_1} h_i(t)dt + \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} h_i(t)dt + \dots + \int_{\vartheta_n}^{t_f} h_i(t)dt = \int_{t_0}^{t_f} h_i(t)\xi(t)dt, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.2.3)$$

где правые части отображают реакцию конечного состояния на произвольную, но ограниченную нулем и единицей, k -ю компоненту вектора управления, что видно из (3.2.1).

С помощью компьютерных экспериментов проверялись несколько гипотез, связанных с возможными обобщениями подхода, положенного в основу доказательства приведенной выше теоремы, на случай многих (больше двух) управляемых координат. В частности, для случая $n=3$ строились множества (отрезки), которым принадлежат моменты переключений при управлении первой и второй, второй и третьей, первой и третьей координатами при двух моментах переключений. Если бы оказалось, что каждая из троек множеств для первого и второго моментов переключений имела непустое пересечение, подтверждалась бы гипотеза о возможности с помощью двух переключений управлять тремя и более координатами с помощью пары переключений на каждом из участков, где выполняются условия теоремы.

Однако анализ полученных результатов выявил, что указанные непустые пересечения и разрешимость системы вида (3.2.3) имеют место на достаточно малых интервалах одновременных знакопостоянства h_i и монотонности $\bar{h}_{is}$, причем величина указанных интервалов зависит от задаваемой точности решения уравнений.

Это позволило выдвинуть гипотезу о том, что в случае строго линейных h_i возможна эквивалентная по конечному состоянию замена произвольного нормировано-ограниченного управления нормированным релейным

управлением с двумя переключениями для случая сколь угодно большого n , т.е. числа управляемых координат.

Покажем, что для случая строго линейных функций h_i вида

$$h_i(t) = a_{i0} + a_{i1}t \quad (3.2.4)$$

можно найти такие моменты переключений ϑ_1, ϑ_2 , что все n координат вектора конечного состояния $x(t_f)$ приобретут значения $x^* = \int_{t_0}^{t_f} h(t) \xi(t) dt$, $x^* = \{x_i^*\}$, $h(t) = \{h_i(t)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Согласно (3.2.3) и (3.2.4), система уравнений при этом приобретает вид:

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} (a_{i0} + a_{i1}t) dt = x_i^*, i = 1, 2, \dots, n.$$

Вычислив определенный интеграл, получаем систему уравнений относительно ϑ_1, ϑ_2 :

$$2a_{i0}(\vartheta_2 - \vartheta_1) + a_{i1}(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2) = 2x_i^*, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2.5)$$

Покажем, что система (3.2.5) для всех $n > 2$ линейно зависима. Обозначив i -е уравнение (3.2.5) f_i , запишем условие линейной независимости:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0, \lambda_i = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2.6)$$

После приведения подобных в (3.2.5) из (3.2.6) получаем:

$$2 \left(\sum_{i=1}^n a_{i0} \lambda_i \right) (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \left(\sum_{i=1}^n a_{i1} \lambda_i \right) (\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2) - 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^* \lambda_i \right) = 0. \quad (3.2.7)$$

Поскольку в общем случае моменты переключения не совпадают, условие (3.2.7) превращается в совокупность условий в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n a_{i0} \lambda_i \right) &= 0, \\ \left(\sum_{i=1}^n a_{i1} \lambda_i \right) &= 0, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i^* \lambda_i \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

С учетом соотношений $x_i^* = a_{i0}k_1 + a_{i1}k_2$, $k_1 = \int_{t_0}^{t_f} \xi(t) dt$, $k_2 = \int_{t_0}^{t_f} t \xi(t) dt$, следу-

ющих из приведенного выше определения x_i^* , получаем следующую матрицу линейной системы (3.2.8):

$$A = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{20} & \cdots & a_{n0} \\ a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{10}k_1 + a_{11}k_2 & a_{20}k_1 + a_{21}k_2 & \cdots & a_{n0}k_1 + a_{n1}k_2 \end{pmatrix}. \quad (3.2.9)$$

Из (3.2.9) видно, что $A_3 = k_1 A_1 + k_2 A_2$, где A_i обозначена i -я строка матрицы A , т.е. третья строка является линейной комбинацией первых двух строк. Это означает, что ранг матрицы A не больше двух. Таким образом, вместо прямоугольной системы с линейно зависимыми строками (3.2.9) имеем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{20} & \cdots & a_{n0} \\ a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \end{pmatrix},$$

относительно которой можно сказать, что чаще всего эта матрица имеет ранг 2 (основной случай). При некоторых сочетаниях параметров может оказаться, что $\text{rank } A = 1$ (особый случай).

В основном случае при $n > 2$ имеем прямоугольную систему $A\lambda = 0$ с бесчисленным множеством решений. При этом $n-2$ компонентам назначаются произвольные значения, в том числе ненулевые, а оставшиеся две компоненты, соответствующие выбранному базису, определяются из квадратной системы. Таким образом, вектор λ в данном случае может быть ненулевым, т.е. условие линейной независимости (3.2.6) не выполняется, что и требовалось доказать.

В случае же $n = 2$ имеем квадратную систему с неособенной (в основном случае) матрицей и нулевой правой частью, решением которой является $\lambda = 0$. В этом случае нелинейная система (3.2.5) линейно независима и ее разрешимость уже зависит от совместности уравнений и существования решений в допустимой области $\vartheta_1 \geq t_0$, $\vartheta_2 > \vartheta_1$, $\vartheta_2 \leq t_f$.

Повторяя приведенные рассуждения для нелинейного случая, можно показать, что для нелинейных $h_i(t)$ система вида (3.2.8) будет несовместной, что означает невозможность построения эквивалентного управления с двумя переключениями. Так, для случая $n = 3$ и $h_i(t) = a_{i0} + a_{i1}t + a_{i2}t^2$ система вида (3.2.9) приобретет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{20} & a_{30} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{10}k_1 + a_{11}k_2 + a_{12}k_3 & a_{20}k_1 + a_{21}k_2 + a_{22}k_3 & a_{30}k_1 + a_{31}k_2 + a_{32}k_3 \end{pmatrix},$$

где k_1, k_2 определены выше, а $k_3 = \int_{t_0}^{t_f} t^2 \xi(t) dt$.

При этом $A_4 = k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3$ и после исключения последней строки получим квадратную систему $A\lambda = 0$ с неособенной матрицей, имеющей нулевое решение. А это означает, что система уравнений (3.2.5) с двумя неизвестными имеет три линейно независимых уравнения, т.е. переопределенную систему, решение которой не существует. Данные рассуждения имеют место в основном случае. В особых случаях, когда сочетание коэффициентов

$a_{ij}, i=1,2,3, j=0,1,2$ порождает линейно зависимые уравнения для λ , будем иметь случай линейно зависимых уравнений (3.2.5). Тогда останется система двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными, решение которой в принципе возможно.

С учетом сказанного, для решения уравнений (3.2.5) нужно выбрать любые два из них. Выберем для определенности систему из первых двух уравнений и найдем ее решение.

$$\begin{aligned} 2a_{10}(\vartheta_2 - \vartheta_1) + a_{11}(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2) &= 2(a_{10}k_1 + a_{11}k_2), \\ 2a_{20}(\vartheta_2 - \vartheta_1) + a_{21}(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2) &= 2(a_{20}k_1 + a_{21}k_2). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Введем переменные

$$y_1 = \vartheta_2 - \vartheta_1, y_2 = \vartheta_2^2 - \vartheta_1^2 \quad (3.2.11)$$

и найдем решение линейной системы

$$\begin{aligned} 2a_{10}y_1 + a_{11}y_2 &= 2(a_{10}k_1 + a_{11}k_2), \\ 2a_{20}y_1 + a_{21}y_2 &= 2(a_{20}k_1 + a_{21}k_2). \end{aligned}$$

Указанное решение имеет вид:

$$\begin{aligned} y_1 &= k_1 \\ y_2 &= 2k_2, \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Из (3.2.11), (3.2.12) следует:

$$\vartheta_1 = \frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{2}, \vartheta_2 = \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{2}. \quad (3.2.13)$$

Решение (3.2.13) обладает крайне важным свойством – независимостью от параметров a_{ij} . Другими словами, значения моментов переключений эквивалентного релейного управления зависят только от вида «эталонного» управления $\xi(t)$ и не зависят от параметров управляемой системы. При этом предполагается линейность переходных функций $h_i(t)$, которые на самом деле близки к линейным лишь на достаточно малых временных отрезках.

Рассмотрим общий случай полиномиальной аппроксимации функций $h_i(t)$. Для этого определим

$$h_i(t) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j \quad (3.2.14)$$

и запишем аналогичную (3.2.5) систему уравнений с количеством моментов переключений, равным m . При этом, если количество переключений определено чётным числом m , то получим:

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j dt + \int_{\vartheta_3}^{\vartheta_4} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j dt + \dots + \int_{\vartheta_{m-1}}^{\vartheta_m} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j dt = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j \cdot \xi(t) dt.$$

После интегрирования получаем:

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} \frac{\vartheta_2^{j+1} - \vartheta_1^{j+1}}{j+1} + \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} \frac{\vartheta_4^{j+1} - \vartheta_3^{j+1}}{j+1} + \dots + \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} \frac{\vartheta_m^{j+1} - \vartheta_{m-1}^{j+1}}{j+1} = \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} k_{j+1},$$

$$k_{j+1} = \int_{t_0}^{t_f} t^j \xi(t) dt, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Приводя подобные, получаем вначале уравнения

$$a_{i0}(\vartheta_2 - \vartheta_1 + \vartheta_4 - \vartheta_3 + \dots + \vartheta_m - \vartheta_{m-1}) + a_{i1} \frac{(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2 + \vartheta_4^2 - \vartheta_3^2 + \dots + \vartheta_m^2 - \vartheta_{m-1}^2)}{2} + \dots$$

$$+ a_{i(m-1)} \frac{(\vartheta_2^m - \vartheta_1^m + \vartheta_4^m - \vartheta_3^m + \dots + \vartheta_m^m - \vartheta_{m-1}^m)}{m} = a_{i0}k_1 + a_{i1}k_2 + \dots + a_{i(m-1)}k_m, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

а затем, приравнявая коэффициенты при одинаковых a_{ij} в левой и правой частях i -го уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} \vartheta_2 - \vartheta_1 + \vartheta_4 - \vartheta_3 + \dots + \vartheta_m - \vartheta_{m-1} &= k_1, \\ \vartheta_2^2 - \vartheta_1^2 + \vartheta_4^2 - \vartheta_3^2 + \dots + \vartheta_m^2 - \vartheta_{m-1}^2 &= 2 \cdot k_2, \\ \dots & \\ \vartheta_2^m - \vartheta_1^m + \vartheta_4^m - \vartheta_3^m + \dots + \vartheta_m^m - \vartheta_{m-1}^m &= m \cdot k_m. \end{aligned}$$

Система (3.2.16) должна быть дополнена неравенствами:

$$t_0 \leq \vartheta_1 \leq \vartheta_2 \leq \dots \leq \vartheta_m \leq t_f. \quad (3.2.17)$$

Если же количество переключений определено нечётным числом m , то получим:

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_{2m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j dt + \int_{\vartheta_3}^{\vartheta_{4m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j dt + \dots + \int_{\vartheta_m}^{t_f} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j dt = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j \cdot \xi(t) dt.$$

После интегрирования получаем:

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} \frac{\vartheta_2^{j+1} - \vartheta_1^{j+1}}{j+1} + \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} \frac{\vartheta_4^{j+1} - \vartheta_3^{j+1}}{j+1} + \dots + \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} \frac{t_f^{j+1} - \vartheta_m^{j+1}}{j+1} = \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} k_{j+1},$$

где k_{j+1} определено в (3.2.15).

Приводя подобные, получаем вначале уравнения

$$a_{i0}(\vartheta_2 - \vartheta_1 + \vartheta_4 - \vartheta_3 + \dots + t_f - \vartheta_m) + a_{i1} \frac{(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2 + \vartheta_4^2 - \vartheta_3^2 + \dots + t_f^2 - \vartheta_m^2)}{2} + \dots$$

$$+ a_{i(m-1)} \frac{(\vartheta_2^m - \vartheta_1^m + \vartheta_4^m - \vartheta_3^m + \dots + t_f^m - \vartheta_m^m)}{m} = a_{i0}k_1 + a_{i1}k_2 + \dots + a_{i(m-1)}k_m, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

а затем, приравнявая коэффициенты при одинаковых a_{ij} в левой и правой частях i -го уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} \vartheta_2 - \vartheta_1 + \vartheta_4 - \vartheta_3 + \dots + t_f - \vartheta_m &= k_1, \\ \vartheta_2^2 - \vartheta_1^2 + \vartheta_4^2 - \vartheta_3^2 + \dots + t_f^2 - \vartheta_m^2 &= 2 \cdot k_2, \\ \dots & \\ \vartheta_2^m - \vartheta_1^m + \vartheta_4^m - \vartheta_3^m + \dots + t_f^m - \vartheta_m^m &= m \cdot k_m. \end{aligned}$$

Система (3.2.18) также должна быть дополнена неравенствами (3.2.17).

В отличие от случая линейной аппроксимации $h_i(t)$, для которого получено простое аналитическое решение (3.2.13) системы (3.2.16) – (3.2.17) или (3.2.17) – (3.2.18) такого простого решения не имеют.

Полученные результаты для случая линейной аппроксимации $h_i(t)$ могут быть использованы практически путем разбиения исходного интервала $[t_0, t_f]$ на участки $[t_{j-1}, t_j]$, $j=1,2,\dots,N$, $t_N \equiv t_f$, где $h_i(t)$ близки к линейным. Если таких участков N , то общее количество моментов переключений при этом – $2N$. В случае же разбиения $h_i(t)$ на нелинейные участки могут быть получены управления с более чем двумя переключениями на каждом из участков, количество которых определяется порядком принятого полинома для $h_i(t)$.

Полученные для линейных систем результаты могут быть обобщены и на случай нелинейных систем с аддитивным управлением. Указанное обобщение следует из того факта, что функции $h_i(t)$ в нелинейном случае зависят и от текущего состояния, т.е. как $h_i(t, x(t))$, что следует из (1.1.6). Для вклада управления u_k в интегральный член (1.1.6) для i – й координаты имеем выражения:

$$x_{ik}(t_f, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n W_{ij}(t_f, t, x(t)) B_{jk}(t) u_k(t) dt \equiv \int_{t_0}^{t_f} h_i(t, x(t)) \xi(t) dt,$$

$$h_i(t, x(t)) \equiv \sum_{j=1}^n W_{ij}(t_f, t, x(t)) B_{jk}(t), \quad \xi(t) \equiv u_k(t).$$

Поскольку функции h_i в выводах соотношений (3.2.13), (3.2.16), (3.2.18) используются как некоторые функции времени, а получаемые при этом значения моментов переключения от параметров системы не зависят, указанные выражения можно использовать и для нелинейных систем вида (1.1.1). Это также следует из структуры аналитического решения нелинейной системы (2.1.24), с помощью которого можно с любой степенью точности представлять переходные функции (по В.М. Алексееву [4]) нелинейных систем. Из представления (2.1.24) следует, что указанные переходные функции представляют собой степенные (по времени t) ряды с коэффициентами, сложным образом зависящие от состояния системы во временной точке, относительно которой записывается указанное степенное разложение (R_{ik} , определяемые (2.1.22)). Таким образом, в отличие от разложений (3.2.4) и (3.2.14), на основе которых получены (3.2.13), (3.2.16), (3.2.18), в нелинейном случае имеет место зависимость коэффициентов a_{ij} от состояния в начальный момент времени. Только этим и отличается случай нелинейных систем (1.1.1) от случая линейных систем (1.1.1), (1.1.2). С учетом этого обстоятельства вывод соотношений (3.2.13), (3.2.16), (3.2.17) останется таким же и в нелинейном случае.

3.2.2. Погрешность конечного состояния при замене произвольного ограниченного управления приближенно эквивалентным управлением

Поставим задачу определения погрешности конечного состояния, возникающей при подаче на вход управляемой системы приближенно-эквивалентного релейного управления, заменяющего некоторое произвольное ограниченное управление. Указанное произвольное управление далее будем называть «эталонным».

Для определения максимально возможной погрешности управления, запишем выражения, определяющие конечное состояние системы под воздействием эталонного управления $\xi(t)$:

$$x^*(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} h(t)\xi(t)dt, \quad x^*(t_f) = \{x_i^*(t_f)\}, \quad h(t) = \{h_i(t)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2.19)$$

Приведем также аналогичные (3.2.3) соотношения, определяющие конечное состояние системы под воздействием эквивалентного нормированного релейного управления, приняв для определенности чётным число моментов переключения m :

$$\tilde{x}^*(t_f) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} h(t)dt + \int_{\vartheta_3}^{\vartheta_4} h(t)dt + \dots + \int_{\vartheta_{m-1}}^{\vartheta_m} h(t)dt, \quad (3.2.20)$$

где $\tilde{x}^*(t_f) = \{\tilde{x}_i^*(t_f)\}$, $h(t) = \{h_i(t)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

В случае отсутствия погрешности управления имеем равенство $x^*(t_f) = \tilde{x}^*(t_f)$, т.е.:

$$\int_{t_0}^{t_f} h_i(t)\xi(t)dt = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} h_i(t)dt + \int_{\vartheta_3}^{\vartheta_4} h_i(t)dt + \dots + \int_{\vartheta_{m-1}}^{\vartheta_m} h_i(t)dt. \quad (3.2.21)$$

Точность достижения заданного конечного состояния с помощью формируемого релейного управления зависит от точности аппроксимации функции $h_i(t)$. При определении выражений (3.2.13), (3.2.18) принималась приближенная полиномиальная аппроксимация функции $h_i(t)$, полученная с помощью отрезка ряда Тейлора с m членами:

$$h_i(t) = h_i(t_0) + \frac{h_i'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \dots + \frac{h_i^{(m-1)}(t_0)}{m-1!}(t-t_0)^{m-1} = \\ = a_{i0} + a_{i1}t + \dots + a_{i(m-1)}t^{m-1}. \quad (3.2.22)$$

Подставив (3.2.22) в выражение (3.2.21), выполнив интегрирование и

подстановку (3.2.15), получим систему (3.2.16) для моментов переключения $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{m-1}$.

Однако для точной полиномиальной аппроксимации функции $h_i(t)$ необходимо использовать ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\begin{aligned} hL_i(t) &= h_i(t) + R_i(\theta)(t-t_0)^m = h_i(t_0) + \frac{h_i'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \dots \\ &\dots + \frac{h_i^{(m-1)}(t_0)}{m-1!}(t-t_0)^{m-1} + R_i(\theta)(t-t_0)^m = \\ &= a_{i0} + a_{i1}t + \dots + a_{i(m-1)}t^{m-1} + R_i(\theta)(t-t_0)^m, \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

где $R_i(\theta) = \frac{h_i^{(m)}(\theta)}{m!}$, $\theta \in [t_0, t]$

Тогда, с учетом (3.2.23), выражения, определяющие вектор конечных состояний системы под воздействием эталонного и релейного управлений, примут вид:

$$x^*(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} hL(t)\xi(t)dt = \int_{t_0}^{t_f} h(t)\xi(t)dt + \int_{t_0}^{t_f} R(\theta)(t-t_0)^m \xi(t)dt, \quad (3.2.24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}^*(t_f) &= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} hL(t)dt + \int_{\vartheta_3}^{\vartheta_4} hL(t)dt + \dots + \int_{\vartheta_{m-1}}^{\vartheta_m} hL(t)dt = \\ &= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} h(t)dt + \int_{\vartheta_3}^{\vartheta_4} h(t)dt + \dots + \int_{\vartheta_{m-1}}^{\vartheta_m} h(t)dt + \\ &+ \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} R(\theta)(t-t_0)^m dt + \int_{\vartheta_3}^{\vartheta_4} R(\theta)(t-t_0)^m dt + \dots + \int_{\vartheta_{m-1}}^{\vartheta_m} R(\theta)(t-t_0)^m dt, \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

где $R(\theta) = \{R_i(\theta)\}$, $hL(t) = \{hL_i(t)\}$, $h(t) = \{h_i(t)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Если моменты переключений релейного управления определены из решения системы (3.2.18), то выполняется равенство (3.2.21). Тогда из (3.2.24), (3.2.25), с учётом (3.2.21), имеет место равенство в виде невязки:

$$\begin{aligned} \Delta_m = x^*(t_f) - \tilde{x}^*(t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} R(\theta)(t-t_0)^m \xi(t)dt - \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} R(\theta)(t-t_0)^m dt + \\ &+ \int_{\vartheta_3}^{\vartheta_4} R(\theta)(t-t_0)^m dt - \dots - \int_{\vartheta_{m-1}}^{\vartheta_m} R(\theta)(t-t_0)^m dt. \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

Выполнив интегрирования в (3.2.26), получим выражение, определяющее искомую величину погрешности, привносимой приближенностью эквивалентного релейного управления с m моментами переключений:

$$\Delta_m = R(\theta) \cdot N_m(\xi(t)), \quad (3.2.27)$$

где нелинейный функционал от эталонного управления $\xi(t)$, $j = 1, 2, \dots, m$ определяется:

для четных m выражением

$$N_m(\xi(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (t - t_0)^m (\xi(t) - 1) dt + \int_{\mathcal{I}_3}^{\mathcal{I}_4} (t - t_0)^m (\xi(t) - 1) dt + \dots + \int_{\mathcal{I}_{m-1}}^{\mathcal{I}_m} (t - t_0)^m (\xi(t) - 1) dt ,$$

для нечетных m выражением

$$N_m(\xi(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (t - t_0)^m (\xi(t) - 1) dt + \int_{\mathcal{I}_3}^{\mathcal{I}_4} (t - t_0)^m (\xi(t) - 1) dt + \dots + \int_{\mathcal{I}_m}^{t_f} (t - t_0)^m (\xi(t) - 1) dt ,$$

Предельная абсолютная погрешность управления может быть определена на основании (3.2.27) следующим выражением:

$$\bar{\Delta}_m = \max |\Delta_m| = \max_{\theta \in [t_0, t]} |R(\theta)| \cdot |N_m(\xi(t))| = \max_{\theta \in [t_0, t]} \left| \frac{h^{(m)}(\theta)}{m!} \right| \cdot |N_m(\xi(t))| \quad (3.2.28)$$

Значение же относительной погрешности управления при этом определяется выражением:

$$\delta_m = \frac{\bar{\Delta}_m}{\left| \int_{t_0}^{t_f} R(\theta) (t - t_0)^m \xi(t) dt \right|} \quad (3.2.29)$$

Рассмотрим, в качестве примера, получение выражения, определяющего величину погрешности управления для случая линейной аппроксимации функции $h_i(t)$ вида (3.2.4). Из (3.2.19) – (3.2.21) получим:

$$\int_{t_0}^{t_f} [a_{i0} + a_{i1}(t - t_0)] \xi(t) dt = \int_{\mathcal{I}_1}^{\mathcal{I}_2} [a_{i0} + a_{i1}(t - t_0)] dt. \quad (3.2.30)$$

С учётом точной аппроксимации функции $h_i(t)$ рядом Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (3.2.23), это выражение примет вид:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} [a_{i0} + a_{i1}(t - t_0)] \xi(t) dt + \int_{t_0}^{t_f} R_i(\theta) (t - t_0)^2 \xi(t) dt = \\ & = \int_{\mathcal{I}_1}^{\mathcal{I}_2} [a_{i0} + a_{i1}(t - t_0)] dt + \int_{\mathcal{I}_1}^{\mathcal{I}_2} R_i(\theta) (t - t_0)^2 dt. \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

Равенство (3.2.30) справедливо, если моменты переключений релейного управления $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ определены выражениями (3.2.13). Тогда из (3.2.30), (3.2.31) запишем выражение вида (3.2.26) для двух переключений:

$$\Delta_{2i} = \int_{t_0}^{t_f} R_i(\theta) (t - t_0)^2 \xi(t) dt - \int_{\mathcal{I}_1}^{\mathcal{I}_2} R_i(\theta) (t - t_0)^2 dt.$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} \Delta_{2i} = R_i(\theta) & \left[\int_{t_0}^{t_f} t^2 \xi(t) dt - \int_{t_0}^{t_f} 2t \cdot t_0 \cdot \xi(t) dt + \int_{t_0}^{t_f} t_0^2 \xi(t) dt \right] - \\ & - R_i(\theta) \left[\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} t^2 dt - \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} 2t \cdot t_0 dt + \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} t_0^2 dt \right] = R_i(\theta) [k_3 - 2t_0 k_2 + t_0^2 k_1] - \\ & - R_i(\theta) \left[\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} t^2 dt - 2t_0 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} t dt + t_0^2 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} dt \right]. \end{aligned}$$

В итоге, выполнив подстановку согласно (3.2.13), получим выражение, определяющее величину погрешности, привносимой эквивалентным релейным управлением с двумя переключениями:

$$\Delta_{2i} = R_i(\theta) \cdot N_2(\xi(t)) = R_i(\theta) \cdot \left[k_3 - \frac{k_2^2}{k_1} - \frac{k_1^3}{12} \right]. \quad (3.2.32)$$

Тогда, согласно (3.2.23), (3.2.28), величина максимальной абсолютной погрешности управления для двух переключений определяется выражением:

$$\bar{\Delta}_{2i} = \max_{\theta \in [t_0, t]} |R_i(\theta)| \cdot |N_2(\xi(t))| = \max_{\theta \in [t_0, t]} \left| \frac{h_i''(\theta)}{2!} \right| \cdot \left| \left[k_3 - \frac{k_2^2}{k_1} - \frac{k_1^3}{12} \right] \right|.$$

Выражение для относительной погрешности управления, определяемое (3.2.29), примет вид:

$$\delta_{2i} = \frac{\bar{\Delta}_{2i}}{\left| \int_{t_0}^{t_f} R_i(\theta) (t - t_0)^m \xi(t) dt \right|}$$

Возможно построение релейного управления с более чем двумя переключениями. При этом моменты переключений должны быть определены из решения системы (3.2.13) или (3.2.18). Тогда максимальная абсолютная погрешность управления определяется выражением (3.2.28) для соответствующего значения m .

Однако указанное релейное управление может быть определено и разбиением интервала управления $[t_0, t_f]$ на участки $[t_{l-1}, t_l]$ такой длительности, для которых функция $h_i(t)$ может быть принята линейной, то есть вида (3.2.4). На всех участках $t \in [t_{l-1}, t_l]$ разбиения интервала управления $[t_0, t_f]$ по известной математической модели объекта рассчитывается эталонное управление $u(t) \in [0, 1]$, а далее по выражениям (3.2.13) вычисляются пары моментов переключений эквивалентного релейного управления $\tilde{u}(t) \in \{0, 1\}$, которые и реализуются практически в дальнейшем. При этом на итоговый результат управления окажет влияние не только погрешность предлагаемого эквивалентного релейного управления, определяемая (3.2.28), но и погрешность достижения целей управления исходным эталонным

управлением. Возникновение погрешности в эталонном управлении связано с тем, что его расчет производится не на всем интервале, а на каждом из отрезков, начальные условия каждого из которых определяются конечными значениями предыдущего отрезка. Точное определение значений возникающей погрешности эталонного управления зависит от метода его формирования, однако, в общем случае, очевидно, что это значение определяется разностью заданного точного конечного состояния системы и значения, получаемого под воздействием эталонного управления, вычисленного на последнем отрезке управления $t \in [t_0, t_f]$.

В заключение еще раз отметим, что здесь использованы нормированные в пределах от нуля до единицы управления, что не ограничивает общности задачи, так как любая задача с ненормированными управлениями легко может быть приведена к нормированному случаю.

3.3. Ковариационный анализ

3.3.1. Линейные системы

Рассмотрим вначале задачу определения ковариационной матрицы линейной системы вида

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A(t) \cdot x + C(t) \cdot v(t) + B(t) \cdot \xi(t), \\ t \in [t_0, t_f], x(t_0) &= x^0. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

где $\xi(t)$ - вектор центрированных случайных процессов типа "белого шума" с матрицей интенсивностей Q (в общем случае зависящей от времени); $v(t)$ - известное на всем интервале времени детерминированное внешнее воздействие. Отметим, что случай "цветных шумов" сводится к рассматриваемому случаю путем введения формирующих фильтров [42], [43]. Предположим также, что начальные условия x^0 - вектор случайных величин с математическим ожиданием $\bar{x}^0$ и произвольным законом распределения.

Обычно для определения математического ожидания $\bar{x}$ и ковариационной матрицы D_{xx} вектора состояния системы (3.3.1) как функций текущего времени применяются известные уравнения Дункана [43], [44].

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= A(t)\bar{x} + C(t)v(t), \\ \frac{dD_{xx}}{dt} &= A(t)D_{xx} + D_{xx}A(t)^T + B(t)Q(t)B(t)^T, \\ t \in [t_0, t_f], \bar{x}(t_0) &= \bar{x}^0, D_{xx}(t_0) = D_{xx}^0, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Отметим, что уравнения (3.3.2) получены в [44] в результате решения уравнений Колмогорова для плотности вероятностей диффузионного процесса при нормально распределенном $\bar{x}^0$ и гауссовском белом шуме. В предлагаемом нами выводе обобщенных уравнений Дункана, которые для линейных систем являются точными, такое предположение не делается.

Ввиду симметричности матрицы D_{xx} для определения искомых вероятностных характеристик требуется интегрировать на интервале работы системы $n + n(n+1)/2$ дифференциальных уравнения (n – размерность вектора x) при заданных начальных условиях $\bar{x}^0, D_{xx}^0$.

В соответствии с поставленной задачей применим (3.3.2) для линейной модели конечного состояния (1.1.8). Переобозначая переменные конечного состояния $\bar{x}(t_f, t, x(t)) \rightarrow y(t_f, t)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}(t_f, t)}{dt} &= W(t_f, t) \cdot C(t) \cdot v(t), \\ \frac{dD_{yy}(t_f, t)}{dt} &= W(t_f, t)B(t)QB(t)^T W^T(t_f, t). \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Указанное изменение обозначения обусловлено тем, что символом $\bar{x}$, которым в других разделах книги обозначены переменные конечного состояния, здесь удобнее обозначать математическое ожидание переменной x .

При этом, естественно, определяется ковариационная матрица для переменных $y(t_f, t)$. Для определения искомых характеристик $\bar{x}(t)$, $D_{xx}(t)$ воспользуемся определением переменных конечного состояния (1.1.6), которое в новых обозначениях будет иметь вид

$$y(\vartheta, t) = W(\vartheta, t)x(t) + \int_t^{\vartheta} W(\vartheta, \tau)C(\tau)v(\tau)d\tau. \quad (3.3.4)$$

Выражение (3.3.4) – это второе соотношение из (1.1.6), где в роли $u(t)$ из первого соотношения (1.1.6) выступает белый шум $\xi(t)$.

Выразим $x(t)$ из (3.3.4) и найдем математическое ожидание. Поскольку в линейном случае переходная матрица неслучайная и ее можно выносить за знак операции математического ожидания, получим

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= W^{-1}(t_f, t)\bar{y}(t_f, t) - \int_t^{t_f} W^{-1}(t_f, t)W(t_f, \tau)C(\tau)v(\tau)d\tau = \\ &= W(t, t_f)\bar{y}(t_f, t) - \int_t^{t_f} W(t, \tau)C(\tau)v(\tau)d\tau, \\ D_{xx}(t) &= M[(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T] = M[(Wy - a - W\bar{y} + \bar{a})(Wy - a - W\bar{y} + \bar{a})^T] = \\ &= WM[(y - \bar{y})(y - \bar{y})^T]W^T = W(t, t_f)D_{yy}(t_f, t)W^T(t, t_f), \\ W &\equiv W(t, t_f), \quad y \equiv y(t_f, t), \quad a = \bar{a} = \int_t^{t_f} W(t, \tau)C(\tau)v(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

где использовано известное свойство линейной переходной матрицы

$$W^{-1}(t_1, t_2) = W(t_2, t_1) .$$

Выпишем окончательный результат:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= W(t, t_f) \bar{y}(t_f, t) - \int_t^{t_f} W(t, \tau) C(\tau) v(\tau) d\tau, \\ D_{xx}(t) &= W(t, t_f) D_{yy}(t_f, t) W^T(t, t_f) . \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Из (3.3.5) с учетом (1.1.10) следует, что $\bar{x}(t_f) = \bar{y}(t_f, t_f)$, $D_{xx}(t_f) = D_{yy}(t_f, t_f)$, поэтому для определения статистических характеристик только конечного состояния (1.1.1), (1.1.2) необходимости в использовании (3.3.5) нет вообще. Алгоритм (3.3.5) известен [45] и приводится здесь как иллюстрация использования моделей конечного состояния и основа для получения алгоритма для нелинейных систем.

Сравним алгоритмы (3.3.2) и (3.3.3). На первый взгляд кажется, что (3.3.3) требует больших вычислительных затрат ввиду того, что для определения линейной W как функции второго аргумента необходимо интегрировать n^2 уравнений вида (1.1.7), которые добавляются к $n + n(n+1)/2$ уравнениям системы (3.3.3). В итоге получается, что в общем случае количество интегрируемых уравнений (3.3.3) и (1.1.7) значительно превышает количество уравнений в системе (3.3.2). Кроме того, если искомые характеристики нужны в m промежуточных точках интервала интегрирования, к вычислениям добавляются матричные операции (3.3.5) в указанных m точках. Однако для широко распространенных частных случаев ситуация изменяется. Рассмотрим случай, когда нас интересует не вся ковариационная матрица, а какая-то ее часть (например, дисперсии отдельных фазовых координат), а структура матрицы B такова, что в каждом ее столбце только один ненулевой элемент, количество же столбцов – меньше n . Последнее означает, что внешние воздействия типа "белый шум" входят не во все уравнения, причем ни в одном из уравнений нет суммы таких воздействий. Такая структура модели характерна для применений формирующих фильтров. Заметим, что алгоритм (3.3.3), записанный в форме дифференциальных уравнений, на самом деле представляет собой систему независимых квадратурных формул, поэтому любой из элементов $\bar{x}$ и D_{xx} здесь может вычисляться независимо друг от друга. В алгоритме же (3.3.2) получать отдельные компоненты искомым характеристик невозможно. Например, в случае одного случайного внешнего воздействия, входящего в i -е уравнение (3.3.2), нужна лишь i -я строка W , для получения которой необходимо интегрировать n уравнений (1.1.7) с относительно простой правой частью. Если при этом необходимы математическое ожидание и дисперсия одной выходной координаты, то из

всей системы (3.3.3) необходимо интегрировать только два дифференциальных уравнения – одно для математического ожидания и одно для дисперсии. Итак, в данном случае вместо $n + n(n+1)/2$ уравнений системы (3.3.2) необходимо интегрировать только $n + 2$ дифференциальных уравнения из систем (1.1.7) и (3.3.3). Таким образом, в данном случае алгоритм (3.3.3) обладает преимуществами в сравнении с (3.3.2).

Однако, как уже отмечалось, основное достоинство предлагаемого подхода в том, что он может быть применен для ковариационного анализа нелинейных систем.

3.3.2. Нелинейные системы

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \Phi(t, x(t)) + B(t) \cdot \xi(t), \\ t \in [t_0, t_f], x(t_0) &= x^0, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

где, как и ранее, $\xi(t)$ - вектор центрированных белых шумов с матрицей интенсивностей $Q(t)$. Что касается детерминированных внешних воздействий, в том числе и возможных ненулевых математических ожиданий белого шума, то они, по предположению, входят в вектор Φ .

В нелинейном случае необходимо учитывать зависимость нелинейной переходной матрицы от текущего состояния. А поскольку текущее состояние случайно, то и переходная матрица также случайна. Представим ее в виде суммы неслучайной и случайной составляющих

$$W(\mathcal{G}, t, x(t)) = W(\mathcal{G}, t, \tilde{x}(t)) + \Delta(\mathcal{G}, t, x(t)). \quad (3.3.7)$$

Неслучайную составляющую $W(t_f, t, \tilde{x}(t))$ определим уравнениями, аналогичными (1.1.3), (1.1.5), где $\tilde{x}(t)$ - текущее состояние детерминированной системы, следующей из (3.3.6). У этой детерминированной системы начальное условие – математическое ожидание начальных условий из (3.3.6), а воздействия типа белого шума отсутствуют. Соответствующие уравнения в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{y}(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= \Phi[\vartheta, \tilde{y}(\vartheta, t)], \\
\frac{d\bar{W}(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= A(\vartheta, \tilde{x}(t)) \cdot \bar{W}(\vartheta, t), \\
A(\vartheta, \tilde{x}(t)) &\equiv \left\{ \frac{\partial \Phi_i(\vartheta, x)}{\partial x_j} \right\} \bigg|_{x=\tilde{y}(\vartheta, t)}, \quad i, j = 1 \dots n, \\
\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= \Phi(t, \tilde{x}(t)), \\
\vartheta &\in [t, t_f], \quad \tilde{y}(t, t) = \tilde{x}(t), \quad W(t, x(t)) = I, \\
t &\in [t_0, t_f], \quad \tilde{x}(t_0) = \bar{x}^0.
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Вводя сокращенные обозначения

$$\begin{aligned}
y &\equiv y(\vartheta, \tau, x(\tau)), \quad \bar{y} \equiv y(\vartheta, \tau, \bar{x}(\tau)), \quad D_{yy} \equiv D_{yy}(\vartheta, t), \\
W &\equiv W(\vartheta, \tau, x(\tau)), \quad \xi \equiv \xi(\tau), \quad B \equiv B(\tau), \\
\bar{W}(\vartheta, t) &= W(\vartheta, t, \tilde{x}(t)), \quad \Delta \equiv \Delta(\vartheta, t, x(t)),
\end{aligned}$$

вычислим с учетом записанной в новых обозначениях связи (1.1.4)

$$x(\vartheta) = y(\vartheta, t, x(t)) + \int_t^{\vartheta} W(\vartheta, \tau, x(\tau)) \cdot B(\tau) \cdot \xi(\tau) d\tau \tag{3.3.9}$$

матрицу ковариаций переменных конечного состояния как функцию ϑ .

Для этого подставим (3.3.7) в (3.3.9) и выразим отсюда y .

$$\begin{aligned}
y(\vartheta, t, x(t)) &= x(\vartheta) - h(\vartheta, t) - z(\vartheta, t), \\
h(\vartheta, t) &= \int_t^{\vartheta} \bar{W}(\vartheta, \tau) B(\tau) \xi(\tau) d\tau, \\
z(\vartheta, t) &= \int_t^{\vartheta} \Delta(\vartheta, \tau, x(\tau)) B(\tau) \xi(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Далее, опуская для краткости аргументы, приведем вывод выражения для искомой матрицы ковариаций.

$$\begin{aligned}
D_{yy} &= M[(y - \bar{y})(y - \bar{y})^T] = M[(x - \bar{x} - h + \bar{h} - z + \bar{z})(y - \bar{y})^T] = \\
&= M[(x - \bar{x})(y - \bar{y})^T] - M[(h - \bar{h})(y - \bar{y})^T] - M[(z - \bar{z})(y - \bar{y})^T].
\end{aligned}$$

Преобразуем каждое слагаемое полученного выражения.

$$\begin{aligned}
D_{yy} &= M[(y - \bar{y})(y - \bar{y})^T] = M[(x - \bar{x} - h + \bar{h} - z + \bar{z})(y - \bar{y})^T] = \\
&= M[(x - \bar{x})(y - \bar{y})^T] - M[(h - \bar{h})(y - \bar{y})^T] - M[(z - \bar{z})(y - \bar{y})^T] \\
M[(h - \bar{h})(y - \bar{y})^T] &= M[(h - \bar{h})(x - \bar{x} - h + \bar{h} - z + \bar{z})^T] = \\
&= M[(h - \bar{h})(x - \bar{x})] - M[(h - \bar{h})(h - \bar{h})] - M[(h - \bar{h})(z - \bar{z})] = \\
&= D_{hx} - D_{hh} - D_{hz}, \\
M[(z - \bar{z})(y - \bar{y})^T] &= M[(z - \bar{z})(x - \bar{x} - h + \bar{h} - z + \bar{z})^T] = \\
&= M[(z - \bar{z})(x - \bar{x})] - M[(z - \bar{z})(h - \bar{h})] - M[(z - \bar{z})(z - \bar{z})] = \\
&= D_{zx} - D_{zh} - D_{zz}, \\
D_y &= D_{xx} - D_{xh} - D_{xz} - D_{hx} + D_{hh} + D_{hz} - D_{zx} + D_{zh} + D_{zz}.
\end{aligned}$$

В приведенных выражениях D_{uv} , $u, v \in \{x, h, z\}$ – ковариационные матрицы, определяемые $M[(u - \bar{u})(v - \bar{v})^T] = M[uv^T] - \bar{u} \cdot \bar{v}$.

С учетом известного свойства $D_{uv} = D_{vu}$ приведем подобные и получим

$$D_{yy} = D_{xx} + D_{hh} + D_{zz} + 2D_{hz} - 2D_{xz} - 2D_{hx}. \quad (3.3.11)$$

Найдем оценки ковариационных матриц D_{zz} , D_{hz} , D_{xz} , связанных со случайным вектором z . Указанные оценки будем искать как функции верхнего предела интегрирования $\vartheta = t + \delta$ из (3.3.10), где $\delta > 0$ – малая величина. Прежде всего, выпишем разложения переходной матрицы и введенной в (3.3.10) функции Δ :

$$\begin{aligned} W(t + \delta, t, x(t)) &= W(t, t, x(t)) + \left[\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \right]_{x=y(t, t, x(t))} \cdot \delta + o_m(\delta) = \\ &= I + \left[\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \right]_{x=x(t)} \cdot \delta + o_m(\delta), \\ W(t + \delta, t, \tilde{x}(t)) &= W(t, t, \tilde{x}(t)) + \left[\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \right]_{x=\tilde{y}(t, t, \tilde{x}(t))} \cdot \delta + o_m(\delta) = \\ &= I + \left[\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \right]_{x=\tilde{x}(t)} \cdot \delta + o_m(\delta), \\ \Delta(t + \delta, t, x(t)) &\equiv W(t + \delta, t, x(t)) - W(t + \delta, t, \tilde{x}(t)) = \\ &= \left[\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \right]_{x=x(t)} - \left[\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \right]_{x=\tilde{x}(t)} \cdot \delta + o_m(\delta) = O_m(\delta) + o_m(\delta), \\ z(t + \delta, t) &= z(t, t) + \Delta(t + \delta, t, x(t))B(t)\xi(t) \cdot \delta + o_v(\delta) = \\ &= z(t, t) + \left[\left[\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \right]_{x=x(t)} - \left[\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \right]_{x=\tilde{x}(t)} \right] \cdot \delta + o_m(\delta) B(t)\xi(t) \cdot \delta + o_v(\delta), \end{aligned}$$

где $o_m(\delta)$, $o_v(\delta)$ – бесконечно малые относительно δ матрица и вектор, $O_m(\delta)$ – бесконечно малая порядка δ матрица, $z(t, t) = 0$ в силу (3.3.10).

Найдем оценки разности $z(t + \delta, t) - \bar{z}(t + \delta, t)$, входящей в определения ковариационных матриц D_{zz} , D_{hz} , D_{xz} . В силу исходных предположений о непрерывности и дифференцируемости правых частей системы (3.3.9), а также конечном времени t_f , разность $\left[\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \right]_{x=x(t)} - \left[\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \right]_{x=\tilde{x}(t)}$ ограничена.

Поэтому интеграл, посредством которого определена переменная $z(t + \delta, t)$, является стохастическим интегралом Ито

$$z(t + \delta, t) = \int_t^{t+\delta} \Delta(t + \delta, \tau, x(\tau)) B(\tau) d\eta(\tau), \quad (3.3.12)$$

где η - винеровский процесс, порождающий белый шум $\xi(t)$. Поскольку на малом интервале длительностью δ приращение Δ имеет полученную выше оценку

$$O_m(\delta) + o_m(\delta) = M \cdot \delta,$$

приращение (в среднем) винеровского процесса $d\eta$ имеет оценку $\sqrt{\delta}$ [46], [47], то оценка j -й компоненты рассматриваемого интеграла при ограниченной матрице B имеет вид

$$z_j(t + \delta, t) = M \cdot B(t) \cdot \delta \cdot \sqrt{\delta} = o(\delta), \quad (3.3.13)$$

а оценка $z(t + \delta, t) = o_v(\delta)$.

Оценка приращения винеровского процесса «в среднем» означает, что она имеет место почти всюду, за исключением изолированных точек, где указанные приращения могут быть бесконечными, однако на величину определенного интеграла они не сказываются.

Ввиду того, что среднее значение не может превышать пиковых отклонений случайной величины, для математического ожидания также имеем оценку $\bar{z}(t + \delta, t) = o_v(\delta)$. Бесконечно малым относительно δ при этом оказывается и вектор $z(t + \delta, t) - \bar{z}(t + \delta, t)$. Отсюда следует, что все ковариационные матрицы, связанные с вектором z — D_{zz} , D_{hz} , D_{xz} , — имеют оценку $o_m(\delta)$.

Далее получим выражения для ковариационных матриц D_{xh} , D_{hh} с учетом того, что $\bar{h} = 0$ из-за центрированности ξ .

$$\begin{aligned} D_{xh} &= M[(x - \bar{x})(h - \bar{h})^T] = M[xh^T] - \bar{x} \cdot \bar{h}^T = M \left[x \left(\int_t^{\mathcal{G}} \bar{W} B \xi d\tau \right)^T \right] - \bar{x} \bar{h}^T = \\ &= M \left[\left(y + h + z \right) \left(\int_t^{\mathcal{G}} \bar{W} B \xi d\tau \right)^T \right] = \int_t^{\mathcal{G}} M[y(\mathcal{G}, t, x(t)) \xi^T(\tau)] B^T \bar{W}^T d\tau + \\ &+ M[h(\mathcal{G}, t) h^T(\mathcal{G}, t)] + \int_t^{\mathcal{G}} M[z(\mathcal{G}, t, x(t)) \xi^T(\tau)] B^T \bar{W}^T d\tau. \end{aligned}$$

Первое слагаемое полученного выражения равно нулю, так как значения векторов возмущения $\xi(\tau)$ и конечного состояния $y(\mathcal{G}, t, x(t))$ невозмущенной на интервале $\tau \in [t, \mathcal{G}]$ системы независимы для всех $\tau > t$. И только в момент $\tau = t$ можно было бы анализировать зависимость указанных векторов. Однако, ввиду того, что $M[\xi(\tau) y^T(\mathcal{G}, t, x(t))]$ находится под интегралом, вклад значения одной точки в его величину нулевой.

Второе слагаемое с учетом $\bar{h} = 0$ — это D_{hh} .

Третье слагаемое при малом δ имеет оценку $o_m(\delta)$ в силу полученной выше оценки $z(t + \delta, t) = o_v(\delta)$.

Таким образом, получили $D_{hx} = D_{hh} + o_m(\delta)$.

Для ковариационной матрицы D_{hh} имеем

$$\begin{aligned} D_{hh} &= M \left[\left(\int_t^{\vartheta} \bar{W}(\vartheta, \lambda) B(\lambda) \xi(\lambda) d\lambda \right) \left(\int_t^{\vartheta} \xi^T(\tau) B^T(\tau) \bar{W}^T(\vartheta, \tau) d\tau \right) \right] = \\ &= \int_t^{\vartheta} \int_t^{\vartheta} \bar{W}(\vartheta, \lambda) B(\lambda) M[\xi(\lambda) \xi^T(\tau)] B^T(\tau) \bar{W}^T(\vartheta, \tau) d\lambda d\tau = \\ &= \int_t^{\vartheta} \bar{W}(\tau) B(\tau) Q(\tau) B^T(\tau) \bar{W}^T(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

В (3.3.14) под знаком повторного интеграла присутствует корреляционная матрица белого шума, равная по определению $M[\xi(\lambda) \xi^T(\tau)] = Q \cdot \delta(\lambda - \tau)$, где δ – дельта-функция. При этом внутренний интеграл почти во всех точках, за исключением граничных $\tau = \lambda = t$ и $\tau = \lambda = \vartheta$, равен $\bar{W}(\vartheta, \lambda) B(\lambda) Q B^T(\lambda) \bar{W}^T(\vartheta, \lambda)$. В граничных точках он в два раза меньше, однако вклад этих точек в значение внешнего интеграла нулевой.

В итоге из (3.3.11) следует выражение, связывающее ковариационные матрицы переменных конечного состояния D_{yy} и переменных состояния D_{xx}

$$D_{yy}(\vartheta, t) = D_{xx}(\vartheta) - \int_t^{\vartheta} \bar{W}(\vartheta, \tau) B(\tau) Q(\tau) B^T(\tau) \bar{W}^T(\vartheta, \tau) d\tau + o_m(\delta), \quad (3.3.15)$$

$$\vartheta = t + \delta, \quad \delta > 0.$$

Выразим из (3.3.15) искомую матрицу $D_{xx}(\vartheta)$.

$$D_{xx}(\vartheta) = D_{yy}(\vartheta, t) + \int_t^{\vartheta} \bar{W}(\vartheta, \tau) B(\tau) Q(\tau) B^T(\tau) \bar{W}^T(\vartheta, \tau) d\tau - o_m(\delta), \quad (3.3.16)$$

$$\vartheta = t + \delta, \quad \delta > 0.$$

Что же касается математического ожидания, то оно рассчитывается по векторно-матричному дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}(t)}{dt} &= M[\Phi(t, x(t))], \\ t \in [t_0, t_f], \quad \bar{x}(t_0) &= \bar{x}^0 \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Математическое ожидание правой части (3.3.17) в случаях, когда элементы вектор-функции Φ представляют собой полиномы не выше второй степени, легко выражается через $\bar{x}$ и D_{xx} . В остальных случаях, как это часто делается [43], можно воспользоваться предположением о нормальности x и вычислить правую часть (3.3.17) через определенные интегралы. Во многих случаях можно пойти по простейшему, но менее точному пути – вы-

числитель математическое ожидание как решение детерминированной системы с помощью уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= \Phi(t, \tilde{x}(t)), \\ t \in [t_0, t_f], \quad \tilde{x}(t_0) &= \bar{x}^0, \quad \bar{x}(t) \equiv \tilde{x}(t). \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Для определения $D_{yy}(\vartheta, t)$, входящего в (3.3.16), воспользуемся тем обстоятельством, что при достаточно малом приращении времени δ нелинейная переходная матрица приближается к линейной ввиду малого изменения $x(t)$ на рассматриваемом интервале. Для доказательства этого найдем разложения по первому аргументу нелинейной и линеаризованной переходных матриц детерминированной системы в окрестности точки t . Для построения линеаризованной переходной матрицы запишем линеаризованную относительно детерминированного решения $\tilde{x}$ систему. Для этого выделим линейную часть тейлоровского разложения правой части (3.3.6) и вычтем из полученного уравнения детерминированные уравнения.

$$\begin{aligned} \frac{dx(\vartheta)}{d\vartheta} &= \Phi(\vartheta, \tilde{x}(\vartheta)) + \left[\left[\frac{\partial \Phi(\vartheta, x)}{\partial x} \right] \right]_{x=\tilde{x}(\vartheta)} \cdot (x(\vartheta) - \tilde{x}(\vartheta)) + \\ &+ R(x(\vartheta) - \tilde{x}(\vartheta)) + B(\vartheta)\xi(\vartheta), \\ \frac{d\tilde{x}(\vartheta)}{d\vartheta} &= \Phi(\vartheta, \tilde{x}(\vartheta)), \\ \vartheta &\in [t, t + \delta]. \end{aligned}$$

Таким образом, линеаризованная система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx^L(\vartheta)}{d\vartheta} &= \left[\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \right]_{x=\tilde{x}(\vartheta)} \cdot x^L(\vartheta) + \\ &+ R(x^L(\vartheta)) + B(\vartheta)\xi(\vartheta), \\ \vartheta &\in [t, t + \delta], \quad x^L(\vartheta) = x(\vartheta) - \tilde{x}(\vartheta). \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Особенностью представления (3.3.19) является то, что остаточный член тейлоровского разложения $R(x^L(\vartheta))$ не является в общем случае бесконечно малой величиной. В сущности, (3.3.19) – точный эквивалент (3.3.6), где лишь заменена переменная и выделена линейная часть. Позже, однако, данная система будет рассматриваться на малом интервале, когда остаточный член приближенно постоянный и имеет место линеаризация в привычном понимании этого термина. Выполняя разложение $R(x^L(\vartheta))$ по степеням δ , представим его в виде

$$R(x^L(t + \delta)) = R(x^L(t)) + O_v(\delta), \quad (3.3.20)$$

где $O_v(\delta)$ – бесконечно малая величина порядка δ .

Линеаризованная переходная матрица, соответствующая системе (3.3.19), определяется как функция первого аргумента выражением

$$\frac{dW^L(\vartheta, t)}{d\vartheta} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=\tilde{x}(\vartheta)} \right] \cdot W^L(\vartheta, t), \quad (3.3.21)$$

$$\vartheta \in [t, t + \delta], \quad W^L(t, t) = I.$$

Теперь найдем указанные выше разложения нелинейной W и линеаризованной W^L переходных матриц, заданных уравнениями (3.3.8) и (3.3.21) соответственно.

$$W(t + \delta, t, \tilde{x}(t)) = W(t, t, \tilde{x}(t)) + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=\tilde{y}(t, t)} \right] \cdot W(t, t, \tilde{x}(t)) \cdot \delta + o_m(\delta), \quad (3.3.22)$$

$$W^L(t + \delta, t) = W^L(t, t) + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=\tilde{x}(t)} \right] \cdot W^L(t, t) \cdot \delta + o_m(\delta).$$

Учитывая, что $W(t, t, \tilde{x}(t)) = I$, $\hat{W}(t, t) = I$, а $\tilde{y}(t, t) = \tilde{x}(t)$, получаем

$$W(t + \delta, t, \tilde{x}(t)) = I + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=\tilde{x}(t)} \right] \cdot \delta + o_m(\delta), \quad (3.3.23)$$

$$W^L(t + \delta, t) = I + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=\tilde{x}(t)} \right] \cdot \delta + o_m(\delta),$$

а $W(t + \delta, t, \tilde{x}(t)) - W^L(t + \delta, t) = o_m(\delta)$, что и требовалось доказать.

Поскольку на малом интервале линеаризованная в окрестности детерминированного решения и нелинейная переходные матрицы совпадают с точностью до $o_m(\delta)$, а линеаризованная матрица неслучайная, в последующих выкладках вместо W^L будем использовать введенную ранее детерминированную часть нелинейной переходной матрицы $\bar{W}$.

Так как при малом δ нелинейная переходная матрица может быть заменена линеаризованной, для определения $D_{yy}(t + \delta, t)$ воспользуемся аналогичным (3.3.5) алгоритмом расчета ковариационной матрицы для линейных систем. Однако в связи с появлением после линеаризации дополнительного (наряду с ξ) воздействия в виде остаточного члена $R(x^L(\vartheta))$ (3.3.20) переменная конечного состояния y линеаризованной системы определится выражением

$$\begin{aligned}
y(t+\delta, t) &= \bar{W}(t+\delta, t, \tilde{x}(t))x^L(t) + \\
&+ \int_t^{t+\delta} \bar{W}(t+\delta, \tau, \tilde{x}(t))R(x^L(\tau))d\tau = \\
&= \bar{W}(t+\delta, t, \tilde{x}(t)) \cdot [x^L(t) + R(x^L(t)) \cdot \delta + O(\delta) \cdot \delta] + o_v(\delta) = \\
&= \bar{W}(t+\delta, t, \tilde{x}(t)) \cdot [x^L(t) + R(x^L(t)) \cdot \delta] + o_v(\delta),
\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

где $R(x^L(t))$ – случайная величина. При получении (3.3.24) интеграл заменен площадью прямоугольника, член $O_v(\delta)\delta$ внесен в $o_v(\delta)$.

С учетом

$$\begin{aligned}
D_{y^L y^L} &= M[(y^L - \bar{y}^L)(y^L - \bar{y}^L)^T] = \\
&= M[(y - \bar{y} - (\tilde{y} - \bar{\tilde{y}}))(y - \bar{y} - (\tilde{y} - \bar{\tilde{y}}))^T] = \\
&= M[(y - \bar{y})(y - \bar{y})^T] = D_{yy}
\end{aligned}$$

вычислим ковариационную матрицу $D_{yy}(t+\delta, t)$ через y^L из (3.3.24).

Опуская для краткости записей аргументы, имеем

$$\begin{aligned}
y^L &= \bar{W} \cdot [x^L + R \cdot \delta] + o_v \\
\bar{y}^L &= M[\bar{W} \cdot [x^L + R \cdot \delta] + o_v] = \bar{W}[\bar{x}^L + \bar{R} \cdot \delta] + \bar{o}_v,
\end{aligned}$$

где x^L, R, o_v – случайные векторы.

Бесконечно малый случайный вектор o_v представим в виде произведения случайной матрицы K на неслучайный бесконечно малый вектор $\tilde{o}_v$. Тогда, обозначив

$$\begin{aligned}
g &= x^L + R \cdot \delta, \quad \bar{g} = \bar{x}^L + \bar{R} \cdot \delta, \\
g^0 &= g - \bar{g} = x^L - \bar{x}^L + R^0 \cdot \delta, \quad R^0 = R - \bar{R}, \\
o_v^0 &= K^0 \tilde{o}_v, \quad K^0 = K - \bar{K},
\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}
D_{yy}(t+\delta, t) &= M[(\bar{W} \cdot g^0 + K^0 \tilde{o}_v) \cdot (\bar{W} \cdot g^0 + K^0 \tilde{o}_v)^T] = \\
&= \bar{W} \cdot D_{gg} \cdot \bar{W}^T + \bar{W} \cdot D_{go} + D_{go}^T \cdot \bar{W}^T + D_{oo},
\end{aligned}$$

где

$$D_{gg} = M[g^0 (g^0)^T], \quad D_{go} = M[g^0 (K^0 \tilde{o}_v)^T], \quad D_{oo} = M[K^0 \tilde{o}_v (K^0 \tilde{o}_v)^T].$$

Из последних выражений следует, что D_{go}, D_{oo} – бесконечно малые матрицы с верхней оценкой $o_m(\delta)$. Таким образом, имеем

$$D_{yy}(t+\delta, t) = \bar{W} D_{gg} \bar{W}^T + o_m(\delta). \tag{3.3.25}$$

Далее вычислим D_{gg} с учетом неслучайности $\tilde{x}$. При этом $x^L - \bar{x}_L = x - \tilde{x} - \bar{x} + \tilde{x} = x^0, \quad x^0 = x - \bar{x}$.

$$\begin{aligned}
D_{gg} &= M[(x^0 + R^0 \cdot \delta) \cdot (x^0 + R^0 \cdot \delta)^T] = \\
&= D_{xx} + D_{RR} \cdot \delta^2 + (D_{xR} + D_{Rx}) \cdot \delta,
\end{aligned}$$

где

$$D_{xR} = M[(x - \bar{x})(R - \bar{R})^T], \quad D_{Rx} = D_{xR}^T. \quad (3.3.26)$$

Таким образом, выражение (3.3.25) приобретет вид

$$D_{yy}(t + \delta, t) = \bar{W}[D_{xx} + D_{RR}\delta^2 + (D_{xR} + D_{Rx})\delta]\bar{W}^T + o_m(\delta), \quad (3.3.27)$$

где ковариационные матрицы правой части являются функциями t , переходная матрица $\bar{W} \equiv \bar{W}(t + \delta, t, \tilde{x}(t))$.

Подставим (3.3.27) в (3.3.16), заменяя $\bar{W}$ его разложением (3.3.23), а интеграл – площадью прямоугольника. Кроме того, все члены со степенями δ , выше первой, внесем в $o_m(\delta)$. В результате получим:

$$\begin{aligned} D_{xx}(t + \delta) &= \\ &= \bar{W}(D_{xx} + D_{RR}\delta^2 + (D_{xR} + D_{Rx})\delta)\bar{W}^T + \bar{W}BQB^T\bar{W}^T\delta + o_m(\delta) = \\ &= \left[I + \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}}\delta \right] D_{gg} \left[I + \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}}\delta \right]^T + \\ &+ \left[I + \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}}\delta \right] BQB^T \left[I + \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}}\delta \right]^T \delta + o_m(\delta) = \\ &= D_{gg} + \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}} D_{gg} \delta + D_{gg} \frac{\partial \Phi^T}{\partial \tilde{x}} \delta + BQB^T \delta + o_m(\delta) = \\ &= D_{xx} + (D_{xR} + D_{Rx})\delta + \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}} D_{xx} \delta + D_{xx} \frac{\partial \Phi^T}{\partial \tilde{x}} \delta + BQB^T \delta + o_m(\delta), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}} \equiv \left[\frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x} \right]_{x = \tilde{x}(t)}, \quad B \equiv B(t), \quad Q \equiv Q(t), \quad D_{ij} \equiv D_{ij}(t), \quad \delta > 0.$$

Из полученного выражения можно получить две формы алгоритма ковариационного анализа. Первую форму, ориентированную на функциональную модель системы с известной переходной матрицей представим в виде непрерывно-дискретной системы:

$$\begin{aligned} D_{xx}(t_{k+1}) &= \bar{W}[D_{xx}(t_k) + (D_{xR}(t_k) + D_{Rx}(t_k) + BQB^T)(t_{k+1} - t_k)]\bar{W}^T, \\ \bar{W} &\equiv W(t_{k+1}, t_k, \tilde{x}(t_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad D_{xx}(t_0) = D_{xx}^0, \quad t_{k+1} = t_k + h, \\ \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= \Phi(t, \tilde{x}(t)), \quad \tilde{x}(t_0) = \bar{x}_0. \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Данная форма при конечном значении шага дискретизации h приближенная и тем точнее, чем меньше шаг.

Вторую форму получим предельным переходом $\delta \rightarrow 0$, откуда следует дифференциальное уравнение для искомой матрицы ковариаций. Поскольку в этом уравнении используется решение детерминированной системы, для определения ковариаций нужна объединенная система

$$\begin{aligned}
\frac{dD_{xx}(t)}{dt} &= A(\tilde{x}(t))D_{xx}(t) + D_{xx}(t)A^T(\tilde{x}(t)) + \\
&+ B(t)Q(t)B^T(t) + D_{xR}(t) + D_{xR}^T(t), \\
\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= \Phi(t, \tilde{x}(t)), \\
t \in [t_0, t_f], \quad D_{xx}(t_0) &= D_{xx}^0, \quad \tilde{x}(t_0) = \bar{x}(t_0) \equiv \bar{x}^0, \\
A(\tilde{x}(t)) &= \left[\frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x} \right]_{x = \tilde{x}(t)}.
\end{aligned} \tag{3.3.29}$$

Уравнения (3.3.28) или (3.3.29) совместно с уравнениями (3.3.17) для математических ожиданий и являются окончательным результатом. Алгоритм (3.3.28) является приближенным, а (3.3.29) - принципиально точным, однако в таком виде их реализация невозможна ввиду неизвестности ковариационной матрицы D_{xR} (3.3.26). Напомним, что R - это вектор нелинейных членов тейлоровского разложения вектор-функции Φ правых частей системы (3.3.6). Прежде всего отметим, что форма (3.3.29) фактически известна. Она может быть легко получена из (3.3.6) выделением линейной части в виде $A(\tilde{x}(t))$ и дифференцирования выражения для D_{xx} в силу уравнений системы так, как делалось при получении в [43]. Однако получение функциональной формы (3.3.28) из (3.3.29) далеко не очевидно. Следует отметить преимущества уравнений (3.3.29) и, соответственно, (3.3.28), в сравнении с соответствующими уравнениями из [43]:

$$\begin{aligned}
\frac{dD_{xx}}{dt} &= AD_{xx} + D_{xx}A^T + BQB^T, \\
A &= \frac{\partial M[\Phi(t, x)]}{\partial m_x}, \quad m_x = M[x], \quad D_{xx}(t_0) = D_{xx}^0,
\end{aligned} \tag{3.3.30}$$

Сравнивая (3.3.29) с (3.3.30), видим, что в (3.3.30) матрица A рассчитывается значительно сложнее, в общем случае через многомерные интегралы.

Далее исследовано влияние D_{xR} на точность статистического моделирования и рассмотрены примеры применения методов (3.3.28), (3.3.29) в случае, когда матрицей D_{xR} можно пренебречь, и в случае, когда ее необходимо учитывать.

При дальнейшем анализе сосредоточимся на форме (3.3.29), поскольку численное интегрирование (3.3.28) и (3.3.29) при одинаковом шаге дает практически одинаковые результаты, а форма (3.3.29) легче сопоставима с методами ковариационного анализа (3.3.30).

3.3.3. Исследование и оценка ковариаций D_{xR}

В настоящем пункте исследовано влияние члена $D_{xR}(t) + D_{Rx}(t)$ на точность статистического анализа и предложен подход к его оцениванию для повышения точности статистических расчетов.

3.3.3.1. Простой пример с аналитическим решением

Прежде всего, приведем экспериментальное свидетельство правильности алгоритма (3.3.29) на примере одномерной системы, допускающей аналитическое вычисление математического ожидания и вычисление дисперсии через квадратуры. Система задана дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \quad t \in [0,1], \quad x(0) = x^0, \quad (3.3.31)$$

где x^0 - равномерно распределенная в интервале $[a,b]$ случайная величина.

Аналитическое решение (3.3.31) имеет вид

$$x(t, x^0) = \frac{x^0}{1 - x^0 \cdot t}, \quad (3.3.32)$$

а вероятностные характеристики (математическое ожидание и дисперсия) как функции времени определяются соответственно выражениями

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} \left[(a-b) \cdot t - \ln \left(\left| \frac{1-b \cdot t}{1-a \cdot t} \right| \right) \right], & t > 0, \\ \frac{b^2 - a^2}{2}, & t = 0, \end{cases} \quad (3.3.33)$$

$$D_{xx}(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b (x(t, v) - \bar{x}(t))^2 dv. \quad (3.3.34)$$

Для получения этих же характеристик с помощью (3.3.29) необходимо решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= \tilde{x}(t)^2, \\ \frac{dD_{xx}(t)}{dt} &= 4 \cdot \tilde{x}(t) \cdot D_{xx}(t) + 2 \cdot D_{xR}(t, \tilde{x}(t)), \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

где матрица D_{xR} может быть вычислена согласно определению (3.3.26) с использованием (3.3.32) и (3.3.33)

$$\begin{aligned}
D_{xR}(t) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (x(t, v) - \bar{x}(t)) \cdot (R(x(t, v) - \tilde{x}(t)) - \bar{R}(t)) dv = \\
&= \frac{1}{b-a} \int_a^b (x(t, v) - \bar{x}(t)) \cdot (x(t, v) - \tilde{x}(t))^2 dv.
\end{aligned} \tag{3.3.36}$$

При записи последнего выражения учтено, что $R(x - \tilde{x}) = (x - \tilde{x})^2$, а

$$M[(x - \bar{x})(R - \bar{R})] = M[(x - \bar{x})R].$$

Проверочные расчеты на компьютере по (3.3.34) и (3.3.35) при различных a и b показали, что соответствующие результаты совпадают с точностью до шести знаков после запятой. Так, при $a = -0,5$, $b = 0,7$ $D_{xx}(1) = 0,423409$ как при расчетах по (3.3.34), так и при расчетах по (3.3.35).

