

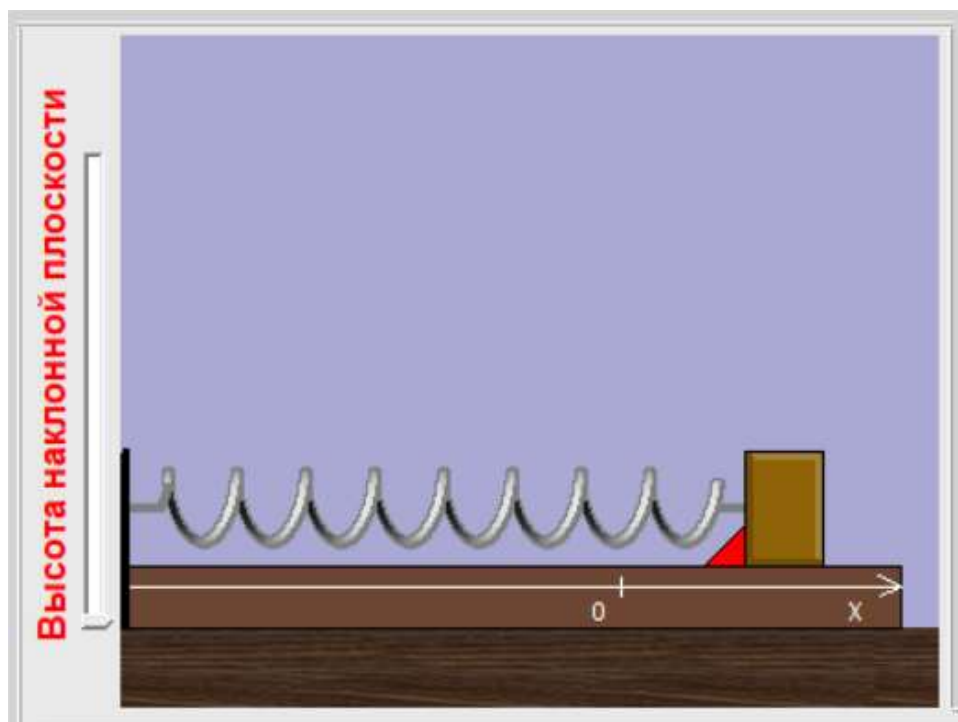
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Г. Рипп, В. В. Довгаленко

МАЯТНИК ОКСА

Учебное пособие
по общей физике для студентов технических
и естественно-научных специальностей



Севастополь
СевГУ
2023

УДК 531.535(075.8)
ББК 22.3ся73
Р537

Рецензент:
Ю.В. Браславский – канд. техн. наук, доцент

Рипп, А. Г.

Р537 Маятник Окса : учебное пособие по общей физике для студентов технических и естественно-научных специальностей / А. Г. Рипп, В. В. Довгаленко ; Севастопольский государственный университет. – Севастополь : СевГУ, 2023. – 27 с. – Текст : электронный.

Учебное пособие разработано преподавателями кафедры «Физика» СевГУ и предназначено для студентов 1 и 2 курсов технических и естественно-научных специальностей, выполняющих лабораторные работы по дисциплинам: «Физика» и «Физический практикум». В пособии студентам предлагается познакомиться с особенностями свободных колебаний маятника Окса и исследовать экспериментальным путём основные закономерности процесса колебаний: постоянство периода колебаний, линейное убывание амплитуды колебаний, зависимость полного времени колебаний от частоты колебаний и от коэффициента трения. Лабораторная установка, на которой предлагается провести эксперименты, виртуальная.

Пособие содержит краткий теоретический материал, описание лабораторной установки, порядок выполнения лабораторной работы и методы оценки погрешности измерений. Материал изложен подробно и в доступной форме. Для студентов, желающих получить больше информации, в конце пособия приводится список литературы.

УДК 531.535(075.8)
ББК 22.3ся73

Учебное пособие рассмотрено и утверждено на заседании кафедры «Физика», протокол № 2 от 12 октября 2023 г.

Работа 7. Маятник Окса

Цель работы

Исследовать особенности колебаний маятника Окса.

- Зависимость периода и амплитуды колебаний от времени.
- Зависимость характеристик колебательного процесса от параметров маятника и от начального состояния маятника.

Введение

Маятник Окса – это твёрдое тело на плоской поверхности, соединённое с упругой пружиной так, что оно может двигаться только вдоль оси пружины. Второй конец пружины закреплён на поверхности. В данной лабораторной работе тело имеет форму бруска, а поверхность – горизонтальная. Брусок, выведенный из равновесного положения, приходит в колебательное движение. Вследствие действия силы трения между бруском и поверхностью эти колебания *затухают*.

Колебания маятника Окса характеризуются следующими закономерностями.

1. Период этих колебаний *постоянный*.
2. Период колебаний *не зависит от силы трения*, а зависит только от массы бруска и жёсткости пружины.
3. Амплитуда колебаний уменьшается *линейно*, то есть за каждую половину периода амплитуда уменьшается на одну и ту же величину ΔA .
4. Спустя некоторое время после начала колебаний движение маятника прекращается. Количество колебаний маятника (количество периодов) до его полной остановки и время колебаний маятника тем больше, чем больше начальное смещение маятника и жёсткость пружины, и тем меньше, чем больше инертность маятника и чем сильнее трение.

1. КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

1.1. Качественное описание явления

Пусть на горизонтальной поверхности лабораторного стола лежит брусок, соединённый пружиной с неподвижной стойкой – см. рисунки 1 и 2.

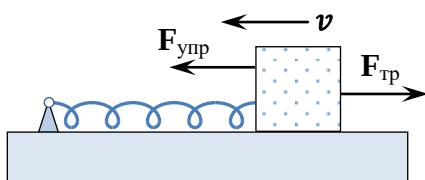


Рис. 1. Пружина растянута

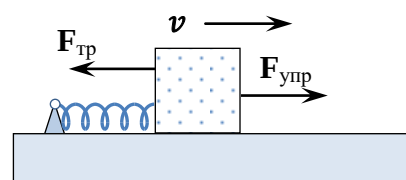


Рис. 2. Пружина сжата

Если брусок сдвинуть с места и отпустить, то в деформированной пружине возникнет сила упругости $F_{\text{упр}}$. Будем для определённости считать, что брусок оттянут вправо – см. рисунок 1. Если возникающая в пружине сила упругости больше, чем сила трения покоя, действующая между бруском и столом, то бру-

сок начнёт двигаться. При этом сразу возникнет сила трения скольжения $F_{тр}$, направленная против скорости бруска. Пока сила упругости больше силы трения, сумма сил ($F_{упр} + F_{тр}$) направлена туда же, куда и сила $F_{упр}$, то есть вдоль скорости v – влево. Поэтому согласно второму закону Ньютона ускорение направлено тоже вдоль скорости v , так что брусок *разгоняется* – его скорость v растёт. По мере движения бруска деформация пружины уменьшается и вместе с ней уменьшается сила упругости. В отличие от силы упругости, сила трения скольжения неизменна. Когда величина $F_{упр}$ падает до величины $F_{тр}$, ускорение бруска становится равным нулю и его скорость перестаёт нарастать. Но так как брусок продолжает двигаться, то продолжается уменьшение деформации пружины и уменьшение силы упругости. Теперь $F_{упр} < F_{тр}$, поэтому суммарная сила ($F_{упр} + F_{тр}$) направлена против скорости – вправо. Следовательно, и ускорение направлено против скорости, так что скорость убывает. В итоге в какой-то момент времени брусок останавливается.

