

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Г. Рипп, В. В. Довгаленко

ЗАПУСК СПУТНИКА

Учебное пособие
по общей физике
для студентов технических
и естественно-научных специальностей



Севастополь
СевГУ
2023

УДК 629.783:523.31(075.8)

ББК 39.62я73

Р537

Рецензент:

Ю.В. Браславский – канд. техн. наук, доцент

Рипп А. Г.

Р 537 **Запуск спутника : учебное пособие по общей физике для студентов технических и естественно-научных специальностей / А. Г. Рипп, В. В. Довгаленко; Севастопольский государственный университет. – Севастополь : СевГУ, 2023. – 18 с. – Текст : электронный.**

Учебное пособие разработано преподавателями кафедры «Физика» СевГУ и предназначено для студентов 1 и 2 курсов технических и естественно-научных специальностей, выполняющих лабораторные работы по дисциплинам: «Физика» и «Физический практикум». В пособии студентам предлагается познакомиться с элементами технологии запуска космических аппаратов на орбиту исследуемой планеты и с методами отработки этой технологии на компьютерных моделях.

Пособие содержит краткий теоретический материал, описание лабораторной установки, порядок выполнения лабораторной работы и методы оценки погрешности измерений. Материал изложен подробно и в доступной форме. Для студентов, желающих получить больше информации, в конце пособия приводится список литературы.

УДК 629.783:523.31(075.8)

ББК 39.62я73

Учебное пособие рассмотрено и утверждено на заседании кафедры «Физика», протокол № 2 от 12 октября 2023 г.

Работа 84. Запуск спутника

Цель работы

Изучение и проверка одного из способов запуска космических аппаратов на орбиту вокруг исследуемой планеты.

1. Краткая теория

Одной из первоочередных задач космической экспедиции, изучающей какую-либо планету, является запуск на орбиту этой планеты ряда спутников. В первую очередь, это метеорологические спутники и спутники связи. Только при наличии достаточно надёжных систем радиосвязи и слежения за атмосферой планеты может быть предпринята посадка на поверхность планеты или спуск космических аппаратов в атмосферу планеты.

При запуске спутника с орбиты космического корабля (или орбитальной станции) важно обеспечить наиболее выгодную траекторию движения спутника (орбиту). А какой вообще может быть орбита спутника? Первый закон Кеплера утверждает, что эта орбита имеет форму **эллипса**, причём планета находится в одном из фокусов эллипса¹. Поэтому полезно знать, что такое эллипс, какими свойствами он обладает и какими параметрами описывается.

1.1. Эллипс и эллиптическая орбита

Эллипс – это плоская замкнутая симметричная линия, показанная на следующем рисунке 1.

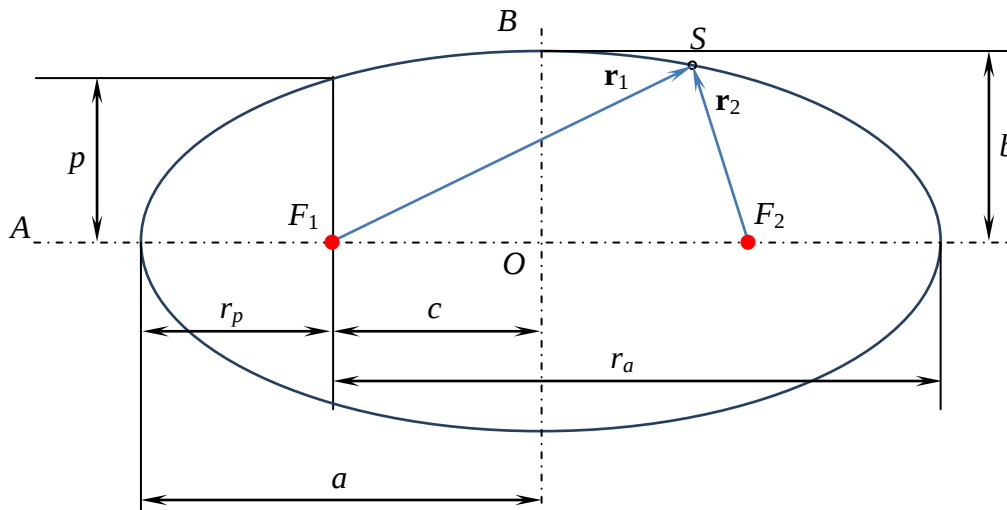


Рис. 1. Эллипс и его основные характеристики

У эллипса есть две взаимно перпендикулярные оси симметрии, на рисунке 1 они показаны штрихпунктирными линиями и обозначены буквами А и В. Ось