3.3.3.2. Пример статистического анализа усложненной системы без учета ковариаций D_{xR}

Предложенные алгоритмы (3.3.28), (3.3.29) имеют ту особенность, что в них выделена линеаризованная в окрестности детерминированного решения часть, которая отбирает значительную долю неизвестных ковариаций $D_{x\Phi}$ между вектором состояния и вектором Φ системы (3.3.6). Оставшаяся неизвестная часть D_{xR} между вектором состояния и суммой нелинейных членов многомерного тейлоровского разложения Φ в окрестности детерминированного решения (3.3.6), очевидно, дает в общем случае меньший вклад в D_{xx} , чем $D_{x\Phi}$. Например, для примера (3.3.31) $D_{x\Phi} = M[x^3]$ в начальный момент времени t_0 , когда закон распределения x равномерный в интервале $[a, b]$, $D_{x\Phi} = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^3 dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4} \right)$. При $a = 0$; $b = 0,9$ $D_{x\Phi} = 0,182$, а ковариация D_{xR} , вычисленная по выражению (3.3.35), равна нулю.

Если распределение состояния $x(t)$ близко к нормальному, можно получить аналитическое выражение для D_{xR} . Вычитая из (3.3.30) уравнение для ковариаций из (3.3.29), получаем:

$$D_{xR} = \left(\frac{\partial M[\Phi(t, x)]}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \Phi(t, \tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \right) D_{xx}. \tag{3.3.37}$$

В частном случае квадратических правых частей системы (3.3.6) можно получить более простое выражение. Так, для примера (3.3.31), где $\Phi(t, x) = x^2$, $M[x^2] = D_{xx} + \bar{x}^2$, получаем $D_{xR} = 2(\bar{x} - \tilde{x})$, т.е. удвоенную разность

математического ожидания и детерминированного решения. В силу общего свойства $M[x_i x_j] = D_{x_i x_j} + \bar{x}_i \bar{x}_j$ оказывается, что для любых квадратичных $\Phi(t, x) = b_0 + b_1^T x + R, R = x^T H x$ имеет место соотношение $\partial M[\Phi(t, x)] / \partial \bar{x} = \partial \Phi(t, \bar{x}) / \partial \bar{x}$, откуда следует, что:

$$D_{xR} = \left. \frac{\partial R(t, x)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}-\tilde{x}} = 2H(\bar{x} - \tilde{x}). \quad (3.3.38)$$

Напомним, что детерминированное решение $\bar{x}$ – это решение при $\xi = 0$ и $\tilde{x}(t_0) = \bar{x}(t_0)$. Как уже отмечалось выше, нередко исследуемые системы и условия их функционирования таковы, что их математические ожидания состояния и детерминированные решения весьма близки. Для таких систем ковариационная матрица D_{xR} , определяемая (3.3.38), близка к нулю в любой момент времени. При этом методическая погрешность алгоритмов (3.3.28), (3.3.29) соответственно приближается к нулю.

В подтверждение данной гипотезы приведем пример статистического моделирования разгона асинхронного двигателя с математической моделью (2.5.17), где влияние дополнительного члена $D_{xR}(t) + D_{Rx}(t)$ оказалось пренебрежимо малым.

Получим математическое ожидание и дисперсию угловой скорости ротора в предположениях, что момент сопротивления – стационарный случайный процесс с математическим ожиданием $M[M_c] = 4 \text{ Н} \cdot \text{м}$ и корреляционной функцией $K(\tau) = \sigma^2 \exp(-\lambda|\tau|)$, $\sigma = 1,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $\lambda = 20 \text{ с}^{-1}$, а частота питающего напряжения – случайная величина с математическим ожиданием $M[\omega] = 314 \text{ с}^{-1}$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma[\omega] = 2 \text{ с}^{-1}$. Указанные статистические характеристики определим двумя методами – предлагаемым по уравнениям (3.3.29) и методом Монте-Карло.

Формирующий фильтр для заданного случайного процесса получается факторизацией соответствующей спектральной плотности

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) d\tau = \frac{\sigma^2 \cdot 2\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}.$$

По известному выражению $S(\nu) = |W(j\nu)|^2 \cdot S_\xi(\nu)$, где $S_\xi(\nu) = 1$ – спектральная плотность преобразуемого белого шума, получаем

$$\frac{\sigma^2 \cdot 2\lambda}{\lambda^2 + \nu^2} = W(j\nu)W(-j\nu) = \frac{\sigma\sqrt{2\lambda}}{\lambda + j\nu} \cdot \frac{\sigma\sqrt{2\lambda}}{\lambda - j\nu},$$

откуда следует выражение для передаточной функции формирующего фильтра $W(s) = \frac{\sigma\sqrt{2\lambda}}{s + \lambda}$ и соответствующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d\omega}{dt} = -\lambda \cdot \omega + \sigma\sqrt{2\lambda} \cdot \xi(t).$$

Переобозначая переменные и вводя дополнительное дифференциальное уравнение для случайного параметра ω (x_7 в новых обозначениях), получим следующую модель:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \frac{p \cdot e}{J} \cdot (x_3 x_4 - x_2 x_5) - \frac{p}{J} \cdot (4 + x_6), \\ \frac{dx_2}{dt} &= U_m \cdot \cos(x_7 \cdot t) - a \cdot x_2 + b \cdot x_4, \\ \frac{dx_3}{dt} &= U_m \cdot \sin(x_7 \cdot t) - a \cdot x_3 + b \cdot x_5, \\ \frac{dx_4}{dt} &= -c \cdot x_4 + d \cdot x_2 - x_1 \cdot x_5, \\ \frac{dx_5}{dt} &= -c \cdot x_5 + d \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4, \\ \frac{dx_6}{dt} &= -\lambda \cdot x_6 + \sigma \sqrt{2\lambda} \cdot \xi(t), \\ \frac{dx_7}{dt} &= 0,\end{aligned}$$

$$t \in [0, t_f], \quad x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = x_5(0) = x_6(0) = 0,$$

$x_7(0)$ – нормально распределенная с параметрами $M[x_7] = 314$, $\sigma[x_7] = 2$ случайная величина, $\xi(t)$ – центрированный белый шум с единичной интенсивностью.

Для полученной модели входящие в уравнения (3.3.29) векторы и матрицы имеют вид

$$A(\tilde{x}(t)) = \begin{pmatrix} 0 & -g \cdot \tilde{x}_5 & g \cdot \tilde{x}_4 & g \cdot \tilde{x}_3 & -g \cdot \tilde{x}_2 & -\frac{p}{J} & 0 \\ 0 & -a & 0 & b & 0 & 0 & -U_m \cdot t \cdot \sin(\tilde{x}_7) \\ 0 & 0 & -a & 0 & b & 0 & U_m \cdot t \cdot \cos(\tilde{x}_7) \\ -\tilde{x}_5 & d & 0 & -c & -\tilde{x}_1 & 0 & 0 \\ \tilde{x}_4 & 0 & d & \tilde{x}_1 & -c & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t, \tilde{x}(t)) = \begin{pmatrix} \frac{p}{J}(M_e - 4) \\ U_m \cos(314 \cdot t) - a \cdot \tilde{x}_2 + b \cdot \tilde{x}_4 \\ U_m \sin(314 \cdot t) - a \cdot \tilde{x}_3 + b \cdot \tilde{x}_5 \\ -c \cdot \tilde{x}_4 + d \cdot \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_5 \\ -c \cdot \tilde{x}_5 + d \cdot \tilde{x}_3 - \tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \text{colon}(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \sigma\sqrt{2\lambda} \ 0), \quad \bar{x}^0 = \text{colon}(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 314),$$

$$D_{xx} = \{D_{ij}\}, \quad i, j = \overline{1,7}, \quad D_{ij}^0 = 0 \quad \forall i, j = \overline{1,7}, \quad ij \neq 77, \quad D_{77}^0 = 4, \quad Q(t) = 1, \quad g = \frac{p \cdot e}{J}.$$

Белый шум $\xi(t)$ при использовании метода Монте-Карло моделировался по методике [48] ступенчатым сигналом с шириной ступеньки, равной шагу численного интегрирования h и равномерно распределенной в интервале $[-\sqrt{3/h}, \sqrt{3/h}]$ амплитудой. Моделирование методом Монте-Карло производилось по 2000 реализациям. Шаг численного интегрирования полагался равным 0,0001с. Для определения математических ожиданий использовался усложненный способ (3.3.17), для которого соответствующие уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{p \cdot e}{J} \cdot (D_{x_3, x_4} + x_3 x_4 - D_{x_2, x_5} - x_2 x_5) - \frac{p}{J} \cdot 4, \\ \frac{dx_2}{dt} &= U_m \cdot \cos(314 \cdot t) - a \cdot x_2 + b \cdot x_4, \\ \frac{dx_3}{dt} &= U_m \cdot \sin(314 \cdot t) - a \cdot x_3 + b \cdot x_5, \\ \frac{dx_4}{dt} &= -c \cdot x_4 + d \cdot x_2 - D_{x_1, x_5} - x_1 \cdot x_5, \\ \frac{dx_5}{dt} &= -c \cdot x_5 + d \cdot x_3 + D_{x_1, x_4} + x_1 \cdot x_4, \\ t &\in [0, t_f], \quad x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = x_5(0) = 0, \end{aligned}$$

где D с индексами - соответствующие элементы ковариационной матрицы.

Результаты моделирования представлены на рисунке 3.1.

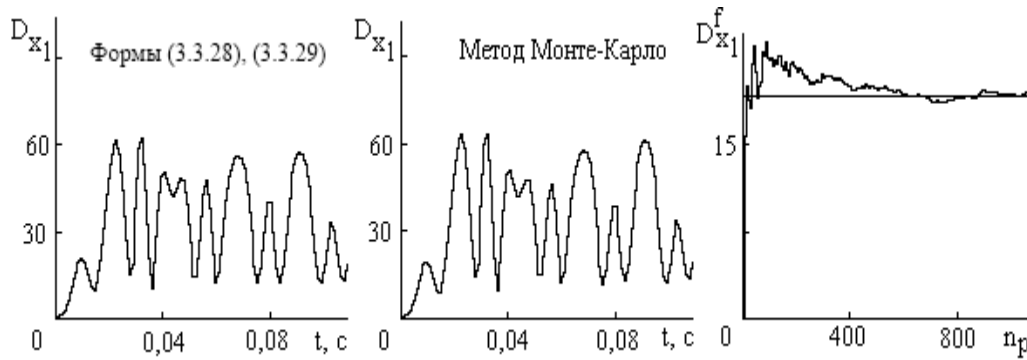


Рисунок 3.1 – Зависимости оценок дисперсии от времени и числа реализаций

На первом и втором графиках рисунка 3.1 показаны зависимости дисперсии выходной координаты x_1 (угловой скорости ротора двигателя) как функции времени, полученные формами (3.3.28), (3.3.29) предлагаемого метода и методом Монте-Карло соответственно. На третьем графике представлены значения дисперсии этой же выходной координаты в конечный момент

$t_f = 0,1c$. При этом оценка дисперсии по методу (3.3.28), (3.3.29) изображена в виде горизонтальной прямой, а оценки дисперсии по методу Монте-Карло – в виде зависимости от числа реализаций. Как видно из приведенных графиков, достигнутая точность статистического моделирования предлагаемыми методами весьма высока. Разница между оценками, полученными методом (3.3.28), (3.3.29) и Монте-Карло, не превышает одного процента. При этом оценки дисперсии в методе Монте-Карло устанавливаются при количестве реализаций, большем 1300. Соотношение между временами статистического моделирования составляет величину около 100 в пользу предлагаемого метода. Как оказалось, в данном случае упрощенный алгоритм определения математических ожиданий дает практически те же результаты, отличаясь от результатов усложненного алгоритма на сотые доли процента как для математических ожиданий, так и для дисперсий.

В заключение отметим, что метод статистической линеаризации (3.3.30) здесь невыгоден ввиду значительно более сложных правых частей соответствующей системы дифференциальных уравнений для матрицы ковариаций.

3.3.3.3. Оценивание ковариации D_{xR}

В тех случаях, когда неучет матрицы ковариаций D_{xR} приводит к значительным погрешностям статистического анализа, возникает задача ее оценивания.

Подход, описанный ниже, основан на использовании приближенных решений нелинейных дифференциальных уравнений (2.1.23), (2.1.24). Проиллюстрируем этот подход на примере (3.3.31). Введем переменную $x^L = x - \tilde{x}$, представляющую собой отклонение исходной переменной x от детерминированного решения $\tilde{x}$. Тогда для x^L имеем дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dx^L}{dt} &= 2 \cdot \tilde{x} \cdot x^L + (x^L)^2, \\ \frac{d\tilde{x}}{dt} &= \tilde{x}^2, \quad t \in [0,1], \quad x^L(0) = x^0 - \bar{x}^0, \quad \tilde{x}(0) = \bar{x}^0 = \frac{a+b}{2}. \end{aligned} \quad (3.3.38)$$

Составим дифференциальные уравнения для коэффициентов тейлоровского разложения по времени остаточного члена $R_0 = (x^L(t))^2$.

$$\begin{aligned}
R_0(\vartheta - t) &= R_0(t) + R_1(t)(\vartheta - t) + R_2(t)(\vartheta - t)^2 + \dots \\
&+ R_k(t)(\vartheta - t)^k + \dots, \quad R_1(t) = \frac{dR_0(t)}{dt} = \frac{\partial R_0}{\partial x^L} \cdot \frac{dx^L}{dt}, \\
R_2(t) &= \frac{1}{2} \frac{d^2 R_0(t)}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dR_0}{dt} \right) = \frac{1}{2} \frac{dR_1}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial R_1}{\partial x^L} \cdot \frac{dx^L}{dt}, \\
R_3(t) &= \frac{1}{3!} \frac{d^3 R_0(t)}{dt^3} = \frac{1}{3!} \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2 R_0}{dt^2} \right) = \frac{1}{3!} \frac{d}{dt} (2R_2) = \frac{1}{3} \frac{\partial R_2}{\partial x^L} \cdot \frac{dx^L}{dt}, \\
R_4(t) &= \frac{1}{4!} \frac{d^4 R_0(t)}{dt^4} = \frac{1}{4!} \frac{d}{dt} \left(\frac{d^3 R_0}{dt^3} \right) = \frac{1}{4!} \frac{d}{dt} (3! R_3) = \frac{1}{4} \frac{\partial R_3}{\partial x^L} \cdot \frac{dx^L}{dt}, \\
R_k(t) &= \frac{1}{k!} \frac{d^k R_0(t)}{dt^k} = \frac{1}{k} \frac{dR_{k-1}}{dt} = \frac{1}{k} \frac{\partial R_{k-1}}{\partial x^L} \cdot \frac{dx^L}{dt}
\end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{x}}{dt} &= \tilde{x}^2, & \frac{dR_0}{dt} &= R_1, \\
\frac{dx^L}{dt} &= 2 \cdot \tilde{x} \cdot x^L + R_0, & \frac{dR_1}{dt} &= 2 \cdot R_2, \\
& & \frac{dR_2}{dt} &= 3 \cdot R_3 \dots,
\end{aligned} \tag{3.3.39}$$

где выраженные через $x^L(t)$ и $\tilde{x}(t)$ коэффициенты определяются как

$$R_0(x^L, \tilde{x}) = (x^L)^2, \tag{3.3.40}$$

$$R_1(x^L, \tilde{x}) = \frac{\partial R_0}{\partial x^L} \cdot \frac{dx^L}{dt} = 2x^L \left(2\tilde{x}x^L + (x^L)^2 \right) = 4\tilde{x}(x^L)^2 + 2(x^L)^3, \tag{3.3.41}$$

$$\begin{aligned}
R_2(x^L, \tilde{x}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R_1}{\partial x^L} \cdot \frac{dx^L}{dt} + \frac{\partial R_1}{\partial \tilde{x}} \cdot \frac{d\tilde{x}}{dt} \right) = \frac{1}{2} (8\tilde{x}x^L + 6(x^L)^2) (2\tilde{x}x^L + (x^L)^2) + \\
&+ 2(x^L \tilde{x}),
\end{aligned} \tag{3.3.42}$$

выражение для $R_3 = \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial R_2}{\partial x^L} \cdot \frac{dx^L}{dt} + \frac{\partial R_2}{\partial \tilde{x}} \cdot \frac{d\tilde{x}}{dt} \right)$ в развернутом виде не приводим.

Начальные условия $\tilde{x}(0), x^L(0)$ те же, что в (3.3.38), $R_j(0)$ определяются через $\tilde{x}(0), x^L(0)$ по (3.3.40) – (3.3.42).

Предположим, что $R_0(t)$ – функция, у которой коэффициенты тейлоровского разложения достаточно быстро приближаются к нулю с возрастанием их номера. Тогда вместо системы уравнений бесконечного порядка оставляем конечную систему, в последнем уравнении которой правую часть полагаем нулевой. Для нашего примера ограничимся системой (3.3.39), где при дальнейших исследованиях будем полагать нулевыми последовательно R_0, R_1, R_2, R_3 . Модель (3.3.39) при обнуленной правой части последнего

уравнения является линейной, если в вектор состояния не включать $\tilde{x}$. Это можно сделать, поскольку $\tilde{x}$ – детерминированное решение, являющееся для задачи статистического анализа известной функцией времени. Для перечисленных случаев линейной системы (3.3.39) составим уравнения Дункана (3.3.2) с матрицами A

$$A_{R_1=0} = \begin{pmatrix} 2\tilde{x} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{R_2=0} = \begin{pmatrix} 2\tilde{x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{R_3=0} = \begin{pmatrix} 2\tilde{x} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученную в результате решения (3.3.2) ковариацию D_{xR_0} и будем считать оценкой искомой ковариации D_{xR} .

С учетом того, что $x^L - \bar{x}^L = x - \tilde{x} - \bar{x} + \tilde{x} = x - \tilde{x} - \bar{x} + \tilde{x} = x - \bar{x}$, все ковариации для x^L равны соответствующим ковариациям для x , поэтому в уравнениях Дункана (3.3.2), полученных по (3.3.39), в индексах ковариаций вместо x^L записываем x . В итоге для случая $R_3 = 0$ получаем систему:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= \tilde{x}^2, & \frac{dD_{R_0R_1}}{dt} &= D_{R_1R_1} + 2D_{R_0R_2}, \\ \frac{dD_{xx}}{dt} &= 4\tilde{x}D_{xx} + 2D_{xR_0}, & \frac{dD_{R_0R_2}}{dt} &= D_{R_1R_2}, \\ \frac{dD_{xR_0}}{dt} &= 2\tilde{x}D_{xR_0} + D_{R_0R_0} + D_{xR_1}, & \frac{dD_{R_1R_1}}{dt} &= 4D_{R_1R_2}, \\ \frac{dD_{xR_1}}{dt} &= 2\tilde{x}D_{xR_1} + D_{R_0R_1} + 2D_{xR_2}, & \frac{dD_{R_1R_2}}{dt} &= 2D_{R_2R_2}, \\ \frac{dD_{xR_2}}{dt} &= 2\tilde{x}D_{xR_2} + D_{R_0R_2}, & \frac{dD_{R_2R_2}}{dt} &= 0. \\ \frac{dD_{R_0R_0}}{dt} &= 2D_{R_0R_1}, \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

Начальные условия для $\tilde{x}$ и D_{xx} определяются, согласно постановке задачи, как математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной случайной величины, т.е. $\tilde{x}(0) = (a+b)/2$, $D_{xx}(0) = (b-a)^2/12$. Остальные начальные условия определяем по теоретическим формулам для равномерного закона распределения. Так, ковариация $D_{xR_0}(0)$ с учетом (3.3.26), (3.3.40) определится как

$$\begin{aligned}
D_{xR_0} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (v - \bar{x}(0)) \cdot R_0(x^L(0)) dv = \\
&= \frac{1}{b-a} \int_a^b (v - \bar{x}(0)) \cdot R_0(v - \tilde{x}(0)) dv = \frac{1}{b-a} \int_a^b (v - \bar{x}^0) \cdot R_0(v - \bar{x}^0) dv = \\
&= \frac{1}{b-a} \int_a^b (v - \bar{x}^0)^3 dv.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом вычисляются остальные начальные условия.

$$\begin{aligned}
D_{xR_1}(0) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (v - \bar{x}^0) \cdot R_1(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) dv, \\
D_{xR_2}(0) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (v - \bar{x}^0) \cdot R_2(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) dv, \\
D_{R_0R_0}(0) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (R_0(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) - \bar{R}_0(0))^2 dv, \\
D_{R_0R_1}(0) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (R_0(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) - \bar{R}_0(0)) \cdot R_1(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) dv, \\
D_{R_0R_2}(0) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (R_0(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) - \bar{R}_0(0)) \cdot R_2(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) dv, \\
D_{R_1R_1}(0) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (R_1(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) - \bar{R}_1(0))^2 dv, \\
D_{R_1R_2}(0) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (R_1(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) - \bar{R}_1(0)) \cdot R_2(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) dv, \\
D_{R_2R_2}(0) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (R_2(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) - \bar{R}_2(0))^2 dv, \\
\bar{R}_j(0) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b R_j(v - \bar{x}^0, \bar{x}^0) dv, \quad j = 0, 1, 2.
\end{aligned}$$

Наряду с алгоритмом (3.3.43), получим для данного примера и уравнения метода статистической линеаризации, следующие из общего алгоритма (3.3.30). С учетом $Q = 0$ и $M[\partial\Phi(t_1, x)/\partial x] = M[x^2] = D_{xx} + \bar{x}^2$ получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{dD_{xx}}{dt} &= 2[D_{xx} + \tilde{x}^2] \cdot D_{xx}, \\
\frac{d\tilde{x}}{dt} &= \tilde{x}^2, \quad t \in [t_0, t_f], \quad D_{xx}(t_0) = D_{xx}^0, \quad \tilde{x}(t_0) = \bar{x}_0.
\end{aligned} \tag{3.3.44}$$

В (3.3.44) математическое ожидание $\bar{x}$ приближенно рассчитывается по детерминированной системе.

Напомним, что алгоритм (3.3.30) и, соответственно, (3.3.44), получен в предположении нормальности распределения x , а в рассматриваемом примере распределение существенно отличается от нормального.

Результаты расчетов по уравнениям (3.3.43) для четырех упомянутых выше случаев, а также по уравнениям (3.3.44) при различных a и b приведены в таблице 3.1 и на рисунке 3.2. В таблице 3.1 приведены погрешности вычисления дисперсии (в процентах), вычисленные по формуле $\varepsilon = (\tilde{D} - D)/D \cdot 100\%$, где $\tilde{D}$ и D – приближенное и точное значения дисперсии, вычисленные соответственно по уравнениям (3.3.43) – (3.3.44) и по выражениям (3.3.31) – (3.3.33).

Таблица 3.1 – Ошибки определения дисперсии $D_{xx}(1)$

a	b	D	ε для (3.3.44) %	ε для (3.3.43) %			
				$R_0 = 0$	$R_1 = 0$	$R_2 = 0$	$R_3 = 0$
0	0,9	3,454	95,0	78,6	78,2	74,6	69,6
-0,5	0,5	0,126	20,8	34,1	29,7	8,1	6,0
0	0,5	0,078	67,04	15,8	15,0	9,5	5,3
-0,5	0	0,009	165,9	5,8	3,3	4,7	3,0
-0,3	0,3	0,034	7,3	12,9	10,8	1,1	0,7

На рисунке 3.2 приведены зависимости точного $R_0(t)$, вычисленного по выражениям (3.3.32), (3.3.33), (3.3.36) (кривая 1) и оценок $\tilde{R}_0(t)$, полученных путем интегрирования уравнений (3.3.43) для случаев $R_1 = 0$ (кривая 4), $R_2 = 0$ (кривая 3), $R_3 = 0$ (кривая 2) при $a = 0$, $b = 0,5$.

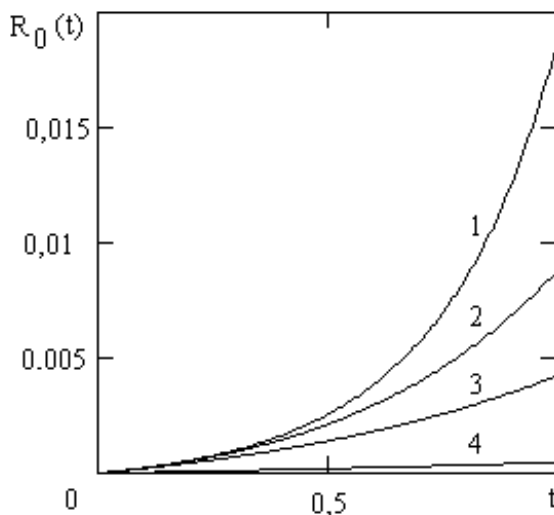


Рисунок 3.2 – Зависимости остаточного члена и его оценок от времени

Приведенные результаты свидетельствуют в пользу того, что учет большего количества тейлоровских членов разложения приводит к уменьшению погрешности. Другой вывод, следующий из приведенных результатов, также вполне ожидаемый: увеличение дисперсии начальных условий приводит к увеличению погрешностей вычисления дисперсии. При этом для сохранения точности необходимо увеличивать количество членов разложения остаточного члена, что влечет к существенному возрастанию порядка системы дифференциальных уравнений обобщенного метода Дункана. Данные из четвертой колонки для метода статистической линеаризации свидетельствуют о том, что данный метод дал относительно удовлетворительные результаты только для случаев симметричных относительно нуля интервалов $[a, b]$. При этом точность варианта (3.3.44) соответствует учету двух-трех тейлоровских членов разложения в (3.3.43). Для несимметричных же интервалов метод статистической линеаризации дал очень большие погрешности. Поскольку (3.3.44) соответствует алгоритму (3.3.29), в котором D_{xR} оценивается методом статистической линеаризации, из приведенных результатов следует вывод о том, что оценивание D_{xR} предлагаемым «цепочечным» методом существенно точнее в сравнении с оцениванием методом статистической линеаризации (хотя и сложнее). Причиной плохой точности последнего являются существенные отклонения условий функционирования системы от тех, для которых метод статистической линеаризации предназначен, а именно: распределение x сильно отличается от нормального, а математическое ожидание – от детерминированного решения. Отметим, что предложенный подход к оценке остаточного члена может применяться и для многомерных систем.

3.4. Идентификация переменных и моделей конечного состояния

3.4.1. Постановка задачи

Метод конечного состояния основан на использовании моделей конечного состояния (1.1.8), элементами которых являются переменные конечного состояния (ПКС) $\bar{x}(t_f, t, x(t))$ и нелинейные переходные матрицы (ПМ) $W(t_f, t, x(t))$, рассчитываемые как функции первого аргумента по системе

дифференциальных уравнений (1.1.3), (1.1.5). С учетом соотношения между ПКС и ПМ (1.1.9) можно утверждать, что, в отличие от традиционного взгляда, альтернативным дифференциальному описанию являются ПКС, а не ПМ. Таким образом, для применения метода конечного состояния при неизвестной математической модели объекта управления, требуется определять ПКС как функции двух временных и пространственных аргументов общей размерностью $2 + n + p$, где n – размерность вектора x , p – размерность вектора параметров (в случае наличия идентифицируемых параметров, а также возможности измерения и назначения им заданных значений в активных экспериментах).

Исходя из сказанного выше, при структурной идентификации $\bar{x}(t_f, t, x(t))$ будем рассматривать данный объект как некоторую функцию многих переменных, принадлежащую заданному классу. Тем самым задача идентификации сводится к параметрической, где в рамках принятой структуры определяется такое сочетание параметров, при котором минимизируется некоторая норма отклонений отклика модели от отклика объекта. При этом можно выбирать как традиционные средства приближения функций (например, степенные функции, в частности, многомерные полиномы), так и современные (например, искусственные нейронные сети). Многомерные полиномы являются часто используемым видом структуры в регрессионных моделях [49], однако при этом количество идентифицируемых коэффициентов полиномов лавинообразно возрастает вместе с ростом степени полинома. Поэтому на практике полиномы выше второго порядка используются редко. Задача идентификации облегчается, если структура модели известна. Тогда мы сразу же имеем задачу параметрической идентификации.

Идентификацию ПКС можно формулировать и как структурную, и как параметрическую.

При структурной идентификации ПКС следует иметь в виду, что, как правило, размерность таких задач достаточно велика (по меньшей мере, $2 + n$, где n – порядок системы – для двух временных t_f, t и n пространственных параметров $x(t)$). Например, для системы второго порядка имеем четырехмерную задачу. Если решать данную задачу в классе четырехмерных полиномов второй степени, то количество коэффициентов равно 15, а для четырехмерных полиномов третьей степени – 55. В настоящее время для идентификации часто используют искусственные нейронные сети (ИНС), что вызвано, прежде всего, их гибкостью и наличием доступных программных средств нейросетевой идентификации в среде Matlab (Neural Network Toolbox). Гибкость ИНС обусловлена широкими возможностями по выбору их топологии (вида структуры и количества слоев) и элементов (функций активации). При этом практический опыт выявил типовые виды топологии и

элементы, показавшие свою эффективность во многих задачах идентификации. Одной из таких сетей является двухслойная с прямыми связями сеть со скрытым слоем, имеющая функциональную зависимость между входами и выходом вида [19]

$$y_i(t, y^0, p) \cong \Psi^2 \left(b_i^2 + \sum_{j=1}^{NI} IW_{ij}^2 \cdot u_j + \sum_{s=1}^{NL} LW_{is} \cdot \Psi^1 \left(b_{is}^1 + \sum_{j=1}^{NI} IW_{isj}^2 \cdot u_j \right) \right), \quad (3.4.1)$$

использующая в качестве функций активации Ψ^1, Ψ^2 соответственно сигмоидную (или тангенсоидную) и линейную функции. Варьируя количество нейронов в скрытом слое, можно во многих случаях найти подходящую по точности аппроксимацию при минимальном количестве настраиваемых коэффициентов и количестве сеансов (эпох по терминологии Neural Network Toolbox) при ее настройке.

Для параметрической идентификации необходимо, чтобы была известна аналитическая зависимость между значениями ПКС и ее аргументами – временами t_f, t и состоянием $x(t)$. Для определения указанной зависимости можно воспользоваться аналитическими решениями для ПКС на основе (2.1.24). При этом полученные аналитические решения будут зависеть не только от времен и состояния, но и от матрицы параметров $A = \{a_{ij}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, \dots, n_c$, где n_c – максимальное количество параметров в аппроксимациях каждой из правых частей дифференциальных уравнений модели объекта управления. Если указанные параметры известны, то задача идентификации ПКС может считаться решенной. Если же параметры неизвестны, то задача идентификации ПКС сведется к задаче параметрической идентификации дифференциальной модели объекта. В рамках данного подхода можно поставить и задачу структурной идентификации объекта управления, которая имеет место в случае, когда правые части дифференциальной модели неизвестны и их задают в виде некоторых функциональных зависимостей из определенного класса (например, многомерных полиномов). Тогда на втором этапе решается задача параметрической идентификации коэффициентов полиномов.

Таким образом, можно сформулировать следующие задачи идентификации ПКС:

- 1) параметрическая идентификация прямого типа дифференциальных уравнений объекта управления на основе точных или приближенных решений систем дифференциальных уравнений для ПКС;
- 2) структурная идентификация дифференциальных уравнений объекта управления на основе точных или приближенных решений систем дифференциальных уравнений для ПКС в предположении, что порядок системы известен; данный тип идентификации можно отнести к смешан-

- ному, аппроксимационно-прямому типу, поскольку для ПКС используется полученная по дифференциальным уравнениям прямая модель, а правые части указанных уравнений представлены аппроксимационными объектами (о «прямых» и «аппроксимационных» методах см. [50]);
- 3) структурная идентификация аппроксимационного типа на основе двухслойных с прямыми связями искусственных нейронных сетей со скрытым слоем.

3.4.2. Идентификация дифференциальных уравнений объекта управления на основе аналитических представлений переменных конечного состояния и нелинейной переходной матрицы

Выражения (2.1.22), (2.1.24) могут служить основой для параметрической идентификации элементов модели конечного состояния, входящих в алгоритм МКС-управления (2.1.5) – $\bar{x}$ и W . Если предположить, что функции правых частей однородной части системы (1.1.1) $\Phi_i(t, x(t)) \equiv R_{i0}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ могут быть представлены некоторым классом функций, зависящих от постоянных параметров $A = \{a_{ij}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, \dots, n_c$, где n_c – максимальное количество параметров в аппроксимациях каждой из правых частей, то можно ставить задачу определения матрицы A такой, чтобы норма разности между откликами исходной и аппроксимированной систем в пространстве переменных конечного состояния, полученными в результате некоторого ограниченного объема экспериментов над объектом, была минимальной.

В рамках поставленной задачи необходимо: во-первых, указать способ определения отклика в пространстве переменных конечного состояния; во-вторых – конкретизировать (2.1.24) с учетом (2.1.22) и принятых аппроксимаций. Кроме того, при решении конкретной задачи идентификации возникает в той или иной степени задача планирования эксперимента.

Для определения отклика $\bar{x}(t_f, t, x(t))$, согласно (1.1.3), требуется в некоторый момент t задать или зарегистрировать текущее состояние $x(t)$ и, начиная с момента t , до конечного момента t_f произвести «прогонку» системы при отключенном управлении. Конечное состояние неуправляемого движения системы и является искомым $\bar{x}(t_f, t, x(t))$. Таким образом, в предлагаемом способе идентификации не требуется измерение или вычисление производных фазовых координат, что, как известно, производится со значительными ошибками.

При применении рекуррентной формулы (2.1.22) следует иметь в виду, что R_{i0}, R_{ik} , являются функциями переменных конечного состояния $\bar{x}(\mathcal{G}, t, x(t))$, а $R_{i0}(t) = R_{i0}(\bar{x}(\mathcal{G}, t, x(t)))|_{\mathcal{G}=t}$, $R_{ik}(t) = R_{ik}(\bar{x}(\mathcal{G}, t, x(t)))|_{\mathcal{G}=t}$. Это необходимо учитывать при последовательном дифференцировании в формуле (2.1.22). Следует учитывать также и то, что сложность выражений вида (2.1.22) лавинообразно возрастает с ростом числа членов тейлоровских разложений k_i правых частей дифференциальных уравнений из (1.1.3). Заменяв R_{i0} в (2.1.22) соответствующими аппроксимациями и произведя аналитические вычисления по (2.1.22) при некоторых заданных k_i , получим в итоге в общем случае нелинейное относительно A выражение. По этому выражению, произведя над объектом $N \geq n \cdot n_c$ экспериментов (так как в каждом из n уравнений однородной системы для переменных конечного состояния предполагается n_c неизвестных параметров), и зарегистрировав в каждом из них $x(t)$ и $\bar{x}(t_f, t, x(t))$, можно составить систему нелинейных алгебраических уравнений. Решив полученную систему каким-либо численным методом, минимизирующим невязки между левой и правой частями указанных уравнений, можно определить искомую матрицу A .

Идентификацию можно проводить по переменным конечного состояния, т.е. по первым n уравнениям (2.1.24), когда в качестве отклика регистрируются переменные конечного состояния. В этих n уравнениях содержатся все необходимые для определения коэффициенты. Таким образом, набрав достаточное количество опытов и решив систему нелинейных уравнений, мы можем определить коэффициенты модели.

С другой стороны, есть возможность определения коэффициентов модели по уравнениям для переходной матрицы. Пользуясь следующим из формулы Алексеева (1.1.4) соотношением:

$$(W(\mathcal{G}, t_0, x(t_0))B(t_0))_j = x^{\delta_j}(\mathcal{G}) - \bar{x}(\mathcal{G}, t_0, x(t_0)), \quad (3.4.2)$$

где x^{δ_j} – отклик объекта на управление в виде δ -функции, приложенное на j -м входе, мы можем экспериментально определить j -й столбец $(WB)_j$ как разность откликов в момент $\mathcal{G}$ на импульсное воздействие (практически – конечной длительности) и при неуправляемом движении. Тогда коэффициенты модели получаются на основании уравнений (2.1.24), где y_i в данном случае представляют элементы столбца W при условии, что R_{ik} построены на основе правых частей уравнений для переходной матрицы. Сформировав таким образом все элементы приближенного аналитического представления W и умножив полученную матрицу справа на матрицу $B(t)$, получим левые части системы алгебраических уравнений (4.1), зависящие от начальных

условий и матрицы параметров A . Правые же части представляют собой описанные выше разности откликов. Этот способ сложнее предыдущего ввиду того, что для формирования n нелинейных уравнений необходимо произвести два эксперимента над объектом – при импульсном и нулевом управляющем воздействиях на j -м входе при некоторых начальных условиях. Тем не менее, этот способ нельзя отбрасывать, так как может оказаться, что здесь потребуется меньше уравнений по той причине, что каждое из уравнений содержит больше информации о динамических свойствах системы.

Наконец, коэффициенты можно определять смешанным способом, используя в различных сочетаниях уравнения для переменных конечного состояния и для столбцов переходной матрицы.

Отметим еще одно обстоятельство, влияющее на процесс формирования уравнений по выражению (2.1.24) и, соответственно, на методики планирования экспериментов. Первая методика основана на такой организации множества экспериментов, когда для каждого из них задаются соответствующие значения второго аргумента t и начальные условия $x(t)$, а первый аргумент фиксирован в виде конечного момента t_f . В этот конечный момент фиксируется $\bar{x}(t_f, t, x(t))$ как конечное состояние неуправляемого на интервале от момента t до конечного момента t_f объекта. Вторая методика основана на фиксированном значении второго аргумента t и соответствующим каждому эксперименту множеству значений первого аргумента $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n_c}\}$, $\vartheta_1 > t$, $\vartheta_{n_c} < t_f$. При этом регистрируются отклики $\bar{x}(\vartheta_1, t, x(t)), \bar{x}(\vartheta_2, t, x(t)), \dots, \bar{x}(\vartheta_{n_c}, t, x(t))$ как промежуточные состояния неуправляемого на интервале от момента t до конечного момента t_f объекта. Достоинством первого подхода является то, что здесь при активных экспериментах подходящим назначением $x(t)$ можно добиться хорошей обусловленности гессиана при решении нелинейной системы для идентифицируемых параметров. Достоинством второго подхода является меньшее количество экспериментов для получения заданного количества уравнений вида (2.1.24). Результаты исследований указанных методик, называемых далее «методика 1» и «методика 2» соответственно, рассмотрены в примере идентификации электродвигателя постоянного тока с последовательным возбуждением из четвертой главы.

3.4.3. Идентификация модели конечного состояния объекта управления на основе искусственных нейронных сетей

Для решения задачи 3, сформулированной в пункте 3.4.1, используем двухслойную с прямыми связями искусственную нейронную сеть с одним нейроном выходного слоя (3.4.1). В представлении (3.4.1) использована система обозначений для весовых коэффициентов Neural Network Toolbox пакета Matlab, где символами b с индексами (от bias) обозначены постоянные смещения, IW с индексами – веса от входных воздействий (от Input Weight), LW с индексами (от Layer Weight) – веса связей между нейронами скрытого и выходного слоев (сетями со скрытым слоем называются такие, в которых входное воздействие u подается как на входной, так и на выходной слой). Символами NI , NL обозначены соответственно число входов и число нейронов скрытого слоя. Верхние индексы обозначают номер слоя, индекс i обозначает номер координаты, индекс j – номер входа, а индекс s – номер нейрона скрытого слоя. Левая часть (3.4.1) обозначает приближенное значение координаты y_i .

Применительно к задаче реализации ускоренного метода конечного состояния на основе нейросетевой аппроксимации, объединенный вектор y состоит из вектора переменных конечного состояния (ПКС) $\bar{x}(t_f, t, x(t))$ и следующих один за другим столбцов переходной матрицы $W(t_f, t, x(t))$. Вектор входов u , в зависимости от конкретного случая, может включать текущее время t , конечное время t_f (для стационарных систем достаточно разности $t_f - t$), состояние в текущий момент $x(t)$, какие-либо параметры системы.

Пример, иллюстрирующий идентификацию электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением, приведен в четвертой главе.

3.5. Сравнительный анализ метода конечного состояния и линеаризационного по входу/выходу метода

В последнее время достаточно большую известность приобрел линеаризационный по входу/выходу (linearization input/output design method) метод управления (ЛМ) нелинейными системами с аддитивно входящим управлением, предназначенный для решения задачи стабилизации. Основы метода

изложены в [29], его приложения и обобщения – в [24], [54] и др. Особенно-стями метода является широкая область применения, относительная простота подготовительной работы. Немаловажно то, что управления при этом получаются в виде алгебраических выражений, что важно для практической реализации.

В настоящем подразделе производится сравнение метода конечного состояния (МКС) и ЛМ, так как эти методы имеют ряд общих идей, черт и свойств, позволяющие утверждать об их двойственной природе.

Поскольку нам не удалось обнаружить общедоступных русскоязычных публикаций, касающихся основ линеаризационного метода, изложим его вывод, опирающийся на работу [24], где линеаризационный метод обобщен на нелинейные системы с запаздываниями и скалярным управлением. Указанный вывод необходим также и для установления связи двух методов. При этом, в отличие от [24], будем рассматривать случай векторного управления.

Вначале рассмотрим линеаризационный метод. Постановка задачи для применения этого метода имеет вид критерия стабилизации:

$$J = J(x(t)) \rightarrow J^* \quad (3.5.1)$$

с дифференциальными ограничениями:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \Phi(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t), \quad (3.5.2)$$

$$t \in [t_0, \infty), \quad x(t_0) = x^0, \quad \dim x = (n \times 1), \quad \dim u = (r \times 1)$$

Для получения ЛМ-управления зададимся желаемым экспоненциальным поведением критериальной функции времени $J(t) \equiv J(x(t))$ в виде дифференциального уравнения, решением которого является экспонента, стремящаяся к значению J^* с постоянной времени T :

$$\frac{dJ(t)}{dt} = \frac{J^* - J(t)}{T}. \quad (3.5.3)$$

Вычислим производную критериальной функции в силу уравнений (3.5.2):

$$\frac{dJ(t)}{dt} = \frac{\partial J(x)}{\partial x} \cdot \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial J(x)}{\partial x} \cdot (\Phi(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t)). \quad (3.5.4)$$

Приравняем правые части (3.5.3) и (3.5.4) и выразим управление с помощью псевдообращения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(x)}{\partial x} \cdot (\Phi(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t)) &= \frac{J^* - J(t)}{T}, \\
\frac{\partial J(x)}{\partial x} B(t, x(t))u(t) &= -\frac{\partial J(x)}{\partial x} \Phi(t, x(t)) + \frac{J^* - J(t)}{T}, \\
u(t) &= G_1^+ \left(-\frac{\partial J(x)}{\partial x} \Phi(t, x(t)) + \frac{J^* - J(t)}{T} \right), \\
G_1^+ &= G_1^T (G_1 G_1^T)^{-1}, \quad G_1 = \frac{\partial J(x)}{\partial x} B(t, x(t)).
\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

В частном случае, когда управление скалярное, G_1 является скаляром, а псевдообратная матрица равна $G_1^+ = 1 / \left(\frac{\partial J(x)}{\partial x} B(t, x(t)) \right)$. Заметим, что ЛМ в [24] получен именно для скалярного управления.

Управление (3.5.5) существует, если матрица G_1 ненулевая. Оказывается, что во многих случаях $G_1 = 0$ тождественно. Например, для системы второго порядка с первой управляемой координатой и скалярным управлением, приложенным ко второму входу с коэффициентом b_2 , $G_1 = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix} \equiv 0$. Кроме того, могут быть особенности локального характера, зависящие от значений вектора $x(t)$. Локальные особенности порождают разрывы управления, которые на практике могут преодолеваются наложением амплитудных ограничений на управление. Что же касается особенности тождественного характера, то для ее преодоления А. Исидори предложил следующее преобразование. Если $G_1 \equiv 0$, вместо уравнения (3.5.3) для критериальной функции используем уравнение:

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = -\frac{1}{T} z_1(t) + z_2, \quad z_1 = J(t) - J^*. \tag{3.5.6}$$

Выразим из (3.5.6) z_2 , которое с учетом (3.5.2) и $G_1 \equiv 0$ равно:

$$\begin{aligned}
z_2 &= \frac{dz_1}{dt} + \frac{1}{T} z_1 = \frac{dJ(x(t))}{dt} + \frac{1}{T} z_1 = \frac{\partial J}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{1}{T} z_1 = \frac{\partial J}{\partial x} (\Phi(t, x) + B(t, x)u) + \frac{1}{T} z_1 = \\
&= \frac{\partial J}{\partial x} \Phi(t, x) + G_1 u + \frac{1}{T} z_1 = \frac{\partial J}{\partial x} \Phi(t, x) + \frac{1}{T} z_1.
\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

Над z_2 вновь произведем те же действия, что и над J при получении (3.5.4) и (3.5.5), имея в виду, что теперь z_2 зависит не только от x , но и от z_1 :

$$\begin{aligned}
\frac{dz_2}{dt} &= \frac{\partial z_2}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z_2}{\partial z_1} \cdot \frac{dz_1}{dt} = \frac{\partial z_2}{\partial x} (\Phi(t, x) + B(t, x)u) + \frac{1}{T} \left(-\frac{1}{T} z_1 + z_2 \right), \\
\frac{\partial z_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \Phi(t, x) + \frac{1}{T} z_1 \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \Phi(t, x) \right).
\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Задавая для желаемого z_2 дифференциальное уравнение

$$\frac{dz_2}{dt} = -\frac{1}{T} z_2 \quad (3.5.9)$$

и приравнявая правые части (3.5.8) и (3.5.9), получаем управление:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_2}{\partial x} (\Phi(t, x) + B(t, x)u) + \frac{1}{T} \left(-\frac{1}{T} z_1 + z_2 \right) &= -\frac{1}{T} z_2, \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} B(t, x(t))u(t) &= -\frac{\partial z_2}{\partial x} \Phi(t, x) + \frac{1}{T^2} z_1 - \frac{2}{T} z_2, \\ u(t) &= G_2^+ \left(-\frac{\partial z_2}{\partial x} \Phi(t, x) + \frac{1}{T^2} z_1 - \frac{2}{T} z_2 \right), \\ z_1 &= J(x(t)) - J^*, \quad z_2 = \frac{\partial J(x(t))}{\partial x} \Phi(t, x(t)) + \frac{1}{T} z_1, \\ G_2^+ &= G_2^T (G_2 G_2^T)^{-1}, \quad G_2 = \frac{\partial z_2}{\partial x} B(t, x(t)), \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \Phi(t, x) \right). \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

При этом получена эквивалентная линейная стационарная система (3.5.6), (3.5.9), представляющая собой последовательное соединение двух инерционных звеньев первого порядка с одинаковой постоянной времени T (в общем случае, как следует из вывода, они могут быть и различными). Данная система при $T > 0$ асимптотически устойчивая, т.е. при любых начальных условиях $\lim_{t \rightarrow \infty} (z_i(t)) = 0$, $i = 1, 2$, а $J(t) \rightarrow J^*$.

Управление (3.5.10) существует, если матрица $G_2 \neq 0$ тождественно. Если же это не так, уравнение (3.5.9) заменяем уравнением

$$\frac{dz_2}{dt} = -\frac{1}{T} z_2 + z_3, \quad (3.5.11)$$

берем полную производную по времени от новой переменной z_3 , и задаем для нее желаемое движение дифференциальным уравнением, аналогичным (3.5.9). В итоге получаем:

$$\begin{aligned}
z_3 &= \frac{dz_2}{dt} + \frac{1}{T} z_2 = \frac{\partial z_2}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z_2}{\partial z_1} \cdot \frac{dz_1}{dt} + \frac{1}{T} z_2 = \frac{\partial z_2}{\partial x} (\Phi(t, x) + B(t, x)u) + \\
&+ \frac{1}{T} \left(-\frac{1}{T} z_1 + z_2 \right) + \frac{1}{T} z_2 = \frac{\partial z_2}{\partial x} \Phi(t, x) + G_2 u - \frac{1}{T^2} z_1 + \frac{2}{T} z_2 = \\
&= \frac{\partial z_2}{\partial x} \Phi(t, x) - \frac{1}{T^2} z_1 + \frac{2}{T} z_2, \\
\frac{dz_3}{dt} &= \frac{\partial z_3}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z_3}{\partial z_1} \cdot \frac{dz_1}{dt} + \frac{\partial z_3}{\partial z_2} \cdot \frac{dz_2}{dt} = \frac{\partial z_3}{\partial x} (\Phi(t, x) + B(t, x)u) - \frac{1}{T^2} \left(-\frac{1}{T} z_1 + z_2 \right) + \\
&+ \frac{2}{T} \left(-\frac{1}{T} z_2 + z_3 \right) = G_3 u + \frac{\partial z_3}{\partial x} \Phi(t, x) + \frac{1}{T^3} z_1 - \frac{3}{T^2} z_2 + \frac{2}{T} z_3, \\
\frac{\partial z_3}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z_2}{\partial x} \Phi(t, x) - \frac{1}{T^2} z_1 + \frac{2}{T} z_2 \right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \Phi(t, x) \right) \Phi(t, x) \right),
\end{aligned} \tag{3.5.12}$$

где $G_3 = \frac{\partial z_3}{\partial x} B(t, x)$.

Задавая для желаемого z_3 дифференциальное уравнение

$$\frac{dz_3}{dt} = -\frac{1}{T} z_3 \tag{3.5.13}$$

и приравнявая правые части (3.5.12) и (3.5.13), получаем управление:

$$\begin{aligned}
u(t) &= G_3^+ \left(-\frac{\partial z_3}{\partial x} \Phi(t, x) - \frac{1}{T^3} z_1 + \frac{3}{T^2} z_2 - \frac{3}{T} z_3 \right), \\
z_1 &= J(x(t)) - J^*, \quad z_2 = \frac{\partial J(x(t))}{\partial x} \Phi(t, x(t)) + \frac{1}{T} z_1, \\
z_3 &= \frac{\partial z_2}{\partial x} \Phi(t, x) - \frac{1}{T^2} z_1 + \frac{2}{T} z_2, \\
G_3^+ &= G_3^T (G_3 G_3^T)^{-1}, \quad G_3 = \frac{\partial z_3}{\partial x} B(t, x(t)), \\
\frac{\partial z_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \Phi(t, x) \right), \quad \frac{\partial z_3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \Phi(t, x) \right) \Phi(t, x) \right).
\end{aligned} \tag{3.5.14}$$

Подобным образом строятся управления до тех пор, пока некоторая матрица G_m , $m \leq n$ окажется ненулевой, а управление – осуществимым.

Сравнивая схемы получения ЛМ-управления и МКС-управления (2.1.5), можно отметить их определенное сходство. Эти схемы отличаются, главным образом, тем, что в ЛМ используются переменные состояния, а в МКС – переменные конечного состояния.

Из сравнения двух методов следуют выводы, перечисленные ниже.

1. ЛМ-управление выражается в явном виде, т.е. в виде алгебраического соотношения между вектором управления и параметрами модели; МКС-управление имеет явный вид только в отдельных случаях, когда удастся получить аналитическое решение системы (1.1.3), (1.1.5); в общем же случае при расчете управления в каждый момент времени требуется

- численно интегрировать систему (1.1.3), (1.1.5), что требует определенных, иногда весьма существенных затрат компьютерного времени.
2. Для получения ЛМ-управления в тех случаях, когда $G_1, G_2, \dots, G_{m-1}$ тождественно равны нулю, а $G_m \neq 0$, для реализации ЛМ-управления требуется существование производных по переменным состояния целевой функции критерия m -го порядка и правых частей системы (3.5.2) $(m-1)$ -го порядка – см. выражения для $\partial z_i / \partial x$ в (3.5.8) и (3.5.12); в частности, если $G_1 \neq 0$, непрерывность и дифференцируемость $\Phi(t, x)$ не требуется. Для реализации МКС-управления, выражаемого через градиент целевой функции $\partial J / \partial x$ и якобиан A (см. (1.1.3), (1.1.5)), требуется непрерывность и дифференцируемость $J(x)$ и $\Phi(t, x)$, однако требуемый порядок производных при этом всегда только первый.
 3. ЛМ-метод в случаях $m \geq 2$ требует большей, в сравнении с МКС, подготовительной работы по получению производных $J(x)$ и $\Phi(t, x)$ и трудоемкость этой работы тем больше, чем больше m .

Покажем, что при определенных условиях ЛМ-управление и МКС-управление можно выразить одно через другое.

Прежде всего, поставим задачу: как соотносятся между собой поведения критериальных функций $J(x(t))$ при воздействии ЛМ-управления и $J(\bar{x}(t_f, t, x(t)))$ при воздействии МКС-управления? Для этого вычислим производную по времени от вспомогательной функции $\bar{J}(t) = J(x(t)) / J(\bar{x}(t_f, t, x(t)))$ в предположении, что желаемый выход $J^* = 0$, постоянная времени T желаемых экспоненциальных траекторий $J(x(t))$ и $J(\bar{x}(t_f, t, x(t)))$ одинаковы (сами траектории разные ввиду того, что они начинаются от разных ординат), а ЛМ-управление определяется выражением (3.5.5), т.е. существует при $m = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{J}(t)}{dt} &= \frac{\dot{J}(x(t))J(\bar{x}(t_f, t, x(t))) - J(x(t))\dot{J}(\bar{x}(t_f, t, x(t)))}{(J(\bar{x}(t_f, t, x(t))))^2} = \\ &= \frac{\left(-\frac{1}{T}J(x(t))\right)J(\bar{x}(t_f, t, x(t))) - J(x(t))\left(-\frac{1}{T}J(\bar{x}(t_f, t, x(t)))\right)}{(J(\bar{x}(t_f, t, x(t))))^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

Таким образом, при оговоренных условиях отношение между значениями критериальных функций в разные моменты времени постоянно.

Теперь вновь рассмотрим числитель (3.5.15) и заменим производные критериальных функций их определениями из (3.5.4) и (22) соответственно.

$$\begin{aligned}
& \dot{J}(x(t))J(\bar{x}(t_f, t, x(t))) - J(x(t))\dot{J}(\bar{x}(t_f, t, x(t))) = \\
& = \frac{\partial J(x)}{\partial x} \cdot (\Phi(t, x(t)) + B(t, x(t))u^{LM}(t))J(\bar{x}(t_f, t, x(t))) - \\
& - J(x(t))\frac{\partial J(\bar{x})}{\partial \bar{x}}W(t_f, t, x(t))B(t, x(t))u^{MKC}(t) = 0.
\end{aligned}$$

Из последнего выражения следуют соотношения для ЛМ-управления через МКС-управление и обратное:

$$u^{MKC}(t) = \tilde{G}^+ (\tilde{G}_1 u^{LM}(t) + H), \quad (3.5.16)$$

$$u^{LM}(t) = \tilde{G}_1^+ (\tilde{G} u^{MKC}(t) - H), \quad (3.5.17)$$

$$\begin{aligned}
H &= J(\bar{x}(t_f, t, x(t))) \frac{\partial J(x(t))}{\partial x} \Phi(t, x(t)), \\
\tilde{G} &= J(x(t))G, \quad \tilde{G}_1 = J(\bar{x}(t_f, t, x(t)))G_1, \\
\tilde{G}^+ &= \tilde{G}^T / (\tilde{G}\tilde{G}^T), \quad \tilde{G}_1^+ = \tilde{G}_1^T / (\tilde{G}_1\tilde{G}_1^T),
\end{aligned}$$

где G_1 и G определены в (3.5.5) и (2.1.5) соответственно.

Симметрия соотношений (3.5.16) и (3.5.17) подчеркивает определенные черты двойственности рассматриваемых задач (стабилизации и терминального управления) и методов.

Компьютерное моделирование показало, что ЛМ особенно эффективен, когда целевая функция J зависит только от одной координаты. Когда же указанная целевая функция зависит от многих координат, значительно лучшие результаты показывает МКС.

На основании выполненного анализа можно сделать общий вывод: каждый из исследованных методов управления имеет свои преимущества при решении определенных (прямых) задач управления: ЛМ – для задач стабилизации при управлении одной координатой, МКС – для терминальных задач при управлении несколькими координатами; каждый из методов можно применять и для решения двойственных задач (ЛМ – для терминальной, МКС – для стабилизации), однако при этом соответствующие результаты будут хуже, чем при решении прямых задач. В силу двойственной природы двух методов возможно их комплексирование, что позволяет строить перспективные методы управления, сочетающие достоинства обоих исследованных методов.

3.6. Выводы

Выпишем полученные в настоящей главе основные результаты в виде следующей сводной таблицы, сохранив нумерацию соответствующих формул.

Таблица 3.2 – Расчетные формулы и выражения методов, рассмотренных в третьей главе

Постановка задачи	Расчетные формулы и выражения
Линейно-квадратическая задача $J = x^T(t_f)Fx(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (x^T Qx + u^T Ru) d\tau \rightarrow \min,$ $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, t \in [t_0, t_f], x(t_0) = x^0,$ (3.1.1)	
	Известные формы решений
	$u = Kx,$ $K = -R^{-1}B^T P,$ $\frac{dP}{dt} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q,$ $t \in [t_0, t_f], P(t_f) = F,$ (3.1.2)
	$u = Kx, K = (\Omega_{22} - F\Omega_{12})^{-1}(F\Omega_{11} - \Omega_{21}), \Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix},$ $\frac{d}{dt}\Omega = -\Omega \cdot \tilde{A}, \Omega(t_f, t_f) = I.$ $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{pmatrix}$ (3.1.3)
	$u = Kx, K = (\Omega_{21} + \Omega_{22}F)(\Omega_{11} + \Omega_{12}F)^{-1}, \Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix},$ $\frac{d}{dt}\Omega = -\Omega \cdot \tilde{A}, \Omega(t_f, t_f) = I.$ (3.1.4)
	$u = -R^{-1}B^T \Lambda W^{-1},$ $\begin{pmatrix} \frac{dW}{dt} \\ \frac{d\Lambda}{dt} \end{pmatrix} = \tilde{A} \begin{pmatrix} W \\ \Lambda \end{pmatrix},$ $t \in [t_0, t_f], W(t_f) = I, \Lambda(t_f) = F$ (3.1.5)
	$u = -R^{-1}B^T Px,$ $P = P_1 + W^T (G + F^{-1})^{-1} W,$ $\frac{dP_1}{dt} = -P_1 A - A^T P_1 + P_1 B R^{-1} B^T P_1 - Q, P_1(t_f) = 0,$ $\frac{dW}{dt} = (A - B R^{-1} B^T P_1) W, W(t_f) = I,$ $\frac{dG}{dt} = -W B R^{-1} B^T W^T, G(t_f) = 0.$ (3.1.6)

	$u = -R^{-1}B^T Px,$ $P(t) = W \cdot \left[F + \int_t^{t_f} W^T B^T R^{-1} B W d\tau \right]^{-1} W^T + P(\infty),$ $W = \exp \left[(A - P(\infty) B^T R^{-1} B) \cdot (t_f - t) \right]$ (3.1.7)
	$u = -R^{-1}B^T Px,$ $P = W^T F (I + GF)^{-1} W,$ $G = \int_t^{t_f} W B R^{-1} B^T W^T d\tau,$ (3.1.8)
	Новые формы решений, полученные на основе моделей конечного состояния с переходной матрицей W
	Для случая $Q = 0$ $u = -R^{-1}B^T W^T (I + GF)^{-1} Wx. \quad (3.1.15)$
	$\dot{h} = -(W^{-1})^T Qx, \quad u = -R^{-1}B^T W^T h. \quad (3.1.20)$
	$u = -R^{-1}B^T W^T Kx,$ $\frac{dK}{dt} = -KA + KBR^{-1}B^T K - (W^{-1})^T Q, \quad (3.1.21)$ $K(t_f) = (W^T(t_f, t_0))^{-1} P(t_f) = F.$
	Чувствительность конечного состояния
	$\frac{\partial G}{\partial \alpha} = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial W}{\partial \alpha} B R^{-1} B^T W^T + \right. \\ \left. + W \frac{\partial B}{\partial \alpha} R^{-1} B^T W^T \right] d\tau + \\ + \int_{t_0}^{t_f} \left[W B R^{-1} \frac{\partial B^T}{\partial \alpha} W^T + \right. \\ \left. + W B R^{-1} B^T \frac{\partial W^T}{\partial \alpha} \right] d\tau. \quad (3.1.25)$ $\frac{\partial x(t_f)}{\partial \alpha} = [I + G(t_f, t_0) \cdot F]^{-1} \times \\ \times \left(\frac{\partial W(t_f, t_0)}{\partial \alpha} x(t_0) - \frac{\partial G(t_f, t_0)}{\partial \alpha} F \cdot x(t_f) \right), \quad (3.1.26)$

	$\frac{dW_\alpha(t_f, t)}{dt} = -W_\alpha(t_f, t)A(t) - W(t_f, t)A_\alpha(t),$ $\frac{dW(t_f, t)}{dt} = -W(t_f, t)A(t),$ $W(t_f, t_f) = I, W_\alpha(t_f, t_f) = 0, t \in [t_f, t_0],$ $W_\alpha \equiv \partial W / \partial \alpha.$ $(3.1.27)$ $\frac{dG_\alpha(t_f, t)}{dt} = \frac{\partial W(t_f, t)}{\partial \alpha} B(t) R^{-1} B^T(t) W^T(t_f, t) +$ $+ W(t_f, t) \frac{\partial B(t)}{\partial \alpha} R^{-1} B^T(t) W^T(t_f, t) +$ $+ W(t_f, t) B(t) R^{-1} \frac{\partial B^T(t)}{\partial \alpha} W^T(t_f, t) +$ $+ W(t_f, t) B(t) R^{-1} B^T(t) \frac{\partial W^T(t_f, t)}{\partial \alpha},$ $t \in [t_f, t_0], G_\alpha \equiv \frac{\partial G}{\partial \alpha}, G_\alpha(t_f, t_f) = 0.$ $(3.1.28)$
Эквивалентные по конечному состоянию релейные управления $x_{ik}(t_f, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n W_{ij}(t_f, t) B_{jk}(t) u_k(t) dt \equiv$ $\equiv \int_{t_0}^{t_f} h_i(t) \xi(t) dt,$ $h_i(t) \equiv \sum_{j=1}^n W_{ij}(t_f, t) B_{jk}(t), \xi(t) \equiv u_k(t)$ $(3.2.1)$ Для нормированного управления $0 \leq \xi(t) \leq 1$ найти такое релейное управление со значениями 0 и 1 и моментами переключений $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m$, которое обеспечивает равенства: $\int_{t_0}^{\vartheta_1} h_i(t) dt + \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} h_i(t) dt + \dots + \int_{\vartheta_n}^{t_f} h_i(t) dt =$ $= \int_{t_0}^{t_f} h_i(t) \xi(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n$ $(3.2.3)$	Если $h_i(t) = a_{i0} + a_{i1}t$, $(3.2.4)$ то достаточно двух моментов переключения, рассчитываемых по выражениям: $\vartheta_1 = \frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{2}, \vartheta_2 = \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{2}. \quad (3.2.13)$ Если $h_i(t) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j$, $(3.2.14)$ то моменты переключений определяются численно из систем нелинейных уравнений: для четных m $\vartheta_2 - \vartheta_1 + \vartheta_4 - \vartheta_3 + \dots + \vartheta_m - \vartheta_{m-1} = k_1,$ $\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2 + \vartheta_4^2 - \vartheta_3^2 + \dots + \vartheta_m^2 - \vartheta_{m-1}^2 = 2 \cdot k_2,$ $\dots$ $\vartheta_2^m - \vartheta_1^m + \vartheta_4^m - \vartheta_3^m + \dots + \vartheta_m^m - \vartheta_{m-1}^m = m \cdot k_m. \quad (3.2.16)$ для нечетных m: $\vartheta_2 - \vartheta_1 + \vartheta_4 - \vartheta_3 + \dots + t_f - \vartheta_m = k_1,$ $\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2 + \vartheta_4^2 - \vartheta_3^2 + \dots + t_f^2 - \vartheta_m^2 = 2 \cdot k_2,$ $\dots$ $\vartheta_2^m - \vartheta_1^m + \vartheta_4^m - \vartheta_3^m + \dots + t_f^m - \vartheta_m^m = m \cdot k_m. \quad (3.2.18)$ Дополнительные ограничения: $t_0 \leq \vartheta_1 \leq \vartheta_2 \leq \dots \leq \vartheta_m \leq t_f. \quad (3.2.17)$

	Расчет k_{j+1}: $k_{j+1} = \int_{t_0}^{t_f} t^j \xi(t) dt, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$ Приведенные расчетные выражения применимы и для случая нелинейных систем вида (1.1.1) Погрешность: $\bar{\Delta}_m = \max \Delta_m = \max_{\theta \in [t_0, t_f]} \left \frac{h^{(m)}(\theta)}{m!} \right \cdot N_m(\xi(t)) \quad (3.2.28)$ $N_m(\xi(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (t-t_0)^m (\xi(t)-1) dt +$ $+ \int_{\vartheta_3}^{\vartheta_4} (t-t_0)^m (\xi(t)-1) dt + \dots + \int_{\vartheta_{m-1}}^{\vartheta_m} (t-t_0)^m (\xi(t)-1) dt.$ для четных m; для нечетных m в последнем интеграле пределы от ϑ_m до t_f.
Ковариационный анализ линейной системы $\frac{dx(t)}{dt} = A(t) \cdot x + C(t) \cdot v(t) + B(t) \cdot \xi(t),$ $t \in [t_0, t_f], x(t_0) = x^0.$ (3.3.1)	Известный метод Дункана $\frac{d\bar{x}}{dt} = A(t)\bar{x} + C(t)v(t),$ $\frac{dD_{xx}}{dt} = A(t)D_{xx} + D_{xx}A(t)^T + B(t)Q(t)B(t)^T,$ $t \in [t_0, t_f], \bar{x}(t_0) = \bar{x}^0, D_{xx}(t_0) = D_{xx}^0, \quad (3.3.2)$ Получен на основе модели конечного состояния, совпадает с известным: $\bar{x}(t) = W(t, t_f) \bar{y}(t_f, t) - \int_t^{t_f} W(t, \tau) C(\tau) v(\tau) d\tau,$ $D_{xx}(t) = W(t, t_f) D_{yy}(t_f, t) W^T(t, t_f).$ (3.3.5) $\frac{dW(t_f, t)}{dt} = -W(t_f, t) \cdot A(t),$ $t \in [t_0, t_f], W(t_f, t_f) = I$
Ковариационный анализ нелинейной системы $\frac{dx(t)}{dt} = \Phi(t, x(t)) + B(t) \cdot \xi(t), \quad (3.3.6)$ $t \in [t_0, t_f], x(t_0) = x^0,$	Математическое ожидание: $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = M[\Phi(t, x(t))], \quad (3.3.17)$ $t \in [t_0, t_f], \bar{x}(t_0) = \bar{x}^0$ или $\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \Phi(t, \tilde{x}(t)), \quad (3.3.18)$ $t \in [t_0, t_f], \tilde{x}(t_0) = \bar{x}^0, \bar{x}(t) \equiv \tilde{x}(t)$

	Ковариационная матрица: $D_{xx}(t_{k+1}) = \bar{W}[D_{xx}(t_k) + (D_{xR}(t_k) + D_{Rx}(t_k) + BQB^T) \cdot (t_{k+1} - t_k)]\bar{W}^T,$ $\bar{W} \equiv W(t_{k+1}, t_k, \tilde{x}(t_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$ $D_{xx}(t_0) = D_{xx}^0, \quad t_{k+1} = t_k + h,$ $\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \Phi(t, \tilde{x}(t)), \quad \tilde{x}(t_0) = \bar{x}_0.$ (3.3.28) или $\frac{dD_{xx}(t)}{dt} = A(\tilde{x}(t))D_{xx}(t) + D_{xx}(t)A^T(\tilde{x}(t)) + B(t)Q(t)B^T(t) + D_{xR}(t) + D_{xR}^T(t),$ $\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \Phi(t, \tilde{x}(t)),$ $t \in [t_0, t_f], \quad D_{xx}(t_0) = D_{xx}^0, \quad \tilde{x}(t_0) = \bar{x}(t_0) \equiv \bar{x}^0,$ $A(\tilde{x}(t)) = \left[\frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x} \right]_{x = \tilde{x}(t)}.$ (3.3.29) $D_{xR} = M[(x - \bar{x})(R - \bar{R})^T], \quad D_{Rx} = D_{xR}^T.$ (3.3.26) R – остаточный член разложения Φ в окрестности $\tilde{x}(t)$ после выделения линейной части. Во многих случаях D_{xR} можно пренебречь либо, при необходимости, оценивать с использованием (2.1.23), (2.1.24)
Идентификация переменных и моделей конечного состояния	Параметрическая идентификация с использованием приближенных аналитических решений $y_i(\vartheta) = y_i(t) + \sum_{k=0}^{k_i} \frac{1}{k+1} R_{ik}(t, x(t))(\vartheta - t)^{k+1}.$ (2.1.24) $y_i(t) = y_i^0, \quad R_{i0}(t, y(t)) = \Phi(t, y(t)),$ $R_{i1}(t, y(t)) = \frac{\partial \Phi_i(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_i(t, y)}{\partial y} \bigg _{y=y(t)} \Phi(t, y(t)),$ $R_{ik}(t, y(t)) =$ $= \frac{1}{k} \left(\frac{\partial R_{i(k-1)}(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial R_{i(k-1)}(t, y(t))}{\partial y} \bigg _{y=y(t)} \Phi(t, x(t)) \right),$ $k = 2, 3, \dots, k_i.$ (2.1.22) Считая вектор ПКС $\bar{x}(\vartheta, t, x(t))$ и

	столбцы переходной матрицы $W(\vartheta, t, x(t))$ компонентами вектора u, получаем функции откликов (2.1.24), где R_{jk}, определяемые (2.1.22) выражаются через подлежащие определению из системы нелинейных уравнений параметры системы A.
	Параметрическая идентификация с использованием приближенных аналитических решений (2.1.24) для $\bar{x}(\vartheta, t, x(t))$ и $W(\vartheta, t, x(t))$ и отклика на дельта-функцию (импульсное воздействие) и использовании выражения $(W(\vartheta, t_0, x(t_0))B(t_0))_j = x^{\delta_j}(\vartheta) - \bar{x}(\vartheta, t_0, x(t_0)),$ (3.4.2)
	Параметрическая идентификация с помощью искусственных нейронных сетей, например, вида $y_i(t, y^0, p) \cong \Psi^2 \left(b_i^2 + \sum_{j=1}^{NI} IW_{ij}^2 \cdot u_j + \sum_{s=1}^{NL} LW_{is} \cdot \Psi^1 \left(b_{is}^1 + \sum_{j=1}^{NI} IW_{isj}^2 \cdot u_j \right) \right)$ (3.4.1)
Линеаризационный по входу/выходу метод (A.Isidori, Wei Wu) для задачи $J = J(x(t)) \rightarrow J^* \quad (3.5.1)$ $\frac{dx(t)}{dt} = \Phi(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t), \quad (3.5.2)$ $t \in [t_0, \infty), \quad x(t_0) = x^0,$ $\dim x = (n \times 1), \quad \dim u = (r \times 1)$	Расчет управления: $u(t) = G_1^+ \left(-\frac{\partial J(x)}{\partial x} \Phi(t, x(t)) + \frac{J^* - J(t)}{T} \right),$ $G_1^+ = G_1^T (G_1 G_1^T)^{-1}, \quad G_1 = \frac{\partial J(x)}{\partial x} B(t, x(t)). \quad (3.5.5)$ Если $G_1 \equiv 0$, то $u(t) = G_2^+ \left(-\frac{\partial z_2}{\partial x} \Phi(t, x) + \frac{1}{T^2} z_1 - \frac{2}{T} z_2 \right),$ $z_1 = J(x(t)) - J^*, \quad z_2 = \frac{\partial J(x(t))}{\partial x} \Phi(t, x(t)) + \frac{1}{T} z_1,$ $G_2^+ = G_2^T (G_2 G_2^T)^{-1}, \quad G_2 = \frac{\partial z_2}{\partial x} B(t, x(t)), \quad (3.5.10)$ Если $G_2 \equiv 0$, то

	$u(t) = G_3^+ \left(-\frac{\partial z_3}{\partial x} \Phi(t, x) - \frac{1}{T^3} z_1 + \frac{3}{T^2} z_2 - \frac{3}{T} z_3 \right),$ $z_1 = J(x(t)) - J^*, \quad z_2 = \frac{\partial J(x(t))}{\partial x} \Phi(t, x(t)) + \frac{1}{T} z_1,$ $z_3 = \frac{\partial z_2}{\partial x} \Phi(t, x) - \frac{1}{T^2} z_1 + \frac{2}{T} z_2,$ $G_3^+ = G_3^T (G_3 G_3^T)^{-1}, \quad G_3 = \frac{\partial z_3}{\partial x} B(t, x(t)),$ $\frac{\partial z_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \Phi(t, x) \right), \quad \frac{\partial z_3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \Phi(t, x) \right) \Phi(t, x) \right).$ (3.5.14)
Связь между ЛМ-управлением и МКС-управлением	$u^{MKC}(t) = \tilde{G}^+ (\tilde{G}_1 u^{LM}(t) + H), \quad (3.5.16)$ $u^{LM}(t) = \tilde{G}_1^+ (\tilde{G} u^{MKC}(t) - H), \quad (3.5.17)$ $H = J(\bar{x}(t_f, t, x(t))) \frac{\partial J(x(t))}{\partial x} \Phi(t, x(t)),$ $\tilde{G} = J(x(t)) G, \quad \tilde{G}_1 = J(\bar{x}(t_f, t, x(t))) G_1,$ $\tilde{G}^+ = \tilde{G}^T / (\tilde{G} \tilde{G}^T), \quad \tilde{G}_1^+ = \tilde{G}_1^T / (\tilde{G}_1 \tilde{G}_1^T),$ $G_1 \text{ по (3.5.5), } G \text{ по (2.1.5)}$

Полученные в третьем разделе результаты показывают, что переменные и модели конечного состояния являются полезным средством для получения новых методов анализа и синтеза систем управления.