Инерция движения приводит к тому, что замедляющийся брусок может пройти мимо того положения, в котором пружина не деформирована, и к моменту остановки пружина уже оказывается сжатой, а сила упругости направлена не влево, как показано на рисунке 1, а вправо – см. рисунок 2. Момент остановки – это, строго говоря, не момент, а процесс, протекающий в течение некоторого времени, правда, очень маленького. За это время сначала сила трения скольжения сменяется такой же по величине силой трения покоя, затем сила трения покоя падает до нуля, меняет своё направление на противоположное (влево) и растёт, чтобы скомпенсировать силу упругости сжатой пружины, которая стремится сдвинуть брусок с места. Однако у силы трения покоя есть предел роста – это сила трения *скольжения*. Поэтому, если сила упругости больше силы трения скольжения, то трение не сможет удержать брусок на месте, и он *начнёт двигаться*, только теперь уже в обратную сторону (вправо). Силу трения покоя сменяет сила трения скольжения $F_{тр}$, направленная по-прежнему против скорости бруска (см. рисунок 2). Далее движение происходит так же, как оно происходило до остановки: брусок сначала разгоняется, затем замедляется, останавливается и снова начинает движение в противоположную сторону. В системе возникают колебания, то есть периодический процесс, в котором каждый период состоит из двух этапов: движение бруска в одну сторону и движение в другую сторону. В дальнейшем будем эти этапы называть *циклами* а брусок – *маятником*.

Колебания маятника – *затухающие*, так как трение приводит к рассеянию (*диссипации*) энергии, которую система получает при первоначальном растяжении пружины какой-то внешней силой. Поэтому раз за разом расстояние между точками остановки становится всё меньше. Закончатся колебания в тот момент, когда при очередной остановке маятника сила упругости пружины окажется *меньше силы трения скольжения* – в этом случае нарастающая при остановке сила трения покоя достигнет силы упругости и скомпенсирует её, так что маятник с места не сдвинется.

Координаты точек остановки маятника и амплитуда колебаний

Итак, движение маятника состоит из следующих друг за другом циклов. В течение каждого из циклов маятник движется в одну сторону, но при переходе от одного цикла к следующему маятник на мгновение останавливается и его направление движения меняется на противоположное. Для количественного описания обозначим буквой n номер цикла ($n = 1, 2, 3, \dots$) и выберем систему координат. Так как маятник движется вдоль одной линии (вдоль оси пружины – то в одну сторону, то в другую), то для описания его движения достаточно одной оси координат¹, направленной вдоль оси пружины. Обозначим эту ось OX – см. следующий рисунок 3.

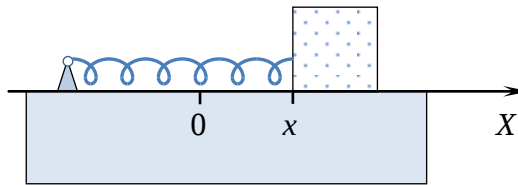


Рис. 3. Система координат

Координатой маятника x будем считать координату точки прикрепления бруска к пружине. Начало координат 0 выберем так, чтобы при $x = 0$ пружина была не деформирована. Тогда число x – это не только координата маятника, но и деформация пружины. При $x > 0$ пружина *растянута*, при $x < 0$ пружина *сжата*. На рисунке 3 пружина растянута.

В течение каждого цикла, от одной точки остановки до следующей, координата маятника меняется (нарастает или убывает) от одного крайнего значения до другого. Обозначим x_n начальную координату маятника в цикле с номером n . В первом цикле начальная координата равна x_1 , во втором – x_2 , в третьем – x_3 и так далее. Конечной координатой маятника в цикле с номером n является начальная координата маятника в следующем цикле, то есть x_{n+1} . В каждом цикле эта пара чисел (координаты точек остановки) – своя, и её можно узнать. Для этого, например, можно использовать известный закон механики о том, что *сумма работ всех неконсервативных сил, действующих на какой-либо механический объект, превращается в изменение энергии этого объекта*.

$$\Delta E = \sum A. \quad (1)$$

На пути от x_n до x_{n+1} на систему брусок-пружина действует только одна неконсервативная сила – *сила трения скольжения* $\mathbf{F}_{\text{тр}}$. Определим работу этой силы. По определению работы

$$A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} S \cos \varphi,$$

где S – длина пути, пройденного маятником за цикл, φ – угол между силой трения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ и скоростью движения маятника $\mathbf{v}$.

¹ В этом случае говорят, что движение является *одномерным*.

Так как маятник движется по горизонтальной поверхности, то действующая на него сила трения равна $F_{\text{тр}} = \mu mg$, где μ – коэффициент трения, m – масса маятника, g – ускорение свободного падения.

Длина пути S равна модулю разности между конечной и начальной координатами маятника в цикле. Будем для определённости считать, что в начале колебательного процесса пружина растянута. Тогда во всех циклах с нечётными номерами (будем их называть *нечётными циклами*) маятник движется против оси OX , так что $S = (x_n - x_{n+1})$. В циклах с чётными номерами (будем их называть *чётными циклами*) маятник движется в другую сторону, то есть в направлении оси OX , так что $S = (x_{n+1} - x_n)$. Объединить эти две формулы можно так:

$$S = (-1)^n (x_{n+1} - x_n).$$

Сила трения скольжения $F_{\text{тр}}$ направлена всегда против скорости движения маятника v , поэтому угол между $F_{\text{тр}}$ и v равен 180° и $\cos\varphi = -1$. Таким образом,

$$A_{\text{тр}} = \mu mg (-1)^{n+1} (x_{n+1} - x_n). \quad (2)$$

Теперь определим изменение энергии системы за время цикла ΔE . Так как кинетическая энергия маятника в точках остановки равна нулю, то изменение кинетической энергии равно нулю и ΔE равно изменению *потенциальной* энергии пружины:

$$\Delta E = E_{p2} - E_{p1} = \frac{kx_{n+1}^2}{2} - \frac{kx_n^2}{2} = \frac{k}{2} (x_{n+1}^2 - x_n^2). \quad (3)$$

Здесь k – коэффициент упругости пружины². Подстановка (3) и (2) в (1) даёт:

$$\frac{k}{2} (x_{n+1}^2 - x_n^2) = \mu mg (-1)^{n+1} (x_{n+1} - x_n).$$

Разделив левую и правую часть этого уравнения на общий множитель $(x_{n+1} + x_n)$, получим:

$$(x_{n+1} + x_n) = (-1)^{n+1} \frac{2\mu mg}{k}. \quad (4)$$

Введём обозначение:

² Формула (2.5) верна, если выполняется закон Гука, согласно которому величина силы упругости $F_{\text{упр}}$, возникающей в деформированном образце, пропорциональна величине деформации $\Delta\ell$, так что $F_{\text{упр}} = k\Delta\ell$. Коэффициент пропорциональности k в этой формуле называется коэффициентом жёсткости или коэффициентом упругости. Закон Гука выполняется, если деформация не слишком велика. Для пружин законом Гука можно пользоваться, даже если относительная деформация достигает 100 %.

$$x_c = \frac{\mu mg}{k}. \quad (5)$$

Тогда из (4) следует:

$$x_{n+1} = -x_n + 2(-1)^{n+1}x_c. \quad (6)$$

Эта и есть искомая формула для координат точек остановки x_n и x_{n+1} в любом цикле. Зная начальную координату бруска x_1 , можно по формуле (6) определить x_2 , а зная x_2 , можно по той же формуле определить x_3 и так далее. Формулы такого типа называют *рекуррентными*³.