¹ Немецкий учёный Иоганн Кеплер в 1609 году опубликовал этот закон в книге «Новая астрономия» вместе с ещё двумя законами – вторым и третьим. Он сформулировал свои законы на основании огромного экспериментального материала, накопленного коллегой и другом И. Кеплера датским астрономом Тихо Браге. Правда, в этих законах фигурируют Солнце и планета, вращающаяся в гравитационном поле Солнца, но законы прекрасно обобщаются на систему «планета – спутник».

A называется *большой осью*, ось B – *малой*. Точка пересечения осей, обозначенная буквой O , называется *центром эллипса*. Расстояние от эллипса до его центра вдоль большой оси называется *большой полуосью* и обозначается a . Аналогичное расстояние вдоль малой оси называется *малой полуосью* и обозначается b .

На большой оси у эллипса есть две особые точки, симметричные относительно центра, они называются *фокусами* (на рисунке 1 фокусы обозначены красным цветом и буквами F_1 и F_2). Расстояние каждого из фокусов до центра эллипса называется *фокальным расстоянием* и обозначается c , а расстояние от каждого фокуса до эллипса вдоль малой оси называется *фокальным параметром* и обозначается p . Основное свойство фокусов состоит в следующем. Выберем на эллипсе произвольную точку S и проведём в неё из фокусов радиус-векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, они называются *фокальными радиусами*. Так вот, сумма длин фокальных радиусов для всех точек эллипса *одна и та же*, и она равна $2a$:

$$r_1 + r_2 = 2a. \quad (1)$$

Это свойство эллипса иногда принимают за определение эллипса: «Эллипс – это геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух данных точек, именуемых фокусами, постоянна». А ещё свойство (1) можно понимать как способ нарисовать эллипс: если вам надо его нарисовать на земле, то надо взять шнур, привязать к его концам два колышка, затем вбить колышки в землю на некотором расстоянии друг от друга – так, чтобы шнур не был натянут, а затем с помощью третьего колышка (тоже вертикального) натянуть шнур, не привязывая его к шнуру. После этого надо двигать третий колышек по земле так, чтобы шнур всё время оставался в натянутом состоянии. В результате колышек, скользя вдоль шнура, нарисует на земле эллипс.

Из основного свойства эллипса (1) следует, что фокальное расстояние c и фокальный параметр p связаны с полуосями эллипса a и b . Эта связь выражается формулами:

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad p = \frac{b^2}{a}. \quad (2)$$

Попробуйте самостоятельно получить эти формулы.

В аналитической геометрии выводится *уравнение эллипса*. Оно зависит от системы координат. С точки зрения математики, наиболее естественно выбрать декартову систему – для неё уже есть готовые взаимно перпендикулярные оси A и B . Итак, OX направим вдоль оси A , ось OY – вдоль B , начало координат будет в точке пересечения осей, то есть в центре эллипса. В этом случае уравнение эллипса имеет канонический² вид:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

² Термин «канонический» значит – простейший.

где x и y – координаты точек на эллипсе. Интересно, что при $a = b$ уравнение эллипса превращается в уравнение окружности с радиусом $R = a = b$. Это означает, что окружность есть частный случай эллипса.

С точки зрения физики, выбор начала координат в центре эллипса – это не очень хорошая идея. Начало координат удобно связывать с чем-то материальным, где можно закрепить линейку или какой-то иной прибор для измерения расстояний. Но если эллипс – это траектория спутника в гравитационном поле планеты, то в центре траектории может не оказаться ничего материального – дело в том, что в соответствии с Первым законом Кеплера планета находится не в центре эллиптической орбиты спутника, а в *одном из её фокусов*. Поэтому лучше выбрать начало координат именно в фокусе эллипса, то есть в центре планеты. Именно так и выбрано начало координат в предлагаемой вам экспериментальной установке – в *фокусе* F_1 . Эта точка смещена относительно центра эллипса влево на величину фокального расстояния c . Поэтому каноническое уравнение эллипса трансформируется так:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{(x-c)^2}{a^2} = 1. \quad (3)$$