ГЛАВА 4

ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ

4.1. Общая характеристика прикладных задач управления и особенностей моделей

В настоящей главе приведены результаты применения метода конечного состояния (МКС), описанного во второй главе, к управлению разнообразными динамическими объектами. Во всех приложениях предполагается, что известны их математические модели.

Одной из актуальных задач управления является оптимальная коммутация в электроэнергетических системах. Особенностью многих математических моделей процессов коммутации является их нелинейность и принципиальная невозможность линеаризации ввиду большого диапазона изменения фазовых координат (токов, напряжений, магнитных потоков, потокосцеплений). Так, в [51] на странице 222 отмечено, что в случаях пуска, торможения и реверса и некоторых других режимах для асинхронных двигателей «...расчеты должны выполняться с использованием действительной нелинейной динамической характеристики». В то же время методов управления подобными процессами немного. Так, разработаны оптимальные алгоритмы управления электроприводом для различных задач и критериев (в том числе для разгона) на основе упрощенных моделей электрических машин, где динамика электромагнитных процессов не учитывается [52]. Во многих случаях применяют «линеаризующую» обратную связь, когда в силу специфики модели можно подобрать такие управляющие воздействия, при которых нелинейности как бы пропадают [53 – 55]. Используются подходы, переводящие нелинейные члены модели вместе с другими неопределенностями в неизвестные внешние воздействия, которые затем оцениваются известными алгоритмами [56]. В последнее время большое внимание исследователей и проектировщиков асинхронных электроприводов уделяется так называемому «векторному управлению» [57 – 60], основные особенности которого – переход к вращающейся системе координат Парка-Горева и полеориентированное управление (Field Oriented Control или сокращенно FOC). Управляющее воздействие при этом векторное в виде проекций напряжения статора на парковские оси координат, причем для получения максимального

движущего момента в асинхронных двигателях необходимо, чтобы вектор потокосцепления был направлен по продольной оси ротора [60]. Похожие методы разрабатываются и для управления некоторыми видами синхронных машин. Так, при управлении синхронными двигателями с возбуждением от постоянных магнитов (вентильными) принцип ФОС трансформируется в требование, чтобы весь статорный ток был направлен по поперечной оси системы координат Парка-Горева. Заметим, что распространенная практическая реализация принципа векторного управления сводится к развязке каналов управления электромеханической и электромагнитной подсистем с использованием в каждом из каналов ПИ-регуляторов [61]. Таким образом, данная схема использования указанного принципа искусственно подгоняется под существующие типы регуляторов в ущерб эффективному использованию динамических характеристик объекта. Это тем более не оправдано, поскольку в векторном управлении математическая модель объекта все равно используется для оценивания фазовых координат (потокосцепления, угловой скорости и др.). На это обстоятельство обращено внимание и в [61]: «Микропроцессорная организация систем управления электроприводом дает возможность ставить задачу оптимального управления электроприводом во всех режимах...». Отметим еще одно мнение из обзора [62], посвященного, в частности, векторному управлению: «...Лимитирующим звеном ...является алгоритм САР и элементная база ее реализации...Высокие динамические показатели частотно-регулируемых асинхронных электроприводов могут быть достигнуты, если в основе синтеза САР будут использованы дифференциальные уравнения объекта регулирования». В управлении электроприводами применяются также алгоритмы с переменной структурой [25] и на основе принципов нечеткой логики (fuzzy logic) [63]. Перечисленные подходы существенно используют специфику математических моделей электрических машин и не являются общими.

Из общих подходов можно выделить приближенное представление динамических характеристик слаболинейных систем в виде функциональных рядов Вольтерра и Вольтерра-Пикара [64], метод «непрерывной иерархии каналов» [65]. Что же касается математической теории нелинейных систем, то здесь основные усилия сосредоточены на задачах и методах анализа, восходящие к фундаментальным результатам Ляпунова, Андронова и других ученых, где в основном изучаются колебательные и (в последнее время) хаотические процессы. В то же время управляемая коммутация позволяет существенно сократить (или искусственно увеличить) длительность переходных процессов с учетом других характеристик и ограничений. Применение терминального метода конечного состояния (МКС), описанного во второй главе, позволяет решить задачу управляемой коммутации по-новому. При

этом следует учитывать, что МКС предназначен для управления на конечном интервале, а коммутируемые системы функционируют длительное время. Это определяет специфику критериев МКС в части использования в качестве желаемых конечных значений фазовых координат параметров номинального режима при включении и нулевых значений при отключении. Параметры номинального режима определяются экспериментально, компьютерным моделированием либо аналитически как установившиеся значения после включения либо отключения системы. При этом предполагается, что в системах существуют стационарные режимы без автоколебаний. В подразделе 4.2 рассмотрены задачи управляемого разгона для электродвигателя постоянного тока (ДПТ) в режимах последовательного возбуждения (серийного) и независимого возбуждения. Отметим, что одна из задач управления асинхронным двигателем рассмотрена, в качестве примера, в подразделе 2.5. На примере задач управляемого разгона ДПТ показаны возможности базового МКС, ускоренного МКС, МКС для сигнальной самонастройки по эталонной модели в сравнении с линеаризационным по входу/выходу методом А. Исидори, методов идентификации на основе моделей конечного состояния, использования идентифицированных моделей для управляемого разгона.

Кроме задачи управляемого разгона ДПТ, рассмотрен ряд задач управления для иллюстрации других, помимо базового, вариантов МКС, а именно: задача управления сетевой гидросистемой как примера дифференциально-функциональной нелинейной системы; задача управления температурой химического реактора с рециркуляцией как примера нелинейной системы с запаздыванием; динамическая задача управления запасами в дискретной постановке как пример дискретной существенно нелинейной системы; задача управления давлением газа в газотранспортной системе как пример дискретной системы с распределенными параметрами.

Во всех приложениях задача измерения (оценивания) фазовых координат не рассматривалась, и результаты получены в предположении точного измерения всех фазовых координат.

4.2. Управляемый разгон электродвигателей постоянного тока

4.2.1. Математические модели электродвигателей постоянного тока и задача управляемого разгона

Рассмотрим две нелинейных модели электродвигателей постоянного тока (ДПТ) для режимов последовательного и независимого возбуждения [66] с приведенными ниже математическими описаниями.

Двигатель с последовательным возбуждением (сериесный)

$$\begin{aligned}\frac{di_A}{dt} &= -\frac{r_A}{L_A}i_A - \frac{k_1}{L_A}i_A\omega + \frac{1}{L_A}u, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{k_M}{J_M}\omega + \frac{k_2}{J_M}i_A^2.\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

Двигатель с независимым возбуждением

$$\begin{aligned}\frac{di_B}{dt} &= -\frac{r_B}{L_B}i_B + \frac{1}{L_B}u_B, \\ \frac{di_A}{dt} &= -\frac{r_A}{L_A}i_A - \frac{k_1}{L_A}i_B\omega + \frac{1}{L_A}u_A, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{k_M}{J_M}\omega + \frac{k_2}{J_M}i_Ai_B,\end{aligned}\tag{4.2.2}$$

В (4.2.1) и (4.2.2) i_B, i_A – токи возбуждения и якоря; ω – скорость вращения ротора; u_B, u_A – напряжение на обмотках возбуждения и якоря соответственно; r_B, r_A и L_B, L_A – сопротивления и индуктивности обмоток возбуждения и якоря; k_1, k_2 – электрическая и механическая постоянные; k_M – коэффициент пропорциональности момента нагрузки и скорости; J_M – момент инерции, приведенный к валу двигателя.

Уравнения (4.2.1) следуют из (4.2.2), если учесть, что в режиме последовательного возбуждения обмотки возбуждения и якоря соединены последовательно в одну обмотку с общим током, сопротивлением и индуктивностью, которые здесь имеют индекс A , т.е. обозначение якорной обмотки. Следует отметить, что сериесные двигатели, применяемые в качестве тяговых двигателей на электротранспорте, имеют определенные конструктивные особенности, так как их обмотка возбуждения должна пропускать относительно большие токи, что не характерно для ДПТ с независимым возбуждением. В дальнейшем, при конструировании алгоритмов управления, нам понадобятся соотношения для определения установившихся значений токов и скорости (стационарного режима). Указанные соотношения получаются путем приравнивания правых частей (4.2.1), (4.2.2) нулю, а управляющих воздействий – значениям номинального напряжения $U_{ном}$.

Для двигателя с последовательным возбуждением имеем кубическое уравнение для тока и выражение для скорости:

$$\begin{aligned} (i_A^*)^3 + i_A^* \frac{r_A k_M}{k_1 k_2} - U_{ном} \frac{k_M}{k_1 k_2} &= 0, \\ \omega^* &= (i_A^*)^2 \frac{k_2}{k_M}, \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Для двигателя с независимым возбуждением имеем три выражения:

$$i_B^* = \frac{U_{ном}}{r_B}, \quad i_A^* = \frac{U_{ном}}{r_A + \frac{k_1 k_2}{k_M} (i_B^*)^2}, \quad \omega^* = \frac{k_2}{k_M} i_B^* i_A^*, \quad (4.2.4)$$

Отличием моделей (4.2.1) и (4.2.2), как иллюстративных примеров применения МКС-управления, является разный порядок и количество управляющих воздействий.

Сформулируем задачу управления: разогнать за заданное время t_f двигатель, выведя его ток (токи) и скорость к стационарному режиму, определяемому соотношениями (4.2.3), (4.2.4). Соответствующий терминальный критерий имеет вид квадратичной формы:

$$J = F_B (i_B(t_f) - i_B^*)^2 + F_A (i_A(t_f) - i_A^*)^2 + F_\omega (\omega(t_f) - \omega^*)^2 \rightarrow J^*, \quad (4.2.5)$$

где F_B, F_A, F_ω – коэффициенты веса (для модели (4.2.1) $F_B = 0$), J^* – желаемое значение критерия, i_B^*, i_A^*, ω^* – желаемые конечные значения координат. Желаемые значения i_B^*, i_A^*, ω^* , в частности, могут быть параметрами номинального режима из (4.2.3), (4.2.4). Что касается J^* , то его естественно назначить нулевым, если только это значение достижимо. В противном случае его значения подбирается как можно меньшим. Следует, однако, иметь в виду, что при ненулевом достижимом J^* конечные значения токов и скорости не будут совпадать с желаемыми и после замены управляющего напряжения, сформированного МКС, номинальными напряжениями, в системе будет наблюдаться дополнительный неконтролируемый переходный процесс. Таким образом, задача управляемого разгона ДПТ с критерием (4.2.5) рассматриваемым методом имеет смысл только при достижимом нулевом или близким к нулю значении J^* .

4.2.2. Управляемый разгон на основе базового варианта метода конечного состояния

Для построения управления выполним следующие шаги.

1) Представим модель системы в виде (1.1.1).

Элементы представления (1.1.1) для модели (4.2.1) следующие:

$$\Phi = \begin{pmatrix} -\frac{r_A}{L_A} i_A - \frac{k_1 i_A \omega}{L_A} \\ -\frac{k_M}{J_M} \omega + \frac{k_2}{J_M} i_A^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_A} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} i_A \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (4.2.6)$$

Для модели (4.2.2), где примем $u_A = u_B = u$, соответствующее режиму параллельного возбуждения, вектор Φ и матрица B следующие:

$$\Phi = \begin{pmatrix} -\frac{r_B}{L_B} i_B \\ -\frac{r_A}{L_A} i_A - \frac{k_1 i_B \omega}{L_A} \\ -\frac{k_M}{J_M} \omega + \frac{k_2}{J_M} i_A i_B \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_B} \\ \frac{1}{L_A} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} i_B \\ i_A \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (4.2.7)$$

2) Составим систему уравнений для нелинейной переходной матрицы W согласно векторно-матричному представлению из (1.1.5).

Для модели (4.2.1) матрица $A = \partial\Phi/\partial x|_{x=\bar{x}}$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{r_A}{L_A} - \frac{k_1}{L_A} \bar{\omega} & -\frac{k_1}{L_A} \bar{i}_A \\ \frac{2k_2}{J_M} \bar{i}_A & -\frac{k_M}{J_M} \end{pmatrix}. \quad (4.2.8)$$

Для модели (4.2.2) матрица $A = \partial\Phi/\partial x|_{x=\bar{x}}$ следующая:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{r_{\%0}}{L_{\%0}} & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{L_A} \bar{\omega} & -\frac{r_A}{L_A} & -\frac{k_1}{L_A} \bar{i}_{\%0} \\ \frac{k_2}{J_M} \bar{i}_A & \frac{k_2}{J_M} \bar{i}_{\%0} & -\frac{k_M}{J_M} \end{pmatrix}. \quad (4.2.9)$$

3) Формируем эквивалентный (4.2.5) критерий, выраженный через переменные конечного состояния:

$$\bar{J}(t_f, t) = F_B (\Delta \bar{i}_B)^2 + F_A (\Delta \bar{i}_A)^2 + F_\omega (\Delta \bar{i}_\omega)^2, \quad (4.2.10)$$

$$\Delta \bar{i}_B = \bar{i}_B(t_f, t, x(t)) - i_B^*, \quad \Delta \bar{i}_A = \bar{i}_A(t_f, t, x(t)) - i_A^*, \quad \Delta \bar{\omega} = \bar{\omega}(t_f, t, x(t)) - \omega^*.$$

4) Находим производную эквивалентного критерия по второму аргументу t .

$$\frac{d\bar{J}}{dt} = 2F_B (\bar{i}_B - i_B^*) \frac{d\bar{i}_B}{dt} + 2F_A (\bar{i}_A - i_A^*) \frac{d\bar{i}_A}{dt} + 2F_\omega (\bar{\omega} - \omega^*) \frac{d\bar{\omega}}{dt}. \quad (4.2.11)$$

Производные переменных конечного состояния, входящие в последнее выражение, определяются из (1.1.8).

Для модели (4.2.1) модель конечного состояния (1.1.8) конкретизируется в виде:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{i}_A}{dt} &= W_{11} \frac{1}{L_A} u, \\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= W_{21} \frac{1}{L_A} u,\end{aligned}\tag{4.2.12}$$

где элементы вектора переменных конечного состояния и первого столбца переходной матрицы W_{11}, W_{21} определяются по системе (1.1.3), (1.1.5):

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{i}_A(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= -\frac{r_A}{L_A} \bar{i}_A(\vartheta, t, x(t)) - \frac{k_1}{L_A} \bar{i}_A(\vartheta, t, x(t)) \bar{\omega}(\vartheta, t, x(t)), \\ \frac{d\bar{\omega}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= -\frac{k_M}{J_M} \bar{\omega}(\vartheta, t, x(t)) + \frac{k_2}{J_M} [\bar{i}_A(\vartheta, t, x(t))]^2, \\ \frac{dW_{11}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= -\left(\frac{r_A}{L_A} + \frac{k_1}{L_A} \bar{\omega}(\vartheta, t, x(t))\right) W_{11}(\vartheta, t, x(t)) - \\ &\quad - \frac{k_1}{L_A} \bar{i}_A(\vartheta, t, x(t)) W_{21}(\vartheta, t, x(t)), \\ \frac{dW_{21}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= -2 \frac{k_2}{J_M} \bar{i}_A(\vartheta, t, x(t)) W_{11}(\vartheta, t, x(t)) - \frac{k_M}{J_M} W_{21}(\vartheta, t, x(t)), \\ \vartheta \in [t, t_f], \quad \bar{i}_A(t, t, x(t)) &= i_A(t), \quad \bar{\omega}(t, t, x(t)) = \omega(t), \\ W_{11}(t, t, x(t)) &= 1, \quad W_{21}(t, t, x(t)) = 0.\end{aligned}\tag{4.2.13}$$

Для модели (4.2.2) имеем:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{i}_B}{dt} &= \left(W_{11} \frac{1}{L_B} + W_{12} \frac{1}{L_A} \right) u, \\ \frac{d\bar{i}_A}{dt} &= \left(W_{21} \frac{1}{L_B} + W_{22} \frac{1}{L_A} \right) u, \\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= \left(W_{31} \frac{1}{L_B} + W_{32} \frac{1}{L_A} \right) u,\end{aligned}\tag{4.2.14}$$

где элементы первого и второго столбца переходной матрицы определяются из системы уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{i}_B(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= -\frac{r_B}{L_B} \bar{i}_B(\vartheta, t, x(t)), \\ \frac{d\bar{i}_A(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= -\frac{r_A}{L_A} \bar{i}_A(\vartheta, t, x(t)) - \frac{k_1}{L_A} \bar{i}_B(\vartheta, t, x(t)) \bar{\omega}(\vartheta, t, x(t)), \\ \frac{d\bar{\omega}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= -\frac{1}{J_M} k_M \bar{\omega}(\vartheta, t, x(t)) + \frac{k_2}{J_M} \bar{i}_A(\vartheta, t, x(t)) \bar{i}_B(\vartheta, t, x(t)), \\ \frac{dW_{1j}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= -\frac{r_B}{L_B} W_{1j}(\vartheta, t, x(t)), \\ \frac{dW_{2j}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= -\frac{k_1}{L_A} W_{1j}(\vartheta, t, x(t)) - \frac{r_A}{L_A} \bar{\omega}(\vartheta, t, x(t)) W_{2j}(\vartheta, t, x(t)) - \\ &\quad - \frac{k_1}{L_A} \bar{i}_B(\vartheta, t, x(t)) W_{3j}(\vartheta, t, x(t)),\end{aligned}\tag{4.2.15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dW_{3j}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= \frac{k_2}{J_M} \bar{i}_A(\vartheta, t, x(t)) W_{1j}(\vartheta, t) + \\
&+ \frac{k_2}{J_M} \bar{i}_B(\vartheta, t, x(t)) W_{2j}(\vartheta, t, x(t)) - \\
&- \frac{1}{J_M} k_M W_{3j}(\vartheta, t, x(t)), \quad j=1,2, \\
\vartheta &\in [t, t_f], \\
\bar{i}_A(t, t, x(t)) &= i_A(t), \quad \bar{i}_B(t, t, x(t)) = i_B(t), \quad \bar{\omega}(t, t, x(t)) = \omega(t), \\
W_{11}(t, t, x(t)) &= W_{22}(t, t, x(t)) = 1, \\
W_{21}(t, t, x(t)) &= W_{31}(t, t, x(t)) = W_{32}(t, t, x(t)) = 0.
\end{aligned}$$

5) Приравняем правую часть выражения (4.2.11) с производными из (4.2.12) или (4.2.14) правой части дифференциального уравнения для желаемого поведения критериальной функции $\bar{J}^*(t_f, t)$. Например, если потребовать, чтобы $\bar{J}^*$ удовлетворяло уравнению

$$\frac{d\bar{J}^*(t_f, t)}{dt} = \frac{1}{T} (J^* - \bar{J}^*(t_f, t)), \quad \bar{J}^*(t_f, t_0) = J^0, \quad (4.2.16)$$

то

$$\bar{J}^*(t_f, t) = J^* (1 - e^{-\frac{t}{T}}) + J^0 e^{-\frac{t}{T}}, \quad (4.2.17)$$

и при достаточно большом t (практически при $t > 3T$) $\bar{J}^*(t_f, t) \approx J^*$. В результате получается соотношение, из которого можно определить управление.

Указанное соотношение имеет вид:

$$\begin{aligned}
2F_B(\bar{i}_B - i_B^*) \frac{d\bar{i}_B}{dt} + 2F_A(\bar{i}_A - i_A^*) \frac{d\bar{i}_A}{dt} + 2F_\omega(\bar{\omega} - \omega^*) \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \\
= \frac{1}{T} (J^* - \bar{J}^*),
\end{aligned}$$

где для модели (4.2.1) $\bar{J}^* \equiv \bar{J}$, $\frac{d\bar{i}_A}{dt}$, $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ определяются (4.2.10) при $F_B = 0$ и (4.2.13), а управление – выражением:

$$u = \frac{L_A}{2T} \cdot \frac{J^* - F_A \Delta \bar{i}_A^2 - F_\omega \Delta \bar{\omega}^2}{F_A \Delta \bar{i}_A \cdot W_{11} + F_\omega \Delta \bar{\omega} \cdot W_{21}}. \quad (4.2.18)$$

Для модели (4.2.2) $\bar{J}^* \equiv \bar{J}$, $\frac{d\bar{i}_B}{dt}$, $\frac{d\bar{i}_A}{dt}$, $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ определяются (4.2.10) и (4.2.15), а управление – выражением

$$\begin{aligned}
u = \frac{\frac{1}{2T} \cdot (J^* - F_B \Delta \bar{i}_B^2 - F_A \Delta \bar{i}_A^2 - F_\omega \Delta \bar{\omega}^2)}{F_B \Delta \bar{i}_B \cdot \frac{W_{11}}{L_B} + F_A \Delta \bar{i}_A \cdot \left(\frac{W_{21}}{L_B} + \frac{W_{22}}{L_A} \right) + F_\omega \Delta \bar{\omega} \cdot \left(\frac{W_{31}}{L_B} + \frac{W_{32}}{L_A} \right)}, \quad (4.2.19)
\end{aligned}$$

где $\Delta \bar{i}_B = \bar{i}_B(t_f, t, x(t)) - i_B^*$, $\Delta \bar{\omega} = \bar{\omega}(t_f, t, x(t)) - \omega^*$, $\Delta \bar{i}_A = \bar{i}_A(t_f, t, x(t)) - i_A^*$, $W_{ij} \equiv W_{ij}(t_f, t, x(t))$. При записи (4.2.19) учтено, что $W_{12} = 0$ для всех t . Это следует из четвертого уравнения (4.2.15) при $j=2$ с учетом нулевого начального условия для $W_{12}(t, t)$.

В дальнейшем будем использовать следующие параметры двигателей мощности 5 кВт с номинальным напряжением 110 В и с параметрами: для двигателя последовательного возбуждения $r_A=2$ Ом, $L_A=3$ Гн, $k_1=0,1$ Ом·с, $k_2=1$ н·м/А², $J_M=1,05$ кг/м², $k_M=0,7$ н·м·с, $T=0,01$ с, $t_f=0,5$ с, $U_{\max}=500$ В; для двигателя независимого и параллельного возбуждения – $r_B=60$ Ом, $L_B=15$ Гн, $r_A=0,7$ Ом, $L_A=0,6$ Гн, $k_1=0,37$ Ом·с, $k_2=0,8$ н·м/А², $J_M=2$ кг/м², $k_M=0,7$ н·м·с, $T=0,2$ с, $t_f=1,5$ с, $U_{\max}=500$ В.

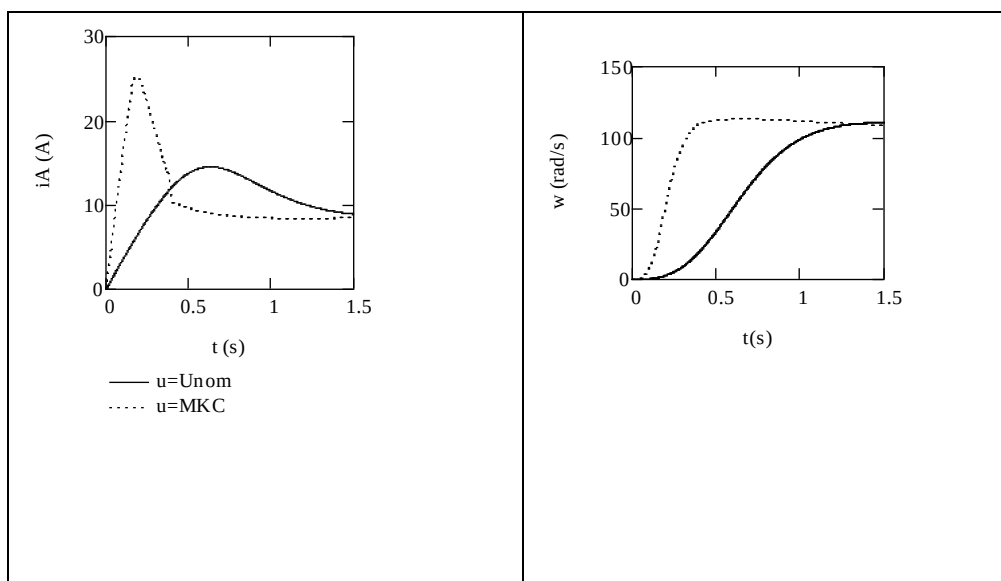
Параметры номинального режима, вычисленные по (4.1.3) и (4.2.4), следующие: для ДПТ с последовательным возбуждением $i_A^*=8,903$ А, $\omega^*=110,689$ с⁻¹; для ДПТ с независимым и параллельным возбуждением $i_B^*=1,833$ А, $i_A^*=51,956$, $\omega^*=108,614$ с⁻¹.

Из (1.1.3), (1.1.5) видно, что для расчета МКС-управления в каждый момент времени t требуется интегрировать систему дифференциальных уравнений порядка $n(1+n)$ на интервале $[t, t_f]$ (n^2 уравнений для переходной матрицы W и n уравнений для переменных конечного состояния $\bar{x}$). В распространенном на практике частном случае неотрицательно определенной квадратической целевой функции $J = x^T(t_f)Fx(t_f)$ с диагональной матрицей F , а также раздельного вхождения компонент вектора управляющих воздействий в уравнения (1.1.1) количество требуемых столбцов весовой матрицы равно размерности r вектора управлений. В этом случае порядок системы (1.1.3), (1.1.5) может быть снижен до $n(1+r)$. Так, для объекта второго порядка с одним управляющим воздействием (4.2.1) нужно четыре уравнения (см. (4.2.13)), а для объекта третьего порядка с двумя управляющими воздействиями (4.2.2) – девять уравнений (см. (4.2.15)). Поскольку моментов t , в которые рассчитывается управление, бесчисленное множество (практически – десятки и сотни), то затрачиваемое на расчет управлений время относительно велико. Поэтому часто алгоритм (1.1.3), (1.1.5) неприменим для синтеза управлений, т.е. для расчета сигналов обратных связей, формируемых управляющим компьютером в реальном времени. Существенное ускорение расчетов может быть достигнуто на пути замены численного интегрирования дифференциальных уравнений приближенными решениями.

В последующих пунктах предлагаются приближенные процедура расчета управлений, пригодные для синтеза в реальном времени, и основан-

ные на методах из второго раздела. При этом будем предполагать, что весь вектор состояния известен (т.е. измеряется) в каждый момент времени.

Ниже показаны результаты моделирования (ток i_A и скорость w) для ДПТ с моделью (4.2.1). При этом на первых двух графиках, наряду с результатами для МКС-управления (4.2.18) (пунктирные линии), показаны и сравнительные результаты для неуправляемого разгона номинальным напряжением $u = U_{nom} = 110B$ (сплошные линии). На второй паре графиков показаны зависимости от времени фактической критериальной функции и ограниченного 500В МКС-управляющего напряжения. Как видим, с помощью МКС-управления решена задача ускоренного разгона ДПТ (за 0,5с вместо 1,5с с помощью постоянного напряжения). При этом поведение критериальной функции отличается от заданного экспоненциального (4.2.17) ввиду амплитудного ограничения на управление. Тем не менее, критериальная функция к моменту завершения воздействия МКС-управления $t_{fi} = 0,4с$ близка к нулю, что и требуется. Желаемые и достигнутые к моменту t_{fi} значения тока и скорости следующие: желаемые значения, рассчитанные по (4.2.3) – 8,903 А, 110,689 c^{-1} ; фактические – 10,444А, 110,051 c^{-1} . Далее, в соответствии с принятой стратегией разгона, когда вначале под воздействием МКС-управления ДПТ выводится в точку установившихся номинальных значений, а далее МКС-управление заменяется номинальным, управление заменяется постоянным $u = 110 В$.



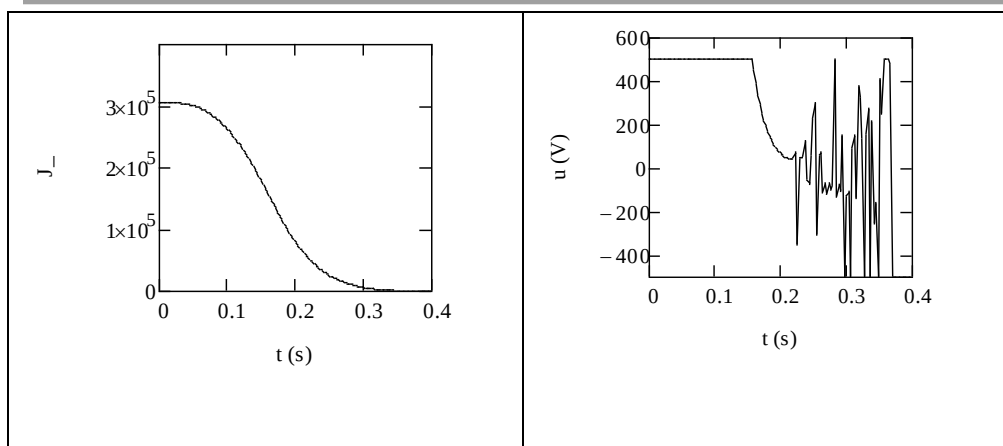


Рисунок 4.1 – Результаты применения базового МКС при разгоне ДПТ с моделью (4.2.1)

Для модели ДПТ (4.2.2) с независимым возбуждением соответствующие результаты показаны ниже (токи, i_A , i_B , скорость w). При этом на первых двух графиках, наряду с результатами для МКС-управления (4.2.19) (пунктирные линии), показаны и сравнительные результаты для неуправляемого разгона номинальным напряжением $u_A = u_B = U_{nom} = 110V$ (сплошные линии). На второй паре графиков показаны зависимости от времени фактической критериальной функции J_1 и ограниченного 500В МКС-управляющих напряжений u_B, u_A на обмотках возбуждения и якоря соответственно. Как видим, с помощью МКС-управления решена задача ускоренного разгона ДПТ (за 1,4с вместо 5с с помощью постоянного напряжения). При этом поведение критериальной функции отличается от заданного экспоненциального (4.2.17) ввиду амплитудного ограничения на управление. Тем не менее, критериальная функция к моменту завершения воздействия МКС-управления $t_{fi} = 1,4с$ близка к нулю, что и требуется. Желаемые и достигнутые к моменту t_{fi} значения тока и скорости следующие: желаемые значения, рассчитанные по (4.2.4) – $i_A^* = 51,956 A$, $i_B^* = 1,833 A$, $w^* = 108,614 s^{-1}$, $110,689 s^{-1}$; фактические, полученные посредством воздействия МКС-управления на временном интервале $[0, t_{fi}]$ – $i_A(t_{fi}) = 53,118 A$, $i_B(t_{fi}) = 1,681 A$, $w(t_{fi}) = 104,713 s^{-1}$. На интервале $[t_{fi}, t_f]$, в соответствии с описанной выше стратегией разгона, управления заменяются постоянными $u_A = u_B = 110V$.

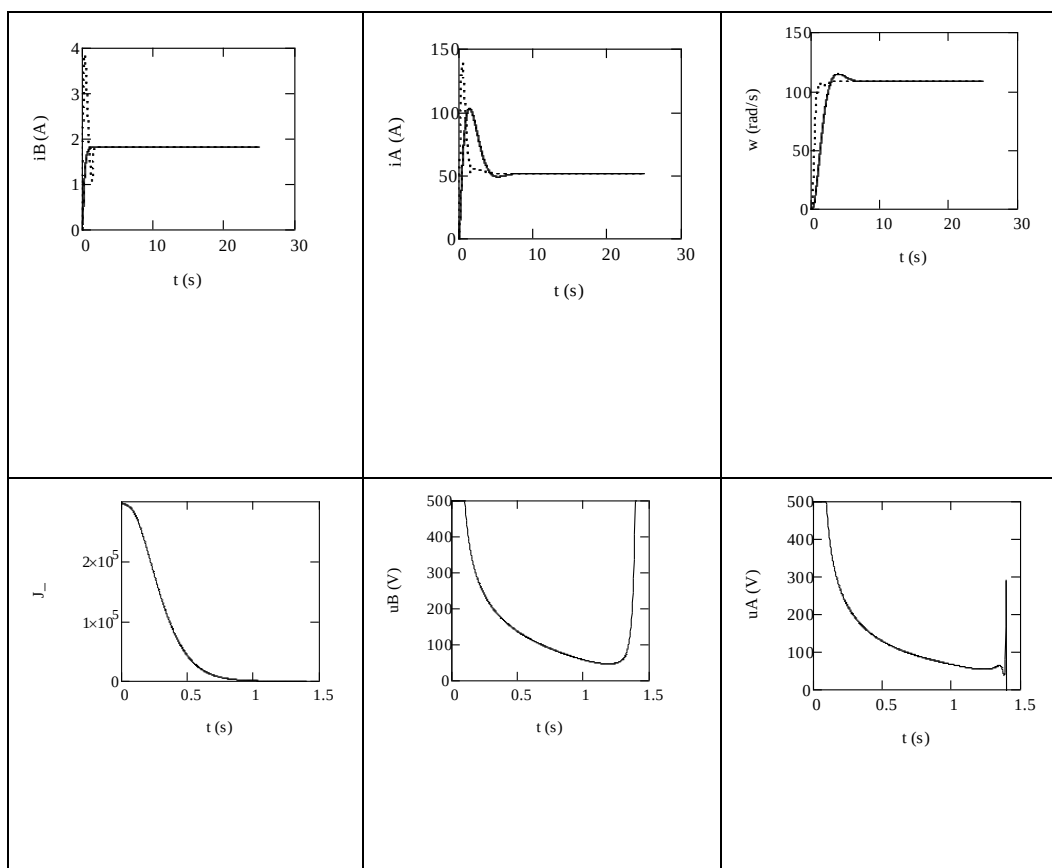


Рисунок 4.2 – Результаты применения базового МКС при разгоне ДПТ с моделью (4.2.2)

4.2.3. Управляемый разгон на основе ускоренного варианта метода конечного состояния

4.2.3.1. Ускоренный вариант на основе приближенных решений

Объектом управления примем ДПТ с последовательным возбуждением. Основным соотношением, используемым в данном случае, является формула (2.1.24) для приближенного решения системы вида (2.1.17), которую выпишем еще раз:

$$y_i(\vartheta) = y_i(t) + \sum_{k=0}^{k_i} \frac{1}{k+1} R_{ik}(t, x(t)) (\vartheta - t)^{k+1}. \quad (4.2.20)$$

Выпишем еще раз также и соотношения (2.1.22) для тейлоровских коэффициентов R_{ik} разложения правых частей (2.1.17)

$$\begin{aligned}
y_i(t) &= y_i^0, \quad R_{i0}(t, x(t)) = \Phi(t, y(t)), \\
R_{i1}(t, x(t)) &= \frac{\partial \Phi_i(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_i(t, y)}{\partial y} \bigg|_{y=y(t)} \Phi(t, y(t)), \\
R_{ik}(t, x(t)) &= \frac{1}{k} \left(\frac{\partial R_{i(k-1)}(t, x(t))}{\partial t} + \frac{\partial R_{i(k-1)}(t, x(t))}{\partial y} \bigg|_{y=y(t)} \Phi(t, x(t)) \right), \\
k &= 2, 3, \dots, k_i.
\end{aligned} \tag{4.2.21}$$

Применим (4.2.20) и (4.2.21) для приближенного решения уравнений (4.2.13). Как следует из (4.2.13), в данном случае нужны переменные конечного состояния $\bar{i}_A$, $\bar{\omega}$ и первый столбец нелинейной весовой матрицы W_{i1} , $i=1,2$. Отсюда, с использованием (4.2.13), следуют представления векторов y и R_0 модели (2.1.24):

$$\begin{aligned}
y &= (\bar{i}_A, \bar{\omega}, W_{11}, W_{21})^T, \\
R_{10} &= a_{11}\bar{i}_A + a_{12}\bar{i}_A\bar{\omega}, \quad R_{20} = a_{22}\bar{\omega} + a_{21}\bar{i}_A^2, \\
R_{30} &= a_{11}W_{11} + a_{12}(\bar{\omega}W_{11} + \bar{i}_AW_{21}), \quad R_{40} = 2a_{21}\bar{i}_AW_{11} + a_{22}W_{21}, \\
a_{11} &= -r_A / L_A, \quad a_{12} = -k_1 / L_A, \quad a_{21} = k_2 / J_M, \quad a_{22} = -k_M / J_M.
\end{aligned}$$

Элементы расширенной системы (2.1.21) при $k_i = 2$, $i = 1, 4$ следующие:

$$\bar{y} = (\bar{i}_A, \bar{\omega}, W_{11}, W_{21}, R_{10}, R_{20}, R_{30}, R_{40}, R_{11}, R_{21}, R_{31}, R_{41})^T, \quad n = 4.$$

Найдем по выражениям (2.1.22) начальные условия:

$$\begin{aligned}
\bar{y}_1(t) &\equiv \bar{i}_A(t, t) = i_A(t), \quad \bar{y}_2(t) \equiv \bar{\omega}(t, t) = \omega(t), \\
\bar{y}_3(t) &\equiv W_{11}(t, t, x(t)) = 1, \quad \bar{y}_4(t) \equiv W_{21}(t, t, x(t)) = 0, \\
\bar{y}_5(t) &\equiv R_{10}(t) = a_{11}i_A + a_{12}i_A(t)\omega(t), \\
\bar{y}_6(t) &\equiv R_{20}(t) = a_{21}i_A^2(t) + a_{22}\omega(t), \\
\bar{y}_7(t) &\equiv R_{30}(t) = a_{11}W_{11}(t, t, x(t)) + \\
&\quad + a_{12}(\omega(t)W_{11}(t, t, x(t)) + i_A(t)W_{21}(t, t, x(t))) = a_{11} + a_{12}\omega(t), \\
\bar{y}_8(t) &\equiv R_{40}(t) = 2a_{21}i_A(t)W_{11}(t, t, x(t)) + a_{22}W_{21}(t, t, x(t)) = 2a_{21}i_A(t), \\
\bar{y}_9(t) &\equiv R_{11}(t) = a_{11}R_{10}(t) + a_{12}(R_{10}(t)\omega(t) + i_A(t)R_{20}(t)), \\
\bar{y}_{10}(t) &\equiv R_{21}(t) = 2a_{21}(i_A(t)R_{10}(t) + a_{22}R_{20}(t)), \\
\bar{y}_{11}(t) &\equiv R_{31}(t) = a_{11}R_{30}(t) + a_{12}(R_{20}(t)W_{11}(t, t, x(t)) + \omega(t)R_{30}(t)) + \\
&\quad + a_{12}(R_{10}(t)W_{21}(t, t, x(t)) + i_A(t)R_{40}(t)) = \\
&= a_{11}R_{30}(t) + a_{12}(R_{20}(t) + \omega(t)R_{30}(t) + i_A(t)R_{40}(t)), \\
\bar{y}_{12}(t) &\equiv R_{41}(t) = 2a_{21}[R_{10}(t)W_{11}(t, t, x(t)) + i_A(t)R_{30}(t)] + a_{22}R_{40}(t) = \\
&= 2a_{21}[R_{10}(t) + i_A(t)R_{30}(t)] + a_{22}R_{40}(t).
\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

Рассчитанные по этим формулам значения подставляются в выражение (2.1.24), из которого определяются все требуемые для расчета управления (4.2.18) данные, а именно:

$$\bar{i}_A(t_f, t) \cong y_1(t_f), \bar{\omega}(t_f, t) \cong y_2(t_f),$$

$$W_{11}(t_f, t, x(t)) \cong y_3(t_f), W_{21}(t_f, t, x(t)) \cong y_4(t_f).$$

Окончательный вид приближенных расчетных формул для переменных конечного состояния и требуемого первого столбца нелинейной переходной матрицы следующий:

$$\begin{aligned} y_1 &\equiv \bar{i}_A(t_f, t, x(t)) = i_A(t) + R_{10}(t, x(t)) \cdot (t_f - t) + \frac{1}{2} R_{11}(t, x(t)) \cdot (t_f - t)^2, \\ y_2 &\equiv \bar{\omega}(t_f, t, x(t)) = \omega(t) + R_{20}(t, x(t)) \cdot (t_f - t) + \frac{1}{2} R_{21}(t, x(t)) \cdot (t_f - t)^2, \\ y_3 &\equiv W_{11}(t_f, t, x(t)) = 1 + R_{30}(t, x(t)) \cdot (t_f - t) + \frac{1}{2} R_{31}(t, x(t)) \cdot (t_f - t)^2, \\ y_4 &\equiv W_{21}(t_f, t, x(t)) = R_{40}(t, x(t)) \cdot (t_f - t) + \frac{1}{2} R_{41}(t, x(t)) \cdot (t_f - t)^2 \\ R_{10}(t, x(t)) &= a_{11}i_A(t) + a_{12}i_A(t)\omega(t), R_{20}(t, x(t)) = a_{22}\omega(t) + a_{21}[i_A(t)]^2, \\ R_{30}(t, x(t)) &= a_{11} + a_{12}\omega(t), R_{40}(t, x(t)) = 2a_{21}i_A(t), \\ R_{11}(t, x(t)) &= a_{11}R_{10}(t) + a_{12}(R_{10}(t, x(t))\omega(t) + i_A(t)R_{20}(t, x(t))), \\ R_{21}(t, x(t)) &= 2a_{21}(i_A(t)R_{10}(t, x(t)) + a_{22}R_{20}(t, x(t))), \\ R_{31}(t, x(t)) &= a_{11}R_{30}(t, x(t)) + a_{12}(R_{20}(t, x(t)) + \omega(t)R_{30}(t, x(t)) + i_A(t)R_{40}(t, x(t))), \\ R_{41}(t, x(t)) &= 2a_{21}[R_{10}(t, x(t)) + i_A(t)R_{30}(t, x(t))] + a_{22}R_{40}(t, x(t)), \\ a_{11} &= -r_A / L_A, a_{12} = -k_1 / L_A, a_{21} = k_2 / J_M, a_{22} = -k_M / J_M. \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

Алгоритм (4.2.18), где «точный» расчет переменных конечного состояния и столбца переходной матрицы (4.2.13) заменен приближенным ускоренным расчетом по выражениям (4.2.23), реализован в компьютерной программе.

Графики переходных процессов системы (4.2.1), полученные с помощью этой программы, для различных режимов коммутации, приведены на рисунке 4.3.

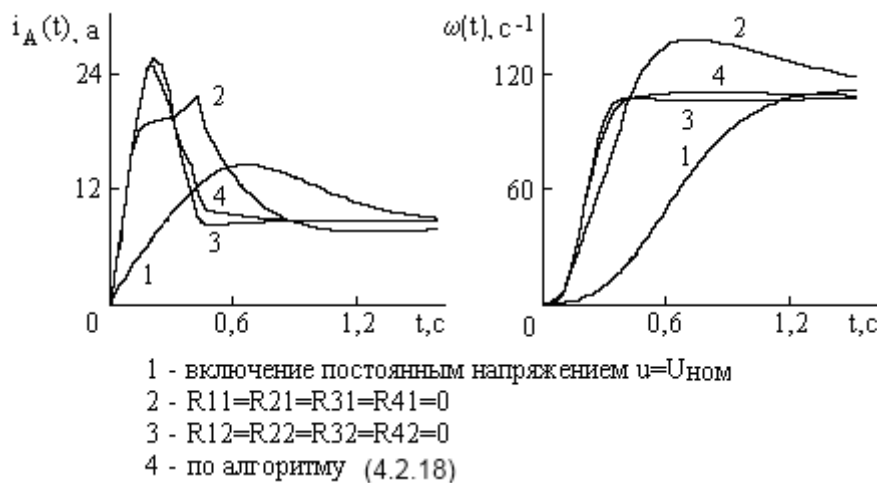


Рисунок 4.3 – Переходные процессы по току и скорости при разгоне ДПТ с последовательным возбуждением

Численные значения параметров двигателя приведены в пункте 4.2.1. Интегрирование дифференциальных уравнений выполнялось методом Рунге-Кутты четвертого порядка на интервале от 0 до t_f с управлением (4.2.18) и далее продолжалось до $t_f=1,5$ с при номинальном входном напряжении $u = U_{ном} = 110$ В. Весовые коэффициенты $F_A = F_B = 1$, $F_\omega = 25$, что объясняется желанием в большей мере управлять скоростью двигателя. Управляющие напряжения ограничивались значением $U_{max} = 500$ В.

Кривые 1 соответствуют неуправляемому режиму коммутации, когда на двигатель подается постоянное питающее напряжение, равное номинальному. Кривые 2, 3 получены для управляемой коммутации по алгоритму (4.2.18), (2.36), (4.2.20) с различным количеством учитываемых членов тейлоровских разложений (4.2.22), а кривые 4 – управляемой коммутации по «точному» алгоритму (4.2.18), (4.2.13), в котором переменные конечного состояния и весовые функции определялись многократным интегрированием системы уравнений. По кривым 2 и 3 хорошо видно, как использование большего количества членов тейлоровских разложений приближает процессы к «точной» реализации (4.2.18), (4.2.13) метода конечных состояний, представленной кривыми 4. Так, кривые 3, соответствующие учету членов R_{i0} и R_{i1} , практически совпадают с кривыми 4, в то время как при учете только одного члена R_{i0} (кривые 2) наблюдается заметное различие. Конечные значения тока и скорости для режима коммутации, соответствующего кривым 4, равны: $i_A(t_f) = 8,7$ А, $\omega(t_f) = 106,7$ с⁻¹, что достаточно близко к значениям для номинального режима (соответственно 8,66 и 106,58). Время переходных процессов по току и скорости равно $t_f = 0,4$ с, что более чем в три раза меньше времени переходного процесса при неуправляемой коммутации. Недостатком алгоритмов управляемой коммутации является увеличенное до 27А пиковое значение тока, что больше соответствующего значения 14А при включении постоянным напряжением.

И, наконец, сравнивая базовый (4.2.18), (4.2.13) и модифицированный (4.2.18), (2.1.24), (4.2.22) методы по времени, приведем следующие данные: соотношение времен моделирования 1,5с работы системы (4.2.1) с базовым и модифицированным алгоритмами управления равно примерно четырем. Отметим также, что модифицированный алгоритм содержит 37 операций умножения и деления, 20 операций сложения и вычитания и несколько логических операций. Приведенные данные свидетельствуют, во-первых, о существенном уменьшении времени расчета модифицированного управления в сравнении со временем расчета базового управления, и, во-вторых, о

возможности реализации модифицированного управления в реальном времени.

Следует отметить также, что достаточное количество учитываемых членов тейлоровского разложения (2.1.18) в данном случае оказалось весьма малым – всего по два члена для каждого из четырех элементов вектора y ($R_{i0}, R_{i1}, i = 1, 2, 3, 4$).

Существует возможность расчета элементов нелинейных переходных матриц $W_{ij}(t_f, t, x(t))$ через переменные конечного состояния по соотношению (1.1.9). При этом вектор $y = (\bar{i}_A, \bar{\omega})^T$, расширенный вектор $\bar{y} = (\bar{i}_A, \bar{\omega}, R_{10}, R_{20})^T$, а $n = 2$. Элементы же весовой матрицы рассчитываются по выражениям:

$$W_{11}(t_f, t, x(t)) = \frac{\partial \bar{i}_A(t_f, t, x(t))}{\partial i_A}, \quad W_{21}(t_f, t, x(t)) = \frac{\partial \bar{\omega}(t_f, t, x(t))}{\partial i_A}. \quad (4.2.24)$$

Поскольку в данном случае выражение (4.2.20) конкретизируется в виде:

$$\begin{aligned} y_1 &\equiv \bar{i}_A(t_f, t, x(t)) = i_A(t) + R_{10}(t, x(t)) \cdot (t_f - t) + \frac{1}{2} R_{11}(t, x(t)) \cdot (t_f - t)^2, \\ y_2 &\equiv \bar{\omega}(t_f, t, x(t)) = \omega(t) + R_{20}(t, x(t)) \cdot (t_f - t) + \frac{1}{2} R_{21}(t, x(t)) \cdot (t_f - t)^2, \\ R_{10}(t, x(t)) &= a_{11}i_A(t) + a_{12}i_A(t)\omega(t), \quad R_{20}(t, x(t)) = a_{22}\omega(t) + a_{21}[i_A(t)]^2, \\ R_{11}(t, x(t)) &= a_{11}R_{10}(t) + a_{12}(R_{10}(t, x(t))\omega(t) + i_A(t)R_{20}(t, x(t))), \\ R_{21}(t, x(t)) &= 2a_{21}(i_A(t)R_{10}(t, x(t)) + a_{22}R_{20}(t, x(t))), \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

то

$$\begin{aligned} W_{11}(t_f, t, x(t)) &= 1 + \frac{\partial R_{10}(t, x(t))}{\partial i_A}(t_f - t) + \frac{1}{2} \frac{\partial R_{11}(t, x(t))}{\partial i_A}(t_f - t)^2, \\ W_{21}(t_f, t, x(t)) &= \frac{\partial R_{20}(t, x(t))}{\partial i_A}(t_f - t) + \frac{1}{2} \frac{\partial R_{21}(t, x(t))}{\partial i_A}(t_f - t)^2, \\ \frac{\partial R_{10}(t, x(t))}{\partial i_A} &= a_{11} + a_{12}\omega(t), \\ \frac{\partial R_{11}(t, x(t))}{\partial i_A} &= a_{11} \frac{\partial R_{10}(t, x(t))}{\partial i_A} + a_{12} \left[\frac{\partial R_{10}(t, x(t))}{\partial i_A} \omega(t) + R_{20}(t, x(t)) + \frac{\partial R_{20}(t, x(t))}{\partial i_A} i_A \right], \\ \frac{\partial R_{20}(t, x(t))}{\partial i_A} &= 2a_{21}i_A, \\ \frac{\partial R_{21}(t, x(t))}{\partial i_A} &= 2a_{21}R_{10}(t, x(t)) + 2a_{21}i_A \frac{\partial R_{10}(t, x(t))}{\partial i_A} + a_{22} \frac{\partial R_{20}(t, x(t))}{\partial i_A}. \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

Алгоритм (4.2.25), (4.2.26) также реализован в вышеупомянутой программе. Сравнительный анализ показал, что для данного примера алгоритмы (4.2.23) и (4.2.25), (4.2.26) дают практически одни и те же результаты и имеют одинаковую сложность (в (4.2.25), (4.2.26) 39 операций умножения и деления, 20 операций сложения и вычитания).

На данном примере проверялся также и вариант цепочечной реализации выделенных нелинейностей. В качестве выделенных нелинейностей определены следующие функции (здесь и далее тройку аргументов $(\mathcal{G}, t, x(t))$ для краткости записей будем указывать только в левых частях):

$$r_{10}(\mathcal{G}, t, x(t)) = \bar{i}_A \bar{\omega}, \quad r_{20}(\mathcal{G}, t, x(t)) = (\bar{i}_A)^2.$$

Тогда по соотношениям (4.2.21) получаем:

$$r_{11}(\mathcal{G}, t, x(t)) = \frac{dr_{10}}{dt} = \frac{\partial r_{10}}{\partial \bar{i}_A} \cdot \frac{d\bar{i}_A}{dt} + \frac{\partial r_{10}}{\partial \bar{\omega}} \cdot \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\omega} [a_{11} \bar{i}_A + a_{12} \bar{i}_A \bar{\omega}] + \bar{i}_A [a_{22} \bar{\omega} + a_{21} (\bar{i}_A)^2],$$

$$r_{21}(\mathcal{G}, t, x(t)) = \frac{dr_{20}}{dt} = \frac{\partial r_{20}}{\partial \bar{i}_A} \cdot \frac{d\bar{i}_A}{dt} + \frac{\partial r_{20}}{\partial \bar{\omega}} \cdot \frac{d\bar{\omega}}{dt} = 2\bar{i}_A [a_{11} \bar{i}_A + a_{12} \bar{i}_A \bar{\omega}],$$

где $a_{11} = -r_A / L_A$, $a_{12} = -k_1 / L_A$, $a_{21} = k_2 / J_M$, $a_{22} = -k_M / J_M$.

В результате вместо нелинейной системы (4.2.13) получается линеаризованная система:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{i}_A(\mathcal{G}, t, x(t))}{dt} &= a_{11} \bar{i}_A + a_{12} r_{10}, \\ \frac{d\bar{\omega}(\mathcal{G}, t, x(t))}{dt} &= a_{22} \bar{\omega} + a_{21} r_{20}, \\ \frac{dr_{10}(\mathcal{G}, t, x(t))}{dt} &= r_{11}, \\ \frac{dr_{11}(\mathcal{G}, t, x(t))}{dt} &= 0, \\ \frac{dr_{20}(\mathcal{G}, t, x(t))}{dt} &= r_{21}, \\ \frac{dr_{21}(\mathcal{G}, t, x(t))}{dt} &= 0, \\ \mathcal{G} &\in [t, t_f] \end{aligned} \tag{4.2.27}$$

$$\bar{i}_A(t, t, x(t)) = i_A(t), \quad \bar{\omega}(t, t, x(t)) = \omega(t),$$

$$r_{10}(t, t, x(t)) = i_A(t) \omega(t),$$

$$r_{11}(t, t, x(t)) = \omega(t) [a_{11} i_A(t) + a_{12} i_A(t) \omega(t)] + i_A(t) [a_{22} \omega(t) + a_{21} (i_A(t))^2]$$

$$r_{20}(t, t, x(t)) = (i_A(t))^2,$$

$$r_{21}(t, t, x(t)) = 2i_A(t) [a_{11} i_A(t) + a_{12} i_A(t) \omega(t)]$$

$$a_{11} = -r_A / L_A, \quad a_{12} = -k_1 / L_A, \quad a_{21} = k_2 / J_M, \quad a_{22} = -k_M / J_M.$$

Система (4.2.27) имеет аналитическое решение. В частности, интересующие нас переменные конечного состояния определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \bar{i}_A(t_f, t, x(t)) &= \left[-a_{12} \frac{(a_{11} r_{10}(t, t, x(t)) + r_{11}(t, t, x(t)))}{a_{11}^2} \right] - \left[(t_f - t) r_{11}(t, t, x(t)) \frac{a_{12}}{a_{11}} \right] + \\ &+ \exp(a_{11}(t_f - t)) \frac{a_{11} a_{12} r_{10}(t, t, x(t)) + a_{12} r_{11}(t, t, x(t)) + a_{11}^2 i_A(t)}{a_{11}^2}, \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(t_f, t, x(t)) = & \left[-a_{21} \frac{(a_{22}r_{20}(t, t, x(t)) + r_{21}(t, t, x(t)))}{a_{22}^2} \right] - \left[(t_f - t)r_{21}(t, t, x(t)) \frac{a_{21}}{a_{22}} \right] + \\ & + \exp(a_{22}(t_f - t)) \frac{a_{22}a_{21}r_{20}(t, t, x(t)) + a_{21}r_{21}(t, t, x(t)) + a_{22}^2\omega(t)}{a_{22}^2}, \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

Определяя столбец переходной матрицы по (2.1.18), имеем:

$$\begin{aligned} W_{11}(t_f, t, x(t)) = & \left[-a_{12} \frac{(a_{11}\partial r_{10}(t, t, x(t))/\partial i_A + \partial r_{11}(t, t, x(t))/\partial i_A)}{a_{11}^2} \right] - \\ & - \left[(t_f - t)\partial r_{11}(t, t, x(t))/\partial i_A \frac{a_{12}}{a_{11}} \right] + \\ & + \exp(a_{11}(t_f - t)) \frac{a_{11}a_{12}\partial r_{10}(t, t, x(t))/\partial i_A + a_{12}\partial r_{11}(t, t, x(t))/\partial i_A + a_{11}^2}{a_{11}^2}, \\ W_{21}(t_f, t, x(t)) = & \left[-a_{21} \frac{(a_{22}\partial r_{20}(t, t, x(t))/\partial i_A + \partial r_{21}(t, t, x(t))/\partial i_A)}{a_{22}^2} \right] - \\ & - \left[(t_f - t)\partial r_{21}(t, t, x(t))/\partial i_A \frac{a_{21}}{a_{22}} \right] + \\ & + \exp(a_{22}(t_f - t)) \frac{a_{22}a_{21}\partial r_{20}(t, t, x(t))/\partial i_A + a_{21}\partial r_{21}(t, t, x(t))/\partial i_A}{a_{22}^2}, \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

Входящие в последнее выражение производные вычисляются по начальным условиям из (2.1.21) и определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{10}(t, t, x(t))}{\partial i_A} = \omega(t), \quad \frac{\partial r_{11}(t, t, x(t))}{\partial i_A} = \omega(t)(a_{11} + a_{12}\omega(t)) + a_{22}\omega(t) + 3a_{21}(i_A(t))^2, \\ \frac{\partial r_{20}(t, t, x(t))}{\partial i_A} = 2i_A(t), \quad \frac{\partial r_{21}(t, t, x(t))}{\partial i_A} = 2a_{11}i_A(t) + 2a_{12}i_A(t)\omega(t) + 2i_A(t)(a_{11} + a_{12}\omega(t)). \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

Проверка алгоритма (4.2.28 – 4.2.31) показала его работоспособность и несколько большую точность в сравнении с алгоритмами (4.2.23) и (4.2.25), (4.2.26). Так, при заданных значениях $i_A^* = 8,66A$, $\omega^* = 106,58c^{-1}$ к моменту $t_f = 0,5c$ достигнуты: с помощью алгоритмов (4.2.23) и (4.2.25), (4.2.26) – $8,30A$ и $106,75c^{-1}$, а с помощью алгоритма (4.2.28 – 4.2.31) – $8,80A$ и $106,65c^{-1}$. Однако при этом значительно возросло количество операций умножения/деления (с 37 и 39 до 66), сложения/вычитания (с 20 до 31). К этому следует добавить две экспоненты, зависящие от временного аргумента, которые можно рассчитать один раз и хранить в памяти компьютера.