Модуль координаты остановки представляет собой *максимальное смещение* бруска от начала координат. Это максимальное смещение $A_n = |x_n|$ принято называть *амплитудой* колебаний. При незатухающих колебаниях амплитуда A – величина постоянная. Трение приводит к тому, что амплитуда в процессе колебаний постепенно уменьшается. Выясним, как она уменьшается.

В нечётных циклах $x_n > 0$, а в чётных циклах $x_n < 0$, поэтому равенство $A_n = |x_n|$ можно записать в виде:

$$A_n = (-1)^{n+1}x_n, \quad A_{n+1} = (-1)^n x_{n+1}, \quad (7)$$

а с учётом (6):

$$A_{n+1} = (-1)^n(-x_n + 2(-1)^{n+1}x_c) = (-1)^{n+1}x_n + 2(-1)^{2n+3}x_c = A_n - 2x_c.$$

В результате получилась простая рекуррентная формула для амплитуд:

$$A_{n+1} = A_n - 2x_c. \quad (8)$$

Данная формула позволяет сделать **первый вывод** о характере колебаний маятника Окса.

В процессе колебаний маятника его амплитуда убывает за каждый цикл *на одну и ту же* величину $\Delta A = 2x_c$.

Это позволяет получить прямую связь амплитуды колебаний A_n с начальной амплитудой A_1 :

$$A_n = A_1 - 2(n-1)x_c. \quad (9)$$

³ От слова «рекурсия», которое означает процесс повторения чего-либо *самоподобным* способом.

1.2. Дифференциальное уравнение колебаний и его решение

Для выяснения характера движения маятника в каждом цикле, то есть определения функции $x(t)$, используем типичный приём: запишем *второй закон Ньютона*, который представляет собой дифференциальное уравнение 2 порядка.

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}_{\text{упр}} + \mathbf{F}_{\text{тр}}}{m}. \quad (10)$$

Сила упругости $\mathbf{F}_{\text{упр}}$ и сила трения скольжения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ показаны на следующем рисунке 4⁴.

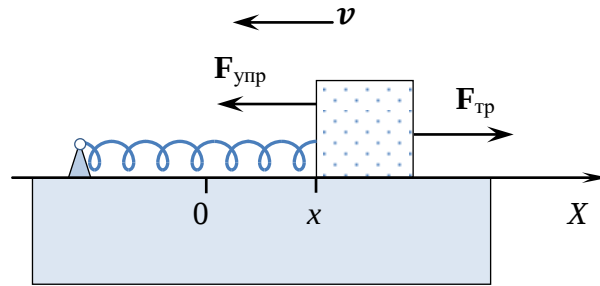


Рис. 4. Силы, действующие на брусок

Перейдём от векторов к числам, для чего запишем уравнение (10) в проекциях на ось OX . Проекции векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{F}_{\text{упр}}$ на ось OX равны:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad F_{\text{упр},x} = -kx.$$

Сила $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ направлена против скорости движения бруска, поэтому в нечётных циклах направление $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ совпадает с направлением оси OX (как показано на рисунке 4), и проекция $F_{\text{тр},x}$ положительна, а в чётных циклах $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ направлена против оси OX , и тогда проекция $F_{\text{тр},x}$ отрицательна. Это можно выразить в виде следующей формулы:

$$F_{\text{тр},x} = (-1)^{n+1} \mu mg.$$

Таким образом, уравнение (2.10) в проекциях на ось OX имеет вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x + (-1)^{n+1} \mu g. \quad (11)$$

Введём обозначение:

⁴ Кроме сил $\mathbf{F}_{\text{упр}}$ и $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ на брусок действуют ещё сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила реакции опоры $\mathbf{N}$, однако эти две силы на ускорение влиять не могут, так как они действуют в вертикальном направлении, то есть перпендикулярно векторам скорости и ускорения.

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (12)$$

Тогда уравнение (11) можно записать так:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = (-1)^{n+1} \mu g. \quad (13)$$

Это – известное *дифференциальное уравнение гармонических колебаний*, решением которого является функция

$$x(t) = B \cos(\omega t + \alpha) + C, \quad (14)$$

в которой ω – это частота колебаний, B , α и C – константы.

Скорость маятника определяется формулой

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -B\omega \sin(\omega t + \alpha). \quad (15)$$

Выясним, как определить константы B , α и C .

Для нахождения константы C надо просто подставить решение (14) в исходное уравнение (13). В результате получается:

$$\begin{aligned} \omega^2 C &= (-1)^{n+1} \mu g, & \frac{k}{m} C &= (-1)^{n+1} \mu g, \\ C &= (-1)^{n+1} \frac{\mu m g}{k} = (-1)^{n+1} x_c. \end{aligned} \quad (16)$$

Константы B и α можно найти из *начальных и конечных* условий.

Сначала используем начальное условие: в начальный момент времени $t = 0$ маятник неподвижен, и его скорость равна 0, так что $v_x(0) = 0$. Подстановка этого начального условия в уравнение для скорости (15) даёт:

$$v_x(0) = -B\omega \sin(\alpha) = 0, \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.$$

В результате уравнения, описывающие движение маятника (уравнения кинематики) имеют вид:

$$\begin{cases} x(t) = B \cos(\omega t) + C, \\ v_x(t) = -B\omega \sin(\omega t). \end{cases} \quad (17)$$

Вторая из этих формул позволяет, в частности, узнать моменты времени, в которые скорость обращается в нуль, то есть *моменты остановок*. Из уравнения $v_x(t) = 0$ следует, что $\sin(\omega t) = 0$. Отсюда:

$$\omega t = \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (18)$$

Тогда моменты остановок t_n определяются формулой

$$t_n = \tau n, \quad \text{где } \tau = \frac{\pi}{\omega}. \quad (19)$$

Данную формулу можно понимать так: n – это номер цикла, t_n – момент начала цикла, t_{n+1} – момент окончания цикла, τ – длительность цикла: $\tau = t_{n+1} - t_n$. Интересно, что длительность всех циклов – *одна и та же*. Так как каждая пара следующих друг за другом циклов составляют период колебаний, то получается следующая формула для периода колебаний маятника T :

$$T = 2\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (20)$$

В результате – **второй вывод** о характере колебаний маятника Окса.

|| Период колебаний маятника T не меняется со временем, не зависит от силы трения, а зависит только от массы бруска и упругости пружины

Формула (20) совпадает со знакомой вам формулой периода собственных колебаний пружинного маятника.