Есть ещё один важный параметр эллипса: *эксцентриситет*. Он обозначается буквой e и определяется следующей формулой:

$$e = \frac{c}{a}. \quad (4)$$

Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса вдоль большой оси. Чем меньше эксцентриситет, тем меньше эллипс вытянут и тем меньше разница между a и b . При $e = 0$ малая и большая полуоси одинаковы, фокусы и центр эллипса сливаются, и он превращается в окружность радиусом $R = a = b$. Фокальный параметр p при этом тоже становится равным радиусу окружности.

Из перечисленных пяти параметров эллипса a , b , c , p и e независимыми являются только два, их можно назвать *базовыми* параметрами, остальные три параметра *взаимно однозначно* связаны с базовыми простыми формулами – такими, например, как формулы (2). Какие из параметров эллипса считать базовыми, зависит, например, от выбора системы координат. Если система декартова, то в уравнение эллипса входят большая и малая полуоси a и b , поэтому именно их наиболее естественно считать базовыми. Но не менее удобной является полярная система координат, в которой полюс расположен в одном из фокусов, а полярный угол φ отсчитывается от большой оси – см. следующий рисунок 2.

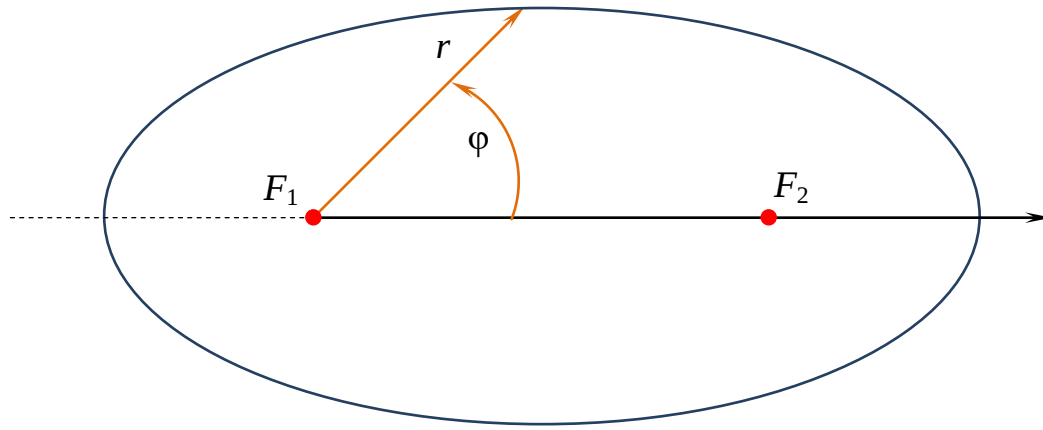


Рис. 2. Эллипс и полярная система координат

В полярных координатах уравнение эллипса (3) приводится к виду

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}. \quad (5)$$

Параметрами этого уравнения являются фокальный параметр p и эксцентриситет e , поэтому именно они претендуют на роль базовых.

Эллиптическая орбита спутника характеризуется, наряду с параметрами эллипса, ещё двумя параметрами: *перигей* r_p – минимальное расстояние спутника до центра планеты и *апогей* r_a – аналогичное максимальное расстояние³. Эти расстояния тоже показаны на рисунке 1. Из рисунка следует, что

$$r_p = a - c, \quad r_a = a + c. \quad (6)$$

1.2. Зависимость параметров орбиты от начальной скорости спутника

Итак, замкнутая орбита спутника имеет форму эллипса. Для каждого спутника, в зависимости от его предназначения, можно выбрать конкретные параметры орбиты, но встаёт вопрос: как практически обеспечить спутнику орбиту с выбранными параметрами? Ясно, что это можно сделать, задав спутнику конкретное начальное состояние, то есть поместить его на определённом расстоянии от планеты r_0 и задать ему определённую начальную скорость v_0 с помощью специальных механизмов корабля и двигательной установки спутника. Но как выбрать значения r_0 и v_0 ? В данной лабораторной работе вам предлагается один из способов решения этой задачи, основанный на том, что на орбите спутника есть две крайние точки (апогей и перигей), в которых скорость спутника направлена перпендикулярно линии, соединяющей спутник с центром планеты – см. следующий рисунок 3.