Проанализируем еще одну возможность решения линеаризованной системы (4.2.27) – через ее переходную матрицу $W^L(t_f, t)$. Указанную матрицу можно рассчитать один раз по уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dW^L(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= AW^L, \\ \vartheta \in [t, t_f], W^L(t_0, t_0) &= I. \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

где I – единичная матрица, A – (6×6) -матрица системы (4.2.27), и сохранить каждый из элементов матрицы W в N узлах интерполяции.

Элементы вектора $y = (\bar{i}_A \quad \bar{\omega} \quad r_{10} \quad r_{11} \quad r_{20} \quad r_{21})^T$ по известной формуле Коши-Лагранжа определяются выражением:

$$y(t_f, t, x(t)) = W^L(t_f, t)y(t, t, x(t)), \quad (4.2.33)$$

где $y(t, t, x(t))$ определены в (4.2.27)

Искомые переменные конечного состояния являются первыми двумя компонентами вектора $y(t_f, t, x(t))$, для определения которых в каждый момент текущего времени t нужны $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$ операций умножения и $2 \cdot 5 = 10$ операций сложения только при выполнении векторно-матричного умножения. Кроме того, расчет компонентов вектора $y(t, t, x(t))$ (см. (4.2.27) требует 15 операций умножения и 4 операций сложения. Итого, для расчета только переменных конечного состояния $\bar{i}_A(t_f, t, x(t))$, $\bar{\omega}(t_f, t, x(t))$ требуется 87 операций умножения и 14 операций сложения.

Что касается элементов нелинейной переходной матрицы, то для их определения согласно (4.2.24) продифференцируем (4.2.33):

$$\begin{aligned} W_{11}(t_f, t, x(t)) &= \frac{\partial \bar{i}_A(t_f, t, x(t))}{\partial i_A} \equiv \frac{\partial y_1(t_f, t, x(t))}{\partial i_A} = \sum_{j=1}^6 W_{1j}^L(t_f, t) \frac{\partial y_j(t, t, x(t))}{\partial i_A}, \\ W_{21}(t_f, t, x(t)) &= \frac{\partial \bar{\omega}(t_f, t, x(t))}{\partial i_A} \equiv \frac{\partial y_2(t_f, t, x(t))}{\partial i_A} = \sum_{j=1}^6 W_{2j}^L(t_f, t) \frac{\partial y_j(t, t, x(t))}{\partial i_A}. \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

Для выполнения векторно-матричного умножения в (4.2.34) потребуется 72 операции умножения и 10 операций сложения, а для расчета $\frac{\partial y_j(t, t, x(t))}{\partial i_A}$ – еще 13 операций умножения и 4 операции сложения. Всего для расчета вектора $y(t_f, t, x(t))$ требуется 172 операции умножения и 18 операций сложения. К этому следует добавить операции вычисления по интерполяционным формулам, количество которых зависит от их вида и количества узлов интерполяции. Так, для реализации кусочно-линейной интерполяции по формуле

$$w = w_{i-1} + \frac{w_i - w_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}),$$

где w обозначен некоторый элемент матрицы W , индексами $i, i-1$ обозначены номера узлов интерполяции, на каждый элемент (а всего их 36) требуется одна операция умножения и четыре операции сложения/вычитания, т.е. всего 36 операций умножения и 144 операции сложения/вычитания. Исполь-

зуются также и логические операции для перехода к следующему узлу интерполяции. Таким образом, для рассматриваемого примера и способа решения (4.2.27) через переходную матрицу общее количество арифметических операций в несколько раз больше, чем у рассматриваемых ранее способов. Тем не менее, данный способ может оказаться и более экономным в случае, когда, например, имеется всего один выделенный нелинейный член и необходимое для обеспечения приемлемой точности количество членов его тейлоровского разложения меньше количества тейлоровских членов всей правой части.

Что касается ДПТ с независимым или параллельным возбуждением, представленным моделью (4.2.2), то ни один из примененных выше способов ускорения расчетов переменных конечного состояния и переходной матрицы не привел к успеху. В то же время базовый МКС оказался вполне работоспособным (см. данные рисунка 4.2). В пункте 4.2.4, посвященном идентификации, для ДПТ с моделью (4.2.2) проблема ускоренного МКС на основе аналитических решений систем вида (1.1.3, 1.1.5) решена с помощью искусственных нейронных сетей.

4.2.3.2. Ускоренный вариант на основе двухэтапного подхода

Для задачи (4.2.1) применение двухэтапного МКС, описанного в пункте 2.1.4, усложняется ввиду меньшей, чем нужно, размерности вектора управления u . В данном случае можно попробовать использовать двухэтапный метод в «урезанном» варианте, а именно: на первом этапе вместо задачи (2.1.34) с вектором v рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} J &= J(x(t_f)) \rightarrow J^*, \\ \frac{di_A}{dt} &= v, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{k_M}{J_M} \omega + \frac{k_2}{J_M} i_A^2, \\ t &\in [t_0, t_f], i_A(t_0) = i_A^0, \omega(t_0) = \omega^0, \\ x_1 &\equiv i_A, x_2 \equiv \omega. \end{aligned} \tag{4.2.35}$$

Критерий $J(x(t_f))$ определяется выражением (4.2.5) при $F_B = 0$.

На втором этапе выразим искомое управление u из уравнения

$$v = -\frac{r_A}{L_A} i_A - \frac{k_1}{L_A} i_A \omega + \frac{1}{L_A} u, \quad (4.2.36)$$

т.е.:

$$u = L_A v + \frac{r_A}{L_A} i_A + \frac{k_1}{L_A} i_A \omega \quad (4.2.37)$$

Соответствующие выкладки приведены ниже.

Получаем для задачи (4.2.35):

$$\Phi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k_M}{J_M} \omega + \frac{k_2}{J_M} i_A^2 \end{pmatrix}, \quad B_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} i_A \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (4.2.38)$$

$$A_v \equiv \frac{\partial \Phi_v}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2k_2}{J_M} \bar{i}_A & -\frac{k_M}{J_M} \end{pmatrix}. \quad (4.2.39)$$

Уравнения для переменных конечного состояния и элементов переходной матрицы теперь следующие (аргумент $x(t)$ для краткости записей опустим):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{i}_A(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= 0, \\ \frac{d\bar{\omega}(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= -\frac{k_M}{J_M} \bar{\omega}(\vartheta, t) + \frac{k_2}{J_M} [\bar{i}_A(\vartheta, t)]^2, \\ \frac{dW_{11}(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= -\frac{k_1}{L_A} \bar{i}_A(\vartheta, t) W_{21}(\vartheta, t), \\ \frac{dW_{21}(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= -2 \frac{k_2}{J_M} \bar{i}_A(\vartheta, t) W_{11}(\vartheta, t) - \frac{k_M}{J_M} W_{21}(\vartheta, t), \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

$$\vartheta \in [t, t_f], \quad \bar{i}_A(t, t) = i_A(t), \quad \bar{\omega}(t, t) = \omega(t),$$

$$W_{11}(t, t) = 1, \quad W_{21}(t, t) = 0.$$

Из (4.2.40) следует упрощенная система:

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{\omega}(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= -\frac{k_M}{J_M} \bar{\omega}(\vartheta, t) + \frac{k_2}{J_M} [i_A(t)]^2, \\
\frac{dW_{11}(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= -\frac{k_1}{L_A} i_A(t) W_{21}(\vartheta, t), \\
\frac{dW_{21}(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= -2 \frac{k_2}{J_M} i_A(t) W_{11}(\vartheta, t) - \frac{k_M}{J_M} W_{21}(\vartheta, t), \\
\vartheta &\in [t, t_f], \quad \bar{\omega}(t, t) = \omega(t), \\
W_{11}(t, t) &= 1, \quad W_{21}(t, t) = 0.
\end{aligned} \tag{4.2.41}$$

Из первого уравнения (4.2.41) следует (последнее слагаемое от переменной интегрирования ϑ не зависит):

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}(\vartheta, t) &= \bar{\omega}(t, t) \cdot \exp\left(-\frac{J_M}{k_M}(\vartheta - t)\right) + \\
&+ \left(1 - \exp\left(-\frac{J_M}{k_M}(\vartheta - t)\right)\right) \cdot \frac{k_2}{J_M} [i_A(t)]^2
\end{aligned} \tag{4.2.42}$$

Таким образом, для численного интегрирования остаются только уравнения для столбца переходной матрицы:

$$\begin{aligned}
\frac{dW_{11}(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= -\frac{k_1}{L_A} i_A(t) W_{21}(\vartheta, t), \\
\frac{dW_{21}(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= -2 \frac{k_2}{J_M} i_A(t) W_{11}(\vartheta, t) - \frac{k_M}{J_M} W_{21}(\vartheta, t), \\
\vartheta &\in [t, t_f], \quad W_{11}(t, t) = 1, \quad W_{21}(t, t) = 0.
\end{aligned} \tag{4.2.43}$$

Таким образом, применение двухэтапного подхода для задачи (4.2.1) позволило уменьшить трудоемкость расчетов – вместо системы (4.2.40) четвертого порядка имеем трансцендентное соотношение (4.2.42) и численно интегрируемую систему второго порядка (4.2.43). Управление же по-прежнему определяется соотношением (4.2.18). В этом и состоит преимущество применения двухэтапного МКС для задачи (4.2.1).

На рисунке 4.4 показаны результаты моделирования ДПТ с моделью 4.2.1 двухэтапным МКС при тех же параметрах и обозначениях, что и на рисунке 4.1.

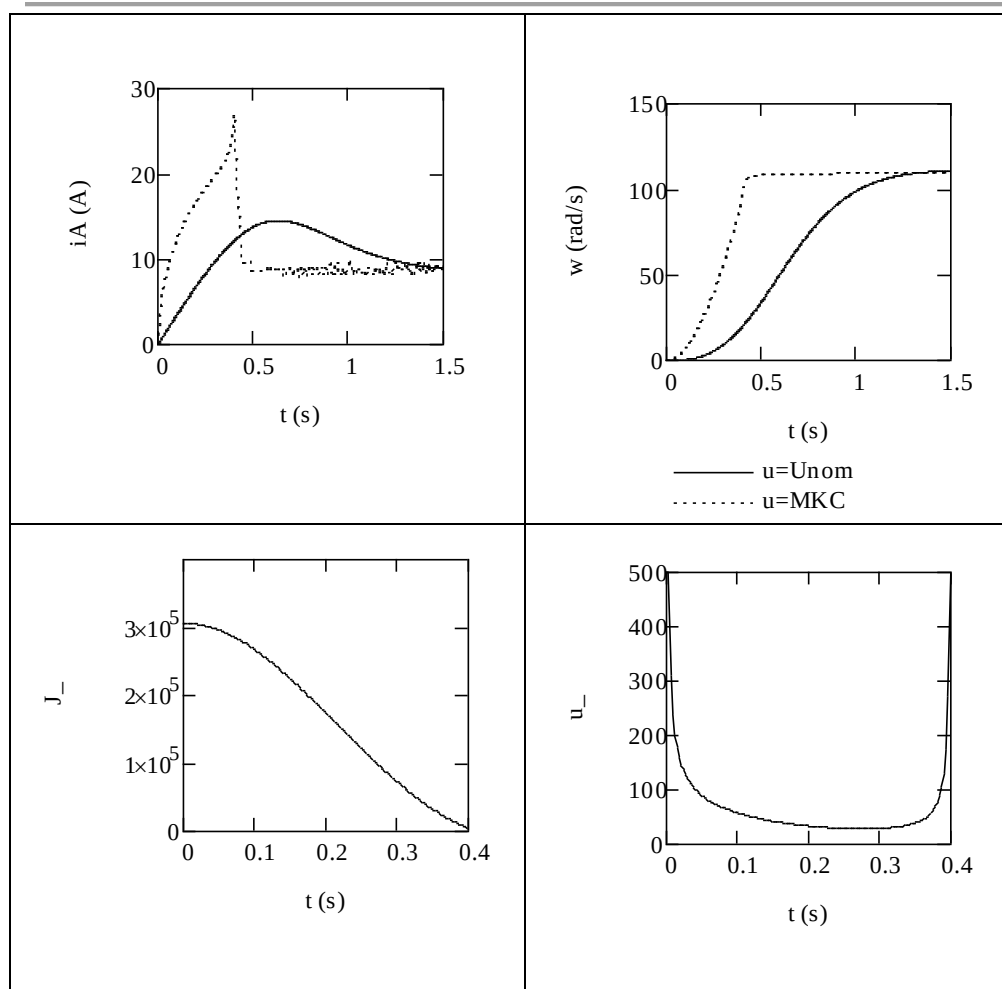


Рисунок 4.4 – Результаты применения двухэтапного МКС при разгоне ДПТ с моделью (4.2.1) в случае $T = 0,3$ с

Из второго графика видно, что время переходного процесса по скорости – порядка 0,4с, что несколько меньше 0,5с для случая разгона посредством базового МКС (см. рисунок 4.1). В отличие от базового МКС, здесь можно реализовать и замедленный разгон («мягкий» пуск). Так, при значении параметра $T = 3$ с указанное время близко к 5с, а сам процесс - аperiodический. Это особенно важно именно для серийных двигателей, используемых в электротранспорте.

Применим двухэтапный подход к модели (4.2.2). В отличие от критерия (4.2.5), который применялся в базовом МКС и в двухэтапном МКС для модели (4.2.1), зададимся упрощенным критерием

$$J = F_{\omega} \left(\omega(t_f) - \omega^* \right)^2 \rightarrow J^*. \quad (4.2.44)$$

Соответственно, выражение для критериальной функции имеет вид:

$$\bar{J}(t_f, t, z(t)) = F_{\omega} \left(\bar{\omega}(t_f, t, z(t)) - \omega^* \right)^2 \rightarrow J^*,$$

где $z = \text{colon}(i_A, i_B, \omega)$.

Смысл (4.2.44) – приведение скорости ω за время t_f к заданному значению ω^* . В отличие от критерия (4.2.5), используемого ранее, данный критерий отображает другую стратегию разгона, без промежуточного приведения токов к номинальным значениям. С этим критерием решение задачи упростилось без потери основной цели – разгона двигателя до заданной скорости.

Далее производим преобразования и выкладки для применения двух-этапного метода.

$$\begin{aligned} \frac{di_A}{dt} &= u d_1, \\ \frac{di_B}{dt} &= u d_2, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{1}{J_M} k_M \omega + \frac{k_2}{J_M} i_A i_B, \end{aligned} \quad (4.2.45)$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J_M} k_M \omega + \frac{k_2}{J_M} i_A i_B \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial z} = 2 F_{\omega} \left(\bar{\omega}(t_f, t) - \omega^* \right).$$

$$\frac{d\bar{z}(\vartheta, t, z(t))}{d\vartheta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J_M} k_M \bar{\omega} + \frac{k_2}{J_M} \bar{i}_A \bar{i}_B \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [t, t_f], \quad \bar{z}(t) = z(t). \quad (4.2.46)$$

$$\bar{z}_0(t) = z_0(t) \equiv i_A(t), \quad z_1(t) = z_1(t) \equiv i_B(t).$$

$$\bar{\omega}(\vartheta, t, z(t)) = \bar{\omega}(t, t, z(t)) + \frac{k_2 i_A(t) i_B(t)}{J_M} \left(1 - \exp \left(-\frac{k_M}{J_M} (\vartheta - t) \right) \right).$$

Тогда $G = \frac{\partial J}{\partial z} WB$,

$\frac{dW}{d\vartheta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_2 \bar{i}_B}{J_M} & \frac{k_2 \bar{i}_A}{J_M} & -\frac{k_M}{J_M} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{pmatrix}$	(4.2.47)

$$ud(t, xd(t)) = Gd^+ \cdot f_J,$$

$$G_d^+ = G_d^T (G_d G_d^T)^{-1},$$

$$G_d = \frac{\partial J(z)}{\partial z} \Big|_{z=\bar{z}(t_f, t, z(t))} \cdot W(t_f, t, z(t)) B(t, z(t)) = \frac{\partial J(z)}{\partial z} \Big|_{z=\bar{z}(t_f, t, z(t))} WB =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2F_w(\bar{\omega} - \omega^*) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2F_w(\bar{\omega} - \omega^*) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & 0 \\ W_{21} & W_{22} & 0 \\ W_{31} & W_{32} & 0 \end{pmatrix} = 2F_w(\bar{\omega} - \omega^*) \cdot (W_{31} \quad W_{32} \quad 0)$$

$$z \equiv xd, \bar{z} = z = xd.$$

$$\begin{aligned}
G_d^+ &= \\
&= \begin{pmatrix} 2F_\omega(\bar{\omega} - \omega^*)W_{31} \\ 2F_\omega(\bar{\omega} - \omega^*)W_{32} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2F_\omega(\bar{\omega} - \omega^*)W_{31} & 2F_\omega(\bar{\omega} - \omega^*)W_{32} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2F_\omega(\bar{\omega} - \omega^*)W_{31} \\ 2F_\omega(\bar{\omega} - \omega^*)W_{32} \\ 0 \end{pmatrix}^{-1} = \\
&= \begin{pmatrix} 2F_\omega(\bar{\omega} - \omega^*)W_{31} \\ 2F_\omega(\bar{\omega} - \omega^*)W_{32} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(4F_\omega^2(\bar{\omega} - \omega^*)^2 \cdot (W_{31})^2 + 4F_\omega^2(\bar{\omega} - \omega^*)^2 \cdot (W_{32})^2 \right)^{-1} = \\
&= \begin{pmatrix} 2F_\omega(\bar{\omega} - \omega^*)W_{31} \\ 2F_\omega(\bar{\omega} - \omega^*)W_{32} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{4F_\omega^2(\bar{\omega} - \omega^*)^2 \cdot (W_{31})^2 + 4F_\omega^2(\bar{\omega} - \omega^*)^2 \cdot (W_{32})^2} \right) = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2F_\omega(\bar{\omega} - \omega^*)W_{31}}{4F_\omega^2(\bar{\omega} - \omega^*)^2 \cdot (W_{31})^2 + 4F_\omega^2(\bar{\omega} - \omega^*)^2 \cdot (W_{32})^2} \\ \frac{2F_\omega(\bar{\omega} - \omega^*)W_{32}}{4F_\omega^2(\bar{\omega} - \omega^*)^2 \cdot (W_{31})^2 + 4F_\omega^2(\bar{\omega} - \omega^*)^2 \cdot (W_{32})^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{W_{31}}{2F_\omega(\bar{\omega} - \omega^*) \cdot (W_{31})^2 + 2F_\omega(\bar{\omega} - \omega^*) \cdot (W_{32})^2} \\ \frac{W_{32}}{2F_\omega(\bar{\omega} - \omega^*) \cdot (W_{31})^2 + 2F_\omega(\bar{\omega} - \omega^*) \cdot (W_{32})^2} \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned}
ud_1 &= \frac{W_{31} \cdot f_J}{2F_\omega(\bar{\omega} - \omega^*)(W_{31}^2 + W_{32}^2)} = \\
&= \frac{W_{31} \cdot (\bar{\omega} - \omega^*)^2}{2(\bar{\omega} - \omega^*)(W_{31}^2 + W_{32}^2) \cdot T} = \frac{W_{31}(\bar{\omega} - \omega^*)}{2(W_{31}^2 + W_{32}^2) \cdot T}, \\
ud_2 &= \frac{W_{32}(\bar{\omega} - \omega^*)}{2(W_{31}^2 + W_{32}^2) \cdot T}.
\end{aligned} \tag{4.2.48}$$

Из (4.2.47) следует:

$$\frac{dW}{d\vartheta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_2 \bar{i}_B}{J_M} & \frac{k_2 \bar{i}_A}{J_M} & -\frac{k_M}{J_M} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{dW_{11}}{d\vartheta} = 0 \cdot W_{11} + 0 \cdot W_{21} + 0 \cdot W_{31}.$$

$$\frac{dW_{21}}{d\vartheta} = 0 \cdot W_{11} + 0 \cdot W_{21} + 0 \cdot W_{31}.$$

$$\frac{dW_{31}}{d\vartheta} = \frac{k_2 \bar{i}_B}{J_M} W_{11} + \frac{k_2 \bar{i}_A}{J_M} W_{21} - \frac{k_M}{J_M} W_{31}.$$

$$\frac{dW_{12}}{d\vartheta} = 0 \cdot W_{12} + 0 \cdot W_{22} + 0 \cdot W_{32}.$$

$$\frac{dW_{22}}{d\vartheta} = 0 \cdot W_{12} + 0 \cdot W_{22} + 0 \cdot W_{32}.$$

$$\frac{dW_{32}}{d\vartheta} = \frac{k_2 \bar{i}_B}{J_M} W_{12} + \frac{k_2 \bar{i}_A}{J_M} W_{22} - \frac{k_M}{J_M} W_{32}.$$

$$\frac{dW_{13}}{d\vartheta} = 0 \cdot W_{13} + 0 \cdot W_{23} + 0 \cdot W_{33}.$$

$$\frac{dW_{23}}{d\vartheta} = 0 \cdot W_{13} + 0 \cdot W_{23} + 0 \cdot W_{33}.$$

$$\frac{dW_{33}}{d\vartheta} = \frac{k_2 \bar{i}_B}{J_M} W_{13} + \frac{k_2 \bar{i}_A}{J_M} W_{23} - \frac{k_M}{J_M} W_{33}.$$

$$\vartheta \in [t, t_f], W(t, t, z(t)) = I.$$

Из этой системы следует:

$$W_{11}(\vartheta, t, z(t)) = W_{11}(t, t, z(t)) = 1,$$

$$W_{21}(\vartheta, t, z(t)) = W_{21}(t, t, z(t)) = 0,$$

Получим решение уравнения для W_{31} . С учетом следующих из последних уравнений $W_{11}(\vartheta, t, z(t)) = 1, W_{21}(\vartheta, t, z(t)) = 0$ получаем, что:

$$\frac{dW_{31}}{d\vartheta} = \frac{k_2 \bar{i}_B}{J_M} - \frac{k_M}{J_M} W_{31}.$$

Это уравнение на интервале $\vartheta \in [t, t_f]$ имеет решение:

$$W_{31}(\vartheta, t) = \frac{k_2 \bar{i}_B(t)}{k_M} \left(1 - \exp \left(-\frac{k_M}{J_M} (\vartheta - t) \right) \right).$$

Аналогично, для W_{32} имеем:

$$\frac{dW_{32}}{d\vartheta} = \frac{k_2 i_A}{J_M} - \frac{k_M}{J_M} W_{32},$$

$$W_{32}(\vartheta, t) = \frac{k_2 i_A(t)}{J_M} \left(1 - \exp \left(-\frac{k_M}{J_M} (\vartheta - t) \right) \right).$$

Остальные элементы формулы для МКС-управления:

$$f_J = \frac{J^* - \bar{J}}{T_u} = \frac{0 - F_\omega (\bar{\omega} - \omega^*)^2}{T_u}.$$

$$\bar{\omega}(\vartheta, t, z(t)) = \frac{k_2 i_A(t) i_B(t)}{J_M} \left(1 - \exp \left(-\frac{k_M}{J_M} (\vartheta - t) \right) \right).$$

. Запишем итоговые выражения (4.2.48) для МКС-управления с аргументами:

$$ud_1(t, z(t)) = - \frac{W_{31}(t_f, t)}{2(W_{31}^2(t_f, t) + W_{32}^2(t_f, t))} \frac{(\bar{\omega}(t_f, t, z(t)) - \omega^*)}{T_u},$$

$$ud_2(t, z(t)) = - \frac{W_{32}(t_f, t)}{2(W_{31}^2(t_f, t) + W_{32}^2(t_f, t))} \frac{(\bar{\omega}(t_f, t, z(t)) - \omega^*)}{T_u}. \quad (4.2.49)$$

$$W_{31}(t_f, t) = \frac{k_2 i_B(t)}{k_M} \left(1 - \exp \left(-\frac{k_M}{J_M} (t_f - t) \right) \right), \quad (4.2.50)$$

$$W_{32}(t_f, t) = \frac{k_2 i_A(t)}{J_M} \left(1 - \exp \left(-\frac{k_M}{J_M} (t_f - t) \right) \right), \quad (4.2.51)$$

$$\bar{\omega}(t_f, t, z(t)) = \omega(t) + \frac{k_2 i_A(t) i_B(t)}{J_M} \left(1 - \exp \left(-\frac{k_M}{J_M} (t_f - t) \right) \right). \quad (4.2.52)$$

Полученные выражения для управляющих воздействий зависят от текущего состояния $i_A(t), i_B(t), \omega(t)$, и, в отличие от управляющих воздействий (4.2.18, 4.2.42, 4.2.43) для ДПТ с последовательным возбуждением с моделью (4.2.1), определяется алгебраическими и трансцендентными соотношениями.

На рисунке 4.5 показаны соответствующие результаты моделирования для двухэтапного МКС при тех же параметрах, что и на рисунке 4.2. При этом условия применения те же, что и на графиках рисунка 4.2, за исключением весовых коэффициентов, которые здесь взяты равными

$F_A = F_B = F_\omega = 1$. Что касается обозначений кривых, то здесь пунктирами показаны результаты для базового МКС при $T = 0,2$ с, а сплошными линиями – результаты для двухэтапного МКС при $T_u = 0,2$ с (верхняя строка графиков) и $T_u = 2$ с (нижняя строка графиков).

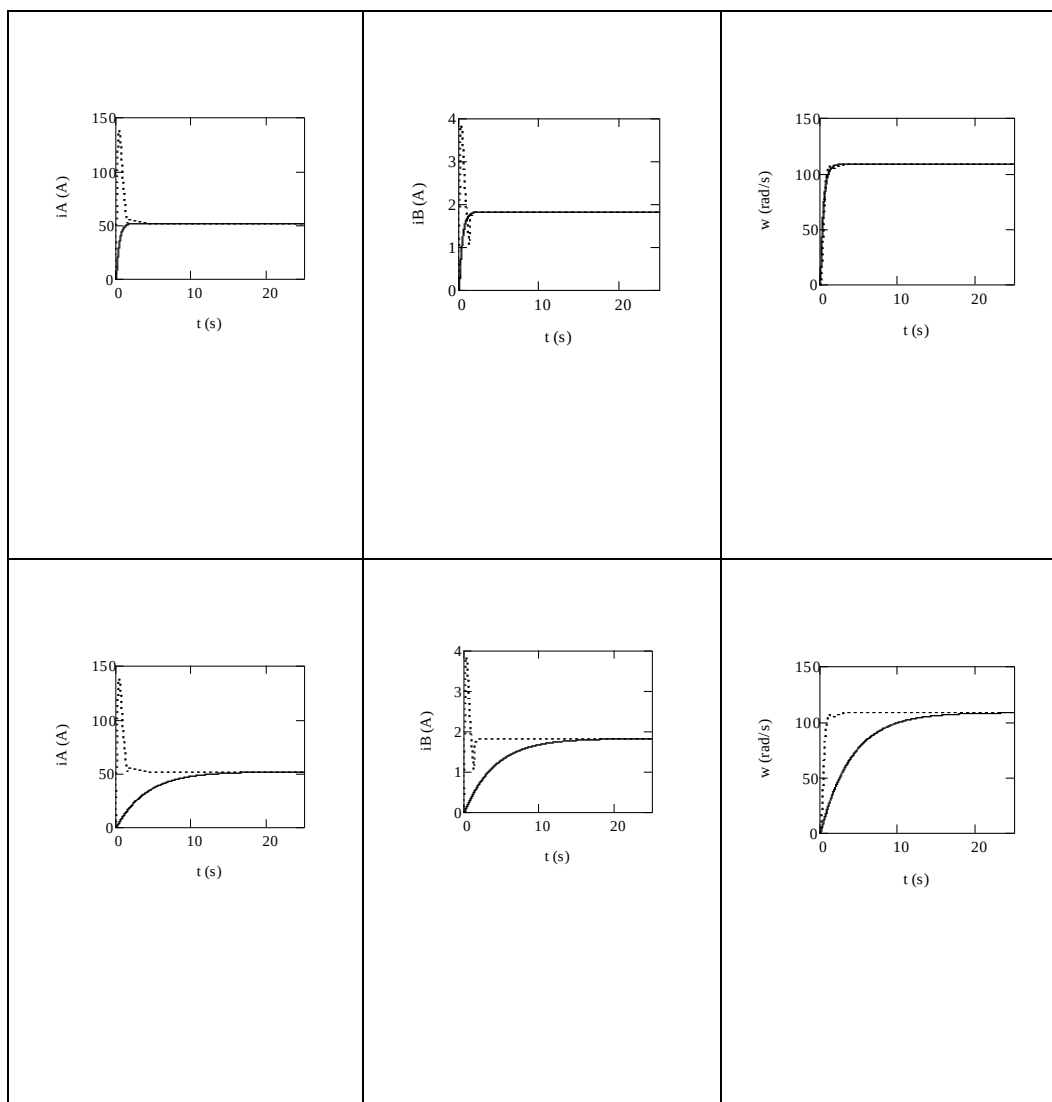


Рисунок 4.5 – Результаты применения базового (пунктиры) и двухэтапного (сплошные) МКС при разгоне ДПТ с моделью (4.2.2); $T = 0,2$ с для базового МКС; $T_u = 0,2$ с и $T_u = 2$ с для двухэтапного МКС

Как видно из представленных выкладок и результатов, двухэтапный МКС для данного объекта проще в реализации, чем для объекта 4.2.1, т.к. не требует численного интегрирования дифференциальных уравнения для переменных конечного состояния и переходной матрицы (здесь используются соответствующие алгебраические и трансцендентные соотношения (4.2.49 – 4.2.50)). Не менее важно то, что переходные процессы по токам и

скорости апериодические, а их длительность пропорциональна значениям регулировочного параметра T_u .

4.2.4. Идентификация и управление с использованием идентифицированных моделей

4.2.4.1. Идентификация и управление для электродвигателя постоянного тока с последовательным возбуждением

Рассмотрим аналитическое представление для ПКС и ПМ вида (4.2.20), (4.2.21), полученное на основе тейлоровских разложений правых частей совместной системы дифференциальных уравнений объекта (4.2.1) для ПКС $\bar{x}$ и ПМ W .

Для случая известных с точностью до параметров функций правых частей имеем следующие определения составляющих (4.2.20):

$$\begin{aligned} y &= (\bar{i}_A, \bar{\omega}, W_{11}, W_{21})^T, \\ R_{10} &= a_{11}\bar{i}_A + a_{12}\bar{i}_A\bar{\omega}, \quad R_{20} = a_{22}\bar{\omega} + a_{21}\bar{i}_A^2, \\ R_{30} &= a_{11}W_{11} + a_{12}(\bar{\omega}W_{11} + \bar{i}_AW_{21}), \quad R_{40} = 2a_{21}\bar{i}_AW_{11} + a_{22}W_{21}, \\ a_{11} &= -r_A / L_A, \quad a_{12} = -k_1 / L_A, \quad a_{21} = k_2 / J_M, \quad a_{22} = -k_M / J_M. \end{aligned} \quad (4.2.53)$$

Здесь R_{10}, R_{20} представляют собой правые части (без аддитивного члена с управляющим воздействием) уравнений объекта (4.2.1), R_{30}, R_{40} – правые части уравнений для W_{11}, W_{21} из (4.2.13).

Аналитические выражения для ПКС и ПМ получены ранее и представлены выражениями (4.2.25), (4.2.26).

Для неизвестных функций правых частей $\Phi_i \equiv R_{i0}$ выберем аппроксимацию двумерным квадратичным полиномом со следующими определениями составляющих представления (4.2.20):

$$\begin{aligned} y &= (\bar{i}_A, \bar{\omega}, W_{11}, W_{21})^T, \\ R_{10} &= a_{11} + a_{12}\bar{i}_A + a_{13}\bar{\omega} + a_{14}\bar{i}_A^2 + a_{15}\bar{i}_A\bar{\omega} + a_{16}\bar{\omega}^2, \\ R_{20} &= a_{21} + a_{22}\bar{i}_A + a_{23}\bar{\omega} + a_{24}\bar{i}_A^2 + a_{25}\bar{i}_A\bar{\omega} + a_{26}\bar{\omega}^2, \\ R_{30} &= (a_{12} + 2a_{14}\bar{i}_A + a_{15}\bar{\omega})W_{11} + (a_{13} + a_{15}\bar{i}_A + 2a_{16}\bar{\omega})W_{21}, \\ R_{40} &= (a_{22} + 2a_{24}\bar{i}_A + a_{25}\bar{\omega})W_{11} + (a_{23} + a_{25}\bar{i}_A + 2a_{26}\bar{\omega})W_{21}, \end{aligned} \quad (4.2.54)$$

Получим теперь аналитические выражения для ПКС и ПМ для определений (4.2.36).

В отличие от расширенной системы (2.1.21) с $k_i = 2$, по которой получены выражения (4.2.25), используемые при параметрической идентификации четырех коэффициентов (по два на каждую координату) в задаче 1, для идентификации двенадцати (по шесть на каждую из координат) коэффициентов в задаче 2 зададимся более точной тейлоровской аппроксимацией с тремя членами, т.е. используем расширенную систему (2.1.21) с $k_i = 3$, $n = 4$, $i = 1..4$ с вектором состояния

$$y = (\bar{i}_A, \bar{\omega}, W_{11}, W_{21}, R_{10}, R_{20}, R_{30}, R_{40}, R_{11}, R_{21}, R_{31}, R_{41}, R_{12}, R_{22}, R_{32}, R_{42}, R_{13}, R_{23}, R_{33}, R_{43})^T. \quad (4.2.55)$$

Здесь, в соответствии с приведенной выше процедурой формирования выражения (4.2.20), R_{i0} и переменные конечного состояния зависят от аргумента $\Theta = (\vartheta, t, x(t))$, где $x = (i_A, \omega)^T$.

По выражениям (4.2.21) найдем начальные условия для системы (2.1.21), которые входят в ее аналитическое решение (4.2.20). При этом следует иметь в виду то, что в процессе применения рекуррентной формулы (4.2.21) получаемые R_{ik} необходимо для последующих шагов сохранять как функции $(\vartheta, t, x(t))$, хотя после подстановки вместо ϑ текущего времени t , т.е. получения коэффициента $R_{ik}(t)$, эти выражения упрощаются. В частности, в них элементы матрицы W заменяются нулями и единицами ввиду $W(t, t, x(t)) = I$, а вместо переменных конечного состояния записываются обычные переменные состояния ввиду $\bar{x}(t, t, x(t)) = x(t)$. Поскольку выкладки для получения всех элементов вектора y довольно громоздки, покажем процедуру получения первых двенадцати элементов. Выражения же для остальных восьми элементов можно получить аналогично.

Первые четыре элемента следующие:

$$\begin{aligned} y_1(t) &\equiv \bar{i}_A(t, t) = i_A(t), \\ y_2(t) &\equiv \bar{\omega}(t, t) = \omega(t), \\ y_3(t) &\equiv W_{11}(t, t, x(t)) = 1, \\ y_4(t) &\equiv W_{21}(t, t, x(t)) = 0, \end{aligned}$$

Технику вычислений по (4.2.20) продемонстрируем на примере определения $R_{11}(t)$. Для этого вначале выпишем выражение для $R_{10}(\Theta)$, $\Theta = (\vartheta, t, x(t))$:

$$\begin{aligned} R_{10}(\Theta) &= a_{11} + a_{12} \bar{i}_A(\Theta) + a_{13} \bar{\omega}(\Theta) + a_{14} \bar{i}_A^2(\Theta) + \\ &\quad + a_{15} \bar{i}_A(\Theta) \bar{\omega}(\Theta) + a_{16} \bar{\omega}^2(\Theta). \end{aligned} \quad (4.2.56)$$

Подставляя вместо ϑ текущее время t и используя свойство $\bar{x}(t, t, x(t)) = x(t)$, получаем:

$$y_5(t) \equiv R_{10}(t) = a_{11} + a_{12}i_A(t) + a_{13}\omega(t) + a_{14}i_A^2(t) + a_{15}i_A(t)\omega(t) + a_{16}\omega^2(t).$$

Остальные три элемента y сразу запишем с аргументом t .

$$\begin{aligned} y_6(t) &\equiv R_{20}(t) = a_{21} + a_{22}i_A + a_{23}\omega + a_{24}i_A^2 + a_{25}i_A\omega + a_{26}\omega^2, \\ y_7(t) &\equiv R_{30}(t) = a_{12} + 2a_{14}i_A + a_{15}\omega, \\ y_8(t) &\equiv R_{40}(t) = a_{22} + 2a_{24}i_A + a_{25}\omega. \end{aligned}$$

Для получения $R_{11}(t)$ производим вычисления по выражениям (4.2.21), (4.2.54), (4.2.56) при $k=1$ и $i=1$. В результате получаем:

$$\begin{aligned} y_9(t) &\equiv R_{11}(t) = \\ &= \left(a_{12} \frac{d\bar{i}_A}{d\vartheta} + a_{13} \frac{d\bar{\omega}}{d\vartheta} + 2a_{14} \frac{d\bar{i}_A}{d\vartheta} \bar{i}_A + a_{15} \bar{i}_A \frac{d\bar{\omega}}{d\vartheta} + \right. \\ &\quad \left. + a_{15} \frac{d\bar{i}_A}{d\vartheta} \bar{\omega} + 2a_{16} \frac{d\bar{\omega}}{d\vartheta} \bar{\omega} \right)_{\vartheta=t} = \\ &= a_{12}R_{10} + a_{13}R_{20} + 2a_{14}R_{10}i_A + a_{15}R_{20}i_A + a_{15}R_{10}\omega + 2a_{16}R_{20}\omega. \end{aligned}$$

Аналогичным способом определяем:

$$\begin{aligned} y_{10}(t) &\equiv R_{21}(t) = a_{22}R_{10}(t) + a_{23}R_{20}(t) + 2a_{24}R_{10}(t)i_A(t) + \\ &\quad + a_{25}R_{20}(t)i_A(t) + a_{25}R_{10}(t)\omega(t) + 2a_{26}R_{20}(t)\omega(t), \\ y_{11}(t) &\equiv R_{31}(t) = a_{12}R_{30}(t) + 2a_{14}R_{30}(t)i_A(t) + 2a_{14}R_{10}(t) + \\ &\quad + a_{15}R_{20}(t) + a_{15}\omega(t)R_{30}(t) + \\ &\quad + a_{13}R_{40}(t) + a_{15}i_A(t)R_{40}(t) + 2a_{16}\omega(t)R_{40}(t), \\ y_{12}(t) &\equiv R_{41}(t) = 2a_{21}[R_{10}(t)W_{11}(t, t, x(t)) + i_A(t)R_{30}(t)] + a_{22}R_{40}(t) = \\ &= 2a_{21}[R_{10}(t) + i_A(t)R_{30}(t)] + a_{22}R_{40}(t). \end{aligned}$$

Выражения для остальных элементов расширенного вектора (4.2.55), как сказано выше, получаются аналогично.

Планирование экспериментов будем производить по переменным конечного состояния на основании первой пары уравнений (4.2.20).

Следует также отметить специфику ДПТ как электрической машины: трудно, а в некоторых случаях и невозможно, обеспечить независимые начальные условия на фазовые координаты двигателя. Например, чтобы обеспечить ток в обмотках при нулевой угловой скорости, надо каким-то механическим способом предотвратить вращение ротора. В таком режиме работы двигатель может выйти из строя.

Для обеспечения реальных начальных условий в основу плана эксперимента была положена следующая методика. Сначала производится разгон двигателя под воздействием определенного постоянного напряжения U до некоторого момента времени t . В этот момент фиксируются достигнутые значения фазовых координат $x(t) = (i(t), \omega(t))^T$, которые затем берутся в каче-

стве начальных условий для процесса идентификации. Для каждого сочетания U и t снимаем реакцию неуправляемой системы до конечного момента t_f , т.е. $\bar{i}_A(t_f, t, x(t))$ и $\bar{\omega}(t_f, t, x(t))$. Таким образом формируется та часть (4.2.20), которая зависит от входных и выходных данных при проведении экспериментов. Остальные элементы (4.2.20) в виде коэффициентов $R_{ij}(t)$ определены выше. Таким способом получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно требуемых коэффициентов. Эта методика соответствует описанной выше методике 1. При использовании методики 2 для одного начального момента времени t фиксируются $\bar{x}(\vartheta_1, t, x(t)), \bar{x}(\vartheta_2, t, x(t)), \dots, \bar{x}(\vartheta_{n_c}, t, x(t))$. Это значительно уменьшает объем экспериментов ввиду того, что указанные значения регистрируются в одном эксперименте. Однако, ввиду меньшего разнообразия условий при формировании каждой из пар уравнений, можно предположить, что для достижения той же точности идентификации потребуется большее количество уравнений и могут возникнуть вычислительные проблемы при их решении.

Идентификация модели ДПТ (4.2.1) производилась несколько раз при различных предположениях и методиках планирования экспериментов (методики описаны в пункте 3.4.2):

- структура модели известна (задача 1); методика 1;
- структура модели неизвестна (задача 2); методика 1;
- структура модели известна (задача 1); методика 2;
- структура модели неизвестна (задача 2); методика 2.

В случае известной структуры предполагалось, что вектор-функция Φ из (4.2.6) известна с точностью до значений коэффициентов, а в случае неизвестной структуры элементы Φ полагались двумерными квадратичскими полиномами с неизвестными коэффициентами.

Предполагалось, что измерения фазовых координат осуществляется с ошибкой, распределенной по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением, равным третьей части двухпроцентного отклонения от измеряемого значения, что перекрывает точностные характеристики современных датчиков угловых скоростей и токов. Отметим также и тот факт, что в методике 1 измерения координат производится только в двух точках – начальной в момент t и конечной в момент t_f , а в методике 2 – в начальной точке и точках $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n_c}$. Таким образом, измерения в обеих методиках осуществляются достаточно редко, что позволяет практически устранить динамические погрешности измерителей.

В качестве объекта идентификации и управления выбрана модель ДПТ последовательного возбуждения мощностью 5 кВт с параметрами:

$r_A = 2 \text{ Ом}$, $L_A = 3 \text{ Гн}$, $K_1 = 0,1 \text{ Ом} \cdot \text{с}$, $K_2 = 1 \text{ н} \cdot \text{м} \cdot \text{А}^{-2}$, $J_M = 1,05 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-2}$, $K_M = 0,7 \text{ н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. Поставлена задача управления: с помощью ускоренного МКС-алгоритма (4.2.18), (4.2.23) за время $t_f = 0,4 \text{ с}$ привести ток и скорость ДПТ к значениям $i_A^* = 8,66 \text{ А}$, $\omega^* = 106,58 \text{ с}^{-1}$ номинального режима для $U_{ном} = 110 \text{ В}$. Моделирование разгона ДПТ производилось на интервале $0 \leq t \leq 1,5 \text{ с}$, где до момента $0,4 \text{ с}$ действовало МКС-управление, а далее – управление в виде $u(t) = U_{ном} = 110 \text{ В}$. Исследовались две модели наблюдения – с известной и неизвестной структурой объекта. Модель для известной структуры в соответствии с (4.2.6) и (4.2.54) содержала четыре подлежащих определению коэффициента $a_{12}, a_{15}, a_{23}, a_{24}$, а остальные полагались нулевыми. В модели с неизвестной структурой подлежали определению все коэффициенты $a_{ij}, i = 1, 2; j = 1 \dots 6$. Исследовались также две методики планирования экспериментов, изложенные в подразделе 3.4.

В таблице 4.1 (см. ниже) приведены результаты идентификации параметров модели ДПТ, полученные с помощью предлагаемого метода, где колонка «истинные» содержит истинные значения коэффициентов модели (4.2.1), а остальные колонки – идентифицированные значения коэффициентов при известной и неизвестной структурах и двух методиках планирования экспериментов. Для удобства сопоставления коэффициенты при одинаковых степенях переменных помещены в одних и тех же строках (например, коэффициент a_{11} при i_A модели (4.2.1) помещен в одной строке с коэффициентом a_{12} при i_A модели (4.2.54)). Отметим, что при реализации методики 2 оказалось, что использование одного эксперимента для формирования всех нелинейных уравнений приводит к значительным погрешностям в определении коэффициентов. Поэтому, как и в методике 1, здесь использовались несколько экспериментов (конкретно 4), отличающихся друг от друга разными входными напряжениями из множества $\{50, 110, 200, 300\}$ вольт. Заметим, что в методике 1 для каждого из перечисленных напряжений производились эксперименты при разных временах $t \in \{0,03; 0,06; 0,12; 0,18; 0,24; 0,30; 0,36\}$. Таким образом, в методике 1 производилось 28 экспериментов и формировалось 56 нелинейных уравнений (поскольку в каждом эксперименте регистрировались ток и угловая скорость). В методике 2 производилось 4 эксперимента при $n_c = 20$, а количество формируемых уравнений равнялось $2 \cdot 4 \cdot 20 = 160$. Оказалось, что достаточное количество k_i учитываемых членов тейлоровского разложения для идентификации и управления в данном примере неодинаково. Если для управления и при идентификации в случае известной структуры достаточно $k_i = 2$, то для идентификации при неизвестной структуре k_i должно быть не меньше трех. Поскольку увеличение k_i приводит к

усложнению процессов управления и идентификации, его значение не должно превышать разумных пределов.

Таблица 4.1 – Идентифицированные коэффициенты модели при нормально распределенной ошибке наблюдения с двухпроцентным предельным отклонением от измеряемого значения

Коэффициенты модели и условия						
Модель (4.2.1)	истинные	из- вест./мет.1	из- вест./мет.2	Модель (4.2.36)	неизв./ мет.1	неизв./ мет.2
				a11	-0.238	-0.354
a11	-0.667	-0.684	-0.598	a12	-0.436	-0.550
				a13	-0.353	0.041
				a14	0.0088	-0.016
a12	-0.033	-0.029	-0.032	a15	-0.017	-0.030
				a16	-0.0012	0.00015
				a21	-0.028	0.189
				a22	0.098	0.043
a22	-0.667	-0.909	-0.874	a23	0.926	-0.607
a21	0.952	0.974	0.960	a24	0.595	0.924
				a25	0.093	0.0087
				a26	-0.021	-0.0019

Результаты моделирования ДПТ с истинными и идентифицированными коэффициентами показаны на рисунках 4.2 – 4.5. На каждом из рисунков изображены переходные процессы по току (верхние графики) и угловой скорости (нижние графики) в следующем соответствии:

- более медленные процессы соответствуют неуправляемому разгону под воздействием номинального напряжения, а более быстрые – управляемому разгону при воздействии МКС-управления;
- пунктирными линиями показаны переходные процессы при использовании в алгоритме МКС-управления истинных коэффициентов;
- сплошными линиями показаны переходные процессы при использовании в алгоритме МКС-управления идентифицированных коэффициентов.

Данные из таблицы 4.1 и рис. 4.2 – 4.5 позволяют сделать следующие выводы:

- обе методики планирования экспериментов для случая идентификации модели с известной структурой равноценны по точности;
- в случае неизвестной структуры методика 1 оказалась менее точной из-за относительно малого числа нелинейных уравнений (для оценки 12 коэффициентов в методике 1 использовано 56 уравнений, а в методике 2 – 120);
- переходные процессы для МКС-управления, в алгоритме которого использованы идентифицированные коэффициенты, практически не отличаются от соответствующих процессов для МКС-управления, использующего истинные параметры модели объекта; это свидетельствует о достаточной для МКС-управления степени адекватности;
- соответствующее предыдущему пункту сравнение для случая разгона постоянным напряжением показывает, что адекватность идентифицированной модели при неуправляемом разгоне ДПТ меньше, а в одном случае (см. рисунок 4.4) реакция идентифицированной модели на постоянное управление свидетельствует о ее неустойчивости; в то же время использование параметров неустойчивой модели в МКС-алгоритме оставило данный алгоритм работоспособным, хотя качество управления при этом и ухудшилось (рисунок 4.4).

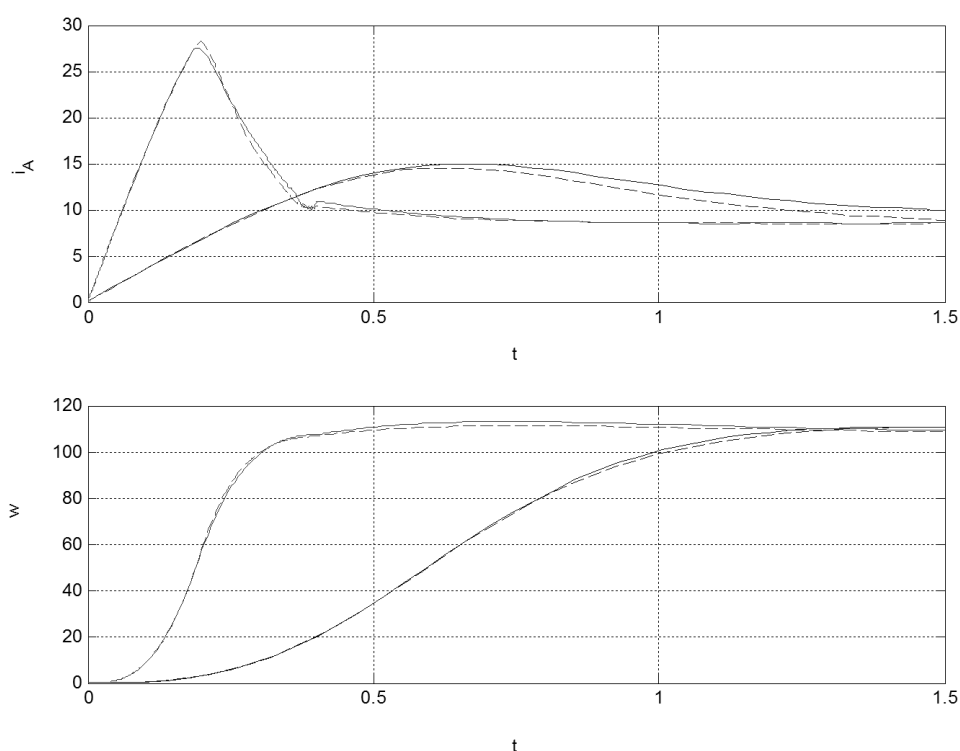


Рисунок 4.2 – Переходные процессы для случая идентификации при известной структуре модели и методике планирования 1

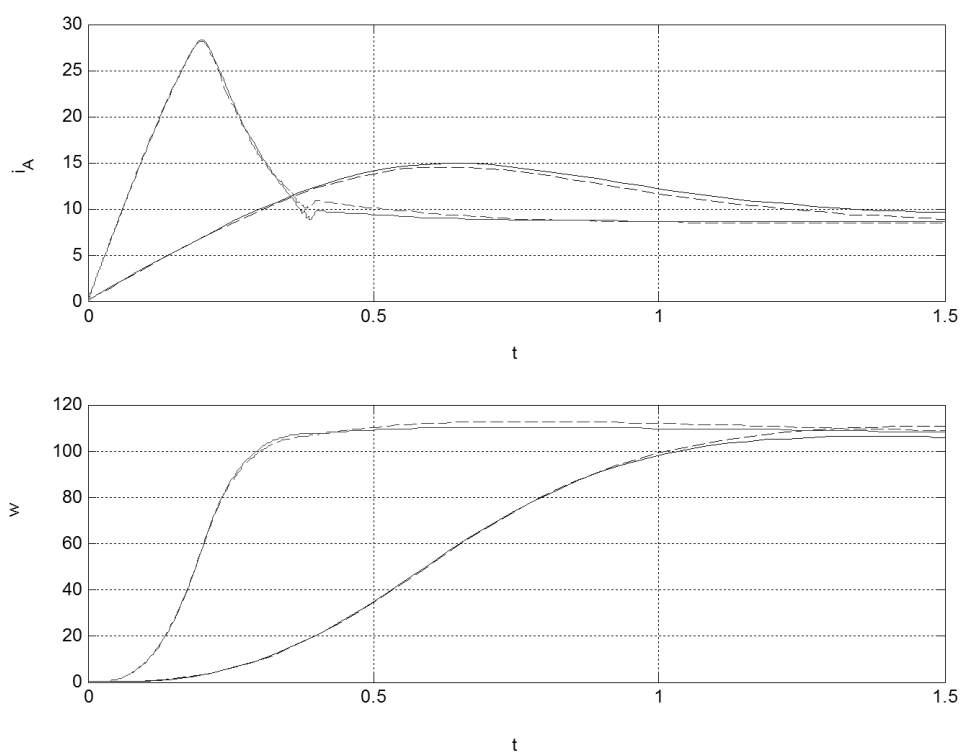


Рисунок 4.3 – Переходные процессы для случая идентификации при известной структуре модели и методике планирования 2

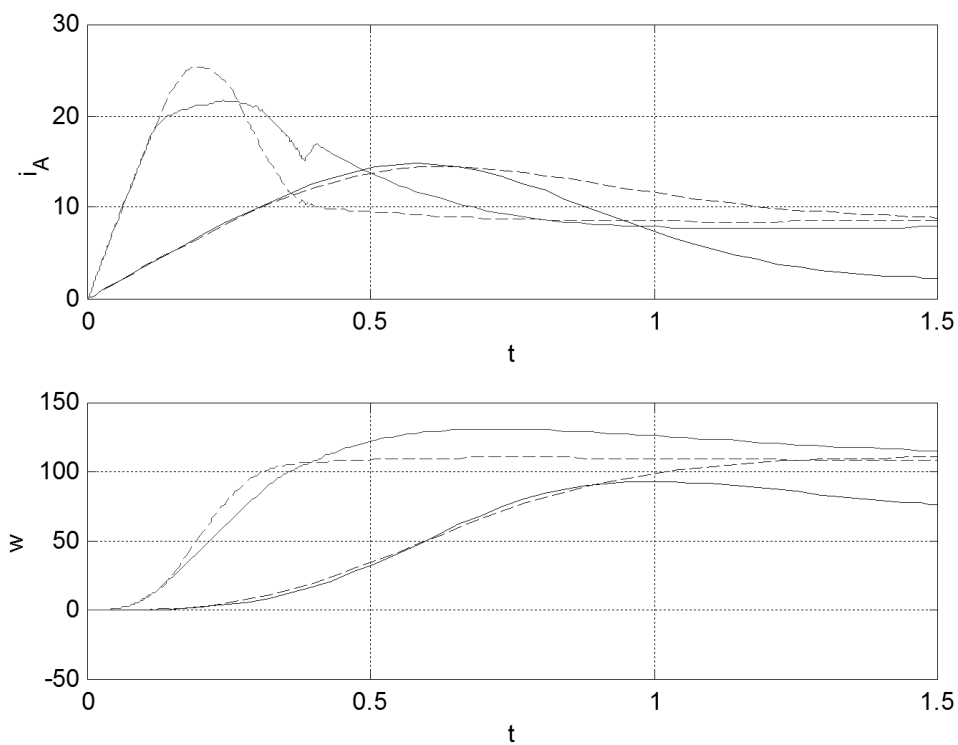


Рисунок 4.4 – Переходные процессы для случая идентификации при неизвестной структуре модели и методике планирования 1

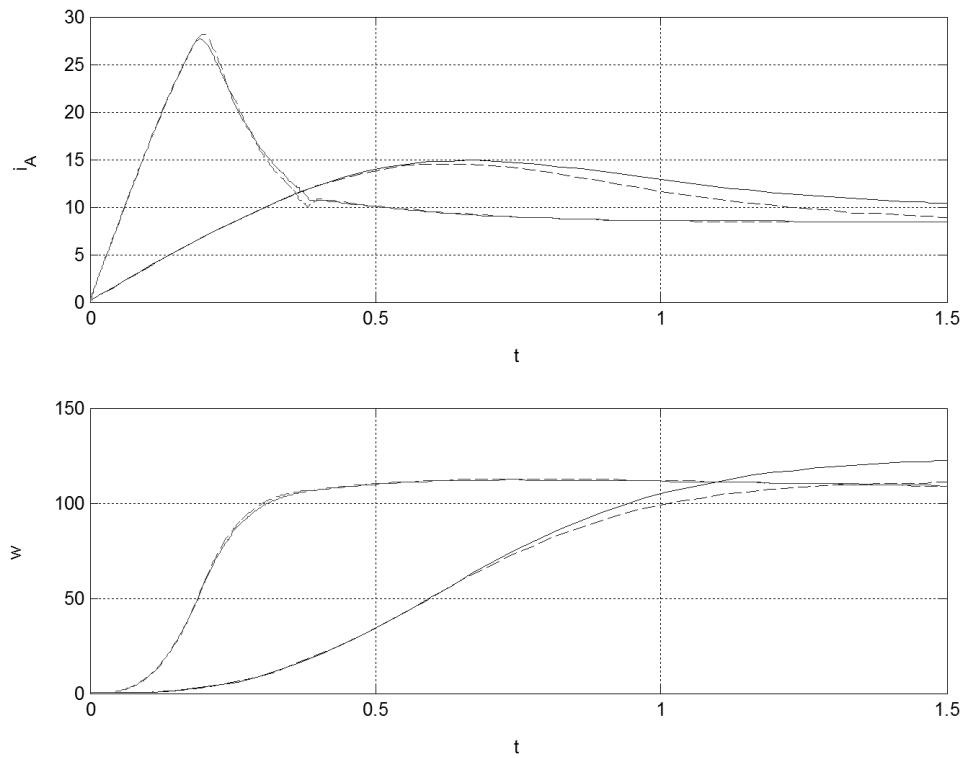


Рисунок 4.5 – Переходные процессы для случая идентификации при неизвестной структуре модели и методике планирования 2

Программа, реализующая процесс идентификации двигателя постоянного тока с последовательным возбуждением на основе метода конечных состояний, выполнена в среде Matlab.

4.2.4.2. Идентификация и управление для электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением

Для решения задачи 3, сформулированной в пункте 3.4.1, используем двухслойную с прямыми связями искусственную нейронную сеть с одним нейроном выходного слоя. Выражение (3.4.1), определяющее выход указанной сети, перепишем еще раз:

$$\tilde{y}_i(u) \equiv \Psi^2 \left(b_i^2 + \sum_{j=1}^{NI} IW_{ij}^2 \cdot u_j + \sum_{s=1}^{NL} LW_{is} \cdot \Psi^1 \left(b_{is}^1 + \sum_{j=1}^{NI} IW_{isj}^1 \cdot u_j \right) \right). \quad (4.2.57)$$

В представлении (4.2.39) использована система обозначений для весовых коэффициентов Neural Network Toolbox пакета Matlab, которая прокомментирована в пункте 3.4.3. Там же сформулированы принципы исполь-

зования представления для решения задачи идентификации переменных конечного состояния и переходной матрицы.

Детали применения подхода проиллюстрируем на примере задачи управляемого разгона двигателя постоянного тока с независимым возбуждением с моделью (4.2.2). Поскольку задача разгона является задачей стабилизации заданного значения угловой скорости при определенных ограничениях на пиковые значения управляющих напряжений и токов в обмотках якоря и возбуждения, воспользуемся комплексированным управлением. Комплексированное управление состоит из двух участков. На первом участке за время от 0 до t_f координаты системы с помощью МКС-управления переводятся в точку номинального режима, а на втором участке от t_f до ∞ на систему подаются номинальные напряжения. В итоге, при точном выведении в точку номинального режима, на интервале $[t_f, \infty)$ координаты не изменяются. Таким способом задача стабилизации может быть решена с помощью решения задачи терминального управления. Перепишем еще раз математическую модель электродвигателя, введя обозначения для его параметров:

$$\begin{aligned}\frac{di_A}{dt} &= A_{11}i_A + A_{12}i_B\omega + B_{11}u_A \\ \frac{di_B}{dt} &= A_{21}i_B + B_{22}u_B; \\ \frac{d\omega}{dt} &= A_{31}\omega + A_{32}i_Ai_B, \\ A_{11} &= -\frac{r_A}{L_A}, A_{12} = -\frac{k_1}{L_A}, B_{11} = \frac{1}{L_A}, \\ A_{21} &= -\frac{r_B}{L_B}, B_{22} = \frac{1}{L_B}, \\ A_{31} &= -\frac{k_M}{J_M}, A_{32} = \frac{k_2}{J_M}.\end{aligned}\tag{4.2.58}$$

где i_A, i_B – токи якоря и возбуждения двигателя; ω – скорость двигателя; u_A, u_B – напряжения на обмотках якоря и возбуждения, ограниченные по модулю 400 В; $r_A = 0,7$ Ом, $r_B = 60$ Ом, $L_A = 0,6$ Гн, $L_B = 15$ Гн – сопротивления и индуктивности обмоток якоря и возбуждения; $k_1 = 0,37$, $k_2 = 0,8$ – электрические и механические постоянные; $k_M = 0,7$ – коэффициент пропорциональности момента нагрузки и скорости; $J_M = 3$ – момент инерции, приведенный к валу двигателя. В случае разгона начальные условия нулевые, а желаемые значения переменных, определяемых из (4.2.58) при нулевых левых частях и номинальных постоянных значениях напряжений

$u_A = U_{ANOM} = 110\text{В}$, $u_B = U_{BNOM} = 110\text{В}$, удовлетворяют соотношениям (4.2.4), из которых следует: $i_A^* = 52\text{А}$, $i_B^* = 1,83\text{А}$, $\omega^* = 108\text{с}^{-1}$.

Терминальный критерий для первого участка процесса разгона имеет вид (4.2.10), который перепишем в новых обозначениях:

$$J = F_1(i_A - i_A^*)^2 + F_2(i_B - i_B^*)^2 + F_3(\omega - \omega^*)^2 \rightarrow J^*, \quad (4.2.59)$$

где $J^* = 0$ – желаемое достижимое значение, $F_1 = F_2 = 1$, $F_3 = 25$ – весовые коэффициенты (подобраны в процессе реализации базового алгоритма МКС-управления).

В процессе тренировки сети производились эксперименты над системой дифференциальных уравнений, определяющих переменные конечного состояния и два столбца переходной матрицы. Для рассматриваемого примера указанная система имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2x_3, \\ \frac{dx_{21}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= A_{21}x_2, \\ \frac{dx_3(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= A_{31}x_3 + A_{32}x_1x_2, \\ \frac{dW_{11}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= A_{11}W_{11} + A_{12}x_3W_{21} + A_{12}x_2W_{31}, \\ \frac{dW_{21}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= A_{21}W_{21}, \\ \frac{dW_{31}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= A_{32}x_2W_{11} + A_{32}x_1W_{21} + A_{31}W_{31}, \\ \frac{dW_{12}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= A_{11}W_{12} + A_{12}x_3W_{22} + A_{12}x_2W_{32}, \\ \frac{dW_{22}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= A_{21}W_{22}, \\ \frac{dW_{32}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= A_{32}x_2W_{12} + A_{32}x_1W_{22} + A_{31}W_{32}, \end{aligned} \quad (4.2.60)$$

$$\begin{aligned} \vartheta &\in [t, t_f], \bar{i}_A(t, t, x(t)) = i_A(t), \bar{i}_B(t, t, x(t)) = i_B(t), \omega(t, t, x(t)) = \omega(t), \\ W_{11}(t, t, x(t)) &= W_{22}(t, t, x(t)) = 1, \\ W_{21}(t, t, x(t)) &= W_{31}(t, t, x(t)) = W_{12}(t, t, x(t)) = W_{32}(t, t, x(t)) = 0. \end{aligned}$$

В каждом эксперименте разыгрывались равномерно распределенные случайные значения компонент вектора входов $u = colon(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ из диапазонов $[0, t_f]$, $[x_1^{\min}, x_1^{\max}]$, $[x_2^{\min}, x_2^{\max}]$, $[x_3^{\min}, x_3^{\max}]$ соответственно, и фикс-

сировались в качестве выхода конечные значения $x_i(t_f, t, x(t))$, $W_{ij}(t_f, t, x(t))$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$. Указанные диапазоны подбирались таким образом, чтобы они покрывали все возможные текущие значения координат модели (4.2.58). Дальнейшие действия по формированию нейронной сети производились с использованием функций пакета расширения Neural Toolbox программной системы Matlab. Вначале с помощью функции newscf создавались 9 нейронных каскадных двухслойных сетей (по числу уравнений системы (4.2.60)). Например, первая сеть для первой координаты системы (4.2.60) задавалась оператором:

```
net1=newscf([0 tf;x10min x10max;x20min x20max;x30min x30max],[5 1],{'tansig' 'purelin' }).
```

В приведенном операторе заданы диапазоны, количества нейронов и типы функций активации для внутреннего скрытого слоя (5 и tansig) и выходного слоя (1 и purelin). Кроме того, по умолчанию заданы функции trainlm (вычисление якобиана методом Левенберга-Марквардта), learnsgdm (градиентная оптимизация), mse (критерий в виде суммы квадратов невязок), а также их параметры.

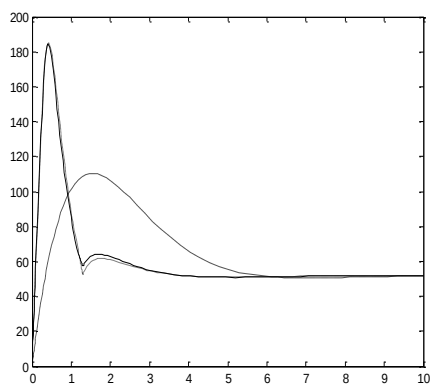
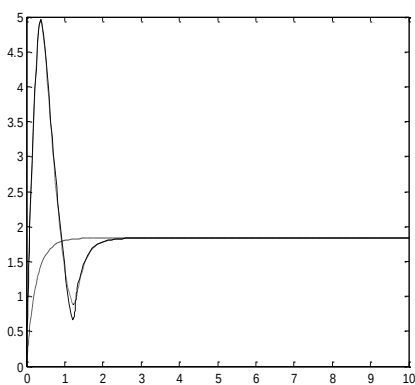
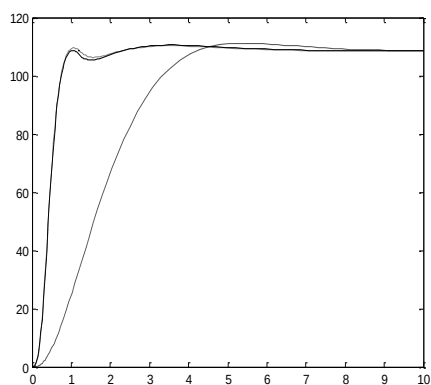
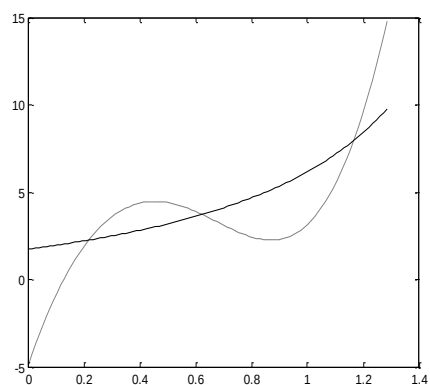
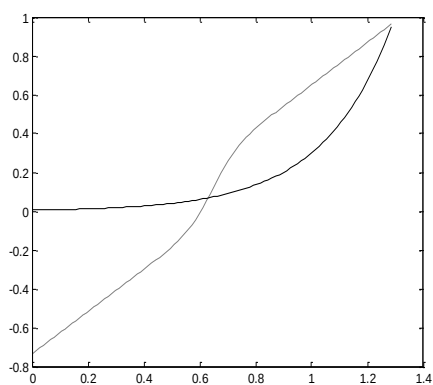
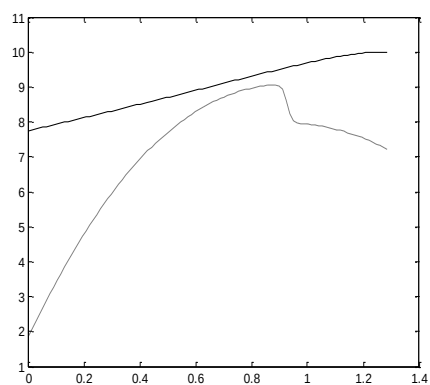
Остальные сети заданы с теми же значениями параметров.