Вернёмся к константам B , α и C , входящих в уравнения (14) и (15). Две из них α и C определены. Осталась неопределённой последняя константа B . Её можно найти, используя следующее *конечное* условие:

$$x(t_n) = x_{n+1}. \quad (21)$$

Из (14) следует:

$$x(t_n) = B \cos(\omega t_n) + C.$$

В соответствии с формулой (18), $\omega t_n = \pi n$. Тогда $\cos(\omega t_n) = \cos(\pi n) = (-1)^n$. Следовательно, с учётом формулы (16) для константы C ,

$$x(t_n) = (-1)^n B + (-1)^{n+1} x_c. \quad (22)$$

Координату точки остановки x_{n+1} удобно выразить через амплитуду колебаний. В соответствии с формулой (7), $A_{n+1} = (-1)^n x_{n+1}$. Отсюда следует, что

$$x_{n+1} = (-1)^n A_{n+1}. \quad (23)$$

Подстановка (22) и (23) в конечное условие (21) даёт: $B - x_c = A_{n+1}$, откуда с учётом рекуррентной формулы (8) следует:

$$B = A_n - x_c. \quad (24)$$

Итак, константа B так же, как и константа C , зависит от номера цикла.

На основании первого из уравнений кинематики маятника (16) для наглядности построены два графика зависимости $x(t)$ – они показаны на следующих рисунках 5 и 6.

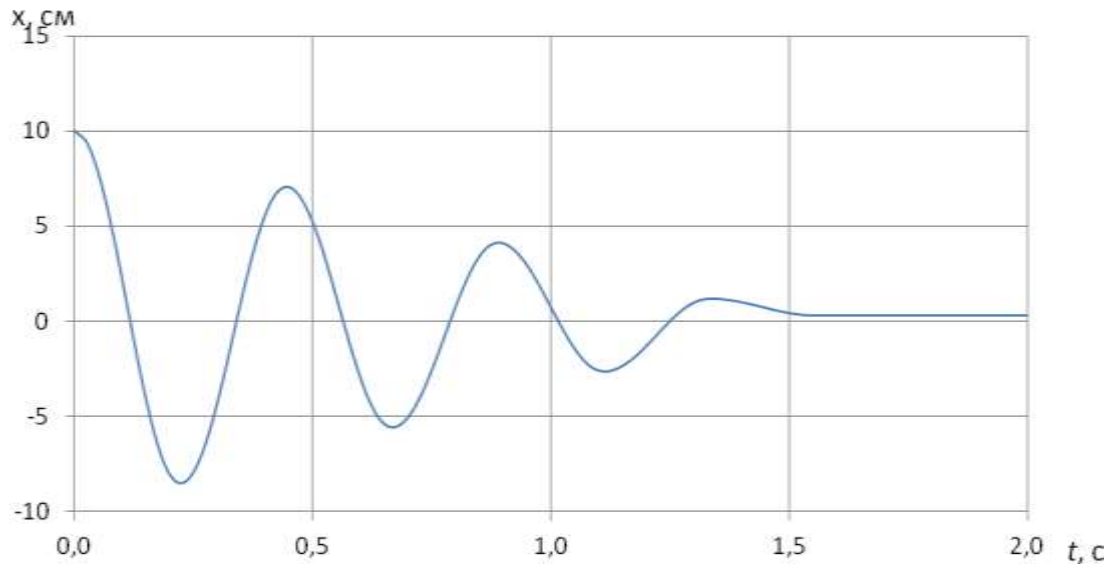


Рис. 5. Колебания бруска при $m = 50$ г, $k = 10$ Н/м, $\mu = 0,15$

На рисунке 5 видно, что маятник колеблется примерно 1,5 секунды и успевает за это время совершить 7 циклов, то есть 3 полных периода колебаний и ещё один цикл⁵.

Рисунок 6 показывает колебания того же маятника с той же пружиной, но на более гладкой поверхности – коэффициент трения меньше в 3 раза. Видно, что уменьшение трения на период колебаний не повлияло: за те же 1,5 секунды маятник совершил то же количество колебаний. Однако затухание колебаний заметно уменьшилось, поэтому колебания продолжались дольше 1,5 секунд – расчёт показывает, что они прекращаются только после 10 полных периодов.

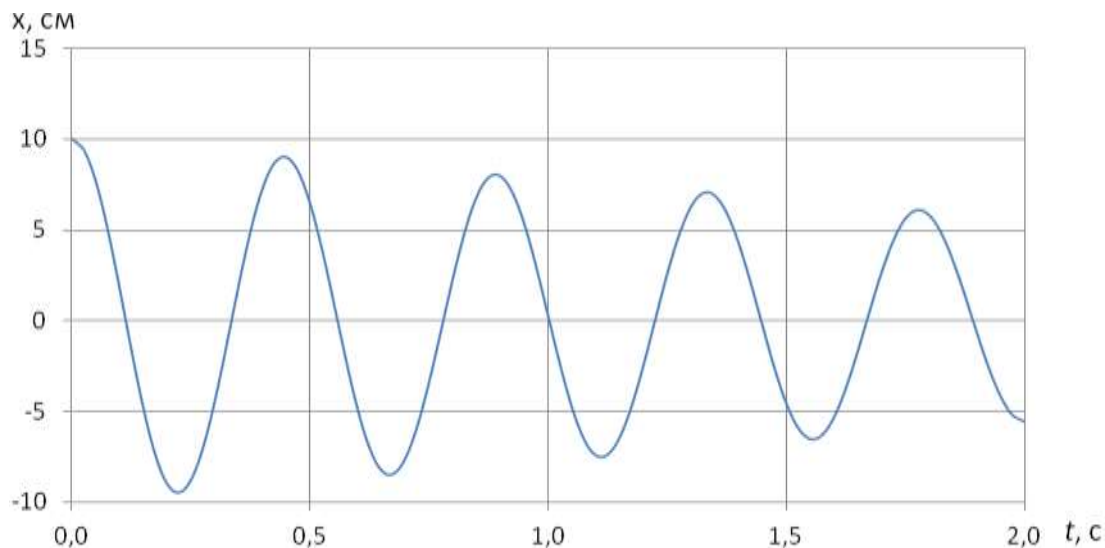


Рис. 6. Колебания бруска при $m = 50$ г, $k = 10$ Н/м, $\mu = 0,05$

⁵ Интересно, что координата последней точки остановки бруска – положительная, так что во время последнего (нечётного) цикла брусок не пересёк начало координат. Это, вообще говоря, не является общим правилом. Точка, в которой заканчивается последний цикл, зависит от начальной координаты x_1 (она же – начальная амплитуда A_1), поэтому во время последнего цикла брусок может пересечь начало координат, но может и не пересечь, остановившись с той же стороны от начала координат, с которой начался цикл.

Вообще характер колебаний зависит от двух факторов:

- от свойств колебательной системы, то есть от массы маятника m , коэффициента упругости пружины k и коэффициента трения μ ,
- от начального состояния системы, то есть от A_1 .

Рисунки 5 и 6 иллюстрируют влияние одного из этих факторов – коэффициента трения μ .