³ Строго говоря, термины «перигей» и «апогей» – это две особые точки эллиптической орбиты, а числа r_p и r_a – это расстояние от спутника до центра планеты в перигее и апогее соответственно. Но для краткости можно расстояния r_p и r_a тоже называть «перигеем» и «апогеем», если это не вызывает недоразумений.

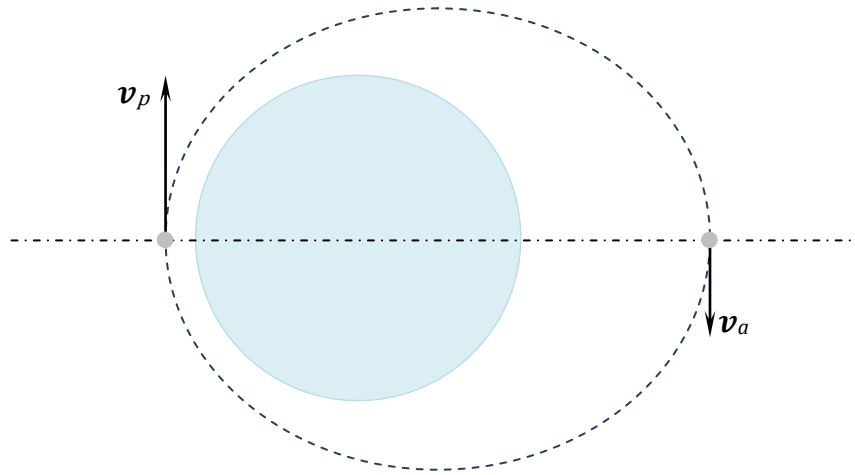


Рис. 3. Скорость спутника в перигее и в апогее

Таким образом, если запускать спутник в направлении, перпендикулярном линии, соединяющей спутник с центром планеты, то это определяет сразу два свойства орбиты: во-первых, ориентацию большой оси эллипса, во-вторых, тот факт, что начальная точка орбиты – это одна из крайних точек. Правда, эта точка может оказаться как перигеем, так и апогеем, что зависит, по-видимому, от величины начальной скорости.

Осталось выяснить, как зависят параметры орбиты спутника от величины начальной скорости спутника и, в частности, какой из крайних точек эллипса окажется точка запуска спутника – перигеем или апогеем. Для решения этой задачи достаточно использовать два закона сохранения: закон сохранения момента импульса и закон сохранения энергии. Начнём с первого из них.

Простейшей и достаточно точной моделью спутника является материальная точка. При этом момент импульса спутника $\mathbf{L}$ равен:

$$\mathbf{L} = m[\mathbf{r}\mathbf{v}],$$

где m – масса спутника, а $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ – соответственно, радиус-вектор и скорость спутника. Так как момент импульса $\mathbf{L} = \text{const}$, то неважно, для какой точки орбиты его определить. Выберем крайние точки (перигей и апогей). В них $\mathbf{r} \perp \mathbf{v}$. Поэтому

$$L = mr_p v_p \sin \frac{\pi}{2} = mr_p v_p, \quad L = mr_a v_a \sin \frac{\pi}{2} = mr_a v_a.$$

Отсюда следует, что

$$r_p v_p = r_a v_a.$$

Так как $r_p < r_a$, то $v_p > v_a$ – в апогее скорость спутника **меньше**, чем в перигее. Тогда при малых значениях начальной скорости спутника его начальным состоянием спутника является апогей, а при больших – перигей. Чему конкретно равна граница v_1 между малыми и большими значениями начальной скорости, неясно, но она есть и надо её, конечно, установить. Мы это сделаем несколько позже, а пока отметим, что есть ещё одно граничное значение начальной скоро-

сти спутника v_2 . Это следует вот откуда. Ясно, что с ростом начальной скорости размеры орбиты нарастают. Следовательно, если начальную скорость спутника установить больше некоторого значения v_2 , то спутник вообще не выйдет на замкнутую орбиту, а улетит от планеты. Чтобы узнать, чему равны указанные граничные значения v_1 и v_2 , недостаточно закона сохранения момента импульса, поэтому обратимся к закону сохранения энергии.