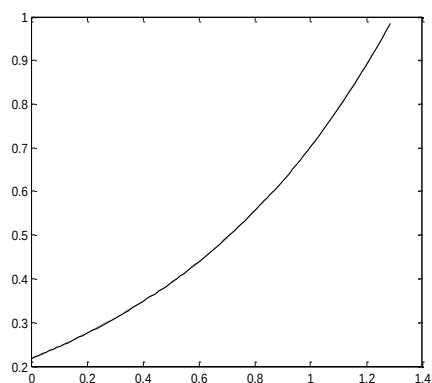
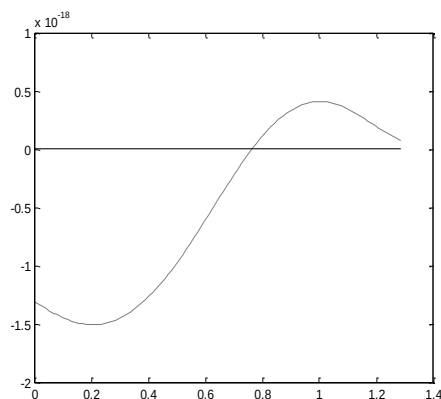
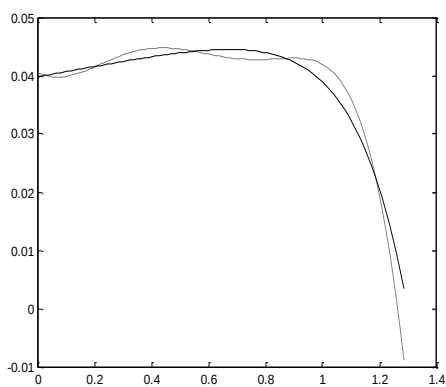
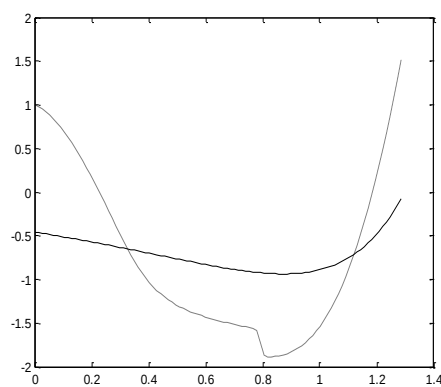
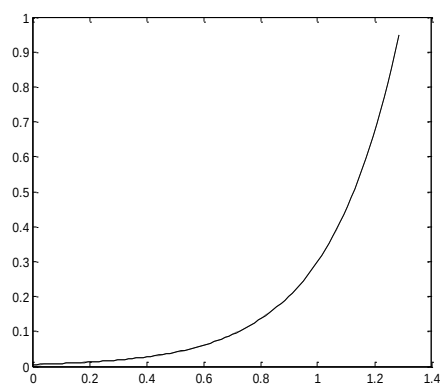
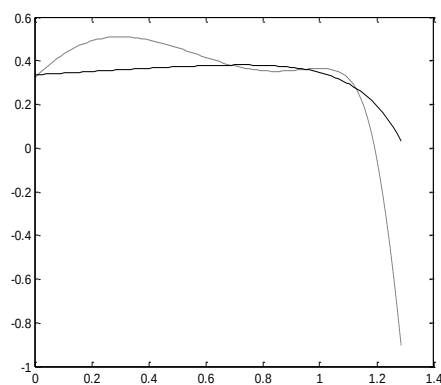
Затем устанавливались количества итераций («эпох») при подборе коэффициентов (тренировке) сети и производилась тренировка каждой из сетей с помощью функции train. Количество эпох задавались оператором типа net1.trainParam.epochs=50 (для первой сети), а функция тренировки – оператором типа net1=train(net1,P,T(1,:)), где в двумерном массиве P размером $N_I \times N_{exr}$ сохранены предварительно сгенерированные псевдослучайные значения N_I входов для N_{exr} экспериментов ($N_I=4$, $N_{exr}=20000$), а в массиве P размером $9 \times N_{exr}$ – результаты экспериментов над уравнениями (4.2.42). Коэффициенты модели (4.2.56), полученные в результате тренировки сетей при $t_f = 1,3$ с, $x_1^{\min} = 0$, $x_1^{\max} = 160$, $x_2^{\min} = 0$, $x_2^{\max} = 5$, $x_3^{\min} = 0$, $x_3^{\max} = 130$, приведены в таблице 4.2. Результаты моделирования процесса разгона, а также пример «точного» (т.е. полученного численным интегрированием с шагом 0,004 с) и приближенного (нейросетевого) решений уравнений (4.2.60) показаны на рисунках 4.6 – 4.17 в виде графиков соответствующих зависимостей от времени. Пример решений (4.2.60) приведен для начальных условий $\bar{x}_1(0,0,x(0)) = x_1^0 = 10$, $\bar{x}_2(0,0,x(0)) = x_2^0 = 1$, $\bar{x}_3(0,0,x(0)) = x_3^0 = 10$, $W_{11}(0,0,x(0)) = 1$, $W_{21}(0,0,x(0)) = 0$, $W_{31}(0,0,x(0)) = 0$, $W_{12}(0,0,x(0)) = 0$, $W_{22}(0,0,x(0)) = 1$, $W_{32}(0,0,x(0)) = 0$.

Таблица 4.2 – Коэффициенты нейронных сетей, аппроксимирующих решение системы (4.2.59)

Для $\tilde{y}_1 \equiv \bar{x}_1(t_f, t, x(t))$								
IW_{1sj}^1				IW_{1j}^2	LW_{1s}	b_{1s}^1	b_1^2	
4.5882	0.0319	0.0544	-0.0001	41.9885	3.0239	-8.3962	-13.3351	
-2.4454	-0.0817	-4.4120	0.4328	0.4823	-0.3219	0.1593		
0.6313	0.0692	6.7251	-0.1806	-4.0895	-1.4150	-1.2753		
9.8484	0.0730	-1.4469	0.0004	-0.1459	2.4657	-14.3142		
23.4375	-0.9604	6.7846	-0.749		-0.7504	-0.2417		
Для $\tilde{y}_2 \equiv \bar{x}_2(t_f, t, x(t))$								
IW_{2sj}^1				IW_{2j}^2	LW_{2s}	b_{2s}^1	b_2^2	
1.2914	-0.0547	-1.7461	-0.0680	10.9060	-0.0237	9.5563	-5.2278	
2.5223	0.0000	0.2765	-0.0001	0.0000	-3.4979	0.2335		
1.5678	-0.3618	-1.7861	0.3369		-0.0020	-0.8919		
1.3937	0.0001	0.1412	0.0001	1.1190	-7.7684	-1.1186		
75.3452	0.1402	6.9232	0.1633	-0.0002	0.0516	-74.6360		
Для $\tilde{y}_3 \equiv \bar{x}_3(t_f, t, x(t))$								
IW_{3sj}^1				IW_{3j}^2	LW_{3s}	b_{3s}^1	b_3^2	
2.3228	0.0060	0.1019	-0.0028	-36.9061	16.0834	-2.6497	16.8371	
-21.3006	-0.1149	-1.5099	-0.3840	-0.0768	-0.7027	71.2245		
0.6512	-0.0053	-0.1781	0.0029	-1.7142	-29.8234	1.0414		
1.1979	0.0012	-0.0226	-0.0049	1.0618	54.5503	0.3227		
1.8564	-0.1906	6.3574	-0.0081		2.3217	13.4462		
Для $\tilde{y}_4 \equiv W_{11}(t_f, t, x(t))$								
IW_{4sj}^1				IW_{4j}^2	LW_{4s}	b_{4s}^1	b_4^2	
-1.7962	-0.0000	-0.0094	-0.0000	0.2956	-0.2513	2.2008	0.6977	
2.8752	0.0000	0.1343	0.0000	-0.0000	0.1840	-4.5256		
0.7045	0.0000	0.2433	0.0000	-0.0311	0.1126	-0.3979		
1.8763	0.0005	-0.2165	0.0006	-0.0000	0.0113	0.2373		
-2.2675	-0.0000	0.0267	-0.0001		0.0659	-0.0904		
Для $\tilde{y}_5 \equiv W_{21}(t_f, t, x(t))$								
IW_{5sj}^1				IW_{5j}^2	LW_{5s}	b_{5s}^1	b_5^2	

2.7044 0.0058 0.2466 -0.0128	0	0	-4.0978	0
-1.4317 -0.0156 -0.4740 .0114	0	0	3.6726	
-0.9684 -0.0046 -0.5456 0.0217	0	0	0.9555	
1.9787 -0.0174 0.2067 0.0111	0	0	-0.0855	
-2.0009 -0.0116 0.2220 -0.0189	0	0	0.8148	
Для $\tilde{y}_6 \equiv W_{31}(t_f, t, x(t))$				
IW_{6sj}^1	IW_{6j}^2	LW_{6s}	b_{6s}^1	b_6^2
-2.6535 0.0002 -0.2513 0.0002	0.0132	0.6963	4.9573	-0.3017
-1.9102 0.0003 -0.3178 0.0004	-0.0000	-0.3953	4.2805	
-2.2526 -0.0552 0.5904 0.0298	0.0402	-0.0001	1.1357	
0.4302 0.0073 -0.1278 0.0089	-0.0000	0.0019	-0.7626	
-0.7149 0.0235 0.5716 0.0185		0.0005	-4.1986	
Для $\tilde{y}_7 \equiv W_{12}(t_f, t, x(t))$				
IW_{7sj}^1	IW_{7j}^2	LW_{7s}	b_{7s}^1	b_7^2
-42.9877 0.1069 18.9934 -9.470	-0.3807	-0.0633	-9.2690	2.0619
2.1800 0.0016 0.0384 0.0122	-0.0033	-4.0330	-2.7873	
-3.1573 0.0100 0.2809 0.0483	-0.0424	-0.3015	-2.5673	
5.3179 -0.0748 -1.4476 0.0038	-0.0329	0.1944	8.6874	
-3.6944 -0.0005 -0.0103 -0.016		-6.7912	4.6064	
Для $\tilde{y}_8 \equiv W_{22}(t_f, t, x(t))$				
IW_{8sj}^1	IW_{8j}^2	LW_{8s}	b_{8s}^1	b_8^2
-0.9497 -0.0175 1.1672 -0.0247	4.9241	-0.0016	-0.3697	-1.8930
-1.6034 0.0248 0.3410 0.0082	0.0001	-0.0066	0.2399	
-0.2014 -0.0214 -0.4451 -0.0085	-0.0009	-0.0027	1.7205	
-0.0067 0.0036 -0.4589 0.0057	-0.0000	-0.0058	0.5816	
-0.9790 -0.0000 -0.0001 .0000		5.0565	0.3847	
Для $\tilde{y}_9 \equiv W_{32}(t_f, t, x(t))$				
IW_{9sj}^1	IW_{9j}^2	LW_{9s}	b_{9s}^1	b_9^2
-15.0009 -5.1576 -138.9577 -0.8898	-11.4158	-0.0277	276.8438	9.8896
2.9176 0.0137 -3.6352 0.0999	0.0144	0.2440	-7.2992	
4.2148 -0.0204 0.1495 0.0043	-0.8732	1.2965	-5.6718	
-0.3548 0.0003 0.1608 0.0050	-0.0316	6.6283	-0.1048	
-1.3590 -0.0026 0.0379 0.0012		-11.0084	0.7205	

Рисунок 4.6 – Ток якоря $i_A(t)$ Рисунок 4.7 – Ток возбуждения $i_B(t)$ Рисунок 4.8 – Скорость $\omega(t)$ Рисунок 4.9 – $\bar{x}_1(t_f, t, x(t))$ Рисунок 4.10 – $\bar{x}_2(t_f, t, x(t))$ Рисунок 4.11 – $\bar{x}_3(t_f, t, x(t))$

Рисунок 4.12 – $W_{11}(t_f, t, x(t))$ Рисунок 4.13 – $W_{21}(t_f, t, x(t))$ Рисунок 4.14 – $W_{31}(t_f, t, x(t))$ Рисунок 4.15 – $W_{12}(t_f, t, x(t))$ Рисунок 4.16 – $W_{22}(t_f, t, x(t))$ Рисунок 4.17 – $W_{32}(t_f, t, x(t))$

На рисунках 4.6 – 4.8 показаны графики решений системы (4.2.56) при разгоне двигателя с помощью номинальных постоянных напряжений на обеих обмотках, равных 110В (штрих-пунктирные кривые), при воздействии «точного» МКС-управления (сплошные кривые) и приближенного (пунктирные кривые) МКС-управления. Под «точным» здесь понимается МКС-управление (4.2.19), где переменные конечного состояния (ПКС) и переход-

ная матрица рассчитываются численным интегрированием уравнений (4.2.15). Приближенное же МКС-управление – то, где указанные элементы алгоритма (4.2.19) рассчитываются по нейросетевой аппроксимации (4.2.57) с коэффициентами из таблицы 4.2.

На рисунках 4.9 – 4.17 показаны «точные» (сплошные кривые) и приближенные (пунктирные кривые) решения уравнений (4.2.60).

Анализ приведенных зависимостей позволяет сделать перечисленные ниже выводы.

- 1) Результаты воздействия «точного» и приближенного МКС-управлений весьма близки, несмотря на различия (иногда значительные) «точных» и приближенных зависимостей ПКС и переходных матриц; это свидетельствует, во-первых, о том, что в среднем точные и приближенные решения близки, а, во-вторых, о достаточной грубости алгоритма МКС-управления по отношению к погрешностям информации о динамике объекта управления.
- 2) Применение управляемого разгона с помощью МКС-управления позволяет в несколько раз (примерно в три раза) ускорить процесс разгона при приемлемом соотношении между установившимися и пиковыми значениями токов в обмотках двигателя (до трехкратного).
- 3) Для реализации приближенного МКС-управления при разгоне двигателя с использованием нейросетевой аппроксимации решений (4.2.60) потребовалось при каждом вычислении управления порядка 500 операций умножения и сложения; для точного МКС-управления соответствующее количество операций – порядка 6000, т.е. на порядок больше.

Таким образом, алгоритм приближенного МКС-управления на основе нейросетевой аппроксимации является ускоренным по сравнению с его базовым вариантом, основанном на численном интегрировании дифференциальных уравнений для переменных конечного состояния и переходной матрицы.

4.2.4.3. Выводы по результатам идентификации двигателя постоянного тока

В пункте 4.2.4 ускоренный метод конечного состояния применен для управления нелинейными динамическими системами вида (1.1.1) на основе идентифицированных моделей.

В качестве объекта идентификации взята эквивалентная (1.1.1) на конечном интервале времени $[t_0, t_f]$ модель конечного состояния (1.1.3), (1.1.5), элементами которой являются переменные конечного состояния (ПКС) $\bar{x}(t_f, t, x(t))$ и нелинейная переходная матрица (ПМ) $W(t_f, t, x(t))$.

Сформулированы три задачи идентификации прямого (задача 1), аппроксимационно-прямого (задача 2) и аппроксимационного (задача 3) типов.

Задачи 1 и 2, где идентификация ПКС и ПМ сведена к идентификации дифференциальных уравнений, решены на основе использования приближенных аналитических решений для ПКС и ПМ, полученных в главе 2, а задача 3 для идентификации ПКС и ПМ – на основе использования их нейросетевых аппроксимаций.

В качестве иллюстрационных примеров использованы электродвигатели постоянного тока с последовательным (модель (4.2.1)) и независимым (модель (4.2.2)) возбуждением.

Для проведения исследований созданы компьютерные программы в среде Matlab.

Задачи 1 и 2 решались для двигателя постоянного тока с последовательным возбуждением. При этом было рассмотрено два случая: идентификация модели двигателя в предположении, что структура его модели известна (задача 1), и при условии, что структура модели неизвестна (задача 2). Кроме того, исследованы две методики планирования экспериментов. Показано, что для данного примера обе методики примерно равноценны. Алгоритмы управления на основе ускоренного метода конечного состояния имеют большие перспективы для практического применения ввиду их достаточной универсальности, несложной подготовительной работы и возможностей использования в реальном времени. Отметим достоинства идентификации дифференциальных уравнений с помощью ПКС и ПМ: достаточно малое число экспериментов над моделью (в приведенном примере – от двух десятков до двух сотен), отсутствие внешних воздействий (вся идентификация производится в процессе свободного движения объекта), отсутствие необходимости измерения производных текущего состояния объекта.

Задача 3 решалась для двигателя постоянного тока с независимым возбуждением. В качестве аппроксимационной функции выбрана двухслойная искусственная нейронная сеть (ИНС) прямого типа со скрытым слоем. На ее основе удалось получить ускоренный алгоритм МКС-управления, на порядок более быстродействующий по сравнению с базовым МКС. Следует отметить, что описанные в главе 2 приближенные методы ускоренного расчета ПКС и ПМ для данного объекта положительных результатов не дали, а

с помощью ИНС задачу удалось решить. Отметим также и достаточно высокую цену использования ИНС в сравнении с использованием более простых аппроксимационных функций: увеличенное на порядок количество операций при расчете управления. Так, для приведенных примеров применения полиномиальной аппроксимации указанное количество операций – порядка десятков, а для ИНС – порядка сотен. Тем не менее, по сравнению с базовым МКС, где для этих же объектов расчет управлений в каждый из моментов времени требовал тысячи операций, использование ИНС существенно увеличивает быстродействие метода конечного состояния.

4.2.5. Управляемый разгон по заданной кривой переходного процесса скорости

Рассмотрим пример управляемого разгона двигателя постоянного тока в режиме последовательного возбуждения с моделью (4.2.1). Целью управления является разгон двигателя до заданного значения угловой скорости за приемлемое время. При этом должны соблюдаться заданные ограничения на пиковое значение тока в объединенной обмотке и величину питающего напряжения. По существу, эта задача является задачей стабилизации выходной координаты у заданного значения угловой скорости с критерием

$$J = \omega(t) \rightarrow J^*, \quad (4.2.61)$$

Задачу с критерием (4.2.61) можно решить с помощью линейризационного метода (ЛМ), основы которого изложены в подразделе 3.5.

Эту же задачу можно привести к терминальной задаче и решить ее с помощью базового варианта МКС. Для приведения задачи стабилизации к терминальной задаче используем, как и ранее, следующий подход. Вначале определим установившиеся (номинальные) для некоторого номинального управляющего напряжения $u = U_{nom}$ значения тока и скорости i_A^*, ω^* . На следующем этапе решим задачу приведения $\omega(t)$ к ω^* и $i_A(t)$ к i_A^* за заданное время t_C под воздействием $u = u^{MKS}(t)$, после чего на интервале $t \in [t_C, t_f]$ положим $u = U_{nom}$. В этом случае при точном выведении координат к номинальным значениям и при последующем воздействии номинальным напряжением переходных процессов на интервале $t \in [t_C, t_f]$ не будет. При этом для первого участка $t \in [0, t_C]$ целесообразно использовать квадратичный терминальный критерий, аналогичный критерию (4.2.5):

$$J = F_1(i_A(t_C) - i_A^*)^2 + F_2(\omega(t_C) - \omega^*)^2 \rightarrow 0. \quad (4.2.62)$$

Для сравнения качества управления с помощью МКС и ЛМ, применим ЛМ для решения как задачи стабилизации с критерием (4.2.61), так и для задачи стабилизации с квадратичным критерием

$$J = F_1(i_A(t) - i_A^*)^2 + F_2(\omega(t) - \omega^*)^2 \rightarrow 0. \quad (4.2.63)$$

Последнее нужно для исследования возможностей ЛМ для решения задач приведения нескольких координат к заданным значениям и сопоставления с МКС.

При выборе момента t_C будем руководствоваться традиционным для электротехники ограничением в виде максимально трехкратного соотношения между номинальным и пиковым значением тока.

При использовании критерия (4.2.63) имеем:

$$J = F_1(i_A(t) - i_A^*)^2 + F_2(\omega(t) - \omega^*)^2,$$

$$G_1 = \frac{\partial J}{\partial x} B = \begin{pmatrix} 2F_1(i_A - i_A^*) & 2F_2(\omega - \omega^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{L_A} \\ 0 \end{pmatrix} = 2F_1(i_A - i_A^*) \frac{1}{L_A}.$$

Поскольку G_1 не равно нулю тождественно, для расчета ЛМ-управления используем (3.5.5), конкретизированный вид которого следующий (аргумент t для краткости записей опускаем):

$$u = -L_A \frac{2F_1(i_A - i_A^*)\Phi_1 + 2F_2(\omega - \omega^*)\Phi_2 + \frac{1}{T}(F_1(i_A - i_A^*)^2 + F_2(\omega - \omega^*)^2)}{2F_1(i_A - i_A^*)}, \quad (4.2.64)$$

$$\Phi_1 = -\frac{r_A}{L_A} i_A - \frac{k_1}{L_A} i_A \omega, \quad \Phi_2 = -\frac{k_M}{J_M} \omega + \frac{k_2}{J_M} i_A^2.$$

При использовании критерия (4.2.61) имеем $J = \omega$, $G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{L_A} \\ 0 \end{pmatrix} \equiv 0$,

т.е. вырожденный случай. Поэтому переходим к следующему этапу формирования ЛМ-управления. Для этого в соответствии с (3.5.6) определим $z_1 = \omega - \omega^*$, в соответствии с (3.5.7) z_2 :

$$z_2 = \frac{\partial J}{\partial x} \Phi(t, x) + \frac{1}{T} z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} + \frac{\omega - \omega^*}{T} = \frac{-k_M}{J_M} \omega + \frac{k_M}{J_M} i_A^2 + \frac{\omega - \omega^*}{T}.$$

Далее определяем $\frac{\partial z_2}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{k_2}{J_M} 2i_A & \frac{1}{T} - \frac{k_M}{J_M} \end{pmatrix}$, $G_2 = \frac{\partial z_2}{\partial x} B = \frac{k_2}{J_M} 2i_A \frac{1}{L_A}$, не

равное нулю тождественно, и, в соответствии с (3.5.10), получаем:

$$u = -L_A J_M \frac{2 \frac{k_2}{J_M} i_A \Phi_1 + \left(\frac{1}{T} - \frac{k_M}{J_M} \right) \Phi_2 - \frac{1}{T^2} z_1 + \frac{2}{T} z_2}{2k_2 i_A}, \quad (4.2.65)$$

$$z_1 = \omega - \omega^*, \quad z_2 = \Phi_2 + \frac{1}{T} z_1,$$

где Φ_1, Φ_2 – компоненты вектора Φ из (4.2.6), где также определена и матрица B .

Выражения для МКС-управления по критерию (4.2.62) имеют вид:

$$u = \frac{L_A}{2T} \cdot \frac{J^* - F_A \Delta \bar{i}_A^2 - F_\omega \Delta \bar{\omega}^2}{F_A \Delta \bar{i}_A \cdot W_{11} + F_\omega \Delta \bar{\omega} \cdot W_{21}}, \quad (4.2.66)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \bar{i}_A &= \bar{i}_A(t_f, t) - i_A^*, \quad \Delta \bar{\omega} = \bar{\omega}(t_f, t) - \omega^*, \\ \frac{d\bar{i}_A(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= -\frac{r_A}{L_A} \bar{i}_A(\vartheta, t) - \frac{k_1}{L_A} \bar{i}_A(\vartheta, t) \bar{\omega}(\vartheta, t), \\ \frac{d\bar{\omega}(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= -\frac{k_M}{J_M} \bar{\omega}(\vartheta, t) + \frac{k_2}{J_M} [\bar{i}_A(\vartheta, t)]^2, \\ \frac{dW_{11}(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= -\left(\frac{r_A}{L_A} + \frac{k_1}{L_A} \bar{\omega}(\vartheta, t) \right) W_{11}(\vartheta, t) - \frac{k_1}{L_A} \bar{i}_A(\vartheta, t) W_{21}(\vartheta, t), \\ \frac{dW_{21}(\vartheta, t)}{d\vartheta} &= -2 \frac{k_2}{J_M} \bar{i}_A(\vartheta, t) W_{11}(\vartheta, t) - \frac{k_M}{J_M} W_{21}(\vartheta, t), \\ \vartheta &\in [t, t_f], \quad \bar{i}_A(t, t) = i_A(t), \quad \bar{\omega}(t, t) = \omega(t), \\ W_{11}(t, t) &= 1, \quad W_{21}(t, t) = 0. \end{aligned}$$

Ниже приведены графики зависимостей угловой скорости для ЛМ-управления (4.2.64) и (4.2.65), а также МКС-управления (4.2.66), полученные для следующих значений параметров объекта и алгоритмов управления: $r_A = 2 \text{ Ом}$; $L_A = 3 \text{ Гн}$; $k_1 = 0,1 \text{ Ом} \cdot \text{с}$; $k_2 = 1 \text{ н} \cdot \text{м} \cdot \text{А}^{-2}$; $J_M = 1,05 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $k_M = 0,7 \text{ н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$; $F_1 = F_2 = 1$; $U_{nom} = 110 \text{ В}$, $t_C = 0,4 \text{ с}$. Параметр T в экспериментах с алгоритмом (4.2.64) брался равным 2 с , с алгоритмом (4.2.65) – $0,025 \text{ с}$, с алгоритмом (4.2.66) – $0,01 \text{ с}$. При анализе чувствительности вместо «точного» МКС (4.2.66) использовался его ускоренный вариант, где $\bar{i}_A(t_f, t)$, $\bar{\omega}(t_f, t)$, $W_{11}(t_f, t)$, $W_{21}(t_f, t)$ вычислялись приближенно по алгебраическим выражениям, полученным в подпункте 4.2.4.1.

Для соблюдения ограничения $-500 \text{ В} \leq u(t) \leq 500 \text{ В}$ и предельного соотношения между пиковым и номинальным токами подбирались параметры алгоритмов управления t_C (для МКС) и T с целью получения наибольшего быстродействия, которые показаны на графиках рисунков 4.18 – 4.20.

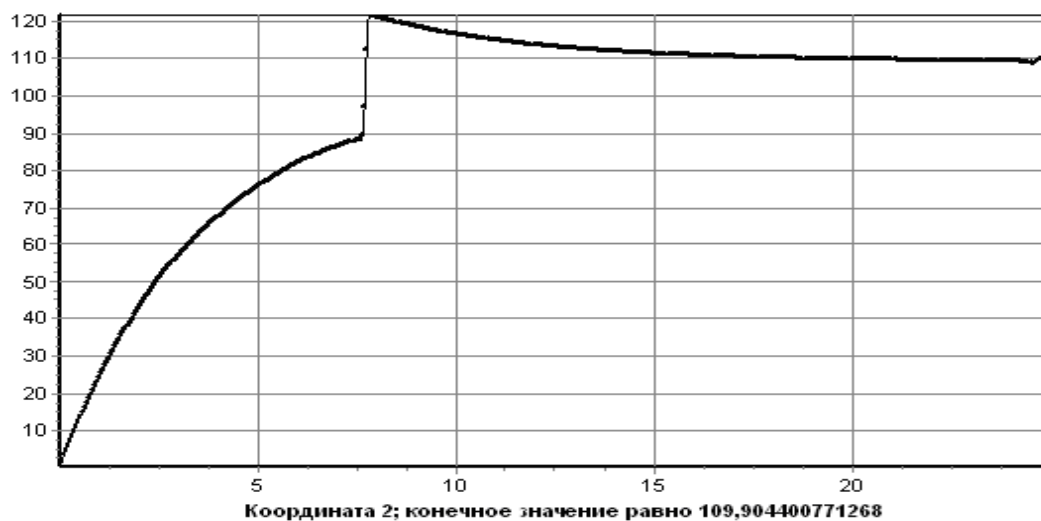


Рисунок 4.18 – Угловая скорость при ЛМ-управлении (4.2.64)

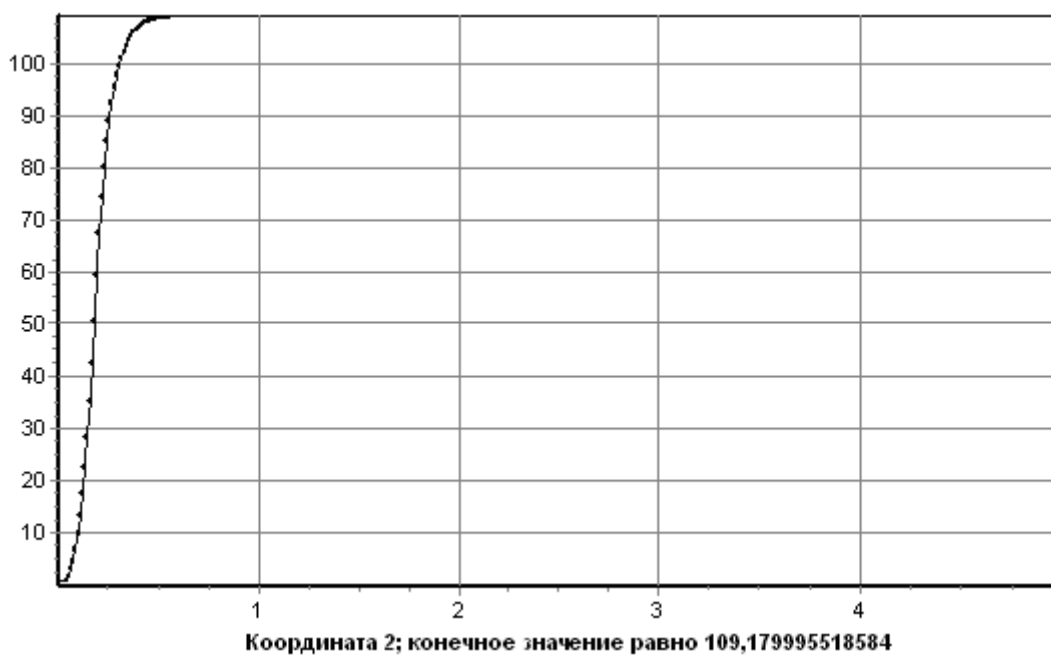


Рисунок 4.19 – Угловая скорость при ЛМ-управлении (4.2.65)



Рисунок 4.20 – Угловая скорость при МКС-управлении (4.2.66)

Приведем также результаты по проверке робастности, т.е. чувствительности конечных состояний, при использовании алгоритмов (4.2.64), (4.2.65) и (4.2.66). В таблице 4.3 приведены относительные погрешности (в процентах) конечного состояния $x \equiv (i_A(t_f) \ \omega(t_f))$, определяемые выражением $\delta(x) = (x - x^*)/x^* \cdot 100$, где $x^* \equiv (i_A^* \ \omega^*) = (8,66 \ 106,6)$ – номинальные для $u = U_{nom} = 110$ В ток якоря и угловая скорость. Проверялась чувствительность алгоритмов управления по отношению к рассогласованиям между истинными, приведенными выше, параметрами двигателя $a = (L_A \ r_A \ k_1 \ k_2 \ k_m \ J_m)$, и их приближенными значениями $\tilde{a}$, вычисляемые по приведенным в таблице 4.3 выражениям. Это означает, что при моделировании работы двигателя использовались параметры a_j , а для расчета управления – параметры $\tilde{a}_j$. Например, при $\delta_a = 0,5$ имеет место пятидесятипроцентное рассогласование между параметром модели и алгоритма.

Таблица 4.3 – Чувствительность конечных состояний

δ_a	$\delta(i_A(t_f))$ с ЛМ (4.2.64)	$\delta(\omega(t_f))$ с ЛМ (4.2.64)	$\delta(i_A(t_f))$ с ЛМ (4.2.65)	$\delta(\omega(t_f))$ с ЛМ (4.2.65)	$\delta(i_A(t_c))$ с МКС (4.2.66)	$\delta(\omega(t_c))$ с МКС (4.2.66)
$\tilde{a}_1 = \tilde{L}_A = (1 + \delta_a)L_A$						
0,5	3,5	0,18	2,4	0	36	-0,8
0,1	2,4	0,27	2,4	0	5,1	-0,5
-0,1	2,4	0	2,4	0	-6,5	0,4
-0,5	-9,4	-12,2	2,4	0	-19,	3,4
$\tilde{a}_2 = \tilde{r}_A = (1 + \delta_a)r_A$						
0,5	3,5	1,7	2,4	0	-1,2	0,4
0,1	3,5	0,6	2,4	0	-1,2	0,1
-0,1	5,9	0,7	2,4	0	2,8	-0,2
-0,5	1,2	-0,3	2,4	-0,1	8,5	-0,6
$\tilde{a}_3 = \tilde{k}_1 = (1 + \delta_a)k_1$						
0,5	5,6	5	2,4	0,1	-80	20
0,1	3,5	1,8	2,4	0	-3	0,3
-0,1	2,4	0,4	2,4	-0,1	6,2	-0,4
-0,5	0	-1,1	2,4	-0,2	42	-0,9
$\tilde{a}_4 = \tilde{k}_2 = (1 + \delta_a)k_2$						
0,5	-32,9	-57	1,2	-2,5	126	-2,8
0,1	-8,2	-21	2,4	-0,5	16,6	-0,7
-0,1	20	36	3,5	0,5	-4,2	0,6
-0,5	75,3	189	4,7	2,6	-57	9,1
$\tilde{a}_5 = \tilde{k}_m = (1 + \delta_a)k_m$						
0,5	75,3	189	4,7	2,6	-26	1,6
0,1	20	36	3,5	0,5	-0,7	0,3
-0,1	-9,4	-21	2,4	-0,5	7,4	-0,3
-0,5	-32,9	-57	1,2	2,5	27	-1,1
$\tilde{a}_6 = \tilde{J}_m = (1 + \delta_a)J_m$						
0,5	3,5	0,27	2,4	0	-5,3	0,4
0,1	3,5	0,18	2,4	0	-0,7	10,3
-0,1	3,5	0,18	2,4	0	6,2	-0,5
-0,5	3,5	8,9	2,4	0	141,4	-7,5

Анализ графиков рисунков 4.18 – 4.20 и данных из таблицы 4.3 позволяет сделать перечисленные ниже выводы о точности и робастности методов.

1) Применение ЛМ дало наилучшие результаты при использовании алгоритма (4.2.65), когда целью управления поставлена стабилизация скорости в соответствии с критерием (4.2.61) (рисунок 4.19); полученные результаты

превосходят все остальные по таким параметрам, как точность выхода на номинальный режим, величина и форма управляющего напряжения, чувствительности конечных состояний. Быстродействие системы при использовании ЛМ-управления (4.2.65) такое же, как и при использовании МКС-управления (4.2.66), однако при несколько большем пиковом значении тока (30А против 25А).

2) В случае управления двумя координатами результаты применения ЛМ-управления существенно уступают соответствующим результатам для МКС-управления; быстродействие хуже примерно в 30 раз (ср. рисунки 4.18 и 4.20); управление (4.2.64) на начальном участке имеет высокую частоту переключения; имел место локальный срыв процесса управления, причина которого – равенство нулю знаменателя в алгоритме (4.2.64); за счет амплитудных ограничений на управление последствия локального срыва смягчены и далее скомпенсированы; чувствительность конечных состояний с ЛМ-управлением (4.2.64) несколько выше, чем в случае МКС-управления, что следует из сопоставления количеств суммарных (по току и скорости) превышения относительных погрешностей определенных пороговых значений: так, для порогового значения 20 % указанные количества для ЛМ-алгоритма (4.2.64) – 12, для МКС-алгоритма – 8; для порогового значения 10 % имеем соответственно 15 и 11, для порогового значения 5 % – соответственно 21 и 19.

На основании выполненного анализа можно сделать общий вывод: каждый из исследованных методов управления имеет свои преимущества при решении определенных (прямых) задач управления: ЛМ – для задач стабилизации при управлении одной координатой, МКС – для терминальных задач при управлении несколькими координатами; каждый из методов можно применять и для решения двойственных задач (ЛМ – для терминальной, МКС – для стабилизации), однако при этом соответствующие результаты будут хуже, чем при решении прямых задач. В силу двойственной природы методов, возможно их комплексирование, что позволяет строить перспективные способы управления, сочетающие достоинства обоих исследованных методов.

Далее сформируем алгоритмы управляемого разгона ДПТ с независимым возбуждением (модель (4.2.2)) на основе ЛМ и МКС в варианте сигнальной самонастройки с целью их сравнительного анализа.

На основе (3.5.10) получаем ЛМ-управления:

$$\begin{aligned}
u_B &= \frac{k_2 \cdot i_A}{J_M \cdot L_B} \cdot \frac{C}{Z}, \quad u_A = \frac{k_2 \cdot i_B}{J_M \cdot L_A} \cdot \frac{C}{Z}, \\
C &= -dz21 \cdot \Phi_1 - dz22 \cdot \Phi_2 - dz23 \cdot \Phi_3 + \frac{1}{T^2} z_1 - \frac{2}{T} z_2, \\
Z &= \left(\frac{k_2 \cdot i_A}{J_M \cdot L_B} \right)^2 + \left(\frac{k_2 \cdot i_B}{J_M \cdot L_A} \right)^2, \\
dz21 &= \frac{k_2 \cdot i_A}{J_M}, \quad dz22 = \frac{k_2 \cdot i_B}{J_M}, \quad dz23 = -\frac{k_M}{J_M} + \frac{1}{T}, \\
z_1 &= \omega - \omega^*, \quad z_2 = \Phi_3 + \frac{1}{T} z_1,
\end{aligned}$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3 – компоненты вектора Φ из (4.2.7), ω^* – заданное значение скорости из критерия (4.2.61). Отметим, что в начале процесса, из-за нулевых начальных токов, знаменатель $Z = 0$. Для устранения указанной особенности в Z можно ввести третьим слагаемым малый параметр ϵ или задать ненулевые начальные токи. Кроме того, величины управляющих напряжений следует ограничить некоторыми минимальными и максимальными величинами $U_{\min}, U_{\max}$. При моделировании использованы следующие значения параметров: $r_B = 60 \text{ Ом}$, $L_B = 15 \text{ Гн}$, $r_A = 0,7 \text{ Ом}$, $L_A = 0,6 \text{ Гн}$, $k_1 = 0,37 \text{ Ом} \cdot \text{с}$, $k_2 = 0,8 \text{ Н} \cdot \text{м} / \text{А}^2$, $J_M = 2 \text{ кг} / \text{м}^2$, $k_M = 0,7 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $t_0 = 0$, $t_f = 7 \text{ с}$, $U_{\min} = -800 \text{ В}$, $U_{\max} = 800 \text{ В}$, начальные условия $i_B(0) = i_A(0) = \omega(0) = 0,1$ по причине, указанной выше. Желаемое значение стабилизируемого выхода $\omega^* = 110 \text{ с}^{-1}$, параметр T , от которого зависит время переходного процесса, взят равным $0,35 \text{ с}$ (см. ниже).

МКС-управление в варианте сигнальной самонастройки по эталонной модели рассчитывается по выражениям (2.5.8), (2.5.11), (2.5.12), (2.5.13), где: $x = \text{colon}(i_B, i_A, \omega)$; (3×3) -матрица F коэффициентов квадратичной формы имеет единственный ненулевой элемент $F_{33} = 1$, вектор Φ правых частей определен в (4.2.7), уравнения (2.5.2) для эталонной системы имеют вид:

$$\frac{dy_1}{dt} = 0, \quad \frac{dy_2}{dt} = 0, \quad \frac{dy_3}{dt} = -\frac{1}{T_L} y_3 + \frac{\omega^*}{T_L}, \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = \omega(0),$$

где $T_L = 1$ назначен произвольно, а $T = 0,35$ для ЛМ подобран таким образом, чтобы времена переходных процессов по скорости для сравниваемых методов были примерно одинаковыми. Заметим, что параметр T_L для МКС равен постоянной времени желаемого переходного процесса экспоненциального вида, а параметр T для ЛМ имеет этот же смысл только в случае, когда управление можно определить по выражению (3.5.5). Если же, ввиду $G_1 \equiv 0$, как в данном случае, управление рассчитывается по (3.5.10), прямая связь между желаемой формой переходного процесса и параметром T утрачивается.

ется. Можно лишь утверждать, что в данном случае, в соответствии с (3.5.6) и (3.5.9), параметр T является постоянной времени каждого из элементов цепочки инерционных звеньев первого порядка. Однако указанные звенья сохраняют свой смысл не в пространстве исходных переменных x , а в пространстве искусственных переменных z . По этой причине для ЛМ в данном случае параметр T необходимо подбирать, а формой переходного процесса, в отличие от МКС, фактически задаваться нельзя.

Результаты моделирования видны на графиках рисунков 4.18 – 4.29, где показаны зависимости от времени токов и скорости, а также управляющих воздействий. Для удобства сравнения, графики сгруппированы попарно – в каждой паре графики для ЛМ и МКС.

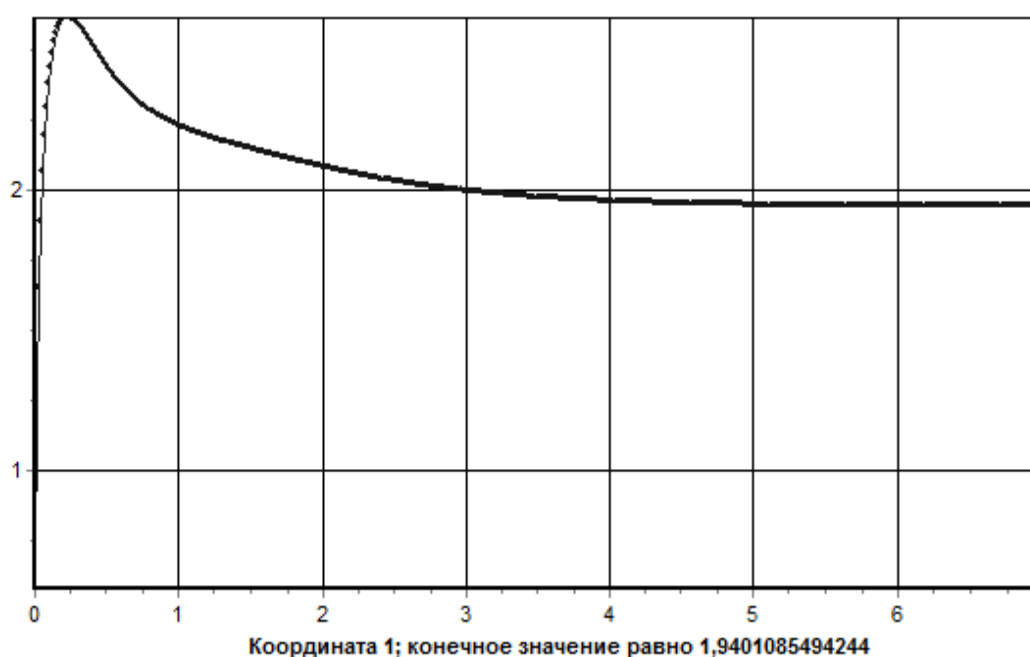


Рисунок 4.18 – Зависимость от времени тока возбуждения $i_B(t)$ при ЛМ-разгоне

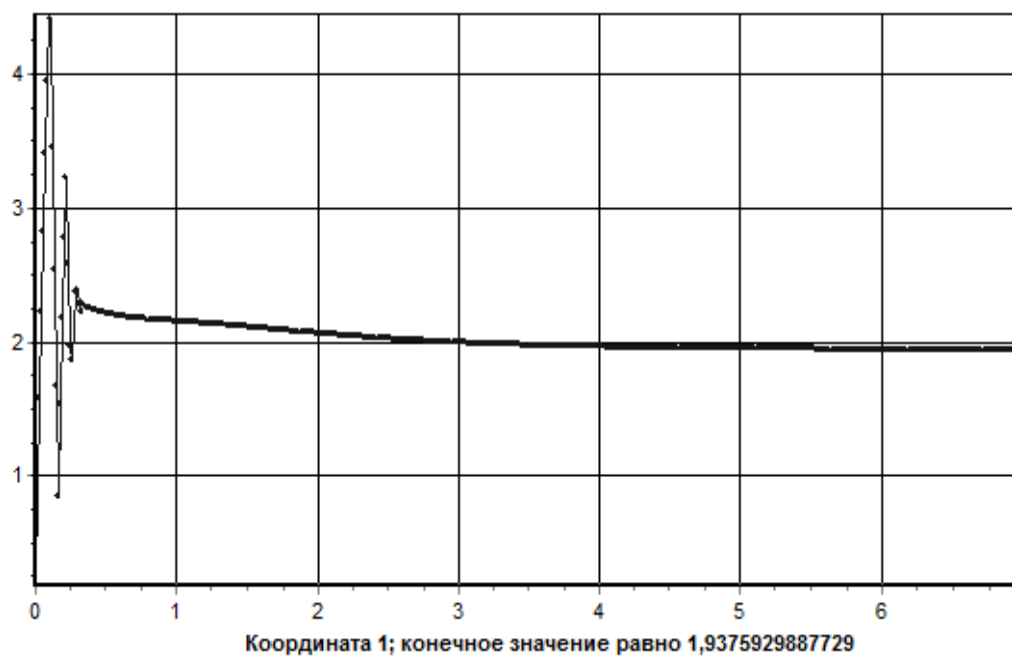


Рисунок 4.19 – Зависимость от времени тока возбуждения $i_B(t)$ при МКС-разгоне

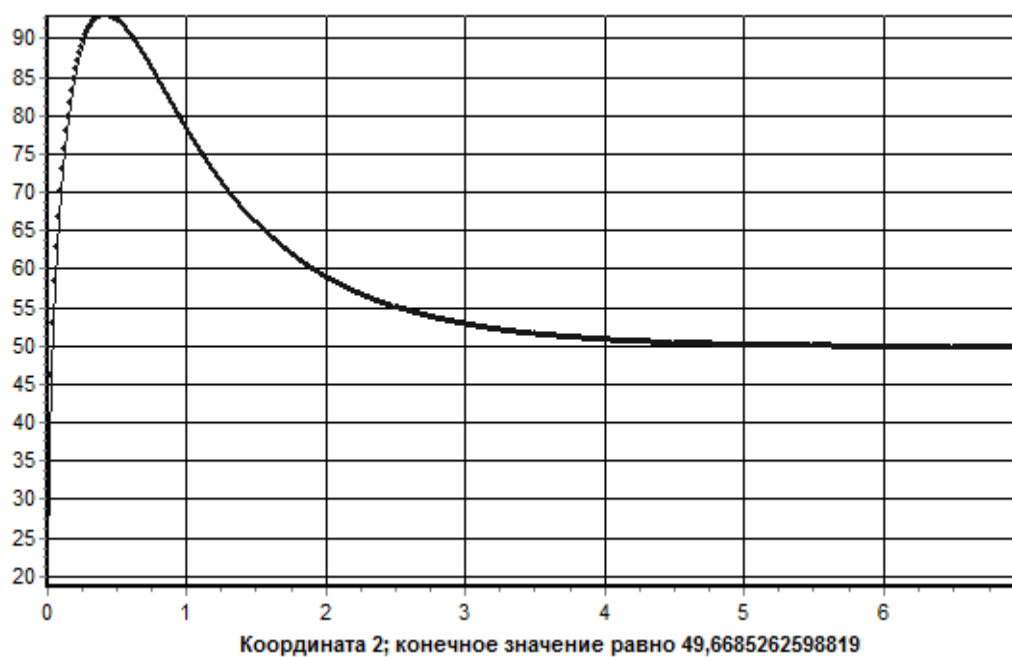


Рисунок 4.20 – Зависимость от времени якорного тока $i_A(t)$ при ЛМ-разгоне

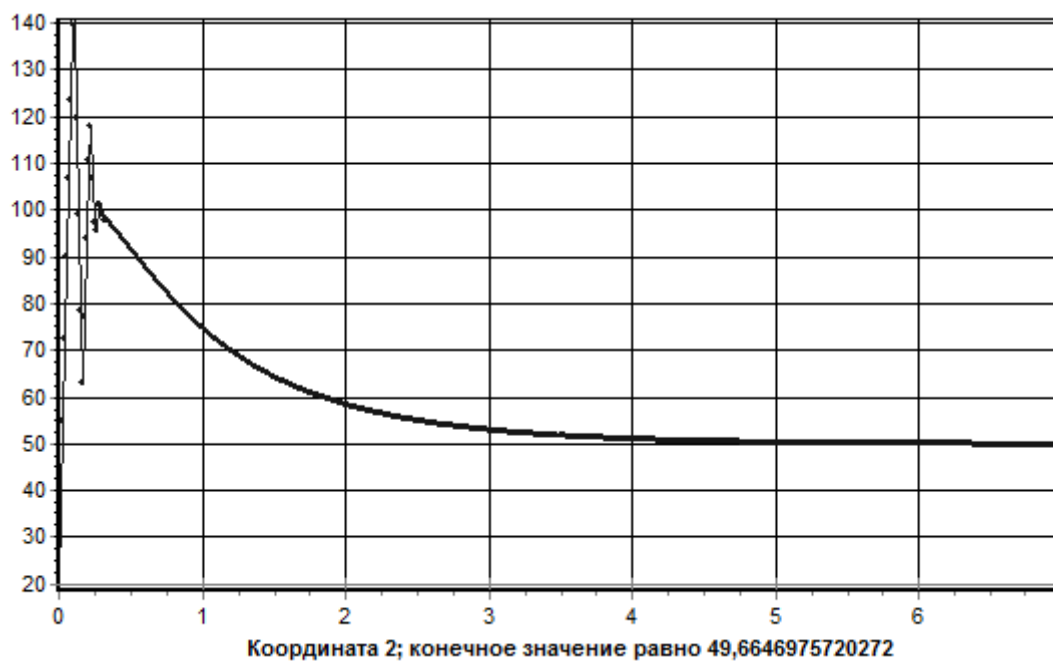


Рисунок 4.21 – Зависимость от времени якорного тока $i_A(t)$ при МКС-разгоне

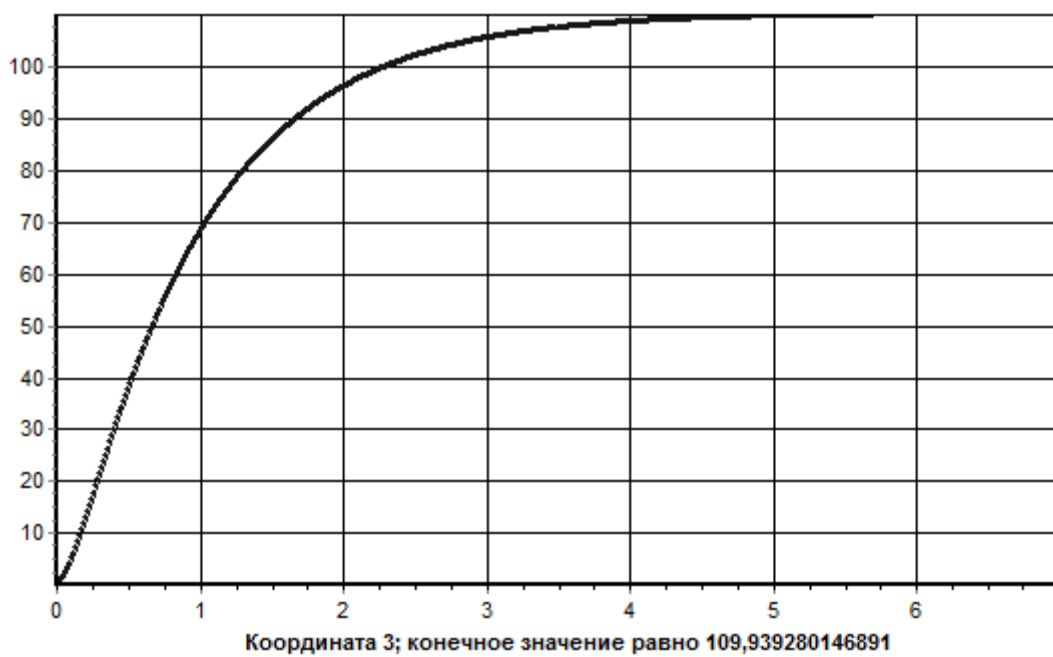


Рисунок 4.22 – Зависимость от времени скорости $\omega(t)$ при ЛМ-разгоне

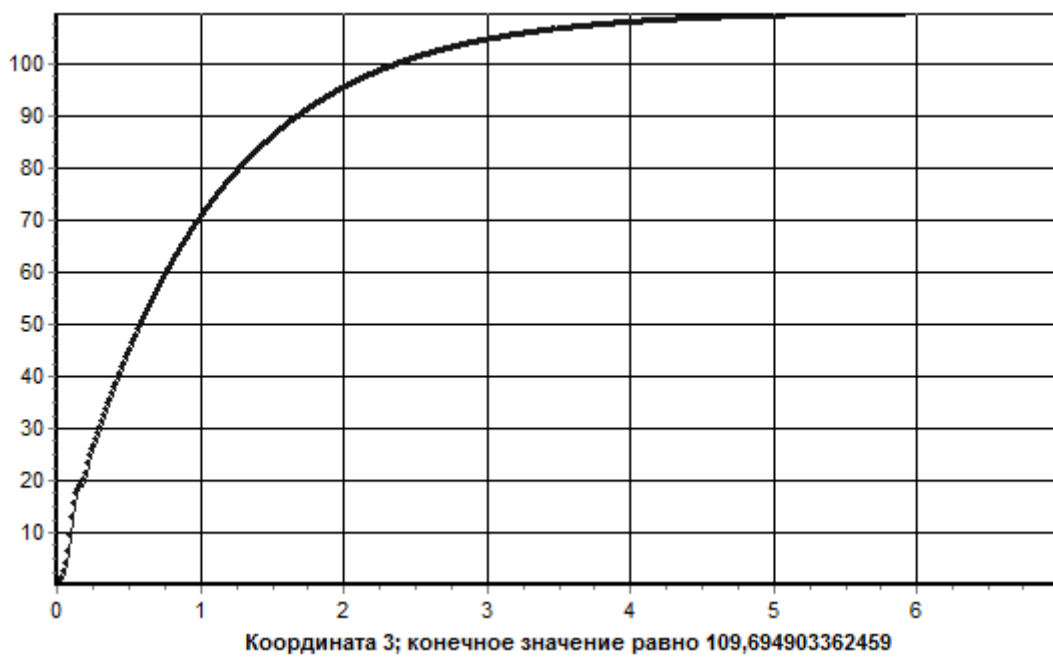


Рисунок 4.23 – Зависимость от времени скорости $\omega(t)$ при МКС-разгоне

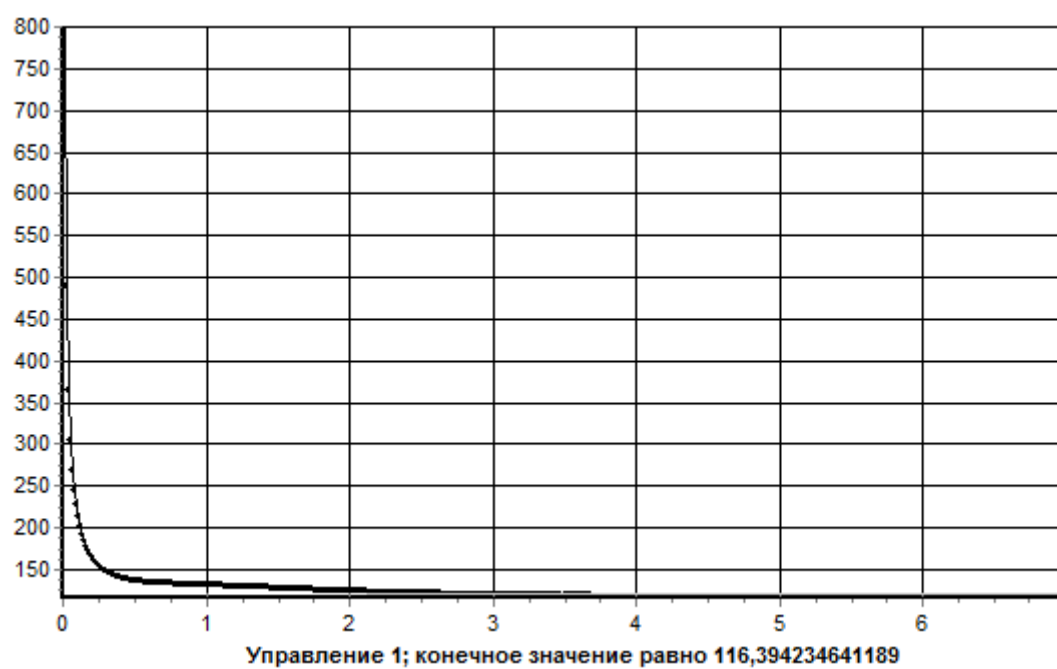


Рисунок 4.24 – Зависимость от времени напряжения возбуждения $u_B(t)$ при ЛМ-разгоне

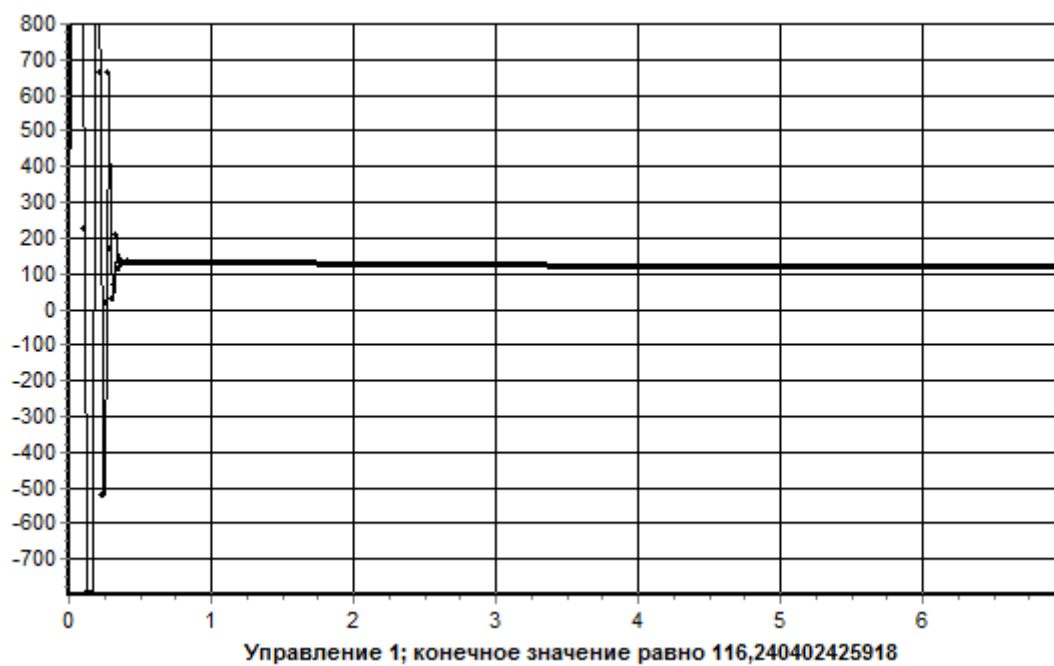


Рисунок 4.25 – Зависимость от времени напряжения возбуждения $u_B(t)$ при МКС-разгоне

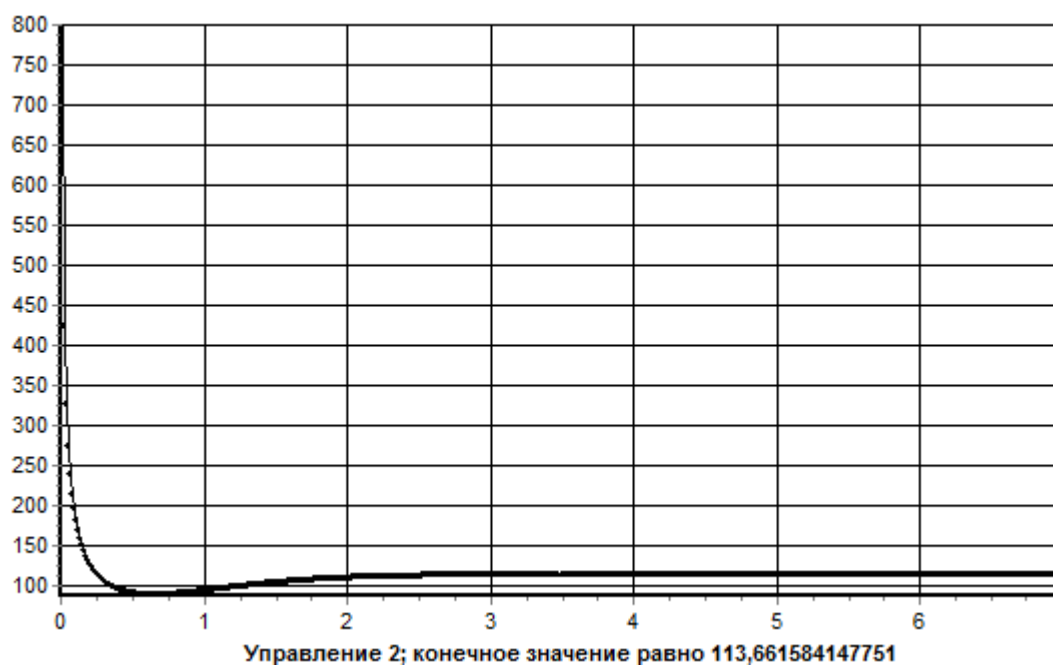


Рисунок 4.26 – Зависимость от времени якорного напряжения $u_A(t)$ при ЛМ-разгоне

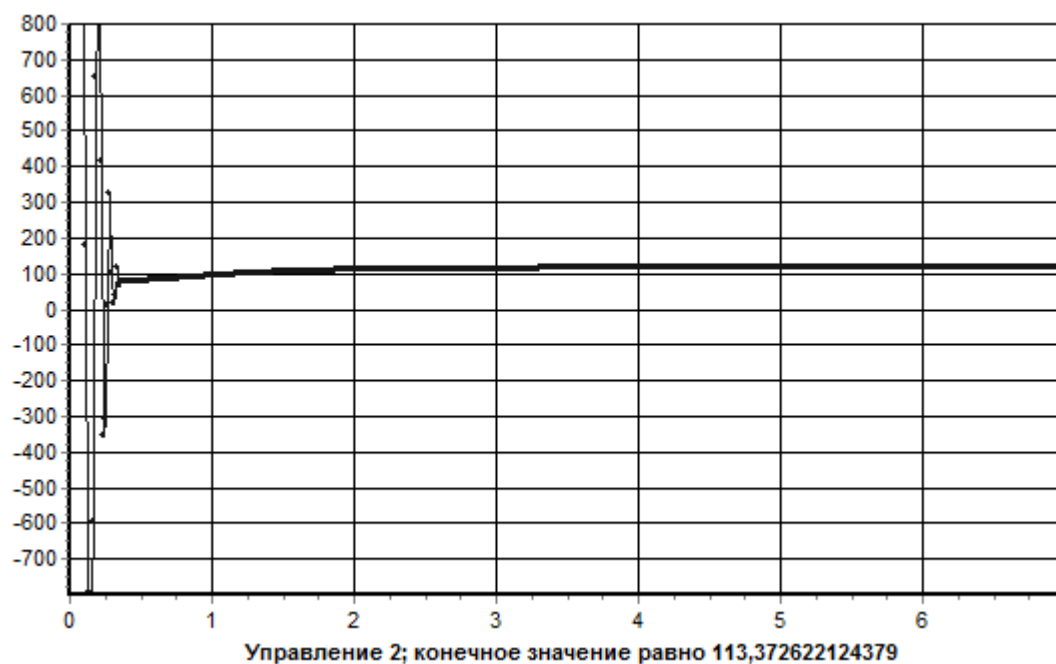


Рисунок 4.26 – Зависимость от времени якорного напряжения $u_A(t)$ при МКС-разгоне

Сравнивая приведенные зависимости, можно сделать выводы, перечисленные ниже.

- 1) Кривые переходных процессов близки друг к другу, хотя из графика рисунка 4.22 для ЛМ-разгона видно, что данная кривая несколько отличается от экспоненты. Несколько отличается от экспоненты и начальная часть графика рисунка 4.23, но это объясняется вычислительными погрешностями. Остальная же часть кривой рисунка 4.23 с высокой точностью совпадает с заданной формой в виде экспоненты с постоянной времени $T_L = 1$.
- 2) Токи и управляющие напряжения при ЛМ-разгоне изменяются более плавно, а пиковые значения токов меньше, чем токи и управляющие напряжения при МКС-разгоне.
- 3) Количества арифметических операций при реализации алгоритмов разгона следующие: для ЛМ-разгона – 36 операций умножения/деления и 14 операций сложения/вычитания; для МКС-разгона – 14 операций умножения/деления и 2 операции сложения/вычитания.