1.3. Количество циклов и время колебаний

Уравнения кинематики (17) описывают колебания бруска до его последней остановки. Этой последней остановкой завершается *последний цикл*. Обозначим его номер N и определим этот номер. Пусть n – произвольное целое число. Цикл с номером n возможен при следующем условии. В начале цикла сила упругости, действующая на брусок, больше силы трения скольжения и поэтому брусок, остановившийся после предыдущего цикла на расстоянии A_n от начала координат, снова начинает движение – в направлении силы упругости. Итак,

$$F_{\text{упр}} = kA_n > \mu mg,$$

откуда следует условие начала цикла:

$$A_n > \frac{\mu mg}{k} \quad \text{или} \quad A_n > x_c. \quad (25)$$

Подставим в (25) формулу (9), связывающую амплитуду A_n с начальной амплитудой A_1 :

$$A_1 - 2(n-1)x_c > x_c \quad \Rightarrow \quad n < \frac{A_1}{2x_c} + \frac{1}{2}$$

Так как $N = n_{\text{max}}$, то из последнего неравенства следует:

$$N = \left[\frac{A_1}{2x_c} + \frac{1}{2} \right]. \quad (26)$$

Квадратные скобки в этой формуле означают *целую часть* числа, то есть ближайшее меньшее целое число. Число $\frac{A_1}{2x_c} + \frac{1}{2}$ может оказаться меньше 1, при этом получается, что $N = 0$. Это значит, что колебания *вообще не возникают* – в начальном положении бруска пружина недостаточно растянута, чтобы сдвинуть брусок с места. Если формула (26) даёт $N = 1$, это тоже означает, что колебания не возникают: хотя брусок после приведения его в начальное положение и начнёт движение, но после первой же остановки движение уже не возобновляется – второй цикл не начинается. Такой характер движения бруска называется *апериодическим режимом*.

При $N > 5$ можно с достаточной точностью пользоваться приближённой формулой:

$$N = \frac{A_1}{2x_c} = \frac{1}{2} A_1 \frac{k}{\mu m g}. \quad (27)$$

Ошибка при этом составляет менее 10 %, и она быстро падает с ростом N .

Из формулы (27) следует **третий вывод** о характере колебаний маятника Окса.

Количество колебаний маятника до его полной остановки N :

- *пропорционально* начальному смещению маятника A_1 и коэффициенту упругости пружины k ,
- *обратно пропорционально* массе бруска m и коэффициенту трения μ .

Зная количество циклов N и длительность цикла τ , можно определить *время колебаний* T_0 , то есть время, проходящее от начала колебаний бруска до его полной (последней) остановки:

$$T_0 = \tau N = \frac{\tau}{2} N. \quad (28)$$

Подстановка в (28) формулы (27) с учётом формулы (20) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ даёт:

$$T_0 = \frac{\tau}{2} \frac{A_1 k}{2 \mu m g} = \frac{\tau A_1}{\mu g} \frac{\pi^2}{T^2} = \frac{\pi^2 A_1 \nu}{\mu g}, \quad (29)$$

где ν – частота колебаний.

В итоге – **четвёртый вывод** о характере колебаний маятника Окса, который можно сформулировать так.

Время колебаний маятника T_0 :

- *пропорционально* начальному смещению маятника A_1 ,
- *пропорционально* частоте колебаний маятника ν ,
- *обратно пропорционально* коэффициенту трения μ .

2. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Экспериментальная установка виртуальная, то есть представляет собой компьютерную программу, имитирующую реальную установку. Программа разработана в Национальном исследовательском Томском политехническом университете.

При включении установки (при запуске программы) открывается начальное окно с названием работы и кнопками **Ход работы**, **Эксперимент**, **Завершение работы**. Вам надо нажать на кнопку **Эксперимент**, и тогда откроется окно, показанное на рисунке 7.

В левой части окна расположена область визуализации: вверху движется по плоской поверхности маятник и расположен бегунок с линейкой **Высота наклонной плоскости**, позволяющий менять угол наклона плоскости. Вам рекомендуется не пользоваться этим бегунком и исследовать колебания маятника на горизонтальной поверхности. Под маятником расположено окно, в котором синхронно с движением маятника строится график зависимости координаты маятника от времени $x(t)$.

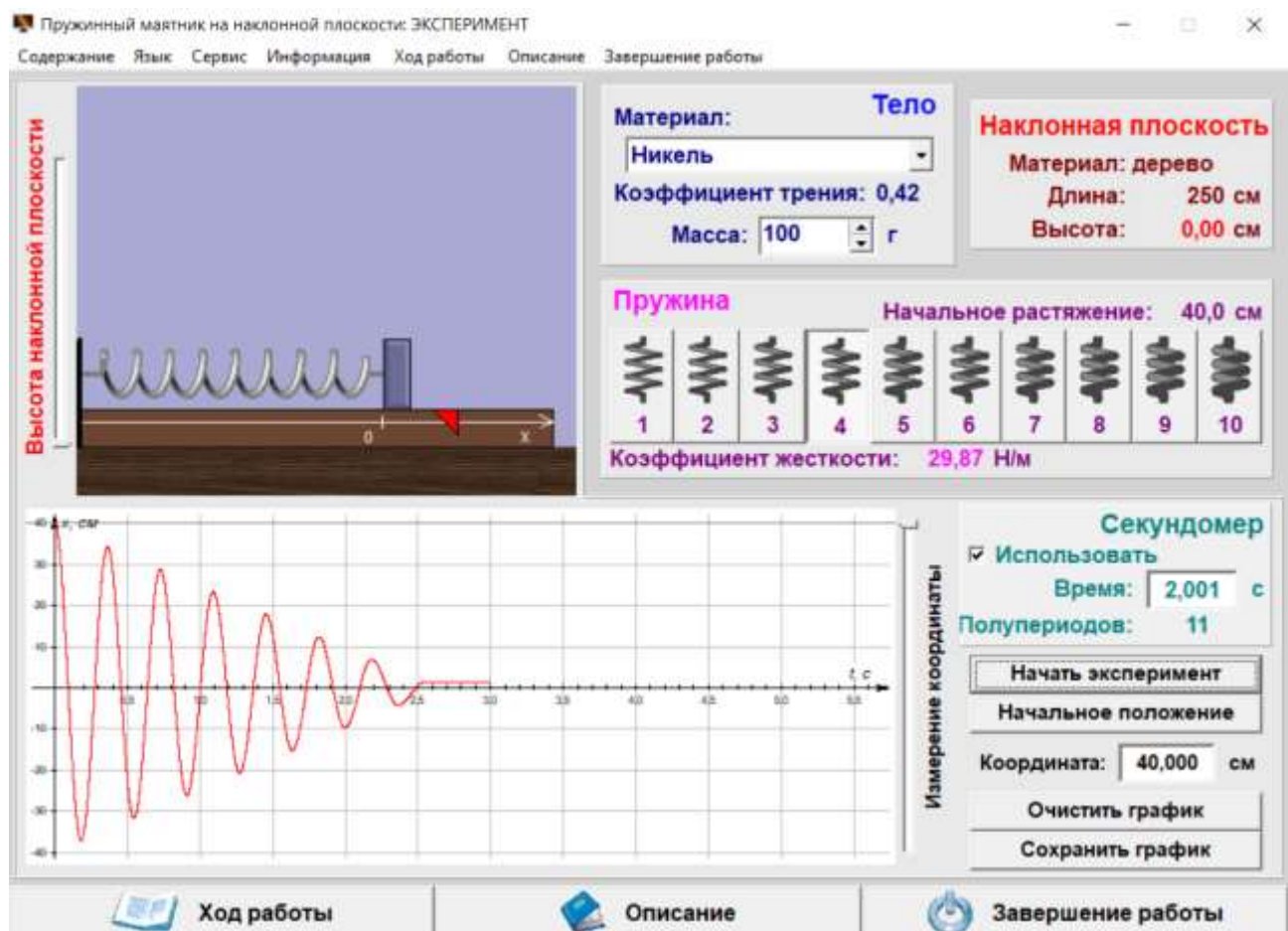


Рис. 7. Окно «Эксперимент»

Справа от области визуализации расположена инструментальная панель: управляющие кнопки, приборы и инструменты.

- Инструмент **Тело**. Предназначен для выбора материала, из которого изготовлен маятник, и массы маятника. После выбора материала вам выдаётся значение коэффициента трения маятника по плоской поверхности. Материал поверхности фиксирован, это – дерево.
- Инструмент **Пружина**. Предназначен для выбора одной из 10 пружин. После выбора пружины вам выдаётся значение её коэффициента жёсткости k и начальное растяжение пружины (начальная координата маятника A_1). Значение A_1 – фиксированное, для всех пружин $A_1 = 40$ см.
- Прибор **Секундомер**. Он работает, если включен режим **Использовать**. Секундомер измеряет время t совершения маятником некоторого количества циклов (**полупериодов**) N . Число N – это не полное количество циклов до полной остановки маятника, оно немного меньше и нужно для того, чтобы можно было измерить период колебаний маятника T по формуле:

$$T = 2 \frac{t}{N}.$$
- Кнопка **Начать эксперимент**. При нажатии на эту кнопку маятник начинает движение, одновременно начинается строиться график $x(t)$ и включается секундомер. Сама кнопка превращается в кнопку **Остановить эксперимент**.
- Кнопка **Начальное положение**. При её нажатии маятник приводится в начальное положение, смещённое от положения равновесия вправо на расстояние A_1 . Значение A_1 показано в окошке **Координата**.
- Кнопка **Очистить график**. После нажатия на эту кнопку все графики $x(t)$, построенные в предыдущих экспериментах, стираются.
- Кнопка **Сохранить график**. На эту кнопку следует нажимать после того, как движение маятника прекратится. График, построенный в окне визуализации, сохранится как рисунок в файле. При этом вам будет предложено выбрать имя файла и его тип (*.bmp или *.jpg). Файл будет сохранён в папке «Рисунки и графики» на рабочем столе. Рисунок из файла вы сможете вставить в свой отчёт или использовать для измерения координат маятника в моменты остановок x_n и моменты времени остановок t_n .

3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Эксперимент 1. Исследование зависимости периода и амплитуды колебаний маятника от времени

Теория колебаний маятника Окса приводит к следующим фактам.

- Длительность каждого цикла τ – одна и та же. Поэтому период колебаний маятника T с течением времени не изменяется. Значение периода определяется формулой (20): $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.
- Амплитуда колебаний маятника A убывает со временем линейно и за каждый цикл убывает на одну и ту же величину $\Delta A = 2x_c = \frac{2\mu mg}{k}$.

Задача эксперимента состоит в проверке этих фактов.

3.1. По согласованию с преподавателем выберите материал маятника и пружину. Плоскость движения маятника установите *горизонтальной*.

3.2. Заполните следующую таблицу 1.

Таблица 1

Условия эксперимента

Материал			
Пружина			
Угол наклона плоскости	α	град.	0
Коэффициент трения	μ		
Коэффициент жёсткости	k	Н/м	
Масса маятника	m	г	
Ускорение свободного падения	g	м/с ²	9,807
Погрешности заданных величин и прямых измерений	$\Delta(\mu)$	см	
	$\Delta(k)$	Н/м	
	$\Delta(t)$	с	
	$\Delta(\tau)$	с	
	$\Delta(x)$	см	
	$\Delta(m)$	г	

3.3. Заполните таблицу 2.

Таблица 2

Расчётные значения параметров колебаний маятника

Период колебаний	T	с	
	$\Delta(T)$	с	
Уменьшение амплитуды колебаний за цикл	ΔA	см	
	$\Delta(\Delta A)$	см	

3.4. Нажмите кнопку **Начать эксперимент** и дождитесь завершения колебаний маятника.

3.5. Нажмите кнопку **Сохранить график**.

- 3.6. Откройте файл с графиком, скопируйте график и вставьте его в свой отчёт. Файл с графиком пока не закрывайте.
- 3.7. Заполните таблицу 3. Значения координат маятника в точках остановки x_1 и x_2 измерьте с помощью линейки **Измерение координаты** в лабораторной установке, моменты времени начала и конца каждого цикла t_1 и t_2 лучше измерять, используя график в файле – этот график можно увеличивать, что позволяет более точно провести измерения. Для определения длительности цикла используйте формулу $\tau = t_2 - t_1$, амплитуду определяйте по формуле $A = |x_1|$.

Таблица 3

Зависимость длительности цикла τ и амплитуды колебаний A от времени t

Номер цикла n	t_1	t_2	τ	x_1	x_2	A	ΔA
	с	с	с	см	см	см	см
1							
2							
...							
...							

- 3.8. На основании данных из таблицы 3 постройте два графика: $\tau(n)$ и $A(t)$, значения t возьмите из столбца t_1 . Каждый график прокомментируйте.
- 3.9. Заполните таблицу 4. Строки, начинающиеся со строки «Среднее значение», надо заполнять только для периода колебаний T и для убывания амплитуды ΔA . Стандартное (среднеквадратичное) отклонение вы можете узнать с помощью функции СТАНДОТКЛОН.В, абсолютную погрешность – с помощью функции ДОВЕРИТ.НОРМ, в ней аргумент АЛЬФА (так называемый уровень значимости) определяется по формуле: $\alpha = 1 - P$, где P – это доверительная вероятность.

Таблица 4

Средние значения периода колебаний T и уменьшения амплитуды колебаний маятника ΔA за один цикл

Номер цикла n	τ	T	A	ΔA
	с	с	см	см
1				
2				
...				
...				
Среднее значение				
Станд. отклонение				
Довер. вероятность				
Абс. погрешность				
Относ. погрешность				

3.10. Запишите результаты измерения T и ΔA в стандартной форме и прокомментируйте их.

Эксперимент 2. Исследование зависимости периода колебаний маятника от массы маятника

В соответствии с теорией, период колебаний маятника определяется формулой (20): $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, откуда следует, что период колебаний T пропорционален квадратному корню из массы маятника, а квадрат периода T^2 пропорционален массе маятника m :

$$T^2 = \beta m, \quad \beta = \frac{(2\pi)^2}{k}. \quad (30)$$

Задача эксперимента состоит в проверке этого факта. Кроме того, измерив коэффициент пропорциональности β , можно измерить и коэффициент жёсткости пружины k .

3.11. Заполните таблицу 5.

Таблица 5

Условия эксперимента

Материал			
Пружина			
Угол наклона плоскости	α	град.	0
Коэффициент жёсткости	k	Н/м	
Погрешности заданных величин и прямых измерений	$\Delta(k)$	Н/м	
	$\Delta(t)$	с	
	$\Delta(m)$	г	

3.12. Выберите в окне **Тело** массу маятника 70 г, после чего нажмите кнопку **Начать эксперимент** и дождитесь завершения колебаний маятника.

3.13. Запишите в таблицу 6 массу маятника m , количество циклов N и время колебаний t .

Таблица 6

Зависимость периода колебаний маятника T от его массы m
Обозначения: N – количество циклов, t – время колебаний.

Номер опыта	m	N	t	T	T^2	$\Delta(T^2)$
	г			с	с ²	с ²
1	70					
2	80					
...						
...						

3.14. Прodelайте пункты 3.12 и 3.13 ещё несколько раз, каждый раз увеличивая массу маятника на 10 г.

3.15. Заполните таблицу 6. Период следует определять по формуле

$$T = 2\tau = \frac{2t}{N}.$$

3.16. На основании данных таблицы 6 постройте график экспериментальной зависимости $T^2(m)$.