4.2.6. Управляемый разгон с помощью релейного управления

Рассмотрим практическую реализацию алгоритма расчета моментов переключений релейного управления, эквивалентного некоторому эталонному управлению (алгоритм описан в подразделе 3.2). В качестве примера используем задачу управляемого разгона ДПТ с математической моделью (4.2.2), где в качестве эталонного взят базовый вариант МКС (4.2.19). На графиках рисунков 4.27 – 4.31 показаны зависимости токов, скорости и управляющих воздействий от времени для трех алгоритмов разгона: прямого (неуправляемого) разгона под воздействием постоянных напряжений 110В на обеих обмотках (штрих-пунктирные кривые); управляемого разгона под воздействием алгоритма (4.2.19) (штриховые кривые); управляемого разгона под воздействием релейного управления (сплошные кривые), где в качестве эталонного использовано управление (4.2.19).

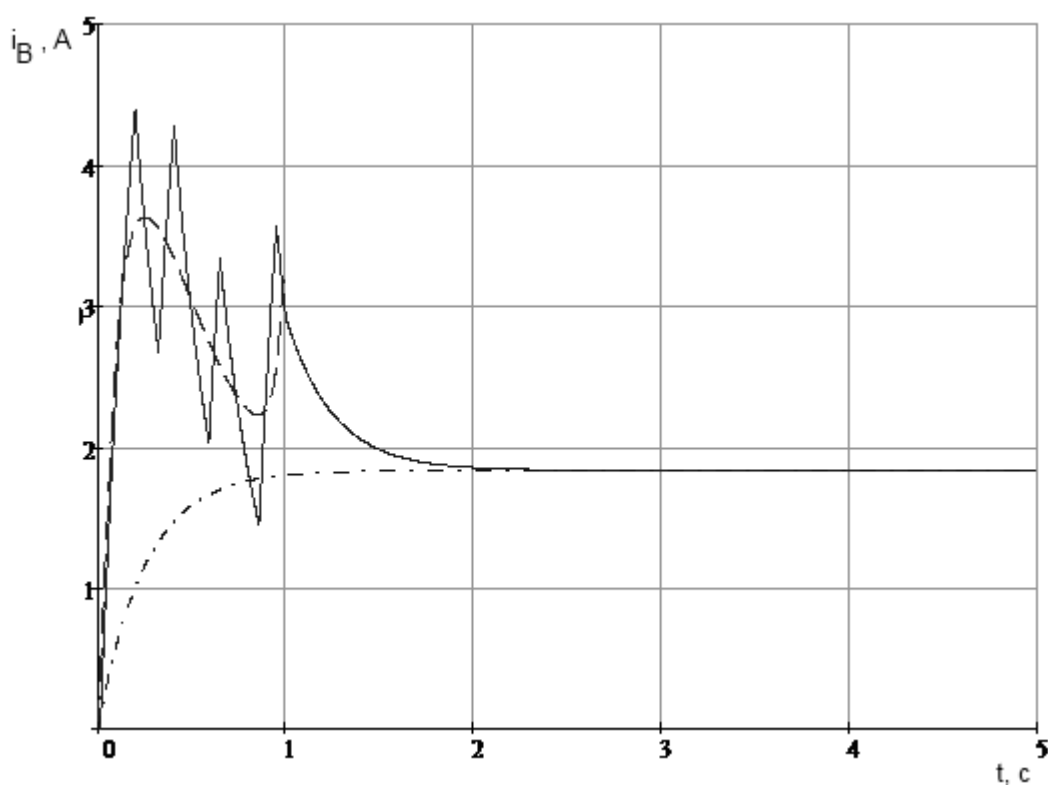


Рисунок 4.27 – Токи в обмотке возбуждения

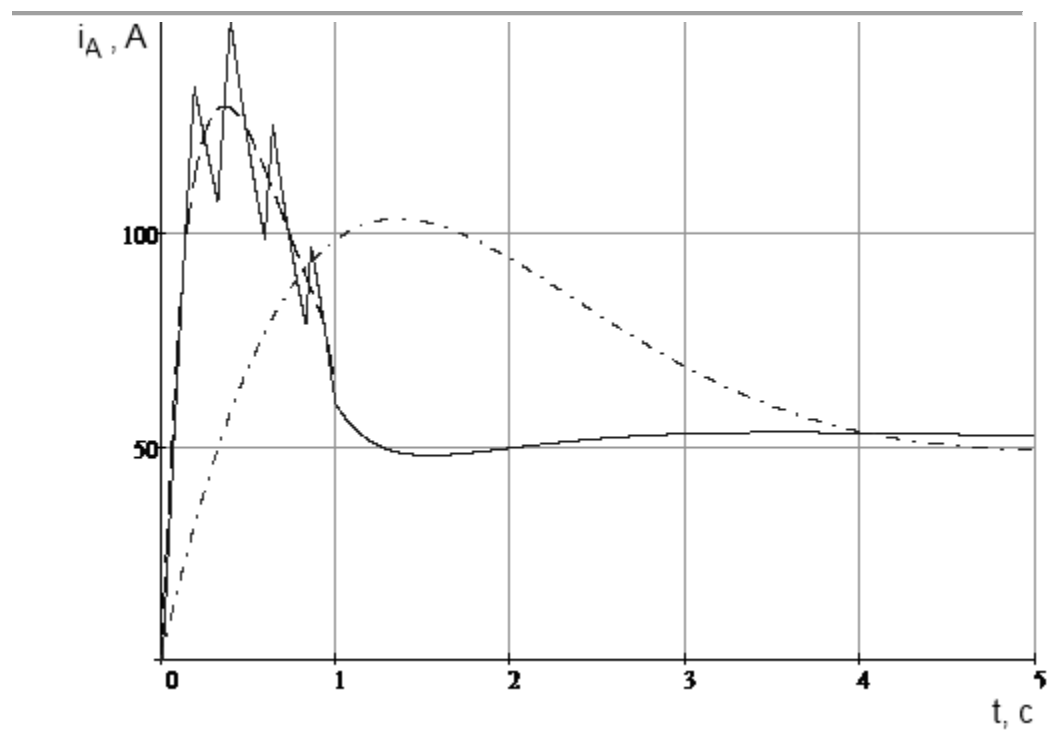


Рисунок 4.28 – Токи в якорной обмотке

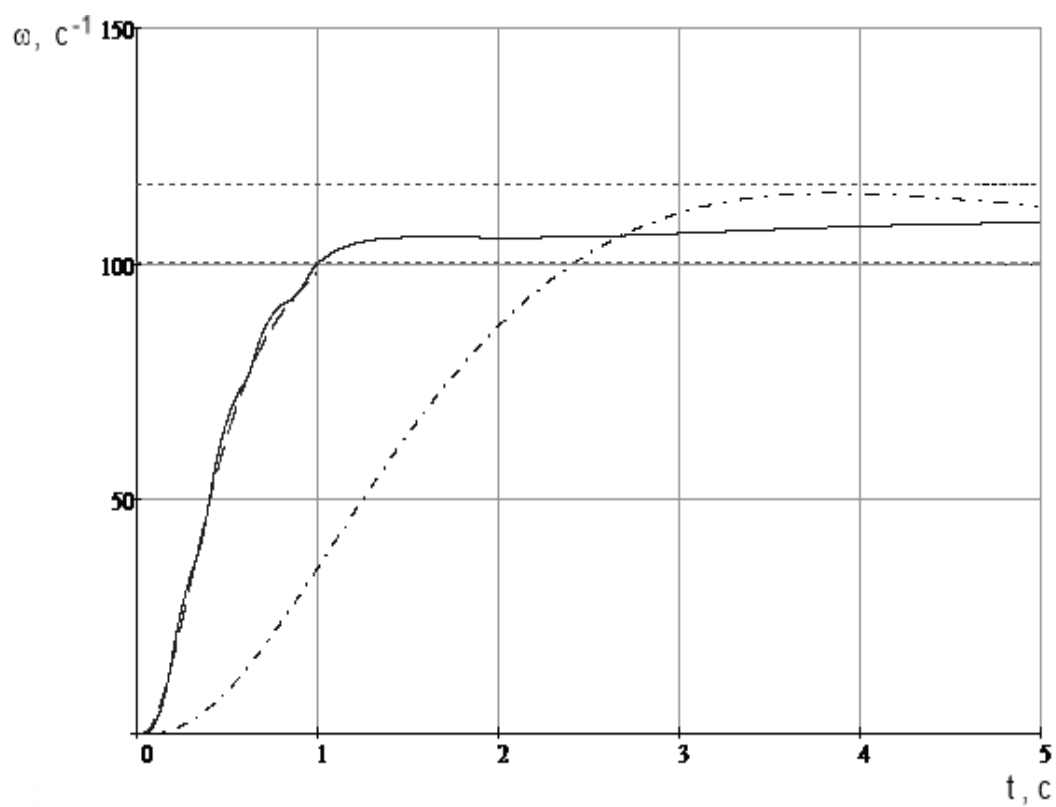


Рисунок 4.29 – Угловые скорости

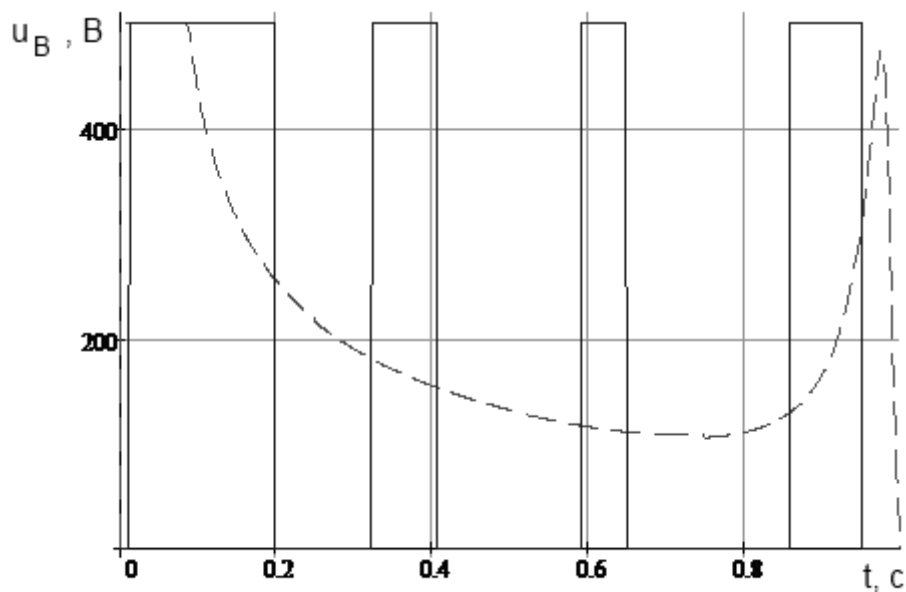


Рисунок 4.30 – Управляющие напряжения на обмотке возбуждения

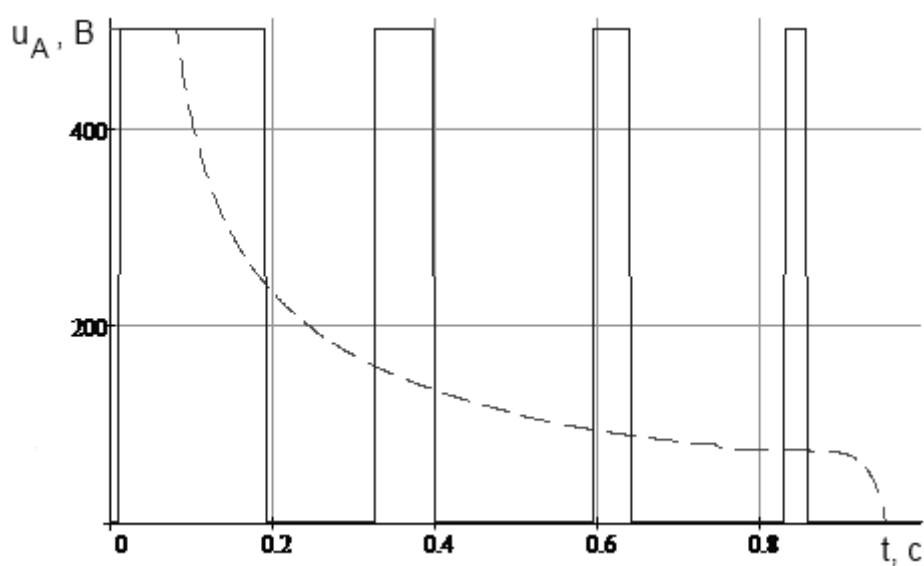


Рисунок 4.31 – Управляющие напряжения на якорной обмотке

Моменты переключения релейного управления рассчитаны по выражению (3.2.13) на каждом из четырех временных участков между границами интервала и точками его разбиения $t_0 = 0$, $t_1 = 0,25$, $t_2 = 0,5$, $t_3 = 0,75$ $t_f = 1$. При этом для случаев управляемого разгона МКС-управление или релейное управление использовалось до момента $t_f = 1$, а в оставшееся время использовались номинальные напряжения $u_B = u_A = 110$ В. Как видно, ток $i_B(1)$ для случая МКС-управления, значение которого близко к 3 А, значительно отличается от номинального значения $i_B^* = 1,8$ А. Значения же тока $i_A(1)$ и скорости $\omega(1)$ близки к их номинальным значениям $i_A^* = 52,2$ А и $\omega^* = 108,7$ с⁻¹. Ис-

пользование выражений (3.2.13) при расчете моментов переключений на каждом из указанных временных участков основано на предположении линейности во времени функций $h_i(t)$ (см. выражения (3.2.1)). Для этого интервал функционирования эталонного МКС-управления и разбит на четыре указанных выше временных интервала. Отметим, что ввиду отличия фактических $h_i(t)$ от линейных, в результате замены эталонного управления на интервале релейным с моментами переключения (3.2.13) значения координат на правой границе интервала для эталонного и релейного управлений будут несколько отличаться. Например, значения тока $i_A(0,25)$ равны 123,079 и 121,956 для МКС-управления и релейного управления соответственно. Аналогичные данные для $i_B(0,25)$: 3,626 и 3,568; для $\omega(0,25)$: 23,965 и 26,821. По этой причине эталонные управления нельзя рассчитывать для всего интервала его работы. При переходе к новому интервалу необходимо вновь рассчитать эталонное управление для начальных условий, сложившихся к концу текущего интервала под воздействием релейного управления. Для приведенного примера это означает, что с момента $t_1 = 0,25$ необходимо по (4.2.19) рассчитать эталонное управление на интервале $[0,25; 1]$ с начальными условиями $i_B(0,25) = 3,568$, $i_A(0,25) = 121,956$, $\omega(0,25) = 26,821$. При этом получается, что релейные управления формируются по принципу обратной связи. Но, в отличие от традиционного использования обратных связей, указанные связи используются достаточно редко во времени, что дает возможность более эффективно использовать управляющий компьютер.

Общий же вывод из приведенных данных следующий: применение релейного управления позволяет достичь цели управления практически с той же точностью, что и при использовании эталонного управления, расчет моментов переключения по (3.2.13) несложен и занимает незначительную долю времени по сравнению с расчетом эталонного управления.

4.3. Управление насосами в системе динамического хранения питьевой воды

Рассматривается пример динамической модели с дифференциально-алгебраическими ограничениями (дифференциально-функциональная система). Модификация метода конечных состояний для моделей этого класса описана в подпункте 2.1.2.

Имеется трубопроводная сеть, граф которой изображен на рисунке 4.32.

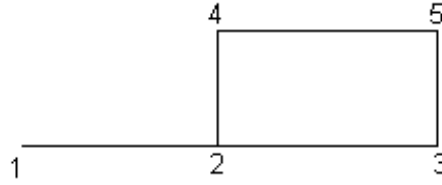


Рисунок 4.32 – Граф трубопроводной сети

Предполагается, что геометрические уровни вершин 1, 2, 3 $z_1=z_2=z_3=0$, уровни вершин 4, 5 $z_4=z_5=5$ м. В вершинах 1 и 3 имеются напорные насосы. Трубы (2,4) и (3,5) – цилиндрические емкости высотой 5 м, – предназначены для длительного хранения питьевой воды. Емкость (2,4) имеет диаметр 3 м, емкость (3,5) – диаметр 5 м. Остальные трубы диаметром 1 м и длиной 10 м каждая предназначены для подвода воды (труба (1,2)) и соединения емкостей (трубы (2,3) и (4,5)). В вершине 5 предполагается свободный выход воды через трубу, которая в рассматриваемую систему не входит. Целью управления является прокачка воды через емкости с помощью насосов таким образом, чтобы вода в каждой емкости обновлялась каждые два часа.

Модель данной системы без учета процессов перемешивания строится на основе уравнений Бернулли [67] для неустановившегося напорного движения несжимаемой жидкости в предположении абсолютной жесткости стенок труб. Система уравнений Бернулли для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
 h_i + z_i &= h_j + z_j + \mu_{ij} \frac{U_{ij}^2}{2 \cdot g} + \alpha_0 \frac{L_{ij}}{g} \cdot \frac{dU_{ij}}{dt}, \\
 (i, j) &\in \{(1,2), (2,4), (4,5)\}, \\
 h_2 + z_2 &= h_3 + z_3 - \Delta h_3 + \mu_{23} \frac{U_{23}^2}{2 \cdot g} + \alpha_0 \frac{L_{23}}{g} \cdot \frac{dU_{23}}{dt}, \\
 h_3 + z_3 + \Delta h_3 &= h_5 + z_5 + \mu_{35} \frac{U_{35}^2}{2 \cdot g} + \alpha_0 \frac{L_{35}}{g} \cdot \frac{dU_{35}}{dt}.
 \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Здесь h_i, h_j – пьезометрические напоры в i -й и j -й вершинах сети, U_{ij} – средняя скорость потока в трубе (i,j), L_{ij} – длина трубы (i,j), $g = 9,807 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ – ускорение свободного падения, $\alpha_0 \in [1,03; 1,05]$ – коэффициент коррекции количества движения. Параметр μ_{ij} определяется выражением [68]

$$\mu_{ij} = \alpha + \lambda_{ij} \frac{L_{ij}}{D_{ij}} + \zeta_{ij}, \quad \lambda_{ij} = (2,035 \cdot \lg \frac{D_{ij}}{2 \cdot k_{ij}} - 1,74)^{-2}, \tag{4.3.2}$$

где $\alpha \in [1,05; 2,00]$ – коэффициент коррекции скорости, учитывающий степень турбулентности потока (большие значения соответствуют меньшей

турбулентности), D_{ij}, ζ_{ij} – диаметр и коэффициент местного сопротивления (i-j)-й трубы. Коэффициент сопротивления λ_{ij} (коэффициент Дарси) рассчитывается по приведенной выше формуле Кармана-Никурадзе (4.3.2) для шероховатых труб, в которой k_{ij} – средняя высота бугорков шероховатости. Член Δh_3 отражает наличие насоса в месте соединения трубы (2,3) и емкости (3,5). Так как насос, нагнетая воду в емкость, одновременно отсасывает ее из трубы (2,3) и наоборот, указанный член входит в уравнения для (2,3) и (3,5) с разными знаками. Пьезометрический напор h_5 при свободном выходе потока из вершины 5 нулевой.

Наряду с (4.3.1), в динамическую модель входят уравнения сохранения потока в виде системы уравнений для расходов во внутренних вершинах сети.

$$Q_{12} = Q_{23} + Q_{24}, \quad Q_{24} = Q_{45}, \quad Q_{23} = Q_{35}. \quad (4.3.3)$$

Для вершины 5 уравнение сохранения не записываем, так как из нее имеется свободный выход потока.

Расходы Q_{ij} связаны со средними скоростями U_{ij} соотношением

$$Q_{ij} = \sigma_{ij} \cdot U_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \pi D_{ij}^2 / 4,$$

где σ_{ij} – площадь поперечного сечения (i,j)-й трубы.

Последняя группа уравнений модели – уравнения для уровней воды в емкостях

$$\frac{dS_{24}}{dt} = U_{24}, \quad \frac{dS_{35}}{dt} = U_{35}.$$

Указанные уровни отображают не уровни заполнения емкостей (они на протяжении всего времени работы системы предполагаются заполненными), а местоположения выделенных частиц воды, по которым можно судить о степени обновления воды в емкостях.

Целью прокачки является достижение уровнями S_{24} и S_{35} значения $S_z = 5\text{ м}$ за заданное время 7200 с.

Соответствующий критерий терминальной задачи в этом случае имеет вид:

$$J = [S_{24}(t_f) - S_z]^2 + [S_{35}(t_f) - S_z]^2 \rightarrow J^*, \quad (4.3.4)$$

где минимально возможное значение J^* нулевое.

Переходя в (4.3.1), (4.3.3) от скоростей к уровням, перепишем модель в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_{ij}}{dt} &= -\beta_{ij}Q_{ij}^2 + \gamma_{ij}(h_i + z_i - h_j - z_j), \\
(i, j) &\in \{(1,2), (2,4), (4,5)\}, \\
\frac{dQ_{23}}{dt} &= -\beta_{23}Q_{23}^2 + \gamma_{23}(h_2 + z_2 - h_3 - z_3 + \Delta h_3), \\
\frac{dQ_{35}}{dt} &= -\beta_{35}Q_{35}^2 + \gamma_{35}(h_3 + z_3 - h_5 - z_5 + \Delta h_3), \\
\frac{dS_{24}}{dt} &= \frac{Q_{24}}{\sigma_{24}}, \quad \frac{dS_{35}}{dt} = \frac{Q_{35}}{\sigma_{35}}, \quad \frac{dh_1}{dt} = u_1(t), \quad \frac{d\Delta h_3}{dt} = u_2(t), \\
Q_{12} &= Q_{23} + Q_{24}, \quad Q_{24} = Q_{45}, \quad Q_{23} = Q_{35}, \\
\beta_{ij} &= \frac{\mu_{ij}}{2\alpha_0 L_{ij} \sigma_{ij}}, \quad \gamma_{ij} = \frac{\sigma_{ij} \cdot g}{\alpha_0 L_{ij}}, \\
(i, j) &\in P = \{(1,2), (2,3), (2,4), (3,5), (4,5)\}
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Управляемые посредством $u_1(t)$, $u_2(t)$ напоры $h_1, \Delta h_3 \in h^c$ здесь предполагаются независимыми, от которых через уравнения расходов зависят другие напоры. Для выявления указанных зависимостей продифференцируем уравнения расходов из (4.3.5) и подставим в них соответствующие выражения для производных от расходов. В результате получим следующую систему линейных уравнений относительно зависимых напоров $h^\phi = \text{colon}(h_2, h_3, h_4)$:

$$A(\gamma) \cdot h^\phi = b(Q, \gamma, h^c),$$

где

$$\begin{aligned}
A(\gamma) &= \begin{pmatrix} -\gamma_{12} - \gamma_{23} - \gamma_{24} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{24} & 0 & -\gamma_{24} - \gamma_{45} \\ \gamma_{23} & -\gamma_{23} - \gamma_{35} & 0 \end{pmatrix}, \\
b(Q, \gamma, h^c) &= \begin{pmatrix} \beta_{12}Q_{12}^2 - \beta_{23}Q_{23}^2 - \beta_{24}Q_{24}^2 - \gamma_{12}h_1 - \gamma_{23}\Delta h_3 - \\ -\gamma_{12}(z_1 - z_2) + \gamma_{23}(z_2 - z_3) + \gamma_{24}(z_2 - z_4) \\ \beta_{24}Q_{24}^2 - \beta_{45}Q_{45}^2 - \gamma_{24}(z_2 - z_4) + \gamma_{45}(z_4 - z_5) - \gamma_{45}h_5 \\ \beta_{23}Q_{23}^2 - \beta_{35}Q_{35}^2 + (-\gamma_{23} + \gamma_{35})\Delta h_3 - \\ -\gamma_{23}(z_2 - z_3) + \gamma_{35}(z_3 - z_5) - \gamma_{35}h_5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Заметим, что нелинейная система (4.3.5) в рамках поставленной задачи прокачки емкостей при условии нулевых расходов в начальном состоянии не может быть линеаризована в окрестности $Q_{ij} = 0$, так как при этом из правых частей (4.3.5) расходы пропадают, что делает модель неадекватной. Если же пытаться ее линеаризовать в окрестности ненулевых расходов, то необходимо заранее определить их подходящие значения. При этом опять имеет место ситуация, сходная с коммутацией электрических аппаратов, когда координаты (в частности, расходы) изменяются в более широких пределах, чем это допустимо для линеаризации.

Система уравнений (2.1.9) - (2.1.16) в данном случае имеет вид:

$$\frac{dW(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial Q}(\vartheta, x, h^c, h^{\bar{\sigma}}) & 0_{5 \times 2} & \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial h^c}(\vartheta, x, h^c, h^{\bar{\sigma}}) \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial Q}(\vartheta, x, h^c, h^{\bar{\sigma}}) & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 5} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \cdot W(\vartheta, t, x(t)),$$

$$\begin{matrix} x = \bar{x}(\vartheta, t), \\ h^c = \bar{h}^c(\vartheta, t) \end{matrix}$$

$$x = \text{colon}(Q, S, h^c),$$

$$\frac{d\bar{Q}_{ij}(\vartheta, t)}{d\vartheta} = -\beta_{ij}\bar{Q}_{ij}^2 + \gamma_{ij}(\bar{h}_i + z_i - \bar{h}_j - z_j),$$

$$(i, j) \in \{(1,2), (2,4), (4,5)\},$$

$$\frac{d\bar{Q}_{23}(\vartheta, t)}{d\vartheta} = -\beta_{23}\bar{Q}_{23}^2 + \gamma_{23}(\bar{h}_2 + z_2 - \bar{h}_3 - z_3 + \Delta\bar{h}_3),$$

$$\frac{d\bar{Q}_{35}(\vartheta, t)}{d\vartheta} = -\beta_{35}\bar{Q}_{35}^2 + \gamma_{35}(\bar{h}_3 + z_3 - \bar{h}_5 - z_5 + \Delta\bar{h}_3), \bar{h}_5 = h_5,$$

$$\frac{d\bar{S}_{24}}{dt} = \frac{\bar{Q}_{24}}{\sigma_{24}}, \frac{d\bar{S}_{35}}{dt} = \frac{\bar{Q}_{35}}{\sigma_{35}}, \frac{d\bar{h}_1}{dt} = 0, \frac{d\Delta\bar{h}_3}{dt} = 0,$$

$$\bar{h}^{\bar{\sigma}} = A(\gamma)^{-1}b(\bar{Q}, g, \bar{h}^c),$$

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial Q}(\vartheta, x, h^c, h^{\bar{\sigma}}) = \text{diag}\{-2\beta_{ij}Q_{ij}\}_{(i,j) \in P},$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial Q}(\vartheta, x, h^c, h^{\bar{\sigma}}) = \text{diag}\{1/\sigma_{ij}\}_{(i,j) \in \{(2,4), (3,5)\}},$$

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial h^c}(\vartheta, x, h^c, h^{\bar{\sigma}}) = \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial h^c} + \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial h^{\bar{\sigma}}} \cdot A^{-1}(\gamma) \cdot \frac{\partial b(Q, \gamma, h^c)}{\partial h^c},$$

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial h^c} = \begin{pmatrix} \gamma_{12} & 0 \\ 0 & \gamma_{23} \\ 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{35} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial h^{\bar{\sigma}}} = \begin{pmatrix} -\gamma_{12} & 0 & 0 \\ \gamma_{23} & -\gamma_{23} & 0 \\ \gamma_{24} & 0 & -\gamma_{24} \\ 0 & \gamma_{35} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{45} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial b(Q, \gamma, h^c)}{\partial h^c} = \begin{pmatrix} -\gamma_{12} & -\gamma_{23} \\ 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{35} - \gamma_{23} \end{pmatrix},$$

$$\vartheta \in [t, t_f], W(t, t, x(t)) = I, \bar{Q}_{ij}(t, t) = Q_{ij}(t), (i, j) \in P,$$

$$\bar{S}_{ij}(t, t) = S_{ij}(t), (i, j) \in \{(2,4), (3,5)\},$$

$$\bar{h}_1(t, t) = h_1(t), \Delta\bar{h}_3(t, t) = \Delta h_3(t).$$

Управление (2.1.5) конкретизируется в виде:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= A^T (AA^T)^{-1} q, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix}, \\
 A_1 &= (\bar{S}_{24}(t_f, t) - Sz) \cdot W_{68}(t_f, t, x(t)) + \\
 &+ (\bar{S}_{35}(t_f, t) - Sz) \cdot W_{78}(t_f, t, x(t)), \\
 A_2 &= (\bar{S}_{24}(t_f, t) - Sz) \cdot W_{69}(t_f, t, x(t)) + \\
 &+ (\bar{S}_{35}(t_f, t) - Sz) \cdot W_{79}(t_f, t, x(t)), \\
 q &= \frac{1}{2T} \left(J^* - (\bar{S}_{24}(t_f, t) - Sz)^2 - (\bar{S}_{35}(t_f, t) - Sz)^2 \right), \\
 u_1(t) &= \frac{A_1 \cdot q}{A_1^2 + A_2^2}, \quad u_2(t) = \frac{A_2 \cdot q}{A_1^2 + A_2^2}.
 \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Предлагаемый алгоритм исследовался с помощью компьютерного моделирования для следующих параметров:

$$T = 400\text{с}, k_{ij} = 0,0001\text{м}, \alpha_0 = 1,04, \alpha = 2, J^* = 0, \zeta_{ij} = 0.$$

Шаг численного интегрирования дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты четвертого порядка полагался равным 50с, конечное время $t_f = 7200\text{с}$. Начальные условия выбирались из предположения, что в начальном состоянии вода в трубах и емкостях неподвижна. Этому соответствуют нулевые начальные значения для всех расходов, уровней и управляющего напора Δh_3 . Начальное же значение управляющего напора $h_1 = 5\text{м}$, так как этот напор противостоит напору водяных столбов в емкостях высотой 5м. Результаты моделирования представлены на рисунке 4.33, где изображены зависимости изменения уровней, управляющих напоров, а также желаемая и фактическая зависимости $\bar{J}(t_f, t)$. Последние изображены на третьем графике в виде практически совпадающих кривых.

Желаемое поведение $\bar{J}(t_f, t)$ определяется выражением

$$\bar{J}(t_f, t) = (\bar{J}(t_f, t_0) - J^*) \cdot \exp\left[-\frac{t - t_0}{T}\right] + J^*. \tag{4.3.7}$$

Фактическое поведение определяется, согласно (4.3.4) и (4.3.6), выражением

$$\bar{J}(t_f, t) = J^* - 2 \cdot T \cdot q.$$

Совпадение указанных желаемой и фактической зависимостей свидетельствует о достижимости в данном классе управлений выбранных значений Sz, J^* .

Для сравнения предпринимались попытки подобрать постоянные значения управляющих напоров, обеспечивающих прокачку обеих емкостей за заданное время. Наилучший результат, достигнутый при этом, получен для $h_1 = 0,00004, \Delta h_3 = 0$ и равен $S_{24}(t_f) = 14,047; S_{35}(t_f) = 5,070$. Уровень

14,047 означает, что за заданное время емкость (2,4) высотой 5м прокачивается почти 3 раза, в то время как другая емкость (3,5) высотой 5м – только один раз. Кроме того, напор первого насоса (т.е. его энергетические затраты) при этом почти на порядок больше суммарных энергетических затрат двух насосов при предлагаемом алгоритме управления.

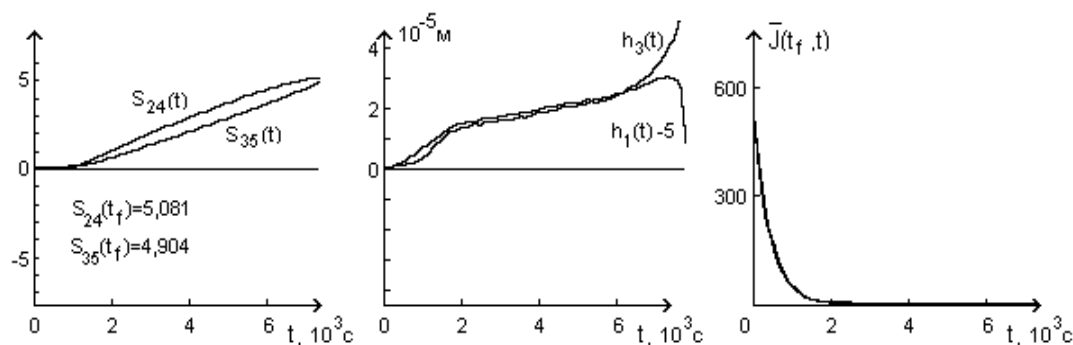


Рисунок 4.33 – Зависимости от времени уровней, управляющих напоров и критериальной функции

Следует отметить, что алгоритм (4.3.6) малочувствителен к погрешностям его параметров. Так, искажение параметров β_{ij} , γ_{ij} в алгоритме расчета управления (4.3.6) на одну треть по отношению к тем же параметрам в модели (4.3.5) приводит к изменению конечных значений управляемых уровней примерно на десять процентов.

4.4. Управление химическим реактором с рециркуляцией

Для демонстрации эффективности работы метода конечного состояния для систем с запаздываниями воспользуемся моделью, предложенной в [24].

На рисунке 4.34 показана схема необратимой изотермической реакции преобразования вещества А в Б в экранированном химическом реакторе.

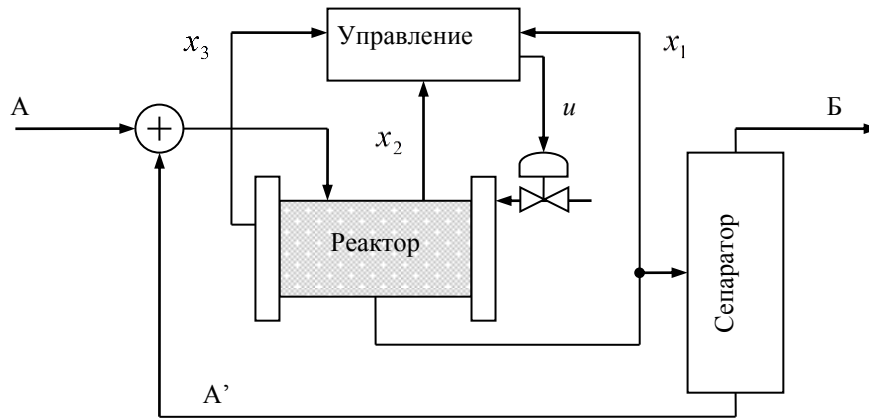


Рисунок 4.34 – Схема преобразования вещества А в вещество Б в химическом реакторе с рециркуляцией.

Учитывая баланс массы и энергии, упрощенную форму модели химического реактора можно выразить следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{\lambda} x_1(t) + \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) x_1(t - \tau) + Da(1 - x_1(t)) \exp \left(\frac{x_2(t)}{1 + x_2(t)/\varphi} \right) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{\lambda} x_2(t) + \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) x_2(t - \tau) + BDa(1 - x_1(t)) \exp \left(\frac{x_2(t)}{1 + x_2(t)/\varphi} \right) \\ &\quad - \beta_r (x_2(t) - x_3(t)) \\ \dot{x}_3(t) &= \beta_c (x_2(t) - x_3(t)) + u(t) (x_{3f} - x_3(t)) \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

где x_1 – выход реакции, x_2 – безразмерная температура реактора, x_3 – безразмерная температура корпуса реактора. Безразмерная температура охлаждения корпуса $u(t)$ может быть рассмотрена как управляющая величина. Параметр τ представляет собой безразмерную задержку рециркуляции вещества А. Коэффициент рециркуляции λ варьируется от нуля до единицы (1 – процесс протекает без рециркуляции, 0 – полная рециркуляция).

Результат моделирования собственного движения неуправляемой системы с известными параметрами: $\lambda = 0.5$, $h = 5$, $B = 1$, $Da = 0.235$, $\varphi = 20$, $\beta_r = 1.5$, $\beta_c = 1.5$, $x_{3f} = -4$, $u = 0.97$ и $(x_1, x_2, x_3) = (0.65, 3, 0.26)$, приведен на рисунке 4.35.

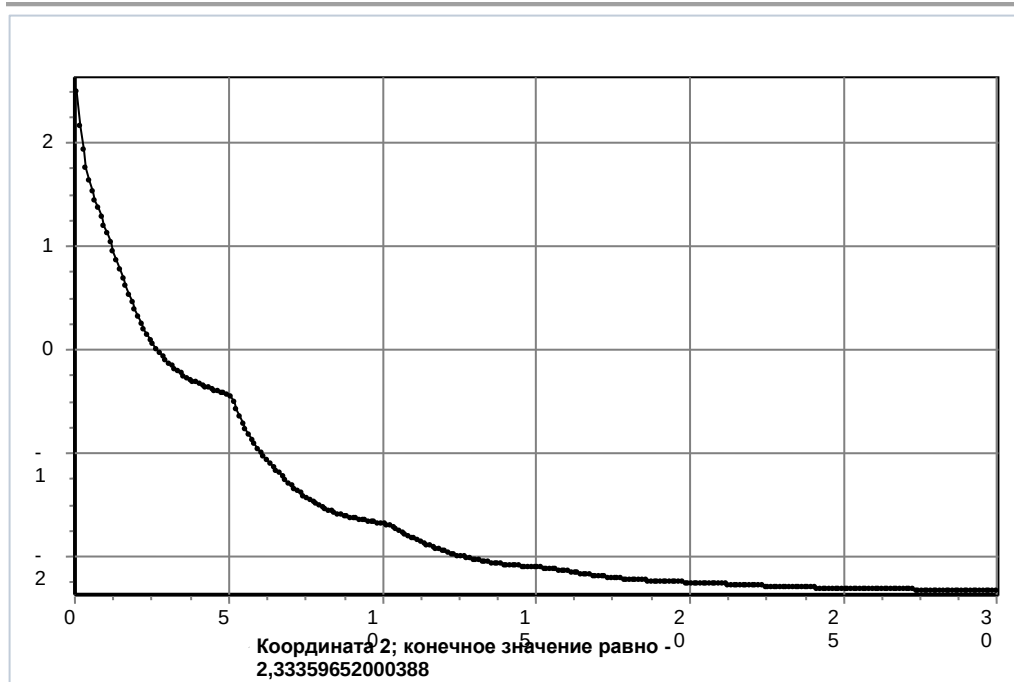


Рисунок 4.35 – Собственное движение неуправляемой системы (координата x_2).

Цель управления заключается в достижении заданной температуры внутри реактора (x_2), сопровождаемой высокой производительностью реактора (x_1).

Для применения МКС-управления прежде всего необходимо преобразовать модель системы (4.4.1) так, чтобы управление входило в него аддитивно. С этой целью введем дополнительную координату x_4 и подставим ее в выражение для x_3 вместо $u(t)$. Таким образом, система (4.4.1) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{\lambda} x_1(t) + \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) x_1(t - \tau) + Da(1 - x_1(t)) \exp \left(\frac{x_2(t)}{1 + x_2(t)/\varphi} \right) \\
 \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{\lambda} x_2(t) + \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) x_2(t - \tau) + BDa(1 - x_1(t)) \exp \left(\frac{x_2(t)}{1 + x_2(t)/\varphi} \right) \\
 &\quad - \beta_r (x_2(t) - x_3(t)) \\
 \dot{x}_3(t) &= \beta_c (x_2(t) - x_3(t)) + x_4(t) (x_{3f} - x_3(t)) \\
 \dot{x}_4(t) &= u(t)
 \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

Выражение для критериальной функции (КФ) выберем следующим:

$$J(\bar{x}) = (\bar{x}_2 - x_2^*)^2,$$

где x_2^* – желаемое значение координаты x_2 .

На рисунке 4.36 показано, как МКС-управление приводит систему (4.4.2) из начального состояния в желаемое ($x_2^* = 4$) при экспоненциальном поведении КФ.

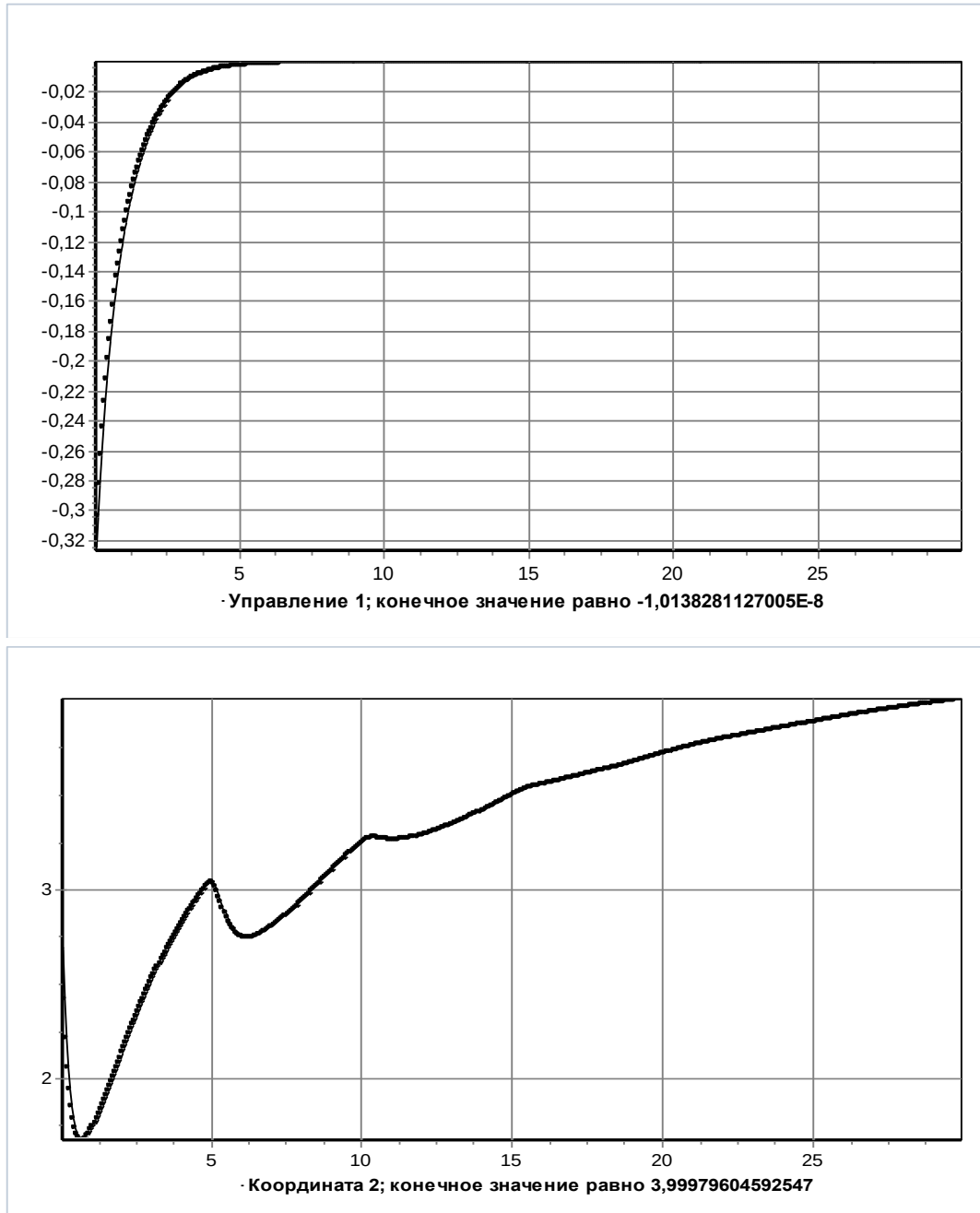


Рисунок 4.36 – МКС-управление и внутренняя температура реактора при $\lambda = 0.5$ и $\tau = 5$.

На рисунке 4.36 хорошо видно, что МКС-управление при экспоненциальном поведении КФ действует только на начальном этапе, а сама координата x_2 точно приводится к желаемому значению.

С целью демонстрации работы метода при условиях сильной рециркуляции, на рисунке 4 приведены результаты моделирования системы (4.4.2) при значении параметров $\lambda = 0.1$ и $\tau = 5$.

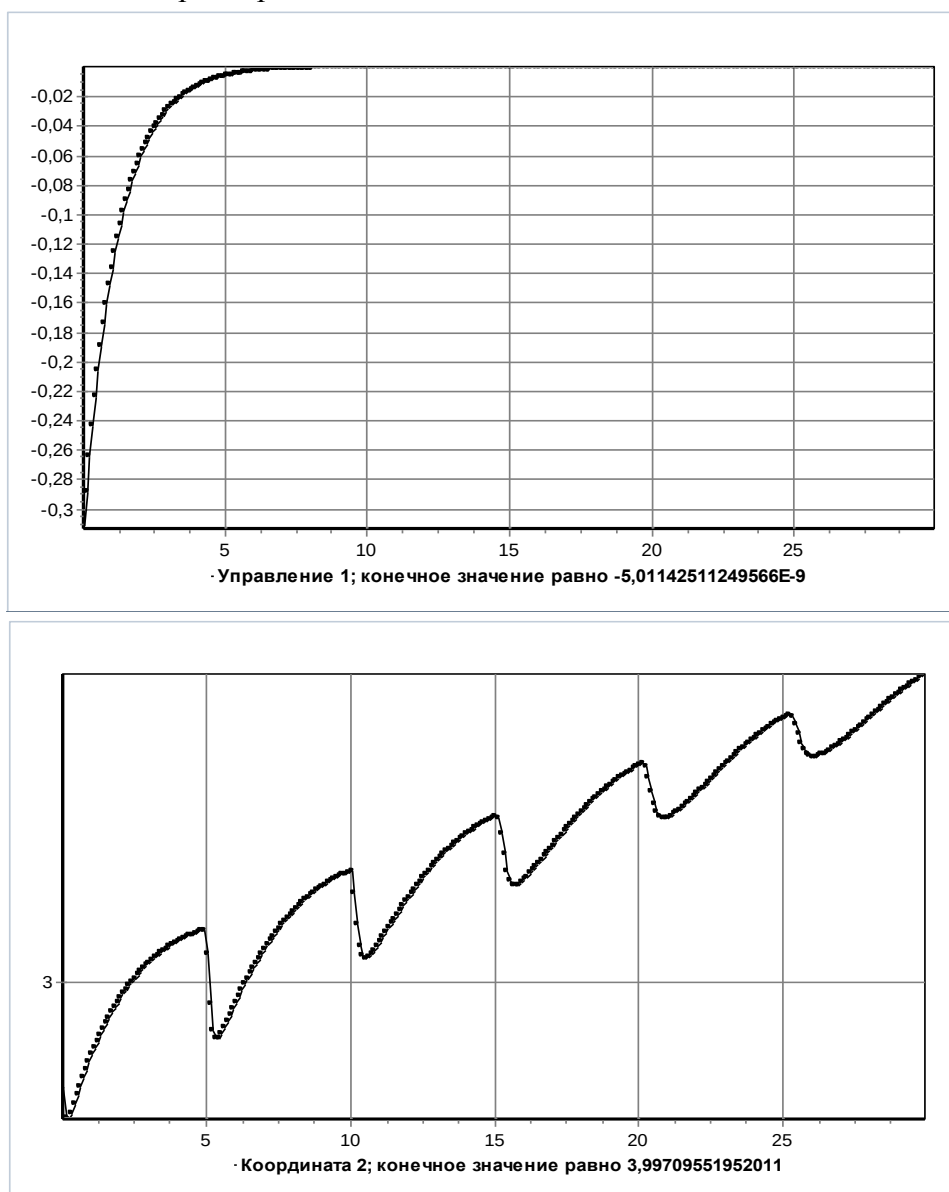


Рисунок 4.37 – МКС-управления и внутренняя температура реактора при $\lambda = 0.1$ и $\tau = 5$.

В данном случае также видно, что МКС-управление точно приводит систему в заданное состояние даже при условии сильной рециркуляции. Также хочется отметить тот факт, что управление реактором осуществлялось только на начальном этапе работы системы, а весь оставшийся промежуток времени система находилась в самостоятельном (свободном) движении.

4.5. Управление запасами

В настоящем разделе метод конечного состояния в виде программной реализации применен к одной динамической задаче управления запасами с нестационарным спросом [69]. Эта задача представляет собой пример нелинейной дискретной системы, для которой, во-первых, известно оптимальное решение, а, во-вторых, ее нелинейность – разрывная. Последнее позволяет проверить дискретное МКС-управление на достаточно сложном классе задач управления. Теоретической основой здесь могут служить либо МКС для гибридных систем (задача (2.3.1) при $\Phi_1 = 0$, $B_1 = 0$ и нелинейное уравнение (2.3.8) для определения управления u_2), либо МКС для многоиндексных систем (задача (2.4.16), (1.4.13), (1.4.14) и нелинейное уравнение для управления (2.4.18) при $p = 1$)

Рассматривается задача управления запасами на N периодов [69], когда спрос за j -й период определяется величиной d_j . Введем обозначения: r_j – остаток запаса от $(j-1)$ -го периода; d_j – суммарный спрос за j -й период; z_j – запас, создаваемый в j -й период (или заказ в j -м периоде). Предполагается, что заявка на пополнение запаса исполняется мгновенно, причем расходы на выполнение заказа обозначим $c_j(r_j, z_j)$. Пусть $s_j(z_j + r_j - d_j) = s_j(r_{j+1})$ – расходы по хранению избыточного запаса в j -м периоде. Тогда суммарные расходы по снабжению за N периодов определяются как

$$\begin{aligned} J &= \sum_{j=1}^N c_j(r_j, z_j) + s_j(z_j + r_j - d_j) \rightarrow \min, \\ z_j + r_j - d_j &= r_{j+1}, \\ j &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Дополним ограничения задачи условиями неотрицательности $z_j, r_j, z_j + r_j - d_j \geq 0$, отображающие естественные требования к величинам остатков и запасов.

Сравнивая (4.5.1) с (2.3.1) и учитывая, что в роли управляющего воздействия здесь выступает z_j , видим, что, в отличие от (2.3.1), здесь критерий зависит не только от конечного состояния, но и от промежуточных состояний и управления. Такой критерий аналогичен критерию задачи Лагранжа вариационного исчисления (с интегральным функционалом) для непрерывного случая. Задача Лагранжа легко сводится к задаче с терминаль-

ным критерием (задаче Майера). В дискретном случае это тоже легко сделать, введя новую переменную

$$y_j = \sum_{k=1}^j c_k(r_k, z_k) + s_k(z_k + r_k - d_k) = y_{j-1} + c_j(r_j, z_j) + s_j(z_j + r_j - d_j) \quad (4.5.2)$$

Тогда задача (4.1) запишется в форме:

$$\begin{aligned} J &= y_N \rightarrow \min, \\ y_j &= y_{j-1} + c_j(r_j, z_j) + s_j(z_j + r_j - d_j), \\ z_j + r_j - d_j &= r_{j+1}, \\ j &= 1, 2, \dots, N, \quad z_0 = z^0, \quad y_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Эта задача нуждается в дальнейших операциях по приведению к форме (2.3.1). Для этого второе уравнение запишем с уменьшенным на единицу индексом, а в первом уравнении вместо z_j подставим его выражение из преобразованного второго уравнения:

$$\begin{aligned} J &= y_N \rightarrow \min, \\ y_j &= y_{j-1} + c_j(z_{j-1} + r_{j-1} - d_{j-1}, z_j) + s_j(z_j + z_{j-1} + r_{j-1} - d_{j-1} - d_j), \\ z_{j-1} + r_{j-1} - d_{j-1} &= r_j, \\ j &= 1, 2, \dots, N, \quad z_0 = z^0, \quad y_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

Здесь присутствует два управляющих воздействия z_j и z_{j-1} . Необходимо свести их к воздействию в момент j . Для этого введем $z_j = z_{j-1} + v_j$ и подставим везде вместо z_j правую часть. Получим:

$$\begin{aligned} J &= y_N \rightarrow \min, \\ y_j &= y_{j-1} + c_j(z_{j-1} + r_{j-1} - d_{j-1}, z_{j-1} + v_j) + \\ &+ s_j(2z_{j-1} + v_j + r_{j-1} - d_{j-1} - d_j), \\ r_j &= z_{j-1} + r_{j-1} - d_{j-1}, \\ z_j &= z_{j-1} + v_j, \\ j &= 1, 2, \dots, N, \quad y_0 = 0, \quad r_0 = r^0, \quad z_0 = z^0. \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

И последнее: здесь управление v_j входит как один из аргументов в нелинейные функции двух переменных c_j, s_j (вид которых еще и зависит от j), а в (2.3.1) управление входит аддитивно. С целью приведения к аддитивному управлению введем еще одно разностное уравнение $v_j = v_{j-1} + u_j$, заменим в первом и третьем уравнениях v_j на v_{j-1} . При этом в преобразованной модели между управлением и объектом появляется дополнительное дискретное инерционное звено, которое является составной частью конструируемого регулятора. В итоге получаем систему вида (2.3.1) без непрерывной части:

$$\begin{aligned}
J &= y_N \rightarrow \min, \\
y_j &= y_{j-1} + c_j(z_{j-1} + r_{j-1} - d_{j-1}, z_{j-1} + v_{j-1}) + s_j(2z_{j-1} + v_{j-1} + r_{j-1} - d_{j-1} - d_j), \\
r_j &= z_{j-1} + r_{j-1} - d_{j-1}, \\
z_j &= z_{j-1} + v_{j-1}, \\
v_j &= v_{j-1} + u_j, \\
j &= 1, 2, \dots, N, \quad y_0 = 0, \quad r_0 = r^0, \quad z_0 = z^0, \quad v_0 = v^0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай задачи (4.1) [69], формулируемой с точки зрения планирования поставок продукции некоторым предприятием. Предполагается, что остаток в начале первого периода нулевой, а

$$c_j(r_j, z_j) = 300 \cdot 1_+(z_j), \quad 1_+(z_j) = \begin{cases} 1, & z_j \geq 0, \\ 0, & z_j < 0, \end{cases} \quad s_j(r_{j+1}) = 2 \cdot r_{j+1}.$$

Здесь функция c_j отображает стоимость наладки (переналадки) оборудования, которая производится в начале только тех месяцев, когда изготавливается продукция, а время на выполнение заказа не учитывается. Таким образом, здесь роль заказов выполняют планируемые поставки продукции.

После преобразования (4.5.1) к виду (2.3.1) и замены требования минимизации критерия терминальной задачи требованием поиска его заданного значения J^* , получаем следующую постановку:

$$\begin{aligned}
J &= y_N \rightarrow J^*, \\
y_j &= y_{j-1} + 300 \cdot 1_+(z_{j-1} + v_{j-1}) + 2 \cdot (2z_{j-1} + r_{j-1} - d_{j-1} - d_j) + 2v_{j-1}, \\
r_j &= z_{j-1} + r_{j-1} - d_{j-1}, \\
z_j &= z_{j-1} + v_{j-1}, \\
v_j &= v_{j-1} + u_j, \\
z_j &\geq 0, \quad r_j \geq 0, \\
j &= 1, 2, \dots, N, \quad y_0 = 0, \quad r_0 = r^0, \quad z_0 = z^0, \quad v_0 = v^0,
\end{aligned} \tag{4.5.6}$$

где значения d_j (детерминированного спроса) для всех j следующие: $d_0 = 90$; $d_1 = 125$; $d_2 = 140$; $d_3 = 100$; $d_4 = 45$; $d_5 = 60$; $d_6 = 130$; $d_7 = 0$.

Условия неотрицательности на остатки и запасы обеспечим путем выбора подходящих условий z^0 , v^0 , при которых, с одной стороны, указанные условия выполняются на всем интервале функционирования системы, а с другой стороны, величины запасов наименьшие. В данном случае z^0 , v^0 представляют собой элементы конструируемого управления, поэтому допустимо их варьирование. Кроме указанных величин, необходимо выбрать и параметр T_u , который не может быть меньше единицы по условиям устойчивости дискретного инерционного звена. Данный параметр обеспечивает скорость приближения критериальной функции (2.3.7) к желаемому значению. В рассматриваемой задаче его целесообразно выбрать равным единице, что обеспечит достижение J^* за один такт. Что же касается z^0 , v^0 , то при их значениях 121 и 3 соответственно оказывается достижимым значение

критерия 2460 при строго неотрицательных остатках и запасах на всех интервалах работы системы.

Полученная задача полностью соответствует виду (2.3.1) и управление для нее на каждом шаге может быть получено из нелинейного скалярного конечного уравнения (2.3.8).

Графики компьютерного эксперимента, в котором реализовано дискретное МКС-управление, показаны ниже на рисунке 4.38. На графиках представлены зависимости от времени координат системы ($x_1 - x_4$) и критериальных функций (J_-). Пунктирной кривой показан график заданной (теоретической) критериальной функции, сплошной кривой – полученной фактически.

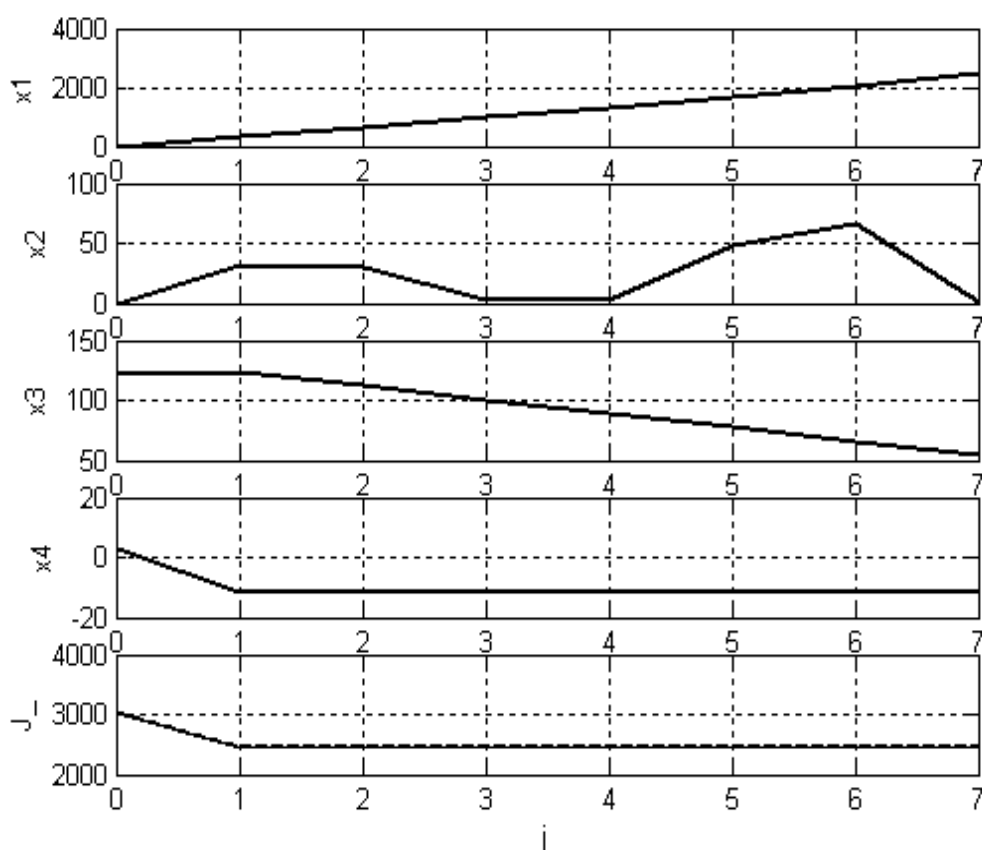


Рисунок 4.38 – Графики компьютерного эксперимента для МКС-управления

Полученные значения координат и критериальной функции в виде последовательностей при $j=0,1,\dots,7$ соответственно следующие: для y (или x_1) – 0; 300; 662; 1022; 1326,9; 1633,6; 2029; 2460; для остатков r (или x_2) – 0; 31; 30,4; 2,4; 3,3; 47,7; 65,5; 1,8; для искомых запасов z (или x_3) – 121; 124; 112,5; 100,9; 89,4; 77,8; 66,3; 54,7; для вспомогательной переменной v (или x_4) – 3; -11,6; -11,6; -11,6; -11,6; -11,6; -11,6; -11,6; для теоретических

(согласно разностному уравнению (2.3.7)) и фактических значений критериальной функции $\bar{J}$ (или $J_{\text{ф}}$) – 3042; 2460; 2460; 2460; 2460; 2460; 2460; 2460.

Интересно сравнить полученное решение с оптимальным [69], где достигнутое значение критерия равно 1770. Мы видим, что МКС-управление дает результат (2460) почти на 39% хуже, чем оптимальный. Это объясняется тем, что принятая экспоненциальная форма желаемой критериальной функции $\bar{J}$ отличается от оптимальной, которая для $j=0,1,\dots,7$ имеет вид последовательности 550; 9630; 1050; 2490; 1470; 1770; 1770 (см. последний график на рисунке 4.39). Данную форму $\bar{J}$ можно реализовать и с помощью МКС-управления (2.3.8), заменив левую часть (2.3.8) элементами указанной последовательности (при $j=0$ – это 550, при $j=1$ – 9630 и т.д.). Были произведены соответствующие компьютерные эксперименты при начальных условиях $y_0=0$; $r_0=0$; $z_0=215$; $v_0=-215$, выбранных из условия обеспечения оптимальных запасов $z_0=215$; $z_1=0$; $z_2=240$; $z_3=0$; $z_4=105$; $z_5=0$; $z_6=z_7=130$ [28]. Этим запасам соответствуют $u_1=455$; $u_2=-480$; $u_3=345$; $u_4=-210$; $u_5=235$; $u_6=-130$; $u_7=0$, что следует из (4.2).

Графики компьютерного эксперимента для оптимального управления показаны ниже на рисунке 4.39.

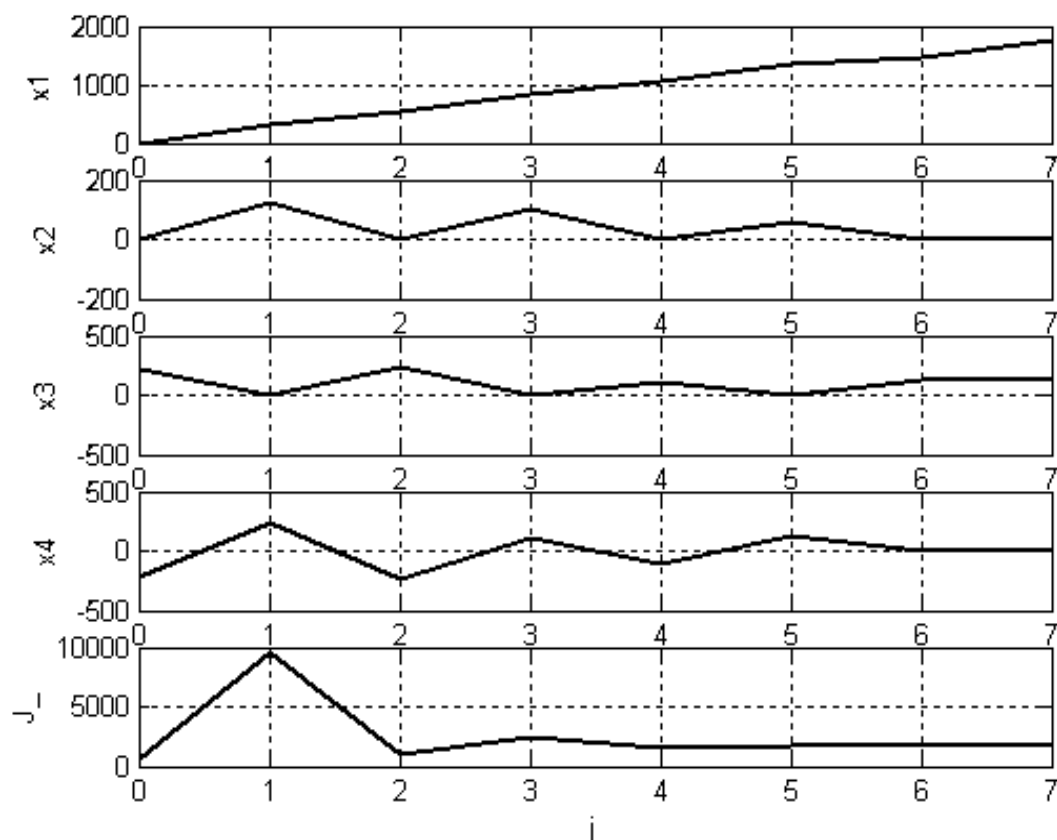


Рисунок 4.39 – Графики компьютерного эксперимента для оптимального управления

Такие же u_j получены и с помощью МКС-управления, что свидетельствует в пользу гипотезы об эквивалентности задач оптимального управления и МКС-управления с оптимальными критериальными функциями.

Рассмотренное приложение дискретного метода конечного состояния и программное обеспечение, его реализующее, свидетельствуют, во-первых, о простоте алгоритмической реализации, во-вторых, о работоспособности метода для решения практических задач и, в-третьих, о больших перспективах его применения для задач с недифференцируемыми нелинейностями. В самом деле, нелинейная функция c_j , присутствующая первоначально в критерии, а после приведения к виду (4.6) – в правой части первого уравнения, имеет релейный тип, а система четвертого порядка, тем не менее, приведена в заданное положение с практически нулевой погрешностью. Если вспомнить, насколько беден арсенал методов управления существенно нелинейными системами, ясно, что наличие дискретного метода конечного состояния, примененного к

дискретизированной модели систем управления (в том числе и изначально непрерывной) позволяет управлять многомерными системами с произвольным числом нелинейностей, в том числе и разрывных.

4.6. Управление скоростью изменения давления газа

В настоящем подразделе приведен пример использования варианта МКС для двухиндексных систем, описанного в подразделе 2.4.

Рассмотрим модель газотранспортной системы (ГТС), состоящей из одной горизонтальной нитки длиной L_{tr} , в середине которой производится отбор газа с объемным расходом m_1 . Газопровод питается из подземного хранилища и не имеет промежуточных компрессорных станций. Управляющим воздействием является давление на входе, которое должно быть таким, чтобы к заданному моменту времени t_f давления в точке отбора и в конце нитки были не меньше заданного давления p_2^* . Дополнительными ограничениями являются условия неотрицательности давлений и расходов в любое время и любой точке нитки.

С целью некоторого упрощения модели будем предполагать, что процесс распространения газа изотермический и плотность газа ρ не зависит от давления. Заметим, что принятые упрощения для предлагаемого метода управления не являются принципиальными. Для моделирования такого процесса воспользуемся нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных по Галлиулину [70]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P^2}{\partial x} &= -\frac{\lambda c^2 M^2}{DF^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= -\frac{c^2}{F} \cdot \frac{\partial M}{\partial x},\end{aligned}\tag{4.6.1}$$

где λ - коэффициент гидравлического сопротивления Дарси; c - скорость звука в газе; D, F - диаметр и площадь поперечного сечения трубы; P, M - давление и объемный расход газа.