3.17. Прокомментируйте график.

3.18. Измерьте коэффициент пропорциональности β зависимости $T^2 = \beta m$ и коэффициент жёсткости пружины k , от которого β зависит по формуле (30). Для этого воспользуйтесь функцией ЛИНЕЙН, результаты впишите в таблицу 7.

Таблица 7

Измерение жёсткости пружины

Величина	β	k
Размерность	$\text{с}^2/\text{г}$	Н/м
Значение		
Абсолютная погрешность		
Относительная погрешность		

3.19. Запишите результат измерения коэффициента жёсткости в стандартной форме и прокомментируйте его.

Эксперимент 3. Исследование зависимости периода колебаний маятника от жёсткости пружины

Из формулы (20) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ следует, что период колебаний T обратно пропорционален квадратному корню из коэффициента жёсткости пружины, а квадрат периода T^2 обратно пропорционален коэффициенту жёсткости k :

$$T^2 = \frac{\beta}{k}, \quad \beta = (2\pi)^2 m. \quad (31)$$

Задача эксперимента состоит в проверке этого факта. Кроме того, измерив коэффициент пропорциональности β , можно измерить и массу маятника.

3.20. Выберите по согласованию с преподавателем маятник и заполните следующую таблицу 8.

Таблица 8

Условия эксперимента

Материал			
Угол наклона плоскости	α	град.	0
Масса маятника	m	г	
Погрешности заданных величин и прямых измерений	$\Delta(m)$	г	
	$\Delta(t)$	с	
	$\Delta(k)$	Н/м	

- 3.21. Выберите в окне **Пружина** пружину 1, после чего нажмите кнопку **Начать эксперимент** и дождитесь завершения колебаний маятника.
- 3.22. Запишите в следующую таблицу 9 коэффициент жёсткости пружины, количество циклов N и время колебаний t .

Таблица 9

Зависимость периода колебаний маятника T от коэффициента жёсткости пружины k
 Обозначения: N – количество циклов, t – время колебаний.

Пружина	k	$1/k$	N	t	T	T^2	$\Delta(1/k)$	$\Delta(T^2)$
	Н/м	м/Н			с	с ²	м/Н	с ²
1								
2								
...								
...								

- 3.23. Прodelайте пункты 3.21 и 3.22 последовательно для каждой из остальных пружин.
- 3.24. Заполните таблицу 9. Период следует определять по формуле
- $$T = 2\tau = \frac{2t}{N}.$$
- 3.25. На основании данных таблицы 9 постройте график экспериментальной зависимости $T^2(1/k)$.
- 3.26. Прокомментируйте график.
- 3.27. Измерьте коэффициент пропорциональности β зависимости $T^2 = \frac{\beta}{k}$ и массу маятника m , от которой β зависит по формуле (31). Для этого воспользуйтесь функцией ЛИНЕЙН, результаты впишите в таблицу 10.

Таблица 10

Измерение массы маятника

Величина	β	m
Размерность	кг	г
Значение		
Абсолютная погрешность		
Относительная погрешность		

- 3.28. Запишите результат измерения массы маятника в стандартной форме и прокомментируйте его.

Эксперимент 4. Исследование зависимости полного времени колебаний маятника от частоты колебаний

В соответствии с теорией, полное время колебаний маятника Окса до его окончательной остановки T_0 определяется формулой (29): $T_0 = \frac{\pi^2 A_1}{\mu g} \nu$. Из этой формулы следует, в частности, что время колебаний T_0 пропорционально частоте колебаний маятника ν :

$$T_0 = \beta v, \quad \beta = \frac{\pi^2 A_1}{\mu g}. \quad (32)$$

Задачей эксперимента является проверка данного факта. Кроме того, измерив коэффициент пропорциональности β , можно измерить и коэффициент трения μ .

3.29. Заполните следующую таблицу 11.

Таблица 11

Условия эксперимента

Материал			
Угол наклона плоскости	α	град.	0
Коэффициент трения	μ		
Начальное смещение маятника	A_1	см	40,000
Ускорение свободного падения	g	м/с ²	9,807
Погрешности заданных величин и прямых измерений	$\Delta(\mu)$	см	
	$\Delta(t)$	с	
	$\Delta(T_0)$	с	
	$\Delta(m)$	г	

3.30. Выберите самую мягкую пружину и самый лёгкий маятник, после чего нажмите кнопку **Начать эксперимент** и дождитесь завершения колебаний маятника.

3.31. Запишите в следующую таблицу 12 коэффициент жёсткости пружины, массу маятника, количество циклов N и время колебаний t .

Таблица 12

Зависимость полного времени колебаний маятника T_0 от частоты колебаний ν
Обозначения: N – количество циклов, t – время колебаний.

Номер опыта	k	m	N	t	T_0	ν	$\Delta(\nu)$
	Н/м	г			с	Гц	Гц
1							
2							
...							
...							

3.32. Нажмите кнопку **Сохранить график**.

3.33. Откройте файл с графиком и измерьте по графику полное время колебаний T_0 . Начиная с момента времени T_0 , координата маятника становится постоянной величиной, а график становится горизонтальной прямой линией. Для увеличения точности измерения T_0 график можно увеличить. Результат измерения впишите в таблицу 12.

3.34. Пункты 3.29 – 3.33 нужно проделать несколько раз с разными наборами параметров маятника k и m , так как именно значения k и m определяют период колебаний T . Вы можете по собственному усмотрению выбирать значения k и m в каждом из опытов. Например, это можно сделать так: сначала

ла проделать три опыта с самой мягкой пружиной. В первом из этих опытов маятник самый лёгкий, во втором – самый тяжёлый, в третьем опыте масса маятника промежуточная. Затем вы проделываете аналогичные три опыта с самой жёсткой пружиной. И, наконец, – три аналогичных опыта с какой-нибудь промежуточной пружиной.

- 3.35. Заполните таблицу 12. Период следует определять по формуле $T = \frac{2t}{N}$.
- 3.36. На основании данных таблицы 12 постройте график экспериментальной зависимости $T_0(v)$.
- 3.37. Прокомментируйте график.
- 3.38. Измерьте коэффициент пропорциональности β зависимости $T_0 = \beta v$ и коэффициент трения μ , связанный с β формулой (32). Для этого воспользуйтесь функцией ЛИНЕЙН, результаты впишите в следующую таблицу 13.

Таблица 13

Измерение коэффициента трения μ

Величина	β	μ
Размерность	с^2	г
Значение		
Абсолютная погрешность		
Относительная погрешность		

- 3.39. Запишите результат измерения коэффициента трения μ в стандартной форме и прокомментируйте его.

Эксперимент 5. Исследование зависимости полного времени колебаний маятника от коэффициента трения

Из формулы (29) $T_0 = \frac{\pi^2 A_1 v}{\mu g}$ следует, что время колебаний T_0 обратно пропорционально коэффициенту трения μ :

$$T_0 = \frac{\beta}{\mu}, \quad \beta = \frac{\pi^2 A_1 v}{g}.$$

Задачей эксперимента является проверка данного факта.

- 3.40. Выберите по согласованию с преподавателем маятник и пружину, после чего заполните следующую таблицу 14.

Таблица 14

Условия эксперимента

Пружина			
Угол наклона плоскости	α	град.	0
Коэффициент жёсткости	k	Н/м	
Масса маятника	m	г	
Погрешности заданных величин и прямых измерений	$\Delta(\mu)$	см	
	$\Delta(T_0)$	с	

- 3.41. Выберите из списка инструмента **Тело** первый материал – полиуретан, впишите его название и коэффициент трения μ в следующую таблицу 15.

Таблица 15

Зависимость полного времени колебаний маятника T_0
от коэффициента трения μ

Номер опыта	Материал	μ	T_0	$1/\mu$	$\Delta(1/\mu)$
			с		
1	Полиуретан				
2	Никель				
...					
...					

- 3.42. Нажмите кнопку **Начать эксперимент** и дождитесь завершения колебаний маятника, после чего нажмите кнопку **Сохранить график**.
- 3.43. Откройте файл с графиком и измерьте по графику полное время колебаний T_0 . Начиная с момента времени T_0 , координата маятника становится постоянной величиной, а график становится горизонтальной прямой линией. Для увеличения точности измерения T_0 график можно увеличить. Результат измерения впишите в таблицу 15.
- 3.44. Прodelайте пункты 3.41 – 3.43 последовательно для всех материалов из списка.
- 3.45. Заполните таблицу 15.
- 3.46. На основании данных таблицы 15 постройте график экспериментальной зависимости $T_0(1/\mu)$.
- 3.47. Прокомментируйте график.
- 3.48. Сформулируйте общие выводы по лабораторной работе.

4. Оценка погрешностей измерений

4.1. Погрешности прямых измерений.

Прямым способом в данной лабораторной работе измеряются координата маятника в амплитудном положении (в точке останове) x_n (она же – амплитуда колебаний A) и время колебаний t .

Координату показывает прибор **Измерение координаты** в см с тремя знаками после запятой. Однако погрешность $\Delta(x_n)$ больше, чем 0,001 см. Дело в том, что для измерения значения x_n надо поставить линейку прибора в амплитудное положение. Наиболее точно это можно сделать, используя скроллинг мыши, однако минимальный шаг изменения положения линейки с помощью скроллинга составляет примерно 0,3 см. Именно эту величину и следует считать погрешностью измерения координаты: $\Delta(x_n) = 0,3$ см.

Время t измеряется двумя способами.

Первый способ: с помощью секундомера. Этот способ используется для измерения периода колебаний. Секундомер выдаёт два числа: время t , в течение которого маятник совершает некоторое целое количество колебаний N , и число этих колебаний N . Время выдаётся в секундах с 3 знаками после запятой, поэтому $\Delta(t) = 0,001$ с.

Второй способ применяется для измерения моментов остановки t_n и момента окончания колебаний T_0 . Эти величины наиболее точно можно измерить при использовании графика $x(t)$, сохранённого в файле. Данный график можно для увеличения точности измерений увеличить, однако он строится с шагом изменения времени $\Delta t = 0,1$ с, следовательно, этот шаг и есть минимальная погрешность измерения моментов времени t_n и T_0 : $\Delta(t) = \Delta(t_n) = \Delta(T_0) \geq 0,1$ с.

4.2. Погрешности расчётов.

Расчётным путём определяются две величины: период колебаний T и уменьшение амплитуды за период ΔA .

Период рассчитывается по формуле (20): $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, поэтому

$$\varepsilon(T) = \frac{1}{2} (\varepsilon(m) + \varepsilon(k)), \quad \Delta(T) = T\varepsilon(T).$$

Здесь $\varepsilon(m)$ и $\varepsilon(k)$ – это относительные погрешности заданных величин.

Уменьшение амплитуды за цикл рассчитывается по формуле $\Delta A = \frac{2\mu mg}{k}$, откуда следует:

$$\varepsilon(\Delta A) = \frac{1}{2} (\varepsilon(\mu) + \varepsilon(m) + \varepsilon(k)), \quad \Delta(\Delta A) = \Delta A \varepsilon(\Delta A).$$

Погрешность ускорения свободного падения можно не учитывать, так как значение g приведено в таблице 1 с высокой точностью.

4.3. Погрешность измерения длительности цикла τ .

Для измерения длительности цикла τ используется формула $\tau = t_2 - t_1$, где t_1 и t_2 – моменты времени, измеряемые с помощью сохранённого графика, поэтому

$$\Delta(\tau) = \Delta(t_1) + \Delta(t_2) = 2\Delta(t),$$

причём погрешность $\Delta(t)$ – это не погрешность секундомера, её надо оценивать вторым способом.

4.4. Погрешность измерения периода колебаний T и квадрата периода T^2 .

Для измерения периода используется формула $T = 2\tau = \frac{2t}{N}$, где значения t и N выдаёт секундомер. Так как у числа N нет погрешности, то

$$\Delta(T) = \frac{2\Delta(t)}{N}, \quad \Delta(T^2) = 2\Delta(T).$$

Здесь $\Delta(t)$ – это погрешность секундомера.

4.5. Погрешность измерения частоты колебаний ν .

4.6. Для измерения частоты используется формула $\nu = \frac{N}{2t}$, где значения t и N выдаёт секундомер. Так как у числа N нет погрешности, то

$$\Delta(\nu) = \nu\epsilon(\nu) = \nu\epsilon(t).$$

Здесь $\Delta(t)$ – это погрешность секундомера.

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 5.1. Являются ли колебания маятника Окса строго периодическими?
- 5.2. Что такое период колебаний маятника Окса?
- 5.3. От чего зависит период колебаний маятника Окса?
- 5.4. Что такое амплитуда колебаний маятника Окса?
- 5.5. Как изменяется с течением времени амплитуда колебаний маятника Окса?
- 5.6. Что означает термин «диссипация энергии»?
- 5.7. При каком условии колебания маятника прекращаются?
- 5.8. От чего зависит полное время колебаний маятника Окса?
- 5.9. Для чего в установке предусмотрена возможность сохранения графика колебаний маятника?
- 5.10. Какие физические закономерности вы будете проверять в данной лабораторной работе?

6. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

6.1. Савельев, И. В. Курс общей физики. В 3 томах. Том 1. Механика. Молекулярная физика / И. В. Савельев. — 19-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 436 с. — ISBN 978-5-507-48093-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/341150> (дата обращения: 10.10.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

6.2. Детлаф А. А. Курс физики : учеб. пособие для вузов / Детлаф А. А., Яворский Б. М. — М. : Высшая школа, 1989. — 607 с. — Текст : непосредственный.

6.3. Трофимова Т. И. Курс физики : учеб. пособие для инженер.-техн. спец. вузов / Т. И. Трофимова. — М. : Высшая школа, 2003. — 544 с. — Текст : непосредственный.

6.4. Кравченко Н. С., Ревинская О. Г. Лабораторный практикум по изучению моделей физических процессов на компьютере / Н. С. Кравченко, О. Г. Ревинская. — Томск : НИ ТПУ, 2011. — 448 с. — Текст : непосредственный.

6.5. Рипп А. Г. Обработка измерений : учеб. пособие по общей физике / А. Г. Рипп. - Севастополь : СНУЯЭиП, 2012. - 28 с. — Текст : непосредственный.

Учебное издание

**Рипп Александр Гешелевич
Довгаленко Владимир Васильевич**

МАЯТНИК ОКСА

Учебное пособие

В авторской редакции

Изд. № 160/2023. Объем 1,75 п.л. Усл. печ. л. 1,63. Уч. изд. л. 1,715.
РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»