Преобразуем модель (4.6.1) к нормальной форме [71]. Для этого, прежде всего, перейдем от уравнения для квадрата давления к уравнению для давления и выполним (согласно определению скорости звука) замену $c^2 = P/\rho$.

$$\begin{aligned} 2P \frac{\partial P}{\partial x} &= -\frac{\lambda P M^2}{\rho D F^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho F} P \frac{\partial M}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

Обозначив в (4.6.2)

$$\tilde{a} = -\frac{\lambda}{2\rho D F^2}, \quad \tilde{b} = -\frac{1}{\rho F}, \quad (4.6.3)$$

получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \tilde{a} M^2, \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= \tilde{b} P \frac{\partial M}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

Для приведения (4.6.4) к нормальной форме переобозначим $P \sim x_1$, $M \sim x_2$, введем искусственные переменные x_3, x_4 в правые части дифференциальных уравнений для расхода и применим условия интегрируемости (совместности).

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial x} &= \tilde{a} x_2^2, \\ \frac{\partial x_1}{\partial t} &= \tilde{b} x_1 x_3, \\ \frac{\partial x_2}{\partial x} &= x_3, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= x_4. \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

Применение условий интегрируемости $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_1}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right)$ и $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_2}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right)$ к (4.6.5) приводит к следующим уравнениям:

$$2\tilde{a} x_2 x_4 = \tilde{b} \frac{\partial^2 x_2}{\partial x^2} = \tilde{b} \frac{\partial x_3}{\partial x}, \quad (4.6.6)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial t} = \frac{\partial x_4}{\partial x} = \xi_1, \quad (4.6.7)$$

где ξ_1 – параметрическая переменная.

Для замыкания системы нужно еще одно уравнение с неопределенной правой частью, которую зададим параметрической переменной ξ_2 :

$$\frac{\partial x_4}{\partial t} = \xi_2. \quad (4.6.8)$$

Присоединяя (4.6.6), (4.6.7), (4.6.8) к (4.6.5) и, перегруппируя уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial x} &= \tilde{a} x_2^2, & \frac{\partial x_1}{\partial t} &= \tilde{b} x_3, \\ \frac{\partial x_2}{\partial x} &= x_3, & \frac{\partial x_2}{\partial t} &= x_4, \\ \frac{\partial x_3}{\partial x} &= 2 \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} x_2 x_4, & \frac{\partial x_3}{\partial t} &= \xi_1, \\ \frac{\partial x_4}{\partial x} &= \xi_1, & \frac{\partial x_4}{\partial t} &= \xi_2. \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

В уравнениях (4.6.9), где $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ рассчитываются по (4.6.3), искусственные переменные x_3, x_4 определены из условий совместности, а параметрические переменные ξ_1, ξ_2 пока неопределенные. Их следует назначать, исходя из условий функционирования ГТС. Искусственные и параметрические переменные, в отличие от x_1, x_2 , могут быть разрывными [71], поэтому на них условия интегрируемости не накладываем. Заметим, что в [71] иногда условия интегрируемости накладываются на искусственные переменные. В этом случае исходные переменные, производные которых определяются через непрерывные функции искусственных переменных в их правых частях, также удовлетворяют условию интегрируемости в силу известной теоремы о том, что для дважды дифференцируемой в точке функции двух переменных смешанные частные производные в этой точке равны.

Параметрические переменные выберем из условий функционирования ГТС. Например, задав $\xi_1(x, t) = \xi_2(x, t) = 0$, получим $x_3(x, t) = 0$, $x_4(x, t) = 0$, т.е. постоянный во времени и по всей длине трубы расход газа. Если же предположить по некоторым неучтенным причинам изменение расхода по времени и длине трубы (например, из-за утечек), то x_3, x_4 должны быть ненулевыми. Тогда параметрическими переменными ξ_1, ξ_2 можно задать функциональные зависимости расхода от времени и расстояния, которые в данном случае определяют вторые производные расхода.

Для учета отбора газа в точке $x_1 = L_{tr} / 2$, начинающегося с момента времени $t = 0$, к уравнениям (9) необходимо добавить уравнение скачка

$$x_2(x_1, t) = \begin{cases} x_2(x_1 - 0, t) - m_1 & \text{при } t = 0, \\ x_2(x_1 - 0, t) & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (4.6.10)$$

Для учета управляющего воздействия введем аддитивное управление в виде скорости изменения давления на входе трубы. Для этого в уравнения для давления (как по расстоянию, так и по времени) добавим член $au(t)$, где коэффициент a равен единице при $x = 0$ и нулю при $x > 0$.

Для простоты рассмотрим задачу Коши, когда задаются только начальные условия в точке $x = 0, t = 0$: $x_1(0,0) = p_0$; $x_2(0,0) = m_0$.

Начальные условия для x_3, x_4 и параметрические переменные примем нулевыми.

Таким образом, искомая модель представляет собой нормальные уравнения (4.6.9) вместе с добавленным в первое и пятое уравнения управлением $au(t)$, уравнением скачка (4.6.10), заданными функциями $\xi_1(x,t)$, $\xi_2(x,t)$ и начальными условиями.

Разработана Matlab-программа, реализующая моделирование распределения давления $x_1(x,t)$, объемного расхода газа $x_2(x,t)$, искусственных переменных x_3, x_4 и расчет управления $u(x,t)$ методом конечного состояния при следующих значениях параметров задачи: $D \equiv Dtr = 0,7$ м; $\lambda = 0,015$; $L \equiv Ltr = 64000$ м; $\rho = 0,5336$ кгм⁻³; $t_f = 6000$ м; $p_0 = 0.785 \cdot 10^6$ па; $m_0 = 12$ м³с⁻¹, $m_1 = 6$ м³с⁻¹. Поставлена задача обеспечения заданного давления $Jz = x_1(N_1, N_2)$ в конце трубы путем выбора приращения начального давления в ее начале. Дискретизация уравнений (4.6.9) произведена по схеме Эйлера с постоянными интервалами дискретности, равными $dt = 200$ с по времени и $dx = 3000$ м по длине. В качестве функций f_{J1} , f_{J2} , определяющих желаемое поведение непрерывной и дискретной критериальных функций, взяты зависимости (2.4.13) соответственно при $T_{u1} = 1$, $T_{u2} = 1$.

Результаты расчетов приведены на графиках рисунков 4.40 – 4.42, где показаны зависимости давления, расхода и управляющего воздействия от расстояния и времени (по оси расстояний – индекс i , по оси времени – индекс j).

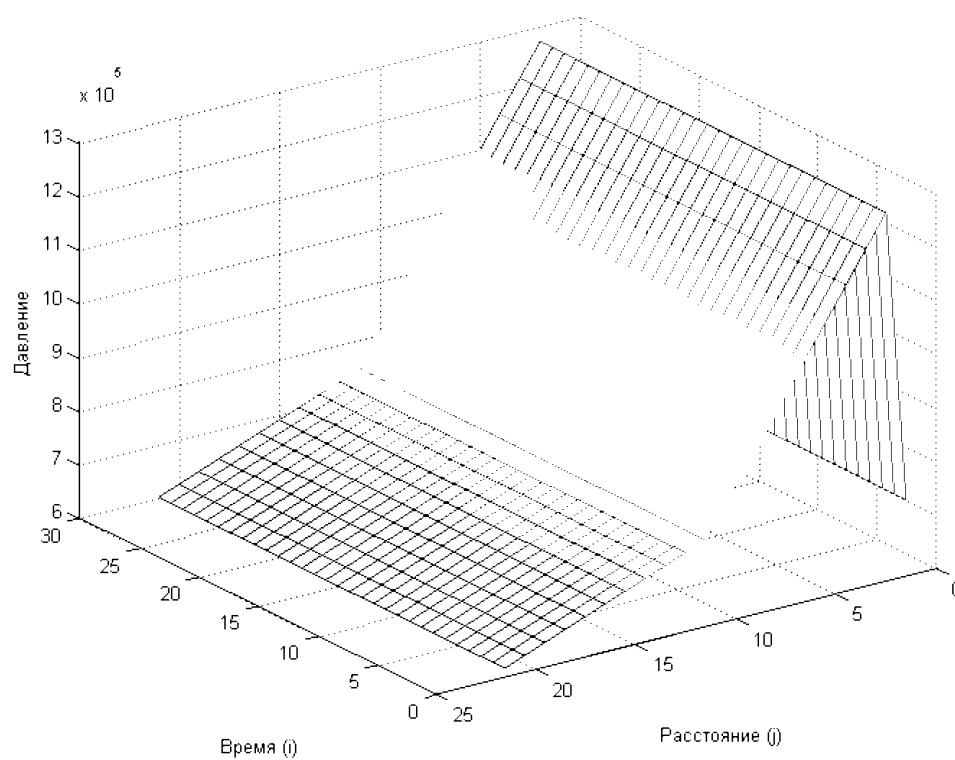


Рисунок 4.40 – График зависимости давления газа

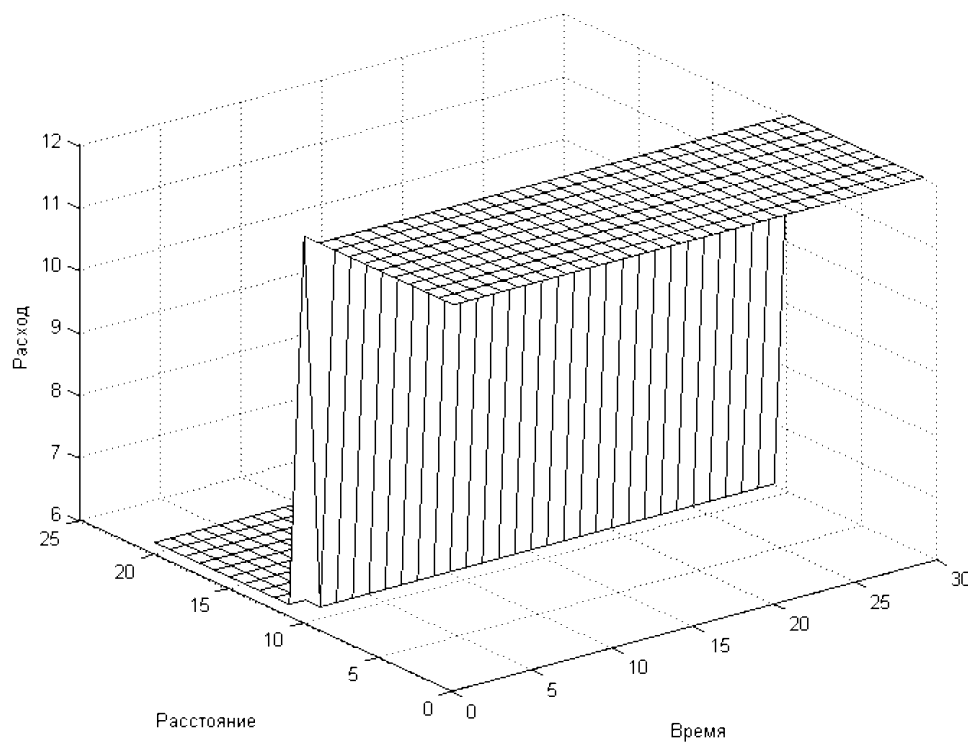


Рисунок 4.41 – График зависимости расхода газа

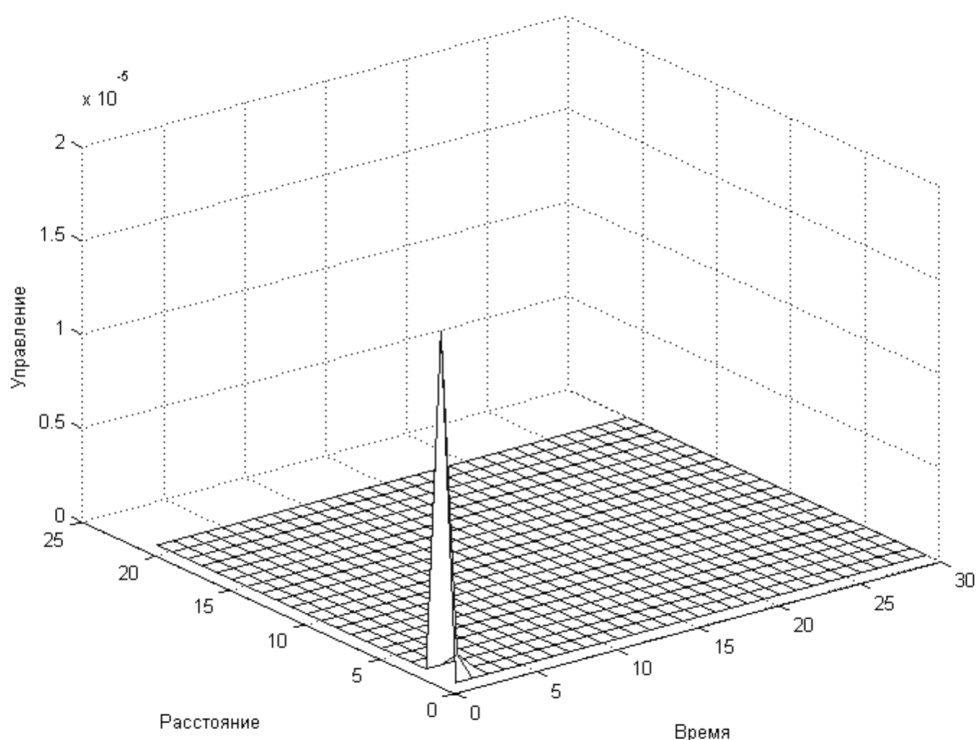


Рисунок 4.42 – График зависимости управления (скорости изменения давления на входе трубы)

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

- давление на входе нитки во все моменты времени постоянно и равно $1,3 \cdot 10^6$ па, что в 1,7 раза больше заданного начального давления;
- давление в конце нитки в точности равно заданному давлению $0,6 \cdot 10^6$ па, а в точке отбора – значению $0,75 \cdot 10^6$;
- расход газа после точки отбора уменьшился на величину отбора $m_1 = 6$;
- управляющее воздействие в виде скорости изменения давления воздействовало на систему в начале нитки и в первый момент времени, причем рассчитывалось оно с учетом известного заранее отбора таким образом, чтобы на выходе нитки получилось в точности заданное давление.

Таким образом, приведенные результаты имеют ясную физическую интерпретацию, что свидетельствует в пользу разработанного алгоритма и его программной реализации. Даже в такой простой реализации, имеющей демонстрационный характер, могут быть получены полезные для практики

результаты. В частности, расчет давлений при наличии многих точек отбора и различных зависимостях величин отбора от времени. При этом программа незначительно изменится. Более сложный случай – модель с разветвлениями, кольцами и другими элементами реальных ГТС. Отметим также, что основная часть программы, реализующая дискретный двухиндексный метод конечного состояния, сохранится в любой задаче управления системами с распределенными параметрами данным методом. Для многоиндексных же задач указанные функции могут быть использованы как прототипы.

4.7. Управление роботами

4.7.1. Управление маломерным судном-катамараном с винто-рулевыми колонками

Математическая модель судна. Данное судно предназначено, в том числе, для безэкипажного режима работы, и относится к классу маломерных научно-исследовательских судов для эксплуатации на озерах, реках и в прибрежной морской зоне. Математическая модель получена по методикам [87, 88] при предположении об интегрирующем характере приводов ВРК. В соответствии с постановкой задачи, управление судном производится посредством поворота двух ВРК на один и тот же угол δ при заданных одинаковых упорах $Tv1, Tv2$ обеих ВРК, т.е. $Tv1 = Tv2 = Tv$. С учетом примененного метода поиска управлений представим нелинейную модель судна в аффинном виде (то же, что (1.1.1), но с другими обозначениями переменных состояния):

$$\frac{dz}{dt} = \Phi(t, z) + B(t, z)u, \quad (4.7.$$

$$t \in [t_0, t_f], \quad z(t_0) = z^0, \quad 1)$$

Вектор состояния судна состоит из семи компонент:

$$z = colon(V_x, V_y, \omega, x_1, y_1, K, \delta), \quad (4.7. 2)$$

где δ, K, ω – соответственно угол поворота ВРК, курсовой угол, угловая скорость судна относительно его центра масс (ЦМ); V_x, V_y, x_1, y_1 – соответственно скорости и положения ЦМ судна в направлениях продольной и поперечной его осей. При этом седьмая компонента $\delta \equiv z_7$, являющаяся, по сути, управляющим воздействием, входит в уравнения модели судна неаддитивно (см. ниже). Для приведения системы к аффинному виду ее вектор состояния расширен на одну компоненту $z_7 \equiv \delta$ с дифференциальным уравнением для нового состояния:

$$\frac{d\delta}{dt} = u \quad (4.7.3)$$

где u – новое управляющее воздействие. Уравнение (3) описывает привод интегрирующего типа. Преобразованная система седьмого порядка, в соответствии с формой (1) и расширенным вектором состояния, будет иметь следующие составляющие:

$$\Phi(t, z) := \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot Tv \cdot \cos(z_7) - R_x(z) - m_y \cdot z_3 \cdot z_2}{m_x} \\ \frac{2 \cdot Tv \cdot \sin(z_7) - m_x \cdot z_3 \cdot z_1}{m_y} \\ \frac{L \cdot Tv \cdot \sin(z_7) + M_{rez}(z) + M_D(z) - z_1 \cdot z_2 \cdot (m_x - m_y)}{J_w} \\ V(z) \cdot \cos(z_6 - \beta(z)) \\ V(z) \cdot \sin(z_6 - \beta(z)) \\ z_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.7.4)$$

$$B(t, z) := \text{color}(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) \quad (4.7.5)$$

Функции состояния $V, R_x, R_y, M_K, M_D, \beta$ через переменные z определяются выражениями [1]:

$$V = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad \beta = \arctg\left(\frac{z_2}{z_1}\right), \quad (4.7.6)$$

$$R_x(V, z_1, z_2) = 2000 \cdot R_K \cdot V \cdot \cos \beta, \quad (4.7.7)$$

$$R_y(V, z_1, z_2) = 2000 \cdot R_K \cdot V \cdot \sin \beta, \quad (4.7.8)$$

$$R_K(V) = 8,1 - 8,436 \cdot V + 2,536 \cdot V^2, \quad (4.7.9)$$

$$M_K(V, z_1, z_2) = R_y(V, z_1, z_2) \cdot l_K, \quad (4.7.10)$$

$$l_K = 0,4 \cdot L \cdot \left(0,5 - \frac{\beta}{\pi} \right),$$

$$M_D(V, z_3) = -0,148 \frac{\rho}{2} V \cdot 24,092 \cdot L^2 z_3, \quad (4.7.11)$$

В выражениях (4.7.4 – 4.7.11) V – результирующая скорость судна в системе координат, связанной с судном; R_x, R_y – силы сопротивления судна в продольном и поперечном направлениях с учетом двух корпусов катамарана и преобразованием размерности силы из килоньютонов в ньютон; R_K – аппроксимированная полиномом зависимость сопротивления судна (в килоньютонах) R_K от скорости хода V (в $m \cdot s^{-1}$), полученная путем моделирования судна в среде OpenFOAM; L – длина судна в метрах; m_x, m_y – массы судна с учетом присоединенных масс воды в продольном и поперечном движениях; $\rho = 1025 kg \cdot m^{-3}$ – плотность морской воды.

Массы и момент из (4.7.4) определяются соотношениями [88]:

$$m_x = (1 + k_{11})D, \quad m_y = (1 + k_{22})D, \quad J_\omega = (1 + k_{66})J_Z, \quad (4.7.12)$$

где J_Z – момент инерции судна; D – весовое водоизмещение (масса) судна в килограммах. Коэффициенты присоединенных масс и момента выбираются из диапазонов: $k_{11} = 0.05 \div 0.15$; $k_{22} = 0.7 \div 1.2$; $k_{66} = 0.6 \div 1.3$. Для рассматриваемого судна малого водоизмещения $D = 155000 kg$ взяты нижние границы указанных коэффициентов.

При учете динамики приводов ВРК, вместо (4.7.3) в модели используется уравнение динамики привода в виде инерционного звена первого порядка [87]:

$$\frac{dz_7}{dt} = -\frac{1}{T_\delta} z_7 + \frac{k_\delta}{T_\delta} v \quad (4.7.13)$$

с коэффициентом k_δ , постоянной времени T_δ и управляющим воздействием v .

Из (4.7.3) и (4.7.13) видна связь между подлежащим определению управлением u и сигналу на приводе v :

$$v = \frac{1}{k_\delta} z_7 + \frac{T_\delta}{k_\delta} u. \quad (4.7.14)$$

Постановка задачи стабилизации заданного курса судна и модификация МКС для задач стабилизации. Поставим задачу управления курсом посредством косвенного критерия

$$J = z_3(t) \rightarrow z_3^*(t), \quad (4.7.15)$$

где $z_3^*(t) = \omega^*(t)$ – заданное поведение угловой скорости. Из шестого уравнения системы (4.7.1), (4.7.4) для угла курса $dz_6/dt = z_3$, при постоянной угловой скорости $z_3(t) = \text{const} = z_3^* \equiv \omega^*$ следует:

$$\begin{aligned} z_6^* &= z_6(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \omega^* dt = z_6(t_0) + \omega^* \cdot (t^* - t_0), \\ t^* &= t_0 + \frac{z_6^* - z_6(t_0)}{\omega^*}, \\ z_3^*(t) &= \text{if} \left(t < t^*, \omega^*, 0 \right). \end{aligned} \quad (4.7.16)$$

Второе выражение из (4.7.16) определяет тот момент t^* , когда судно выйдет на заданный курс z_6^* . Поэтому переменное во времени задающее

воздействие $z_3^*(t)$ вычисляется с помощью условного выражения, записанного в третьей строке (4.7.16) по правилу: если условие $t < t^*$ истинно, то $z_3^*(t) = \omega^*$, иначе $z_3^*(t) = 0$.

Для задач стабилизации базовый МКС-алгоритм (1.1.5, 2.1.5) используется на каждом из малых интервалов времени $t_{i+1} - t_i = h = \text{const}$. Тогда критерий приобретет вид:

$$J = J(z(t_{i+1})) = J\left(\bar{z}(t_{i+1}, t_i, z(t_i))\right) \rightarrow J^*, \quad (4.7.17)$$

При этом вместо (1.1.5) используются упрощенные выражения, полученные линеаризацией (1.1.3):

$$\begin{aligned} \bar{z}(t_{i+1}, t_i, z(t_i)) &= z(t_i) + \Phi(t_i, z(t_i)) \cdot h, \\ W(t_{i+1}, t_i, z(t_i)) &= I + \left[\frac{\partial \Phi(t_i, z)}{\partial z} \right]_{z=z(t_i)} \cdot h, \\ i &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.7.18)$$

Для определения управления применяем (2.1.5, 1.1.5) и получаем:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_{11} & \dots & W_{17} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ W_{71} & \dots & W_{77} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = W_{37},$$

$$G^+ = \frac{1}{G} = \frac{1}{W_{37}}.$$

Элемент переходной матрицы W_{37} , в соответствии с (4.7.18) и с учетом определения Φ_3 из (4.7.4)

$$\Phi_3(t, z) = \frac{L \cdot Tv \cdot \sin(z_7) + M_K(z_1, z_2) + M_D(z_1, z_2) - (m_x - m_y) z_1 z_2}{J_\omega} \quad (4.7.19)$$

определяется следующим выражением:

$$W_{37}(t_{i+1}, t_i, z(t_i)) = 0 + h \cdot \left. \frac{\partial \Phi_3(t_i, z)}{\partial z_7} \right|_{z_7 = z_7(t_i)} = \frac{h \cdot L \cdot Tv \cdot \cos(z_7)}{J_\omega}. \quad (4.7.20)$$

Тогда, при $f_J = (z_3^* - \bar{z}_3(t_{i+1}, t_i, z(t_i))) / T_u$, получаем следующее выражение для управления:

$$u(t, z) = \frac{z_3^* - \bar{z}_3(t)}{T_u W_{37}(t, z)}, \quad (4.7.21)$$

$$\bar{z}_3(t) = z_3 + \Phi_3(t, z) \cdot h.$$

Моделирование показало, что, во всяком случае, для рассматриваемого судна, вместо последней формулы, в силу малости Φ_3 (углового ускорения) и второго соотношения из (4.7.21), можно использовать упрощенную формулу:

$$u(t, z) = \frac{z_3^* - \bar{z}_3(t)}{T_u W_{37}(t, z)}. \quad (4.7.22)$$

В (4.7.21, 4.7.22) h – временной шаг при расчете значений управления; T_u – задаваемая постоянная времени экспоненциального движения переменной $\bar{z}_3(t)$ к заданному значению z_3^* согласно уравнению $\frac{d\bar{z}_3}{dt} = -\frac{z_3^* - \bar{z}_3}{T_u}$.

Управление (4.7.14), где вместо u подставляются выражения (4.7.21) или (4.7.22) в зависимости от того, используются первоначальное или упрощенное управления, приведет к заданному углу поворота ВРК, но уже при

учете динамики привода. Способы управления (4.7.21, 4.7.22) защищены патентом [89].

Ниже, на рисунках 4.43 – 4.46, приведены результаты моделирования в виде зависимостей от времени t координат модели судна, полученные посредством математического пакета Mathcad. Результаты получены для модели (4.7.1 – 4.7.12) с коррекцией (4.7.13) при использовании управления (4.7.16, 4.7.21, 4.7.22) для заданных значений ω^* (постоянной угловой скорости разворота судна на заданный курс) и z_6^* (заданного курсового угла). Расчеты производились для следующих параметров судна и алгоритма управления: $D = 155000 \text{ kg}$; $k_{11} = 0,05$; $k_{66} = 0,6$; $k_{22} = 0,7$; $\rho = 1025 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $L = 22,3 \text{ m}$; $J_Z = 0,05 \cdot \rho \cdot D \cdot L^2$; $T_{v1} = T_{v2} = 20400 \text{ N}$; $T_u = 0,1 \text{ s}$; $k_\delta = 1$; $T_\delta = 2 \text{ s}$; $h = 0,1 \text{ s}$, $\omega_{\max} = 20$.

Отметим, что с помощью выбора параметров z_3^* , z_6^* , T_u можно регулировать как траекторию, так и время выхода судна на заданный курс.

На рисунке 4.43 показаны траектория и курсовой угол судна при маневре для случаев $z_3^* = 0,005 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $z_6^* = 3,14 \text{ rad}$, соответствующий случаю относительно медленного разворота на обратный курс.

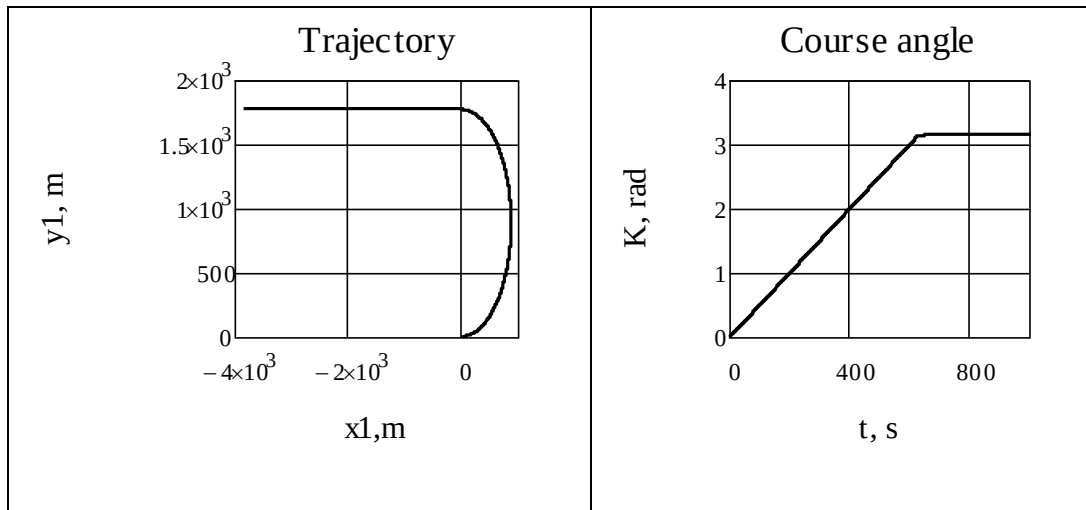


Рисунок 4.43 – Траектория и зависимость курсового угла от времени при развороте судна на обратный курс для значений параметров

$$z_3^* = 0,005 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad z_6^* = 3,14 \text{ rad}.$$

На рисунках 4.44, 4.45 показаны траектория и курсовой угол судна при маневре для случаев $z_3^* = 0,005 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ и $z_3^* = 0,05 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ для целево-

го курсового угла, соответствующий случаям замедленного и ускоренного поворота на курсовой угол $57,3$ градуса ($z_6^* = 1 \text{ rad}$).

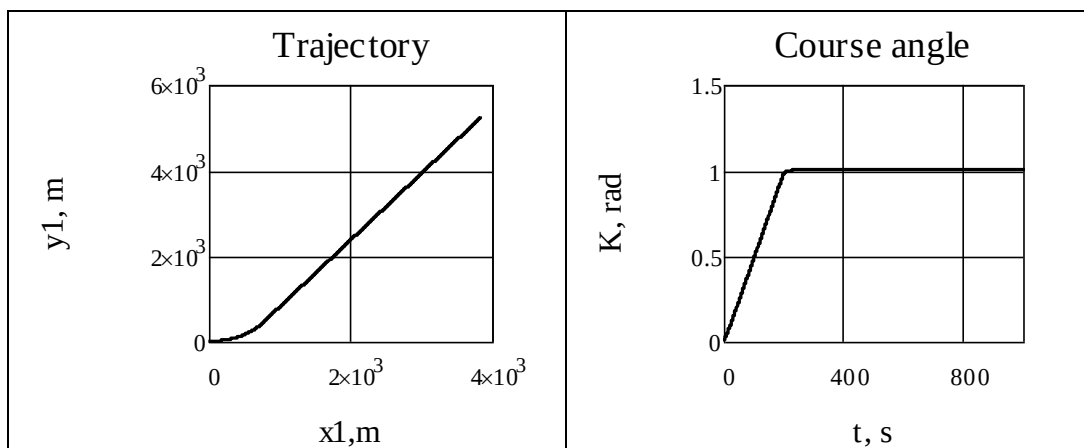


Рисунок 4.44 – Траектория и зависимость курсового угла от времени при развороте судна на обратный курс для значений параметров $z_3^* = 0,005 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $z_6^* = 1 \text{ rad}$.

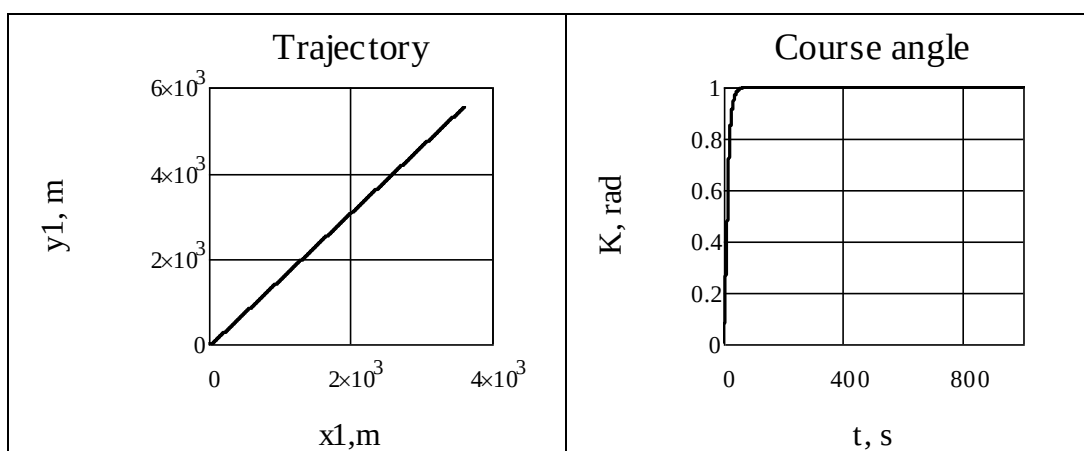


Рисунок 4.45 – Траектория и зависимость курсового угла от времени при развороте судна на обратный курс для значений параметров $z_3^* = 0,05 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $z_6^* = 1 \text{ rad}$.

Определенное влияние на траекторию оказывает также значение свободного параметра T_u , от которого зависит время переходного процесса по угловой скорости. На рисунке 4.46 показано, как с помощью увеличенного в двадцать раз параметра T_u можно реализовать более гладкую траекторию судна при развороте. (сравните с траекторией рисунка 4.43 для $T_u = 0,1 \text{ s}$).

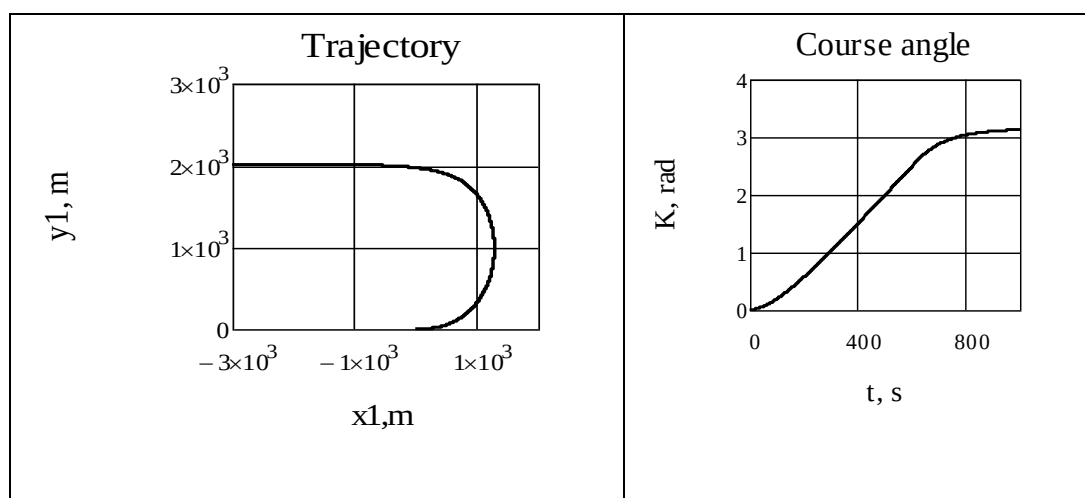


Рисунок 4.46 – Траектория и зависимость курсового угла от времени при развороте судна на обратный курс для значений параметров $\dot{z}_3^* = 0,005 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $z_6^* = 3,14 \text{ rad}$; $T_u = 2 \text{ s}$.

Показанные на рисунках 4.43 – 4.46 графики иллюстрируют, каким образом свободные параметры $\dot{z}_3^*$ (угловая скорость поворота судна), z_6^* (заданный курсовой угол), T_u (параметр быстродействия) влияют на форму траектории судна.

Заметим, что во всех представленных случаях ошибка регулирования, т.е. разница между заданным и достигнутым значениями курса, практически нулевая (при моделировании – в четвертом знаке после запятой).

4.7.2. Управление двухколесным двухколейным роботом

Введение. Двухколесные двухколейные роботы являются одним из подклассов мобильных роботов и отличаются от других подклассов отсутствием рулей и рулевых приводов. Повороты данного типа роботов осуществляются изменением скоростей вращения левого и правого колеса. Обычно такие платформы снабжаются третьей опорной точкой в виде шарика или маленького, свободно вращающегося, колеса. Весьма близки к данному типу платформ гусеничные платформы, где повороты также обеспечиваются разнотемпным вращением левой и правой гусениц. Области применения гусеничных платформ широко известны в военном деле в виде ма-

шин для разминирования или извлечения взрывных устройств. В последнее время наметились и другие области использования подобных платформ, например, роботы-пылесосы.

Математическая модель. Ниже приведен вывод уравнений движения колесной платформы при следующих предположениях: динамика приводов колес не учитывается; эффект проскальзывания колес не учитывается [90].

Пусть x_1, x_2 – линейные перемещения выделенных точек первого и второго колеса робота; D_w – диаметр первого и второго колеса; ω_1, ω_2 – угловые скорости вращения первого и второго колеса.

Проекция на ось абсцисс «х» перемещающегося радиус-вектора R_c равна сумме движений от вращения колес с угловыми скоростями ω_1, ω_2 . Как известно, скорость линейного перемещения выделенной точки колеса диаметром D_w равно $\frac{D_w}{2} \omega$. Скорость перемещения, вызванная вращением двух колес, равна $\frac{1}{2} \left(\frac{D_w}{2} \omega_1 + \frac{D_w}{2} \omega_2 \right)$. Множитель 1/2 учитывает то, что вращение обоих колес с одинаковой скоростью ω приводит к движению робота со скоростью ω . В случае же разных скоростей точка, находящаяся посередине оси, жестко соединяющей колеса, будет перемещаться со средней скоростью от сложения скоростей ω_1 и ω_2 , т.е. с множителем 1/2. Проекция R_c на оси «х», «у» равны соответственно

$$\frac{D_w(\omega_1 + \omega_2)}{4} [\cos \varphi],$$

$$\frac{D_w(\omega_1 + \omega_2)}{4} [\sin \varphi],$$

где φ представляет собой угол траектории. Эти выражения являются скоростями линейных перемещений выделенных точек колес. Таким образом, первые два уравнения модели будут иметь в левых частях обозначения производных линейных перемещений точек x_1, x_2 , а правые части – приведенные выше выражения.

Что касается третьего уравнения для угла φ радиус-вектора R_c , то для его вывода получим предварительно некоторые результаты. Очевидно, что при разных скоростях колес траектория должна иметь вид окружности, радиус R_c которой зависит от соотношения скоростей. Получим величину

этого радиуса. Пусть $\omega_1 > \omega_2$. Из-за большей скорости первого колеса (левого) робот будет поворачивать вправо. При этом левое колесо описывает окружность радиуса $R_1 = R_0 + \frac{L_r}{2}$ и длиной $2\pi R_1$ за время T . За это же время правое колесо описывает окружность радиуса $R_2 = R_0 - \frac{L_r}{2}$ и длиной $2\pi R_2$. Линейная скорость выделенной точки первого колеса равна $\frac{D_w}{2} \omega_1$. Путь, пройденный левым колесом за время T , равен $\frac{D_w}{2} \omega_1 \cdot T = 2\pi R_1$, а правым колесом – $\frac{D_w}{2} \omega_2 \cdot T = 2\pi R_2$. Получилась система двух линейных уравнений относительно двух неизвестных – T и R_0 .

Решим эту систему. Для этого в обоих уравнениях оставим справа $2\pi R_0$ и вычтем первое уравнение из второго.

$$\frac{D_w}{2} \omega_1 \cdot T - 2\pi \frac{L_r}{2} = 2\pi R_0, \quad \frac{D_w}{2} \omega_2 \cdot T + 2\pi \frac{L_r}{2} = 2\pi R_0.$$

Получим:

$$\frac{D_w}{2} \omega_2 \cdot T + \pi L_r - \frac{D_w}{2} \omega_1 \cdot T + \pi L_r = 0.$$

$$\frac{D_w}{2} (\omega_2 - \omega_1) \cdot T + 2\pi L_r = 0,$$

$$T = \frac{4\pi L_r}{D_w(\omega_1 - \omega_2)}. \quad (4.7.23)$$

Величину радиуса получим из второго уравнения:

$$\frac{D_w}{2} \omega_2 \cdot \frac{4\pi L_r}{D_w(\omega_1 - \omega_2)} + 2\pi \frac{L_r}{2} = 2\pi R_0,$$

$$\omega_2 \cdot \frac{L_r}{(\omega_1 - \omega_2)} + \frac{L_r}{2} = R_0,$$

$$R_0 = \left(\frac{\omega_2}{(\omega_1 - \omega_2)} + \frac{1}{2} \right) \cdot L_r. \quad (4.7.24)$$

Последнее выражение используем для верификации модели робота. Для $\omega_1 = 20$, $\omega_2 = 10$, $L_r = 0,5$ получаем $R_0 = 1,5 \cdot 0,5 = 0,75$.

При выводе уравнения для угла φ следует учесть, что $\frac{d\varphi}{dt} = \Omega$, где $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ – угловая скорость перемещения радиус-вектора R_0 (имеется в виду $\sin(\Omega \cdot t)$ – синусоидальное поведение координаты при траектории в виде окружности). При этом T – период, т.е. время (4.7.23), за которое робот описывает окружность вокруг некоторого центра. Таким образом, третье уравнение имеет вид:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega = \frac{2\pi}{\frac{4\pi L_r}{D_w(\omega_1 - \omega_2)}} = \frac{D_w(\omega_1 - \omega_2)}{2L_r}. \quad (4.7.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{D_w(\omega_1 + \omega_2)}{4} [\cos \varphi], \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{D_w(\omega_1 + \omega_2)}{4} [\sin \varphi], \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{D_w(\omega_1 - \omega_2)}{2L_r}. \end{aligned} \quad (4.7.26)$$

При моделировании (4.7.26) с численными данными, приведенными выше, получен фактический радиус $R_0 = 0,75$. При других численных данных верификация также успешна.

Система (4.7.26) представляет собой аффинную систему с двумя управляющими воздействиями ω_1, ω_2 , векторно-матричная запись которой имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B(x)u, \quad (4.7.27)$$

где A – нулевая матрица, а компоненты матрицы $B = \{B_{ij}\}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$ следующие:

$$\begin{aligned} B_{11} &= B_{12} = \frac{D_w \cos(\varphi)}{4}, \\ B_{21} &= B_{22} = \frac{D_w \sin(\varphi)}{4}, \\ B_{31} &= -B_{32} = \frac{D_w}{2L_r}. \end{aligned} \quad (4.7.28)$$

В соответствии с обозначениями модели (4.7.27), векторы состояния и управления следующие:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varphi \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.$$

Ввиду специфики модели (4.7.26), МКС-управление рассчитывается по выражениям:

$$\begin{aligned} u(t) &= G^+ \left(\frac{J^* - J(x(t))}{T} \right), \\ G^+ &= G^T (GG^T)^{-1}, \\ G &= \frac{\partial J(x(t))}{\partial x} B(t, x(t)), \end{aligned} \quad (4.7.29)$$

где $J(t) \equiv J(x(t))$ – критериальная функция, определяющая заданную экспоненциальную с постоянной времени T_u траекторию, дифференциальное уравнение для которой следующее:

$$\frac{dJ(t)}{dt} = \frac{J^* - J(t)}{T_u}. \quad (4.7.30)$$

Выражения (4.7.29) следуют из (2.1.5, 1.1.5), а также того обстоятельства, что переходная матрица W в данном случае единичная на всем интервале функционирования системы в силу равенства нулю вектора Φ неуправляемой системы согласно представлению (1.1.1).

Для критериальной функции использовалась квадратичная форма вида

$$\begin{aligned} J(z(t_f)) &= F_1(z_1(t_f) - x_1^*)^2 + F_2(z_2(t_f) - x_2^*)^2 + \\ &+ F_3(z_3(t_f) - \omega^*)^2 \rightarrow J^* = 0, \end{aligned} \quad (4.7.31)$$

где $z^* = colon(x_1^*, x_2^*, \omega^*)$ – желаемые значения координат робота в конечный момент времени t_f . Смысл критерия (4.7.31) состоит в том, что при приближении текущего состояния $z(t)$ к заданной точке z^* значение критери-

альной функции стремится к заданному значению J^* , которое, очевидно, должно быть равно нулю. Эта цель при управлении (4.7.29) может оказаться недостижимой, что приведет к отклонению фактического поведения (4.7.31) от желаемой траектории (4.7.30). Основная причина недостижимости – равенство нулю скаляра GG^T в отдельных точках временной оси либо на интервалах. Это, как бы, естественная причина недостижимости, вызванная несоответствием цели и способом ее достижения по траектории (4.7.30). Другая возможная причина отклонения фактической траектории от заданной – амплитудные ограничения на управляющие воздействия, которые в использованных методах не могут быть учтены. Так, скорости вращения колес робота ограничены по амплитуде величиной ω_m :

$$\omega_i = \begin{cases} -\omega_m, & u_i < -\omega_m, \\ u_i, & -\omega_m \leq u_i \leq \omega_m, \\ \omega_m, & u_i > \omega_m, \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (4.7.32)$$

Выход рассчитываемых по (4.7.29) управлений на ограничения (4.7.32) также искажает форму критериальной функции, определяемой уравнением (4.7.30), но при этом все равно критериальная функция уменьшается, стремясь к какому-то минимально достижимому значению J^* . При этом достигнутое значение J^* определяет точность приведения компонент вектора состояния к заданным значениям.

Приведем результаты Mathcad-моделирования (4.7.26) с управлением (4.7.29), критерием (4.7.31) и амплитудными ограничениями (4.7.32) применительно к роботу ArcBotics Sparki с параметрами: $D_w=0,05 \text{ m}$; $L_r=0,085 \text{ m}$; $F_1=10$; $F_2=0$; $F_3=1$; $x_1^*=0,6 \text{ m}$; $x_2^*=0,3 \text{ m}$; $x_3^*=0,8 \text{ m}$; $\omega_m=1,5 \text{ c}^{-1}$; $h=0,1 \text{ c}$; $T_u=0,01 \text{ c}$; $t_f=40 \text{ c}$.

Этот же алгоритм реализован в бортовой версии языка C++ реального робота. Как следует из кинематической схемы, на основе которой составлены уравнения (4.7.26), между состояниями модели (4.7.26) имеется нелинейная зависимость

$$\operatorname{tg}(z_3) = \frac{x_2}{x_1} \quad (4.7.33)$$

Следовательно, уравнения (4.7.26) являются зависимыми, что означает следующее: при реализации управления (4.7.29) можно одновременно до-

стичь заданных значений либо парой $x_1, \varphi(x_1, x_3)$, либо парой $x_2, \varphi(x_2, x_3)$, а вот для пары x_1, x_2 подобная цель в общем случае недостижима.

Это хорошо видно, если преобразовать (4.7.26), приняв в качестве новых управляющих воздействий

$$v_1 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad v_2 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}. \quad (4.7.34)$$

В результате получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{D_w}{2} v_1 [\cos x_3], \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{D_w}{2} v_1 [\sin x_3], \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{D_w}{L_r} v_2. \end{aligned} \quad (4.7.35)$$

Из уравнений (4.7.35) видно, что управление v_2 воздействует только на x_3 , а управление v_1 — одновременно на x_1 и x_2 . При этом, если при выбранном v_2 достигается некоторое значение x_3 то далее можно выбирать v_1 при известном x_3 , обеспечивая либо заданное x_1 , либо заданное x_2 . Одновременное же достижение парой x_1, x_2 заданных значений невозможно, если только заданные значения x_1^* и x_2^* не согласованы.

В то же время, с практической точки зрения, больший интерес представляет задача приведение робота в заданную точку x_1, x_2 за заданное время. По этой причине необходимо получить вариант управления роботом, где учитывается связь (4.7.33).

Для этого модифицируем задачу управления, назначив вместо (4.7.31) следующую критериальную функцию:

$$J(x(t)) = F_1(x_1(t) - x_1^*)^2 + F_3\left(x_3(t) - \arctg \frac{x_2^*(t) - x_2(t)}{x_1^* - x_1(t)}\right)^2 \quad (4.7.36)$$

Данная функция отражает следующую цель управления: приведение координаты x_1 к значению x_1^* , а координаты $\varphi \equiv x_3$ — к такому значению, которое обеспечит значение x_2^* в силу соотношения (4.7.33). Использование в (4.7.36) разностей под знаком арктангенса объясняется тем, что траектория движения робота криволинейная, поэтому в каждый текущий момент време-

ни угол подхода к цели переменный и отсчитывается от достигнутого состояния.

Модификация алгоритма (4.7.29) для случая критерия (4.7.36) сводится к новым выражениям для $J(x(t))$ и выражениям для компонент вектора:

$$\frac{\partial J(x)}{\partial z} = \left(\frac{\partial J(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial J(x)}{\partial x_2} \quad \frac{\partial J(x)}{\partial x_3} \right). \quad (4.7.37)$$

Последние теперь заметно сложнее, чем в случае критерия (4.7.31), особенно с учетом их реализации в бортовом компьютере робота, где в программном обеспечении нет обратных тригонометрических функций. Выражения для компонент имеют следующий вид (аргумент t для краткости записей опустим):

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x_1} = 2F_1(x_1 - x_1^*) + \frac{2F_3(x_2 - x_2^*) \left(x_3 - \arctg \left(\frac{x_2 - x_2^*}{x_1 - x_1^*} \right) \right) x_2^*}{(x_1 - x_1^*)^2 \left(\left(\frac{x_2 - x_2^*}{x_1 - x_1^*} \right)^2 + 1 \right)}, \quad (4.7.38)$$

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x_2} = \frac{2F_3 \left(x_3 - \arctg \left(\frac{x_2 - x_2^*}{x_1 - x_1^*} \right) \right) x_2^*}{(x_1 - x_1^*) \left(\left(\frac{x_2 - x_2^*}{x_1 - x_1^*} \right)^2 + 1 \right)}, \quad (4.7.39)$$

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x_3} = 2F_3 \left(x_3 - \arctg \left(\frac{x_2 - x_2^*}{x_1 - x_1^*} \right) \right). \quad (4.7.40)$$

Управление (4.7.29) с критерием (4.7.36) проверено путем Mathcad-моделирования, в частности, для случая $x_1^* = 1.5$ м, $x_2^* = 0.8$ м, $t_f = 60$ с, шаге интегрирования $h = 0,001$ с, $F_1 = 10$, $F_3 = 1$. Заданная точка достигнута с достаточно высокой точностью (1.488 м против 1.5 м для x_1 и 0.784 м против 0.8 м для x_2). В других проверенных случаях точность примерно такая же. На Figures 1 – 5 показаны графики зависимостей координат, траектории и управляющих воздействий от времени.

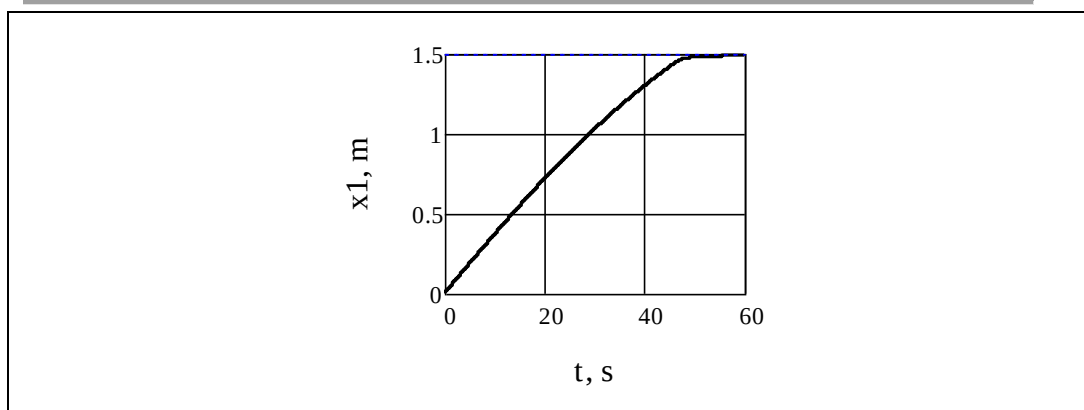


Рисунок 4.47 – Зависимость от времени пути левого колеса

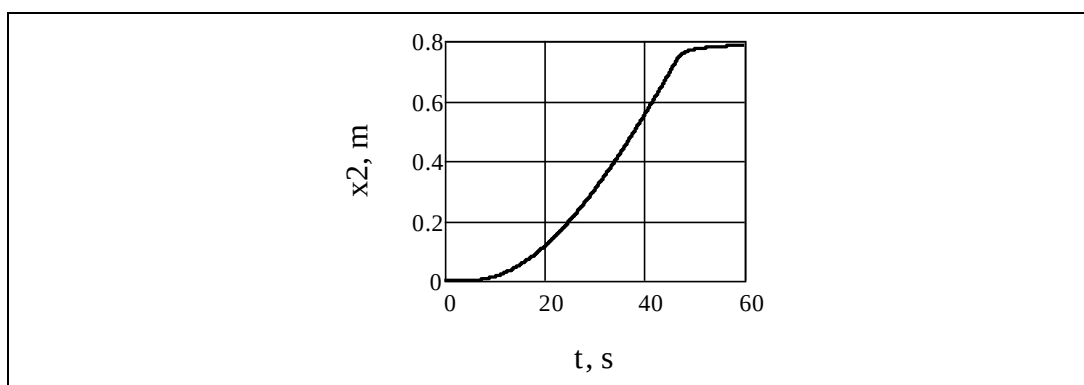


Рисунок 4.48 – Зависимость от времени пути левого колеса

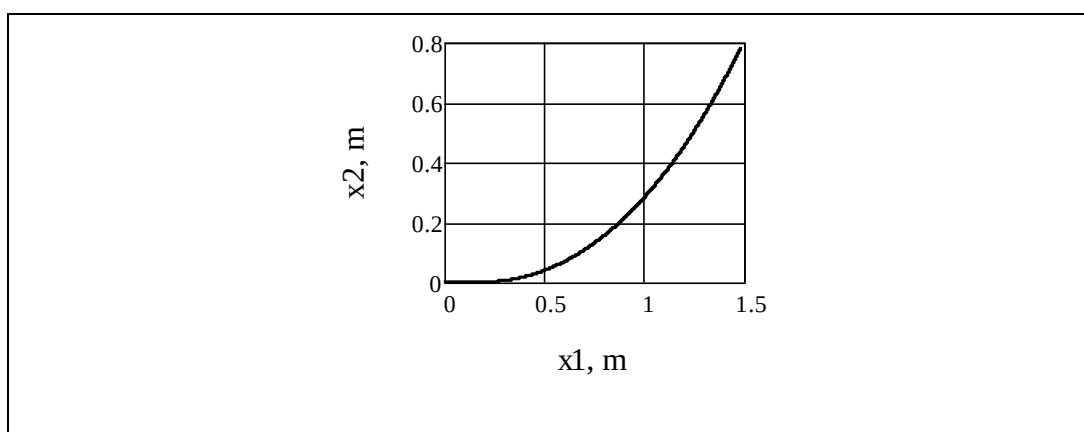


Рисунок 4.49 – Траектория

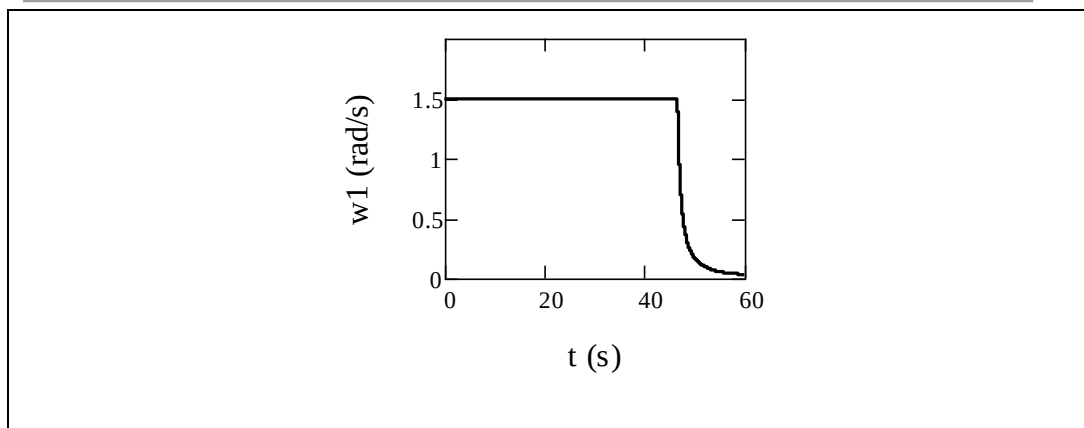


Рисунок 4.50 – Угловая скорость левого колеса (управление)

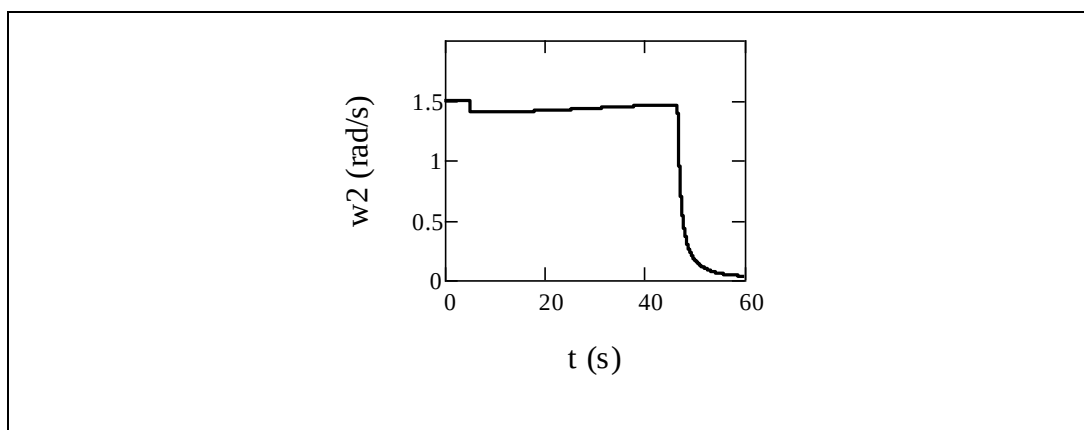


Рисунок 4.51 – Угловая скорость правого колеса (управление)

4.7.3. Управление трехзвенным манипулятором подводного робота

Введение. Одно из магистральных направлений в развитии современных технологий – широкое применение роботов, в частности, антропоморфных роботов, используемых в качестве манипуляторов. В сочетании с технологиями искусственного интеллекта, указанные роботы позволяют выполнять манипуляторные операции, заменяющие человека в условиях неблагоприятной окружающей среды. Подводные манипуляторы представляют часть обширного семейства промышленных роботов. Они устанавливаются на обитаемых и необитаемых подводных аппаратах, самоподъемных платформах, устьевом оборудовании морских скважин. В совокупности функций манипулятора и подводного аппарата появилось понятие подводного аппарата-робота (ПАР). При этом большинство ПАР имеют, как мини-

мум, один манипулятор. В связи с проблемой автоматизации различных подводно-технических работ, из-за труднодоступности и опасностей для человека, решается задача автоматической ориентации (манипулирования) рабочего органа, изделия или инструмента. В настоящее время большинство операций, выполняемых ПАР под водой, осуществляется с помощью систем управления с удаленным доступом (85% по данным MarketsandMarkets). Вместе с тем, сложное подводное окружение и характер решаемых задач требуют совершенствования системы управления ПАР в плане повышения степени ее интеллектуальности. В связи с этим, ведутся интенсивные исследования и разработки, направленные на повышение степени автономности ПАР [91 – 93]. Методы, используемые при этом, основываются на современных технологиях, предложенных в работах по техническому зрению, навигации и управлению.

Одна из таких задач выполнена нами в рамках федеральной целевой программы (ФЦП) по разработке роботизированного аппарата, предназначенного для подводных исследовательских работ на малых глубинах (до 10 метров).

Предварительные исследования [94, 95] производились с использованием реального робота SAR-400, являющегося одним из этапных проектов при разработке широко известного отечественного антропоморфного робота FEDOR [96]. В отчете [94] выполнен подробный обзор существующих подходов к построению манипуляторов различного типа, в том числе подводных. При этом в [97 – 100] рассмотрены различные конструкции ПАР. В работе [101] приведены результаты компьютерного моделирования робота SAR-400 (одного из прототипов робота FEDOR), управляемого посредством разработанного нами алгоритма терминального управления методом конечного состояния (МКС-управления). В настоящей работе этот же алгоритм применен к модели антропоморфного манипулятора (АМ) подводного аппарата.

Построение кинематической и динамической моделей АМ. Предполагаемый внешний вид АМ и его кинематическая схема показаны на рисунках 4.52, 4.53 соответственно.

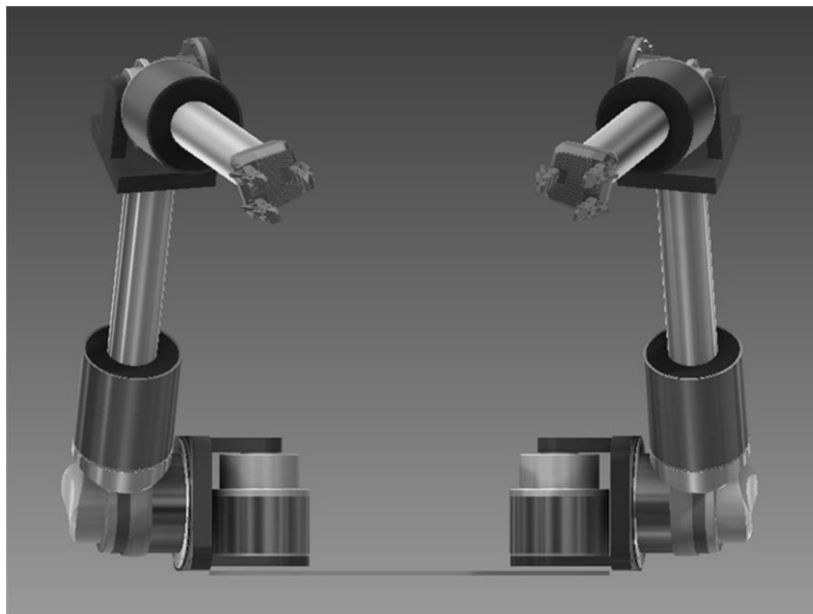


Рисунок 4.52 – Внешний вид рук АМ

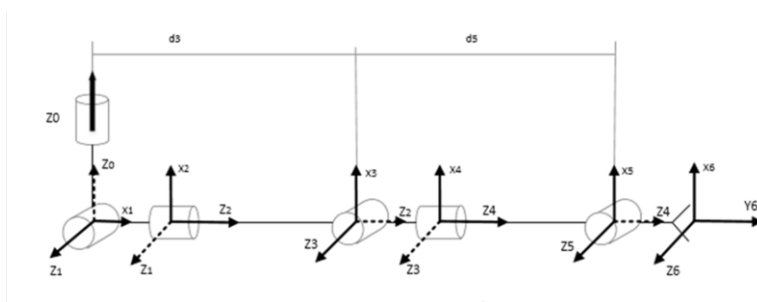


Рисунок 4.53 – Кинематическая схема руки АМ

На рисунке 4.53 обозначены шесть кинематических пар (КП) с соответствующими системами координат. При этом i -я КП вращается вокруг оси z_i , $i = 0, \dots, 6$. Из схемы рисунка 4.53 видно, что пары с номерами 1, 3, 5 осуществляют повороты соответствующих звеньев вокруг осей, перпендикулярных продольным осям звеньев. Пары же с номерами 0, 2, 4 осуществляют ротацию звеньев вокруг своих осей. Система координат с номером 6 соответствует схвату АМ, который в данной работе не рассматривается. Длины звеньев предполагаются равными $d_3 = 700\text{ мм}$, $d_5 = 500\text{ мм}$.

Математическая модель манипулятора может быть построена на основе преобразования Денавита-Хартерберга [102] в виде матрицы преобразований, которая строится на основе следующих предположений:

- 1) оси i -го звена образуют правую декартову систему координат, где ось z_{i-1} направлена вдоль оси i -го сочленения к плечу манипулятора;

2) оси x_{i-1}, y_{i-1} – взаимно перпендикулярные; для x_0, y_0 – ориентация произвольная, для последующих сочленений – определяются по приведенным ниже соотношениям (4.7.41) параметрами преобразования $\theta_i, d_i, r_i, \alpha_i$, имеющими смысл:

θ_i – угол поворота оси x_{i-1} вокруг оси z_{i-1} такой, чтобы она стала сонаправленной с осью x_i ;

d_i – расстояние между пересечением оси z_{i-1} с осью x_i и началом $(i-1)$ -й системы координат, отсчитываемой вдоль оси z_{i-1} ;

r_i – расстояние между пересечением оси z_{i-1} с осью x_i и началом i -й системы координат, отсчитываемой вдоль оси x_i , т.е. кратчайшее расстояние между осями z_{i-1} и z_i ;

α_i – угол поворота оси z_{i-1} вокруг оси x_i , чтобы она стала сонаправлена с осью z_i .

В таблице 4.3 приведены параметры Денавита-Хартенберга звеньев $(i-1, i)$ для левой руки манипулятора при нумерации звеньев от 1 до 6.

Таблица 4.3 – Параметры Денавита-Хартенберга для руки без схвата

Звено, i	r_i (м)	α_i (град)	d_i (м)	θ_i (град)
1	0	90	0	90
2	0	90	0	90
3	0	-90	0.7	0
4	0	90	0	0
5	0	90	0.5	0
6	0.2	0	0	-90

Поставим задачу приведения конечного эффектора АМ (в данном случае конца звена (5, 6) длиной 0,2 м) в заданную точку за заданное время с помощью метода конечного состояния. С помощью предлагаемого алгоритма можно подвести эффектор в заданную точку, а затем уже решать задачу захвата предмета (например, археологического артефакта). При этом предполагается использование стереовидеокамеры с функциями распознавания, а также датчиков состояния манипулятора и расстояния до выбранного пред-

мета. Предполагаемые максимальное и минимальное расстояния, достигаемые манипулятором, соответственно 1,2 м и 0,25 м, максимальная масса груза – 6 кг.

Математическая модель антропоморфного манипулятора основана на использовании подхода Денавита-Хартенберга (ДН), согласно которому для каждого i – го звена используется матрица преобразования:

$$A_i(\theta_i) = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{xi} & o_{xi} & a_{xi} & p_{xi} \\ n_{yi} & o_{yi} & a_{yi} & p_{yi} \\ n_{zi} & o_{zi} & a_{zi} & p_{zi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.7.41)$$

где C, S являются сокращенными обозначениями косинуса и синуса соответственно; $\theta_i, d_i, r_i, \alpha_i$ – параметры преобразования, описанные выше и заданные в таблице 4.3. Для конечного эффектора трехкомпонентные векторы $\vec{n}_i, \vec{o}_i, \vec{a}_i, \vec{p}_i$ (с индексом n вместо индекса i) означают: $\vec{n}_n, \vec{o}_n, \vec{a}_n$ – единичные векторы системы координат конечного эффектора; $\vec{p}_n$ – вектор от исходной системы координат до начала системы координат конечного эффектора.

Таким образом, вектор оптимизируемых параметров имеет структуру $\theta = \{\theta_i\}, i = 1, \dots, 6$.

Исходно задачу управления можно сформулировать как задачу приведения руки манипулятора из состояния p_0 в заданное состояние p_n^* . Постановка задачи при этом имеет вид системы нелинейных уравнений:

$$\prod_{i=1}^6 A_i(\theta_i) = T(\vec{n}_n^*, \vec{o}_n^*, \vec{a}_n^*, \vec{p}_n^*), \quad (4.7.42)$$

$$\text{где } T(\vec{n}_n^*, \vec{o}_n^*, \vec{a}_n^*, \vec{p}_n^*) = \begin{pmatrix} n_{xn}^* & o_{xn}^* & a_{xn}^* & p_{xn}^* \\ n_{yn}^* & o_{yn}^* & a_{yn}^* & p_{yn}^* \\ n_{zn}^* & o_{zn}^* & a_{zn}^* & p_{zn}^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{заданная функция конечного состояния.}$$

Для решения нелинейной системы (4.7.42), а, следовательно, и задачи приведения эффектора в заданное положение, традиционно используются методы математического программирования. Например, в [95] для управления роботом SAR-400 использовано расширение Robotics System Toolbox пакета Matlab (реализовано в версиях Matlab с 2018 года) и метод Бройдена-Флетчера-Голдфарба-Шенно (BFGS). При использовании более старых версий Matlab можно для этих же целей использовать функцию lsqnonlin.

Однако подход, ориентированный на кинематические модели, имеет некоторые недостатки. Во-первых, он неприменим к случаю использования динамических моделей антропоморфных роботов, учитывающих инерционность приводов сочленений. Во-вторых, традиционный подход не использует обратных связей о текущих значениях углов θ_i , в силу чего точность приведения эффектора робота в заданное положение сильно зависят от точности воспроизводства рассчитанных значений углов θ_i (во всяком случае, такая точность должна быть достаточно высокой). И, наконец, в-третьих, для реализации традиционного подхода для коммерческих антропоморфных роботов нужны лицензионные версии Matlab (или других систем с программным обеспечением для решения задач математического программирования).

По этим причинам мы предлагаем альтернативный подход к определению углов θ_i , разработанный для динамической модели антропоморфного робота – метод конечного состояния (2.2.5).

Для применения метода конечного состояния, прежде всего, сформулируем терминальный критерий, отображающий подход эффектора к некоторому заданному моменту t_f к заданному положению.

Определим вначале матрицу:

$$\Delta(t_f) = \prod_{i=1}^6 A_i(\theta_i(t_f)) - T(\bar{n}^*, \bar{o}_n^*, \bar{a}_n^*, \bar{p}_n^*), \quad (4.7.43)$$

размерностью, являющейся по смыслу конечной ошибкой эффектора.

Определим также вектор-столбец δ в виде:

$$\delta = [\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}, \Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{23}, \Delta_{24}, \Delta_{31}, \Delta_{32}, \Delta_{33}, \Delta_{34}, \Delta_{41}, \Delta_{42}, \Delta_{43}, \Delta_{44}]^T, \quad (4.7.44)$$

Тогда искомый критерий будет иметь вид:

$$J(\theta(t_f)) = \delta(\theta(t_f))^T F \delta(\theta(t_f)) = \sum_{j=1}^{16} F_j \delta_j^2(\theta(t_f)) \rightarrow J^*, \quad (4.7.45)$$

где $F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & F_{16} \end{pmatrix}$ – диагональная матрица весовых коэффициентов

критерия; J^* – желаемое значение критерия. С целью точного приведения робота к $T(\bar{n}_n^*, \bar{o}_n^*, \bar{a}_n^*, \bar{p}_n^*)$ значение J^* следует положить равным нулю.

Для решения задачи управления предлагаемым методом сформируем динамическую модель робота в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_i(t)}{dt} &= u_i, i = 1, \dots, 6, \\ t \in [t_0, t_f] \quad \theta_i(t_0) &= \theta_i^0. \end{aligned} \quad (4.7.46)$$

Начальные условия θ_i^0 соответствуют начальному положению робота.

Критерий (4.7.45), по виду квадратичный, на самом деле нелинейный более сложного вида, ввиду трансцендентных зависимостей $A_i(\theta)$ (4.7.41). По этой причине для решения задачи (4.7.45, 4.7.46) нельзя использовать методы оптимального управления для линейных систем.

Данная модель пока не учитывает динамику приводов сочленений и ниже будет дополнена соответствующими уравнениями. Это связано с особенностями метода конечного состояния, который использован для решения поставленной задачи.

В критерии (4.7.43, 4.7.45) необходимо также задать матрицу $T(\bar{n}_n^*, \bar{o}_n^*, \bar{a}_n^*, \bar{p}_n^*)$, которая определяется через заданные конечные ориентацию и положения руки АМ.

Учет динамики приводов сочленений. Получим управление при учете динамики приводов сочленений, когда вместо (4.7.46) в модели используются уравнения динамики приводов в виде:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_i}{dt} &= \omega_i \\ \frac{d\omega_i}{dt} &= \frac{1}{J_i(\theta)}(M_{di} - M_{ci}),\end{aligned}\tag{4.7.47}$$

В уравнениях (4.7.47) ω_i – угловая скорость ротора привода i – й кинематической пары; J_i – приведенный момент инерции для i – й пары; M_{di} и M_{ci} – соответственно моменты движущих сил и сопротивления i – й пары. В случае приводов, реализованных на электродвигателях постоянного тока с постоянным возбуждением, без учета быстрых процессов в его обмотках, можно принять для малых угловых скоростей:

$$\begin{aligned}M_{di} &= k_{di}U_{Ai}, \\ M_{ci} &= k_{ci}\omega_i + M_{gi}(\theta).\end{aligned}$$

В последних выражениях k_{di}, k_{ci} – параметры, зависящие от номера пары, конструкции двигателя и сопротивления внешней среды i – й пары. Составляющие момента сопротивления – от вязкого трения $k_{ci}\omega_i$ и от веса $M_{gi}(\theta)$ тех частей АМ, которые вращает данный электропривод. Например, электропривод КП в основании АМ вращает все его три звена, а электропривод звена схвата – только одно звено. При этом, этот момент сопротивления зависит от углов $\theta = \{\theta_i\}, i = 1, \dots, 6$. Если эти углы таковы, что вращение всей конструкции происходит в горизонтальной плоскости, то соответствующий $M_{gi}(\theta) = 0$. Если же вращение конструкции происходит в вертикальной плоскости, то соответствующий момент будет равен произведению массы конструкции на плечо, равное расстоянию от вала двигателя до центра тяжести конструкции. От углов θ_i зависят и моменты инерции $J_i(\theta)$. Указанные зависимости от θ можно, в принципе, рассчитать аналитически как функции компонент вектора θ и подставить в выражения для якорных напряжений электропривода, которые получены ниже. Однако, на наш взгляд, целесообразно получить указанные зависимости экспериментально, например, в виде соответствующих регрессионных моделей или нейронных сетей, где, помимо θ_i , можно учесть и другие входы, например, температуру и плотность воды.

В данном случае управляющими воздействиями являются якорные напряжения U_{Ai} . Имея в виду, что угловые скорости ω_i являются одновре-

менно компонентами МКС-управления u_i , выразим искомые управления U_{Ai} через $\omega_i \equiv u_i$. Получаем:

$$U_{Ai} = \frac{1}{k_{di}} \left(J_i(\theta) \frac{du_i}{dt} + k_{ci} u_i + M_{g_i}(\theta) \right), \quad (4.7.48)$$

Ввиду того, что МКС-управления имеют вид алгебраических соотношений, производная МКС-управления $\frac{du_i}{dt}$ может быть получена в виде аналитического выражения, что показано ниже.

Применение МКС для управления манипулятором. Как следует из постановки задачи (4.7.45, 4.7.46), здесь вектор состояния $x \equiv \theta$, матрица $\Phi = 0$, а матрица B – единичная. По этой причине имеем следующие выражения для составляющих МКС-управления u (2.2.5):

$$\begin{aligned} \bar{x}(\vartheta, t, x(t)) &= x(t) \equiv \theta(t), W(\vartheta, t, x(t)) = I \quad \forall t \in [t, t_f], \\ J(x(t)) &= J(\theta(t)) = \sum_{j=1}^{16} F_j \delta_j^2(\theta(t)), \\ G &= \frac{\partial \sum_{j=1}^{16} F_j \delta_j^2(\theta(t))}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta(t)} \cdot I \cdot I \equiv \frac{\partial \sum_{j=1}^{16} F_j \delta_j^2(\theta(t))}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\theta(t)} = \\ &= 2 \sum_{j=1}^{16} F_j \delta_j(t) \frac{\partial \delta_j(\theta(t))}{\partial \theta_i}, \end{aligned} \quad (4.7.49)$$

где $J(\theta(t))$ определяется выражением (4.7.45).

При получении выражения для матрицы G размерности (6×1) (число 6 – от числа кинематических пар) учтено, что матрицы W и B – единичные (обозначены I), вектор переменных конечного состояния $\bar{x}$ равен текущим значениям вектора состояния, в данном случае $\theta(t)$, из-за $\Phi = 0$.

Таким образом

$$G_i = 2 \sum_{j=1}^{16} F_j \delta_j(\theta(t)) \frac{\partial \delta_j(\theta(t))}{\partial \theta_i}, i = 1, \dots, 6. \quad (4.7.50)$$

Определим составляющие выражения (4.7.50).

Для определения $\frac{\partial \delta_j(\theta(t))}{\partial \theta_i}$ воспользуемся (4.7.44), определив соотношение между индексом j и индексами ошибки Δ_{ks} , которое имеет вид:

$$j = 4(k-1) + s.$$

Из (4.7.45) следует:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta(t)}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(\prod_{l=1}^6 A_l(\theta_l(t)) \right) = \\ &= A_1(\theta_1) \times \dots \times A_{i-1}(\theta_{i-1}) \times \frac{\partial A_i(\theta_i)}{\partial \theta_i} \times A_{i+1}(\theta_{i+1}) \times \dots \times A_6(\theta_6). \end{aligned}$$

$$\text{В итоге получаем: } \frac{\partial \delta_i}{\partial \theta_j} = \frac{\partial \Delta_{ij}}{\partial \theta_j}.$$

Получим производную по времени от управления (2.2.5), которое требуется для расчета якорного тока по выражению (4.7.48) для случая, когда в качестве приводов сочленений используются электроприводы постоянного тока с постоянным возбуждением. Имея в виду, что $\dim \theta = (6 \times 1)$, $\dim G = (1 \times 6)$, $\dim f_J = (1 \times 1)$, получаем:

$$\begin{aligned} \dim G^+ &= \dim \left(G^T (G G^T)^{-1} \right) = (6 \times 1)(1 \times 6)(6 \times 1) = (6 \times 1), \\ \dim \left(\frac{\partial G^+(\theta)}{\partial \theta} \right) &= (6 \times 6), \dim \left(\frac{\partial f_J(\theta)}{\partial \theta} \right) = (1 \times 6), \dim \left(\frac{\partial G^T}{\partial \theta} \right) = (6 \times 6). \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= \frac{\partial G^+(\theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} f_J(t) + G^+(\theta) \cdot \frac{\partial f_J(\theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = \\ &= \frac{1}{GG^T} \cdot \left(-\frac{\partial G^T}{\partial \theta} \cdot \frac{J^* - J}{T_u} - G^T \cdot \frac{1}{T_u} \cdot \frac{\partial J}{\partial \theta} \right) u. \end{aligned}$$

Окончательное выражение для якорного напряжения с моделью привода (4.7.47) получает вид:

$$U_{Ai} = \frac{1}{k_{di}} \left(\left(J_i(\theta) \left(\frac{1}{GG^T} \cdot \left(-\frac{\partial G^T}{\partial \theta} \cdot \frac{J^* - J}{T_u} - G^T \cdot \frac{1}{T_u} \cdot \frac{\partial J}{\partial \theta} \right) \right)_i + k_{ci} \right) u_i + M_{g_i}(\theta) \right) \quad (4.7.51)$$

Таким образом, управление получено в конечной форме, хотя само выражение после конкретизации выражений для производных, получится достаточно сложным. Напомним, что управления u_i являются МКС-управлениями (2.2.5).

Результаты моделирования. Для тестирования предложенного подхода к построению управления АМ разработана Matlab-программа и выполнено компьютерное моделирование управления АМ u_i модели (4.7.46) в виде МКС-управления (2.2.5, 4.7.49, 4.7.50).

В качестве целей управления выбраны следующие: 1) приведение эф-фектора в точки П1, П2, удаленные от основания АМ на максимальное/минимальное расстояния 1,2м/0,25м вперед; 2) приведение АМ в точки П3 (+), П4 (–) на границах сектора $\pm 60^\circ$ и заданным максимальным радиусом 1,2 м; 3) приведение АМ в точки П5 (+), П6 (–) на границах сектора $\pm 60^\circ$ и заданным минимальным радиусом 0,25м; 5) приведение АМ в точку П7 с произвольными (в допустимой области) параметрами ориентации и положения.

Результаты моделирования приведены ниже для следующих параметров модели: начальные условия $\theta|_{t=0} = (0 \quad 90^\circ \quad 0 \quad 65^\circ \quad 0 \quad 0)$; $T_u = 0,01c$; время моделирования $t_f = 1c$; $F = I$; $J^* = 0$.

Вначале приведем сравнительные значения определенных выше целевых матриц $T(\bar{n}_n^*, \bar{o}_n^*, \bar{a}_n^*, \bar{p}_n^*)$ и матриц $P = \prod_{i=1}^6 A_i(\theta_i(t_f))$, показывающих достигнутые конечные ориентацию и положение.

Для точки П1 получено:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1,2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1,1840 \\ 1 & -0,0014 & 0 & 0,0028 \\ 0 & 0 & -1 & -0,0001 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для точки П2 получено:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0,25 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0,25 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -0,0001 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для точки П3 с расстоянием $R = 1,2$ м на границе сектора $+60$ градусов вначале вычислим расстояния по осям x, y . Получим при $R = 1,2$:

$$y = 1,2 \cdot \cos 60^\circ = \frac{R}{2} = 0,6;$$

$$x = \sqrt{R^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R}{2} \sqrt{3} = 0,6 \cdot 1,73 = 1,038.$$

Тогда для точки П3 получаем:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1,038 \\ 1 & 0 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1,0379 \\ 1 & 0,0001 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для точки П4 с расстоянием $R = 1,2$ м на границе сектора -60 градусов расчет был остановлен ввиду очень медленного счета, что вызвано вычислительными проблемами МКС при реализации управления для предельного расстояния (такая же ситуация была при расчетах для точки П1, но там время моделирования все же оказалось приемлемым). Поэтому расстояние R было уменьшено на $0,1$ м, и для $y = \frac{1,1}{2} = 0,55$; $x = 0,55 \cdot 1,73 = 0,9515$ получено:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0,9515 \\ 1 & 0 & 0 & -0,55 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0,9999 & 0 & 0,9387 \\ 0,9999 & -0,0137 & 0 & -0,5481 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для точки П5 с расстоянием $R = 0,25$ м на границе сектора $+60$ градусов при $x = 0,125 \cdot 1,73 = 0,2163$, $y = 0,125$ получено:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0,2163 \\ 1 & 0 & 0 & 0,125 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0,0004 & 0,9999 & 0 & 0,2143 \\ 1 & -0,0004 & -0,0002 & 0,1248 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для точки П6 с расстоянием $R = 0,25$ м на границе сектора -60 градусов при $x = 0,125 \cdot 1,73 = 0,2163$, $y = -0,125$ получено:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0,2163 \\ 1 & 0 & 0 & -0,125 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0,0001 & 1 & 0 & 0,2163 \\ 1 & -0,0001 & 0 & -0,125 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для точки П7 со случайными в допустимых диапазонах значениях элементов матрицы Т получено:

$$T = \begin{pmatrix} -0,0933 & -0,9616 & 0,2581 & 0,7265 \\ 0,9728 & -0,1432 & -0,1819 & -0,0822 \\ 0,2119 & 0,2341 & 0,9488 & -0,6157 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} -0,0933 & -0,9616 & 0,2581 & 0,7266 \\ 0,9728 & -0,1432 & -0,1819 & -0,0822 \\ 0,2119 & 0,2341 & 0,9488 & -0,6158 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

На рисунках 4.54, 4.55 показаны графики зависимостей от времени t

КФ $J(\theta(t)) = \sum_{j=1}^{16} F_j \delta_j^2(\theta(t))$ и углов $\theta(t)$ для точки ПЗ. При этом на графике

рисунка 4.54 показаны слившиеся две кривые – теоретическая и фактическая КФ. Это свидетельствует о том, МКС-управление достигает поставленной цели – приведения КФ к заданному нулевому значению, что свидетельствует о практически нулевых невязках (4.55).

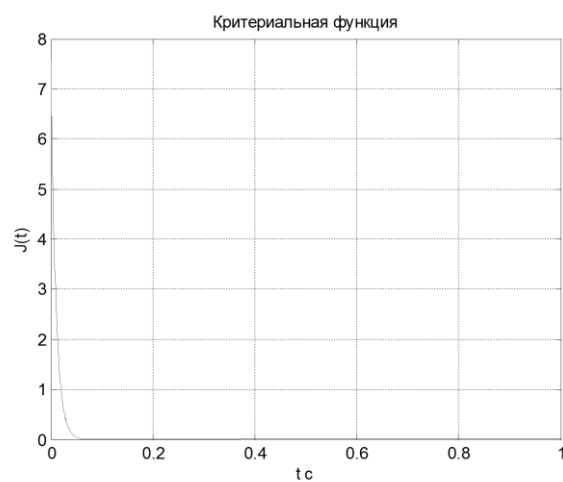


Рисунок 4.54 – Зависимость критериальной функции от времени для точки ПЗ

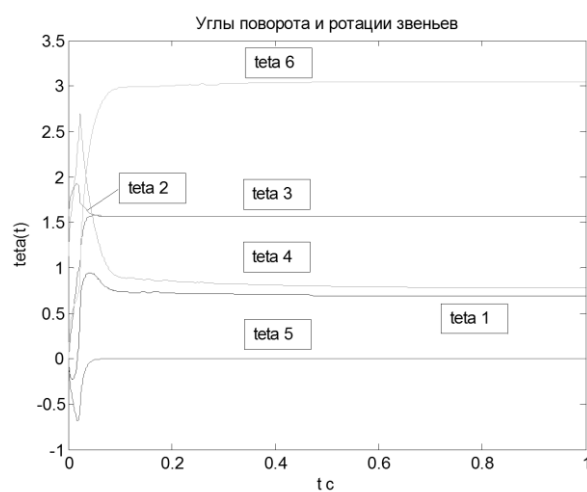


Рисунок 4.54 – Зависимости углов $\theta_i(t)$, $i = 1, \dots, 6$ для точки ПЗ
(углы в радианах)

В таблице 4.2 приведены конечные значения углов $\theta_i(t_f)$, $i = 1, \dots, 6$ для точек П1 – П6 вместе с их предельными диапазонами.

Таблица 4.4 – Предельные значения углов $\theta_i(t_f)$, $i = 1, \dots, 6$

	θ_1 [$-90^\circ, +90^\circ$]	θ_2 [$-90^\circ, +180^\circ$]	θ_3 [$-180^\circ, +180^\circ$]	θ_4 [$-30^\circ, +165^\circ$]	θ_5 [$-90^\circ, +90^\circ$]	θ_6 [$-100^\circ, +100^\circ$]
П1	-9.4546	90.0028	90.1201	-0.0019	-0.1063	170.6360
П2	1.5136	90.0115	89.9879	155.6172	-0.0278	25.9026
П3	39.5341	90.0114	90.0247	44.7467	-0.0161	174.7883
П4	-35.9615	90.0074	90.0725	6.4017	-0.0594	138.4303
П5	4.1273	90.0627	89.5073	169.6005	-0.5059	14.5571
П6	-12.2424	90.0120	89.9947	147.0924	-0.0221	20.6750

Как видим, в большинстве случаев предельные значения соблюдаются или нарушаются незначительно. Иногда нарушение существенно, например, по углу θ_6 . Однако, из рисунка 4.52 видно, что соответствующая КП для вращения схвата не имеет принципиальных ограничителей на угол поворота звена вокруг продольной оси, поэтому указанные ограничения можно увеличить без значительных конструктивных переделок.

4.7.4. Управление квадрокоптером

Квадрокоптеры, представляющие собой беспилотные летательные аппараты вертолетного типа с четырьмя несущими воздушными винтами, являются объектами большого хозяйственного и военного значения. В результате теоретических исследований этих объектов построены несколько видов их математических моделей в эйлеровой и кватернионной формах [103, 104]. Одна из таких моделей приведена в статье [105] и имеет вид:

$\ddot{x} = \frac{(-c\phi s_{\theta} c_{\psi} - s_{\phi} s_{\psi})F}{m},$ $\ddot{y} = \frac{(-c\phi s_{\theta} s_{\psi} + s_{\phi} c_{\psi})F}{m},$ $\ddot{z} = \frac{g - c\phi c_{\theta} F}{m},$ $\ddot{\phi} = \frac{1}{J_x} \tau_{\phi},$ $\ddot{\theta} = \frac{1}{J_y} \tau_{\theta},$ $\ddot{\psi} = \frac{1}{J_z} \tau_{\psi}.$	(4.7.52)

В (4.7.52) C , S являются сокращенными обозначениями косинуса и синуса соответственно (как в (4.7.41)); x, y, z – две горизонтальные и вертикальная оси земной системы координат; ϕ, θ, ψ – углы крена, тангажа, курса. Управляющими воздействиями являются сила $\vec{F}$, представляющая собой арифметическую сумму тяг четырех винтов квадрокоптера, а также моменты $\tau_{\phi}, \tau_{\theta}, \tau_{\psi}$. В модель также входят параметры: m – масса аппарата в кг; g – ускорение свободного падения в $m \cdot c^{-2}$; моменты инерции аппарата относительно осей J_x, J_y, J_z .

Обозначим: $x_0 \equiv x$, $x_1 \equiv y$, $x_2 \equiv z$, $x_3 \equiv \phi$, $x_4 \equiv \theta$, $x_5 \equiv \psi$,
 $v_x \equiv x_6 \equiv \dot{x}$, $v_y \equiv x_7 \equiv \dot{y}$, $v_z \equiv x_8 \equiv \dot{z}$, $\dot{\omega}_x \equiv x_9$, $\dot{\omega}_y \equiv x_{10}$, $\dot{\omega}_z \equiv x_{11}$

Тогда:

$$\dot{v}_x \equiv \ddot{x} \equiv \dot{x}_6 = \frac{(-c\phi s_{\theta} c_{\psi} - s_{\phi} s_{\psi})\vec{F}}{m},$$

$$\dot{v}_y \equiv \ddot{y} \equiv \dot{x}_7 = \frac{(-c\phi s_{\theta} s_{\psi} + s_{\phi} c_{\psi})\vec{F}}{m}$$

$$\dot{v}_z \equiv \ddot{z} \equiv \dot{x}_8 = \frac{g - c\phi c_{\theta} \vec{F}}{m},$$

$$\dot{\omega}_x \equiv \ddot{\phi} \equiv \dot{x}_9 = \frac{1}{J_x} \tau_{\phi},$$

$$\dot{\omega}_y \equiv \ddot{\theta} = \dot{x}_{10} = \frac{1}{J_y} \tau_\theta,$$

$$\dot{\omega}_z \equiv \ddot{\psi} = \dot{x}_{11} = \frac{1}{J_z} \tau_\psi.$$

Получаем систему в нормальной форме Коши, пригодную для МКС:

$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= x_6, \\ \dot{x}_1 &= x_7, \\ \dot{x}_2 &= x_8, \\ \dot{x}_3 &= x_9, \\ \dot{x}_4 &= x_{10}, \\ \dot{x}_5 &= x_{11}, \\ \dot{x}_6 &= \frac{(-c_\phi s_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi) \vec{F}}{m} = \\ &= \frac{1}{m} (-\cos x_3 \sin x_4 \cos x_5 - \sin x_3 \sin x_5) \vec{F}, \\ \dot{x}_7 &= \frac{(-c_\phi s_\theta s_\psi + s_\phi s_\psi) \vec{F}}{m} = \\ &= (-\cos x_3 \sin x_4 \sin x_5 + \sin x_3 \cos x_5) \vec{F}, \\ \dot{x}_8 &= \frac{g - c_\phi c_\theta \vec{F}}{m} = \\ &= \frac{g}{m} - \frac{1}{m} \cos x_3 \cos x_4 \vec{F}, \\ \dot{x}_9 &= \frac{1}{J_x} \tau_\phi, \\ \dot{x}_{10} &= \frac{1}{J_y} \tau_\theta, \\ \dot{x}_{11} &= \frac{1}{J_z} \tau_\psi \end{aligned}$	(4.7.53)

Здесь:

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m}(-\cos x_3 \sin x_4 \cos x_5 - \sin x_3 \sin x_5) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m}(-\cos x_3 \sin x_4 \sin x_5 + \sin x_3 \sin x_5) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} \cos x_3 \cos x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_z} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ 0 \\ 0 \\ g/m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В [105] для получения управления использована линеаризованная модель. Мы же получим МКС-управление по нелинейной модели (4.7.53).

Зададимся критерием:

$$J(x) = \sum_{j=1}^{12} F_j \left(x_j(t_f) - x_j^* \right)^2 \rightarrow J^*.$$

Определим соответствующую критериальную функцию:

$$\bar{J}(\bar{x}_j(t_f, t, x(t))) = \sum_{j=1}^{12} F_j \left(\bar{x}_j(t_f, t, x(t)) - x_j^* \right)^2 \rightarrow J^*$$

Далее по (1.1.3) определим составляющие функции G :

$$G = \frac{\partial J(x)}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}(t_f, t, x(t))} W(t_f, t, x(t)) B(x),$$

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}(t_f, t, x(t))} = 2 \sum_{j=1}^{12} F_j \left(x_j(t_f) - x_j^* \right). \quad (4.7.54)$$

$$\frac{d\bar{x}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} = \begin{pmatrix} \bar{x}_6 \\ \bar{x}_7 \\ \bar{x}_8 \\ \bar{x}_9 \\ \bar{x}_{10} \\ \bar{x}_{11} \\ 0 \\ 0 \\ g/m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [t, t_f], \quad \bar{x}(t, t, x(t)) = x(t).$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_0}{d\vartheta} &= \bar{x}_6 \rightarrow d\bar{x}_0 = \bar{x}_6 d\vartheta \rightarrow \int_{\bar{x}_0(t)}^{\bar{x}_0(\vartheta)} d\bar{x}_0 = \int_t^{\vartheta} \bar{x}_6 d\bar{x}_0 \rightarrow \bar{x}_0(\vartheta) - \bar{x}_0(t) = \bar{x}_6(t) \cdot (\vartheta - t) \rightarrow \\ &\rightarrow \bar{x}_0(\vartheta, t, x(t)) = \bar{x}_0(t, t, x(t)) + \bar{x}_6(t, t, x(t)) \cdot (\vartheta - t), \end{aligned}$$

т.к. уравнение для $\bar{x}_6$ имеет нулевую правую часть.

Таким образом:

$$\bar{x}_0(\vartheta, t, x(t)) = x_0(t) + x_6(t) \cdot (\vartheta - t). \quad (4.7.55)$$

По аналогии получаем:

$$\bar{x}_j(\vartheta, t, x(t)) = x_j(t) + x_j(t) \cdot (\vartheta - t) \quad \text{для } j = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (4.7.56)$$

Для $j = 6, 7, 9, 10, 11$ имеем, из-за нулевых правых частей:

$$\bar{x}_j(\vartheta, t, x(t)) = x_j(t). \quad (4.7.57)$$

И, наконец, для $\bar{x}_8$ имеем (вывод похож на случай $\bar{x}_0$):

$$\bar{x}_8(\vartheta, t, x(t)) = x_8(t) + \frac{g}{m} \cdot (\vartheta - t). \quad (4.7.58)$$

Следующая составляющая G :

$$\begin{aligned}
& \frac{dW(\mathcal{G}, t, x(t))}{d\mathcal{G}} = \left. \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}(\mathcal{G}, t, x)} \cdot W = \\
& = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_{0,0} & \dots & W_{0,11} \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{11,0} & \dots & W_{11,11} \end{pmatrix} = \\
& - \begin{pmatrix} W_{6,0} & \dots & W_{6,11} \\ W_{7,0} & \dots & W_{7,11} \\ W_{8,0} & \dots & W_{8,11} \\ W_{9,0} & \dots & W_{9,11} \\ W_{10,0} & \dots & W_{10,11} \\ W_{11,0} & \dots & W_{11,11} \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

При начальных условиях $W = I$ и уравнениях для W : $\frac{dW_{i,j}}{d\mathcal{G}} = W_{i,j}$

получаем решения:

$$\begin{aligned}
& \frac{dW_{0,0}(\mathcal{G}, t, x(t))}{d\mathcal{G}} = W_{6,0}(\mathcal{G}, t, x(t)) \rightarrow \\
& \rightarrow W_{0,0}(t, t, x(t)) + \int_t^{\mathcal{G}} W_{6,0}(\mathcal{G}, t, x(t)) d\mathcal{G} = W_{0,0}(t, t, x(t)) = 1,
\end{aligned}$$

т.к. при $t \leq \mathcal{G} \leq t_f$ $W_{6,0}(t, t, x(t)) = 0$.

$$\frac{dW_{0,6}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} = W_{6,6}(\vartheta, t, x(t)) \rightarrow W_{0,6}(t, t, x(t)) + \int_t^{\vartheta} W_{6,6}(\vartheta, t, x(t)) d\vartheta,$$
$$\frac{dW_{6,6}(\mathcal{G}, t, x(t))}{d\mathcal{G}} = 0 \rightarrow W_{6,6}(\mathcal{G}, t, x(t)) = W_{6,6}(t, t, x(t)) + \int_t^{\mathcal{G}} 0 d\mathcal{G} = 1.$$
$$W_{0,6}(t_f, t, x(t)) = 0 + \int_t^{t_f} 1 d\vartheta = t_f - t.$$

В итоге получаем:

[illegible]

$WB(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m}(-\cos x_3 \sin x_4 \cos x_5 - \sin x_3 \sin x_5) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m}(-\cos x_3 \sin x_4 \sin x_5 + \sin x_3 \cos x_5) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} \cos x_3 \cos x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_z} & 0 \end{pmatrix}$	$(4.7.59)$

Таким образом, определены составляющие МКС-управления (2.2.5), а именно: элементы $\partial \bar{J} / \partial \bar{x}$ – по выражениям (4.7.54 – 4.7.58), WB – по (4.7.59).

Ниже приведены результаты моделирования процесса МКС-управления квадрокоптером с параметрами: масса (в кг) $m=1$; моменты инерции (в кг·м²) $J_x = J_y = 0,013$; $J_z = 0,024$; ускорение свободного падения $g = 9,807 \text{ м·с}^{-2}$; ограничение на величину силы F (в ньютонах) $U_m = 1000$; параметр $T_u = 0,001 \text{ с}$; параметр $J^* = 0$. Моделирование производилось в среде MathCad при следующих параметрах численного интегрирования уравнений (4.7.53): конечное время $t_f = 35 \text{ с}$; шаг интегрирования методом Рунге-Кутты четвертого порядка $h = 0,001 \text{ с}$; начальные условия (вектор x^0) – нулевой; точка назначения x^* – варьировалась; весовые коэффициенты критерия $F_j = 1 \quad \forall j = 1 \dots 12$ для верхних строк $x_j(t_f)$, $F_1 = F_2 = F_3 = 10$, $F_j = 1 \quad \forall j = 4 \dots 12$ для нижних строк $x_j(t_f)$.

Результаты моделирования приведены в таблице 4.5, где в смежных парах строк помещены целевые (x_j^*) и достигнутые ($x_j(t_f)$) значения состояния квадрокоптера в конечный момент времени.

Таблица 4.5 – Результаты моделирования полета квадрокоптера (значения $x(t_f)$ округлены до целых чисел)

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_j^*	1000	80	260	50	40	30	0	0	0	0	0	0
$x_j(t_f)$	994 997	83 80	271 260	47 49	37 39	29 30	7 21	1 7	4 10	4 -3	4 -2	-1 -0
x_j^*	1000	80	26	5	40	3	0	0	0	0	0	0
$x_j(t_f)$	971 994	66 81	68 32	7 4	56 32	-1 5	1 15	-2 6	-10 3	-12 -3	-94 -22	-0 -12
x_j^*	100	800	50	20	4	30	10	10	10	10	10	10
$x_j(t_f)$	97 100	780 794	73 59	23 25	13 15	41 43	13 22	16 28	2 5	7 19	10 22	10 25

Как видно из таблицы, в целом, целевые и достигнутые значения близки, имея в виду, что двенадцать управляемых координат – это довольно много для любых алгоритмов управления. Для случая увеличенных в десять раз весов при пространственных координатах x, y, z точности достижения их заданных значений заметно выше.

Исследовались случаи управления одной координатой (каждой из двенадцати в отдельности). Получено, что в этих случаях погрешности приведения в заданные точки близки к нулю (в основном тысячные, максимум – десятые доли).

Следует отметить, что управляющие воздействия здесь имеют вид высокочастотных колебаний. Заметим, что управляющие воздействия модели (4.7.53) связаны с угловыми скоростями винтов квадрокоптера зависимостями [103]:

$$\begin{aligned}\tau_\phi &= lk(\omega_4^2 - \omega_2^2), \\ \tau_\theta &= lk(\omega_3^2 - \omega_1^2), \\ \tau_\psi &= b(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2), \\ F &= k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2),\end{aligned}$$

где l – длина «луча» квадрокоптера, k, b – экспериментально определяемые конструктивные параметры.

4.8. Выводы

Исследована эффективность управления методом конечного состояния (МКС-управления) в ряде приложений – коммутации электродвигателей различных типов (в том числе ускоренным методом, по идентифицированным моделям, с использованием эквивалентного релейного управления), управлении температурным режимом химического реактора с рециркуляцией, управлении насосами в системе динамического хранения питьевой воды, управления запасами, управления скоростью изменения давления на входе газотранспортной системы, управление роботами (беспилотного судна, колесного робота, манипулятора, квадрокоптера). Задачи управления в перечисленных приложениях имеют различные особенности, которые проявились в алгоритмах МКС-управления. Так, при коммутации электродвигателей постоянного тока с независимым, последовательным и параллельным возбуждением ставилась комплексная цель – приведение нескольких координат в заданное конечное положение, для чего использованы соответствующие терминальные квадратические критерии. В задаче управления температурой химического реактора с рециркуляцией использовано МКС-управление для систем с запаздываниями. В задаче управления насосами разработана нелинейная дифференциально-алгебраическая сетевая модель гидросистемы из 9 дифференциальных и 3 алгебраических уравнений, а также соответствующее МКС-управление. В задаче управления запасами использовано МКС-управление для дискретных систем. В задаче для газотранспортной системы использовано МКС-управление для двухиндексных систем. В задачах управления роботами использованы МКС для задач стабилизации (управление курсом беспилотного судна), упрощенный МКС за счет структуры объекта управления (двухколесный робот, квадрокоптер), двухэтапный МКС (управление манипулятором). Во всех перечисленных выше приложениях МКС-управление оказалось работоспособным и эффективным. Так, в задачах коммутации длительности переходных процессов при заданных ограничениях на токи оказались в два-три раза меньшими, чем при неуправляемой коммутации. В задаче динамического хранения питьевой воды удалось найти программное управление двумя насосами, совместная работа которых обеспечивает одновременную прокачку емкостей за заданное время с существенно (на порядок) меньшими энергетическими за-

тратами, чем при прокачке одним насосом. Следует отметить, что произвольное, не основанное на предварительных расчетах, управление двумя и более насосами в сетевом варианте гидросистемы практически вообще невозможно ввиду непредсказуемости направлений потоков, возможных гидравлических ударов и других нежелательных последствий. В задаче управления запасами найдено дискретное МКС-управление, несколько уступающее оптимальному при использовании экспоненциальной критериальной функции, и совпадающее с оптимальным при использовании оптимальной критериальной функции. Это свидетельствует в пользу гипотезы о том, что МКС-управление с оптимальной критериальной функцией является оптимальным управлением

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии предложен новый метод описания динамических систем на основе так называемых переменных конечного состояния $x(t_f, t, x(t))$, зависящих от трех аргументов – конечного времени t_f , текущего времени t и текущего состояния $x(t)$. Определяются указанные переменные как функции первого аргумента путем записи осциллограмм состояний неуправляемого движения системы. Если имеется математическая модель системы в виде традиционного представления через модель состояния, то переменная конечного состояния как функция первого аргумента рассчитывается численно путем прогонки модели состояния системы при обнуленном управлении. Если математической модели нет, указанная функция получается в результате регистрации соответствующих экспериментальных зависимостей координат. Важно, что при определении ПКС не имеет значения, какова природа системы: во всех случаях ПКС как функции первого аргумента есть осциллограммы неуправляемого движения системы от некоторого момента t с начальными условиями в этот момент $x(t)$. В монографии рассмотрены как традиционные дифференциальные системы, в общем случае нелинейные, так и системы другой природы – с запаздываниями, гибридные, дискретные с распределенными параметрами, в которых определения ПКС сходны с приведенным выше.

Для получения ПКС как функций второго аргумента при фиксированном первом производится множество экспериментов над моделью или реальным объектом, в которых регистрируются состояния модели (объекта) в выделенный момент времени. При этом от эксперимента к эксперименту t и $x(t)$ берутся разными. И здесь опять неважно, какова природа системы. Мы утверждаем, что описание систем в виде ПКС имеет универсальный характер и обладает такими достоинствами, как универсальность и очевидный и легко реализуемый на практике способ идентификации.

Тем не менее, ценность того или иного вида математической модели проявляется не только (и не столько) в возможности описания системы, но и в возможностях методов анализа и синтеза, основанных на данном виде модели. Для ПКС соответствующие методы анализа и синтеза, как оказалось, могут строиться на основе ПКС как функций второго аргумента. Уравнения, определяющие ПКС как функции второго аргумента, полученные для нелинейных дифференциальных систем на основе интегральной формулы В.М. Алексеева, названы нами «моделями конечного состояния». Характерной особенностью моделей конечного состояния является их зависимость от

управляющих воздействий. При этом их вид определяется соответствующей математической моделью состояния. Так, для дифференциальных систем, описываемых нормальными системами дифференциальных уравнений, соответствующая модель конечного состояния также имеет вид дифференциальной системы, для систем с запаздываниями модель конечного состояния также содержит запаздывающие аргументы. Аналогичные соответствия имеют место и по отношению к свойствам дискретности и гибридности. Отметим также, что дискретный по времени случай оказался более сложным в сравнении с непрерывными случаями в части трудности получения управления. В непрерывных случаях управления выражаются явно, а в дискретных случаях – посредством численного решения нелинейных уравнений, содержащих рекурсивные вложения функций правых частей моделей состояния систем. Кроме того, в нелинейных дискретных случаях не удалось получить аналогов формулы В.М.Алексеева вместе с определениями соответствующих переходных матриц. Есть основания полагать, что их и невозможно получить в принципе, хотя, как известно, для линейных дискретных систем соответствующие обобщения формулы Коши (формула Алексеева, в свою очередь, является обобщением формулы Коши на нелинейные системы с аддитивно входящим управлением и гладкими правыми частями) и переходной матрицы получены. Определения ПКС как функций первого аргумента и уравнений для ПКС как функций второго аргументов, т.е. моделей конечного состояния, для систем различной природы приведены в первой главе. При этом в заключительном подразделе главы приведена таблица с основными определениями, выражениями и уравнениями для ПКС и моделей конечного состояния.

На основе моделей конечного состояния могут строиться различные методы управления. Так, в третьей главе, на основе применения принципа максимума Понтрягина к модели конечного состояния для известной линейно-квадратической задачи, получены как известные, так и новые формы линейно-квадратических регуляторов. Это свидетельствует о том, что даже для хорошо исследованных задач с помощью предлагаемого подхода могут быть получены новые результаты. Однако в качестве основного метода, ориентированного на модели конечного состояния, здесь предлагается метод конечного состояния, который основан на использовании моделей конечного состояния и основных идей, используемых для решения обратной задачи динамики. В данном методе, ориентированном на решение терминальных задач вида $J = J(x(t_f)) \rightarrow J^*$, с помощью специально подобранных дифференциальных уравнений задается желаемая траектория критериальной функции с конечным значением J^* . Критериальная функция представляет собой целевую функцию терминального критерия $J(x(t_f))$, в которой вектор пере-

менных состояния $x(t_f)$ в конечный момент времени t_f заменен вектором переменных конечного состояния $x(t_f, t, x(t))$, т.е. $J(\bar{x}(t_f, t, x(t)))$. В силу равенства $\bar{x}(t_f, t_f, x(t_f)) = x(t_f)$ конечное значение критериальной функции (при $t = t_f$) равно $J(x(t_f))$. Если дифференциальное уравнение для критериальной функции таково, что его решение в момент t_f равно или близко к заданному значению J^* , то искомое управление можно определить из равенства производных по времени желаемой и фактической критериальных функций. При этом производная для фактической критериальной функции определяется как производная сложной функции с использованием модели конечного состояния. Описанная схема справедлива для базового дифференциального случая. Для конечно-разностных (дискретных) моделей схема несколько видоизменяется, повторяя в основных чертах базовую схему. Метод конечного состояния для систем с различными средствами математического описания описан во второй главе, где в заключительном подразделе приведена таблица с основными соотношениями.

В третьей главе рассмотрены некоторые смежные вопросы, связанные с применением переменных и моделей конечного состояния. Предложены новые формы оптимального управления линейно-квадратической задачи и метод ковариационного анализа нелинейных систем. Кроме того, описан способ замены управлений сложной формы, характерных для предлагаемых методов, эквивалентными релейными управлениями. При этом моменты переключений релейных управлений зависят только от заменяемых управлений, а сами релейные управления могут формироваться по принципу обратных связей. В этой же главе рассмотрены вопросы идентификации переменных и моделей конечного состояния, а также сравнительный анализ метода конечного состояния и одного из вариантов известного «линеаризационного по входу/выходу метода» (linearization I/O design method), основы которого разработаны А.Исидори (A. Isidori).

Четвертая глава посвящена практическим аспектам применения метода конечного состояния для решения задач управления различными техническими объектами – электродвигателями, гидросистемой сетевого типа, химическим реактором с рециркуляцией, газотранспортной системой, роботами. Решена динамическая задача управления запасами как пример применения дискретной формы метода конечного состояния. Компьютерные эксперименты выполнялись с помощью пакетов MathCad, Matlab, а также специализированного пакета для метода конечного состояния, выполненного в среде Delphi. Представленные результаты подтверждают работоспособность и эффективность рассмотренных в монографии методов.

Относительно дальнейших перспектив использования переменных конечного состояния можно высказать следующие соображения. В рассмотренных вариантах метода конечного состояния использовались модели конечного состояния, т.е. уравнения динамического типа (дифференциальные, конечно-разностные и др.) для переменных конечного состояния как функций второго аргумента, поскольку эти уравнения содержали искомые управляющие воздействия. В то же время формирование моделей конечного состояния оказалось в ряде случаев непростой задачей, решение которой, к тому же, возможно лишь при известной модели состояния объекта. В то же время для идентификации переменных конечного состояния математическая модель не нужна (см. подраздел 3.4). Поэтому имеет смысл основные идеи метода конечного состояния распространить на случай, когда модель конечного состояния неизвестна. При этом введенное в первой главе определение переменных конечного состояния и свойство $\bar{x}(t_f, t_f, x(t_f)) = x(t_f)$ применимы к системам любой природы, в том числе и таким, которые трудно или вообще невозможно описать уравнениями (например, динамическим объектам, заданных алгоритмами). Таким образом, на основе предлагаемых подходов вырисовывается возможность решения задач управления объектами типа «черного ящика», для которых доступны входные управляющие воздействия и возможность измерения выхода. При этом, конечно, не стоит ожидать простых алгоритмов управления в виде алгебраических выражений. По всей видимости, поиск управлений при этом будет связан с решением сложных нелинейных уравнений, включающих многократные прогоны алгоритмических моделей объекта управления. Однако, несмотря на указанную сложность, это может оказаться полезным, особенно с учетом практического отсутствия конкурирующих методов (за исключением математического и динамического программирования, которые невозможно применить для поиска управлений по принципу обратных связей).

Приведенные в монографии результаты получены в процессе выполнения следующих госбюджетных научно-исследовательских работ с шифрами и номерами государственной регистрации соответственно: «Корунд» (№0198U002904); «Топаз» (№0101U001179); «Изумруд» (№0104U000567); «Аметист» (№0106U012599); «Малахит» (№0109U4009072); «Пионер» (№ АААА-А17-117122070070-0); «Андроид» (№ АААА-А18-118122590087-6). Отдельные результаты исследований опубликованы в работах [72 – 86].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Красовский А.А. Науковедение и состояние теории процессов управления / А.А.Красовский // Автоматика и телемеханика. – 2000. – №4. – С.3 –19.
2. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования: в 3-х кн. / П.В.Бромберг [и др.]; под ред.В.В.Солодовникова. – М.: 1969. – Книга 3. – Часть 2: Теория нестационарных, нелинейных и самонастраивающихся систем автоматического регулирования. – 368 с.
3. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление / Я.Н.Ройтенберг. – М.: Наука, 1971. – 396 с.
4. Алексеев В.М. Об одной оценке возмущений обыкновенных дифференциальных уравнений / В.М.Алексеев // Вестн. Москов. ун-та. Сер.1.Математика, механика. – 1961. – №2. – С.28 – 36.
5. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем / Н.Н.Моисеев. – М.: Наука, 1975. – 528 с.
6. Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / Под ред. Р.А. Нелепина. – М.: Наука, 1975. – 447 с.
7. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. – М.: Наука, 1971. – 296 с.
8. Барабанов А.Т. Линейные модели в оптимизации непрерывно-дискретных динамических систем / А.Т. Барабанов, Г.А. Агранович // Динамические системы. – 1983.– Выпуск 2. – С.17 –24.
9. Зубов В.И. Лекции по теории управления / В.И.Зубов. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
- 10.Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание / А.Алберт. – М.: Наука, 1977. – 223 с.
- 11.Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования: в 3-х кн. / М.А.Айзерман [и др.]; под ред. В.В.Солодовникова. – М.: 1967. – Книга 1: Математическое описание, анализ устойчивости и качества систем автоматического регулирования. – 768 с.
- 12.Математическая теория оптимальных процессов / Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко – М.:Наука, 1969. – 384с.
- 13.Пупков К.А. Анализ и расчет нелинейных систем с помощью функциональных степенных рядов / К.А. Пупков, Н.А. Шмыкова. – М.: Машиностроение, 1982. – 150 с.

14. Pipes A, The Reversion Method for Solving Nonlinear Differential Equations / A. Pipes // J. Of Applied physics. – V.23. – №2, 1952. – P.202 – 207.
15. Ku Y.H. Analysis and Control of Nonlinear Systems / Y.H. Ku. – New York, 1958. – 292 p.
16. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э.Камке. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
17. Brunovsky P. A classification of linear controllable systems / P. Brunovsky // Kybernetika (Praha), 1970. – V.6. – P.173-178.
18. Макаров Н.А. Линеаризация неголономных систем управления / Н.А. Макаров, А.Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика, 1996. – №5. – С.3 –15.
19. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник в 5-ти т.; Т.5. Методы современной теории автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 784 с.
20. Шушляпин Е.А. Исследование и оценка дополнительных членов в обобщенном методе Дункана для ковариационного анализа систем с дифференцируемыми нелинейностями / Е.А. Шушляпин // Вестник СевГТУ. Сер. «Автоматизация процессов и управление»: сб. науч. тр. – Севастополь, 2002. – Вып.36. – С.7 – 16.
21. Narendra K.S. Annaswamy A.M. Stable adaptive systems / Englewood Cliffs, Nj: Prentice Hall, 1989.
22. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием / Х. Гурецкий. – М.: Машиностроение, 1973. – 328 с.
23. Терновaя Г.Н. Робастно-адаптивное управление нелинейным объектом с запаздыванием по состоянию с эталонной моделью / Г.Н. Терновaя // Труды VI Международной конференции SICPRO'07. – М.: ИПУ им. В.А.Трапезникова РАН, 2007. – С. 587 – 594.
24. Wu Wei. Lyapunov-based design procedures for a state-delay chemical process // 14th World Congress of IFAC, 1999. – N-7A-05.
25. Борцов Ю.А. Автоматические системы с разрывным управлением / Ю.А. Борцов, И.Б. Юнгер. – Л.: Энергоатомиздат, 1986. – 168 с.
26. Теория показателей Ляпунова / Б.Ф.Былов, Р.Э.Виноград, Д.М.Гробман, В.В.Немыцкий. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
27. Подчукаев В.А. Достаточные условия приводимости нелинейных систем / В.А.Подчукаев, Д.В.Орлов // Аналитическая механика, устойчивость и управление движением: Тезисы докладов VII Четаевской конференции. – Казань: Изд-во КГТУ, 1997. – С.63.
28. Орлов Д.В. Необходимые и достаточные условия приводимости с использованием аппарата коэффициентов А.Н.Крылова / Д.В.Орлов //

- Аналитические методы анализа и синтеза регуляторов: межвузовский научный сборник / Саратов.гос.техн.ун-т. – Саратов, 1999. – С.183 – 192.
29. Isidori A. Nonlinear Control Systems, 3rd Ed. / A. Isidori. – N.Y.: Springer Verlag, 1995. – 549 p.
30. Копылов И.П. Применение вычислительных машин в инженерно-экономических расчетах (Электрические машины) / И.П.Копылов. – М.: Высшая школа, 1980. – 256 с.
31. Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления / А.Брайсон, Хо Ю-Ши. – М.:Мир, 1972. – 544 с.
32. Атанс М. Оптимальное управление / М.Атанс, П.Фалб. – М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
33. Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р.Сиван. – М.:Мир, 1977. – 656 с.
34. Козырев В.Г. Оптимальный регулятор почти точного приведения в ноль сингулярно возмущенного объекта / В.Г.Козырев // Динамические системы: межвед. науч. сб. – Симферополь: КФТ, 1999. – №15. – С.24 – 30.
35. Глизер В.Я. Асимптотика одной сингулярно возмущенной задачи, связанной с методом штрафных функций / В.Я.Глизер, М.Г.Дмитриев // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т.17. – №9. – С.1574 – 1580.
36. Арато М. Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. Статистический подход / М.Арато. – М.: Наука, 1989. – 304с.
37. Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ / А.В.Балакришнан. – М.:Наука, 1980. – 384 с.
38. Розенвассер Е.Н. Чувствительность систем автоматического управления / Е.Н. Розенвассер, Р.М. Юсупов. – Л.:Энергия, 1969. – 208 с.
39. Ким Д.П. Теория автоматического управления: в 2-х т. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: учеб.пособие / Д.П.Ким – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004 – 464 с.
40. Шушляпин Е.А. Оптимальное ограниченное управление линейной нестационарной системой управления конечным положением / Е.А.Шушляпин // Динамические системы: межвед. науч. сб. – Киев: Либідь, 1994. – №13. – С.36 – 39.(англ.перевод Shushlyapin E.A. Optimal constrained control of a linear non-stationary end-position control system / E.A. Shushlyapin // Journal of Mathematics Science. – New York: Plenum, 1996. – V.82. – №3. – P.3425-3427.)
41. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1966. – 664 с.

-
42. Лившиц Н.А. Корреляционная теория оптимального управления многомерными процессами / Н.А. Лившиц, В.Н. Виноградов, Г.А. Голубев – М.: Советское радио, 1974. – 328 с.
 43. Методы оптимизации в статистических задачах управления / А.М. Батков [и др.] – М.: Машиностроение, 1974. – 240 с.
 44. Duncun D.B. Response of Linear Time-dependent Systems to Random Inputs / D.B. Duncun // J. Appl. Phys. – 1953. – №5. – P. 609 – 611.
 45. Барабанов А.Т. Статистическое моделирование нестационарных динамических систем методом формирующего фильтра / А.Т. Барабанов, Ю.И. Томин // Приборостроение: респ. межвед. науч.-техн. сб. – Киев: Техніка, 1974. – №17. – С.3 – 10.
 46. Розанов Ю.А. Случайные процессы / Ю.А. Розанов. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
 47. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
 48. Лившиц Н.А. Вероятностный анализ систем автоматического управления / Н.А. Лившиц, В.Н. Пугачев. – М.: Сов. радио, 1963.
 49. Сейдж Э.П. Идентификация систем управления / Э.П. Сейдж, Д.Л. Мелса. – М.: Наука, 1974. – 248 с.
 50. Салуквадзе М.Е. Параметрическая идентификация определенного класса нестационарных линейных динамических систем / М.Е. Салуквадзе, В.Г. Шаншиашвили // Труды III Международной конф. «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'04 ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, 28 – 30 января 2004 г. – М.: 2004. – С.1520 – 1526.
 51. Динамика управляемого электромеханического привода с асинхронными двигателями / В.Л. Вейц, П.Ф. Вербовой, А.Е. Кочура, Б.Н. Куценко. – Киев: Наукова думка, 1988. – 272 с.
 52. Петров Ю.П. Оптимальное управление электроприводом / Ю.П. Петров. – М.: Госэнергоиздат, 1961. – 188 с.
 53. Marino R. Adaptive input-output linearizing control of induction motors / R. Marino, S. Peresada, P. Valigi // IEEE Trans. Autom. Control. – 1993. – №2. – P. 208 – 221.
 54. Монако С. Цифровое нелинейное управление скоростью синхронного двигателя / С. Монако, Д. Норман-Сиро, А. Шелуа // Автоматика и телемеханика. – 1997. – №6. – С.143 – 158.
 55. Потапенко Е.М. Робастное управление электроприводом с вентильным двигателем / Е.М. Потапенко, Д.В. Корельский, Е.В. Васильева // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2000. – №1. – С.161-166.

-
- 56.Потапенко Е.М. Синтез и сравнительный анализ робастных компенсаторов пониженного порядка / Е.М. Потапенко // Автоматика и телемеханика. – 1998. – №4. – С.65 – 74.
- 57.Blaschke F. The principle of field orientation applied to the new transvector closed-loop control system for rotating field machines. / F. Blaschke // Siemens – Rev, 1972. – №39. – P.217 – 220.
- 58.Пересада С.М. Векторное управление в асинхронном электроприводе: аналитический обзор / С.М.Пересада // Сб.науч.тр. Донецкого гос.техн.ун-та, 1999. – №4. – С.8 – 20.
- 59.Бичай В.Г. Состояние, тенденции и проблемы в области методов управления асинхронными двигателями / В. Г. Бичай [и др.] // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2001. – №1. – С.138 – 144.
- 60.Рудаков В.В. Асинхронные электроприводы с векторным управлением / В.В.Рудаков, И.М.Столяров, В.А.Дартау.– Л.: Энергоатомиздат, 1987. – 136с.
- 61.Козярук А.Е. Высокоэффективный бесконтактный электропривод с цифровым векторным управлением / А.Е.Козярук // Электротехника. – 1996. – №7. – С.12 – 16.
- 62.Дацковский Л.Х. Современное состояние и тенденции в асинхронном частотно-регулируемом электроприводе / Л.Х. Дацковский [и др.] // Электротехника, 1996. – №10. – С.18 – 27.
- 63.Лозинський А.О. Формування керуючих впливів електромеханічних систем на основі принципів нечіткої логіки / А.О. Лозинський // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2000. – №1. – С.156 – 161.
- 64.Данилов Л.В. Теория нелинейных электрических цепей / Л.В. Данилов, П.Н. Матханов, Е.С. Филиппов. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отделение, 1990. – 256 с.
- 65.Панкратов В.В. Оптимизация динамических режимов в асинхронном электроприводе с учетом ограничений / В.В.Панкратов, О.В.Нос // Известия вузов. «Электромеханика». – Новочеркасск: Изд-во Южно-русск. гос. техн. ун-та, 1999. – № 4. – С.51 – 56.
- 66.Ульянов С.А. Электромагнитные переходные процессы в электроэнергетических системах / С.А.Ульянов. – М.: Энергия, 1964. – 702 с.
- 67.Чугаев Р.Р. Гидравлика / Р.Р.Чугаев. – Л.: Энергия, 1975. – 600 с.
- 68.Павленко В.Г. Основы механики жидкости / В.Г.Павленко. – Л.: Судостроение, 1988. – 240 с.
- 69.Зайченко Ю.П. Исследование операций / Ю.П. Зайченко. – К.: «Вища школа», 1979. – 392 с.
- 70.Грачев В.В. Динамика трубопроводных систем / В.В. Грачев, С.Г.Щербаков, Е.И. Яковлев. – М.: Наука, 1987. – 440 с.

-
71. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики / К.А. Лурье. – М.: Наука, 1975. – 478 с.
72. Шушляпин Е.А. Модели конечного состояния и их применение в задачах анализа и синтеза систем управления: дис. д-ра техн. наук: 05.13.03: защищ. 03.10.02 : утв. 09.04.03 / Шушляпин Евгений Андреевич – Севастополь, 2003. – 323с. – 0408U002219.
73. Шушляпин Е.А. Модификация метода конечного состояния для синтеза управления реального времени в многомерных нелинейных терминальных системах с дифференцируемыми нелинейностями / Е.А. Шушляпин, А.Е. Шушляпина (Безуглая) // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2003. – № 1. – С.149 – 153.
74. Шушляпин Е.А. Управление терминальными нелинейными дискретными системами методом конечного состояния / Е.А. Шушляпин, О.Г. Подольская // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2003. – № 2. – С.138 – 142.
75. Шушляпин Е.А. Модификация метода конечного состояния для синтеза управления реального времени в многомерных нелинейных терминальных системах с дифференцируемыми нелинейностями / Е.А. Шушляпин, А.Е. Шушляпина // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2003. – №1. – С.149 – 153.
76. Шушляпин Е.А. Управление дифференциальными нелинейными системами на основе идентифицированных моделей конечного состояния / Е.А. Шушляпин, А.Е. Шушляпина (Безуглая) // Труды III Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления», г. Москва, 28-30 января 2004 г. – М.: ИПУ им. В.А.Трапезникова РАН, Москва, 28 – 30 января 2004 г. – М.: 2004. – С.607 – 635.
77. Шушляпин Е.А. Алгоритм сигнальной самонастройки по эталонной модели / Е.А. Шушляпин // Динамические системы. – 2004. – № 18. – С.9 –13.
78. Подольская О.Г. Применение дискретного метода конечного состояния для расчета управления в динамической задаче управления запасами / О.Г. Подольская, Е.А. Шушляпин // Труды Одесского политехнического университета: научный и производственно-технический сборник по естественным и техническим наукам. – Одесса, 2004. – Спецвыпуск: в 3-х т. – Т.2. – С.184 – 188.
79. Шушляпин Е.А. Управление терминальными нелинейными многоиндексными системами методом конечного состояния / Е.А. Шушляпин, А.Е. Работнов // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2004. – № 2 – С.152-156.
80. Шушляпин Е.А. Управление нелинейными непрерывно-дискретными системами методом конечного состояния / Е.А. Шушляпин, О.Г. По-

- дольская // Труды IV Международной конференции “Идентификация систем и задачи управления” SICPRO’05 ИПУ им. В.А.Трапезникова РАН, Москва, 25 – 28 января 2005 г. – М.: 2005. – С.1495 – 1513.
81. Шушляпин Е.А. Модель конечного состояния для представления нелинейных систем с переменными запаздываниями / Е.А. Шушляпин, Е.В. Виноградов // Труды V Международной конференции SICPRO’06 ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, 30 января – 2 февраля 2006 г. – М.: 2006. – С. 1376 – 1386.
82. Шушляпин Е.А. Модель конечного состояния для представления нелинейных систем с переменными запаздываниями / Е.А. Шушляпин, Е.В. Виноградов // Труды V Международной конференции SICPRO’06. М.:ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, 30 января – 2 февраля 2006 г. – М.: 2006. – С. 1376 – 1386.
83. Шушляпин Е.А. Управление нелинейными дискретными системами с распределенными параметрами методом конечного состояния / Е.А. Шушляпин, А.Е. Работнов // Труды V Международной конференции SICPRO’06. М.:ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, 30 января – 2 февраля 2006 г. – М.: 2006. – С.1387-1403.
84. Шушляпин Е.А. Сравнительная характеристика двух методов управления нелинейными системами / Е.А.Шушляпин // Вестник СевГТУ. Сер. Автоматизация процессов и управление: сб. науч. тр. – Севастополь, 2007. – Вып. 83. – С.27-33.
85. Шушляпин Е.А.. Обобщение метода конечного состояния на нелинейные системы с переменными запаздываниями / Е.А. Шушляпин, Е.В. Виноградов // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2007. – № 1. – С.146 – 149.
86. Байздренко Е.А. Построение эквивалентных релейных управлений многомерными линейными нестационарными системами / Е.А. Байздренко, Е.А. Шушляпин // Вестник СевНТУ. Сер. Автоматизация процессов и управление: сб. науч. тр. – Севастополь, 2012. – Вып. 125. – С.49 – 54.
87. Вагущенко Л.Л., Цымбал Н.Н. Системы автоматического управления движением судна. М.: ТрансЛит, 2007. 376 с.
88. Справочник по теории корабля: В трех томах. Том 3. Управляемость водоизмещающих судов. Гидродинамика судов с динамическими принципами поддержания / Под ред. Я.И. Войткунского // Л.: Судостроение, 1985. 544с.
89. Способ управления угловой скоростью судна-катамарана при «сильных» маневрах: пат. 2693403 Российская Федерация: СПК В63Н 25/04 (2019.02) G05D 1/100 (2019.02); ФГАОУ ВО «Севастопольский госу-

- дарственный университет (Россия). – № 2018132564/21,22; заявл. 11.09.2018; опубл. 03.07.2019, Бюл. №19. – 2с.: ил.
90. Shushlyapin E.A., Bezuglaya A.E. Analytical Synthesis of Regulators for Nonlinear Systems with a Terminal State Method on Examples of Motion Control of a Wheeled Robot and a Vessel // Journal of Applied Mathematics, vol. 2018. Article ID 4868791, 13 pages, 2018.
91. Giuseppe Casalino, Massimo Caccia, Andrea Caiti, Gianluca Antonelli, Giovanni Indiveri, Claudio Melchiorri and Stefano Caselli. MARIS: a National Project on Marine Robotics for Interventions. 2014 22nd Mediterranean Conference on Control and Automation (MED) University of Palermo. June 16-19, 2014. Palermo, Italy.
92. David M. Lane, Francesco Maurelli, Tom Larkworthy, Darwin Caldwell, Joaquim Salvi, Maria Fox, Konstantinos Kyriakopoulos. PANDORA: Persistent Autonomy through Learning, Adaptation, Observation and Re-planning. IFAC PapersOnLine Volume 48, Issue 2, 2015, pp. 238-243.
93. Pedro J. Sanz, Pere Ridao, Gabriel Oliver, Giuseppe Casalino, Yvan Petillot, Carlos Silvestre, Claudio Melchiorri, Alessio Turetta. TRIDENT An European Project Targeted to Increase the Autonomy Levels for Underwater Intervention Missions. 2013 OCEANS - San Diego, 23-27 Sept. 2013.
94. Разработка и исследование робототехнического комплекса для выполнения подводно-технических работ в условиях ограниченной видимости с использованием комплексной системы 3D-зрения высокого разрешения /А.А.Кабанов, В.А. Крамарь, Е.А. Шушляпин и др. // Отчет о НИР (г/б №АААА-А18-11812259008). Севастополь, СевГУ, 2018 г. 403 с.
95. Kabanov A.A., Balabanov A.N. The modeling of an anthropomorphic robot arm // MATEC Web of Conferences 224, Vol. 224, 2018 (Proceedings of International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment (ICMTMTE 2018) Sevastopol, Russia, September 10-14, 2018, doi: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201822404024>
96. FEDOR: Final Experimental Demonstration Object Research // Новый оборонный заказ. Стратегии. – СПб: ООО «Дифанс-Медиа», 2019. – №5(58).
97. Подводные манипуляторы // [URL: http://www.oceanos.ru/s1/files/File/2017_LFL_manip.pdf](http://www.oceanos.ru/s1/files/File/2017_LFL_manip.pdf) (Дата обращения 03.07.2018 г.).
98. Автономный подводный робот-краб // [URL: https://ria.ru/science/20180419/1518950715.html](https://ria.ru/science/20180419/1518950715.html) (Дата обращения 04.07.2018 г.).
99. Облегченный подводный пятистепенной электроманипулятор // [URL: http://www.tetis-pro.ru/news/803/](http://www.tetis-pro.ru/news/803/) (Дата обращения 04.07.2018 г.).

-
- 100.Подводный робот политехников «Одиссей» // URL:https://news.tpu.ru/news/2016/11/11/26198/?title=podvodnyy_robot_politehnikov_pozvolit_o&print=1(Дата обращения 05.09.2018 г.).
- 101.Шушляпин Е.А., Безуглая А.Е. Управление антропоморфным роботом методом конечного состояния // АППР-2019 «Автоматизация и приборостроение: проблемы, решения», г. Севастополь, 09 – 13 сентября 2019г // Материалы IV Международной научно-технической конференции / «Автоматизация и измерения в машино- приборостроении», №3(7), 2019г. С.38 – 47.
- 102.J.Denavit, R.S.Hartenberg. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices, Transactions ASME Journal of Applied Mechanics, 23, 1955. - С.215 – 221.
- 103.Гурьянов А.Е. Моделирование управления квадрокоптером // Инженерный вестник: Изд-во МГТУ им. Баумана Н.Э. – №8, 2014. – С.522-534.
- 104.Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320с.
- 105.Xiaodong Zhang, Xiaoli Li, Kang Wang, and Yanjun Lu. A Survey of Modelling and Identification of Quadrotor Robot // Abstract and Applied Analysis, Hindawi Publishing Corporation, Volume 2014, Article ID 320526, 16 pages.

Научное издание

Шушляпин Евгений Андреевич

**АНАЛИЗ И СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
НА ОСНОВЕ ПРОГНОЗА КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ
НЕУПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ**

Монография

В авторской редакции

ISBN 978-5-6049992-3-3



9 785604 999233

Изд. № 127/2023. Объем 19,25 п.л. Усл. печ. л. 17,90. Уч.-изд. л. 18,865.
РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»