Энергия спутника E равна сумме кинетической энергии T и потенциальной энергии U . Из закона Всемирного тяготения следует, что потенциальная энергия спутника в гравитационном поле планеты равна:

$$U(r) = -\gamma \frac{Mm}{r},$$

где M – масса планеты, γ – гравитационная постоянная.

Кинетическая энергия спутника равна:

$$T(v) = \frac{mv^2}{2}.$$

Потенциальная энергия зависит от расстояния r , которое является одной из двух координат в **полярной** системе координат, поэтому интересно и кинетическую энергию выразить в полярных координатах. По определению,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}.$$

Радиус-вектор в полярных координатах равен:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r,$$

а производная от него –

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi.$$

Величина $\dot{r}$, равная скорости изменения длины радиус-вектора точки, называется *радиальной скоростью*, а величина $\omega = \dot{\varphi}$ наверняка вам хорошо знакома, она называется *угловой скоростью*.

Из последнего равенства следует, что квадрат скорости спутника равен

$$v^2 = \dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2.$$

Тогда

$$T(v) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m(r\dot{\varphi})^2}{2} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m(r\omega)^2}{2}.$$

Первое слагаемое в этой сумме называют *радиальной кинетической энергией*, а второе – *центробежной энергией*. Центробежную энергию $E_{ц}$ удобно выразить через момент импульса, который, как вы помните, константа:

$$E_{ц} = \frac{m(r\omega)^2}{2} = \frac{(mr^2\omega)^2}{2mr^2}.$$

Так как спутник считается материальной точкой, то mr^2 – это его момент инерции I , а произведение $mr^2\omega = I\omega$ – это момент импульса спутника L . Вот и получается, что

$$E_{\text{ц}} = \frac{L^2}{2mr^2}, \quad T(v) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m(r\dot{\varphi})^2}{2} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2},$$

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \gamma \frac{Mm}{r}.$$

Запишем энергию спутника в двух крайних точках (в перигее и апогее). Прежде всего отметим, что в крайних точках фокальный радиус r достигает экстремальных значений (в перигее $r = r_{\min}$, а в апогее $r = r_{\max}$), поэтому радиальная скорость спутника $\dot{r}$ в крайних точках равна нулю. Одна из крайних точек – начальная, поэтому

$$E_0 = \frac{L^2}{2mr_0^2} - \gamma \frac{Mm}{r_0}.$$

Фокальный радиус второй крайней точки обозначим r' , тогда

$$E' = \frac{L^2}{2m(r')^2} - \gamma \frac{Mm}{r'}.$$

Согласно закону сохранения энергии, $E_0 = E'$, откуда следует:

$$\frac{L^2}{2mr_0^2} - \gamma \frac{Mm}{r_0} = \frac{L^2}{2m(r')^2} - \gamma \frac{Mm}{r'}.$$

Из этого равенства можно определить фокальный радиус второй крайней точки.

$$\frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{L^2}{2m(r')^2} = \gamma \frac{Mm}{r_0} - \gamma \frac{Mm}{r'}, \quad \frac{L^2}{2m} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{(r')^2} \right) = \gamma Mm \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r'} \right),$$

$$\frac{L^2}{2m} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r'} \right) = \gamma Mm, \quad \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r'} = \frac{2\gamma Mm^2}{L^2},$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{2\gamma Mm^2}{L^2} - \frac{1}{r_0}, \quad r' = \frac{r_0}{\frac{2\gamma Mm^2}{L^2} r_0 - 1}.$$

Момент импульса выразим через параметры начального состояния спутника: $L = mr_0 v_0$. Тогда

$$r' = \frac{r_0}{\frac{2\gamma M}{r_0 v_0^2} - 1}. \quad (7)$$

Эта формула позволяет определить вышеупомянутые граничные значения начальной скорости v_1 и v_2 . Во-первых, знаменатель дроби может оказаться отрицательным или нулевым. Это означает единственное: второй крайней точки нет, то есть орбита спутника – незамкнутая. Следовательно, можно записать условие замкнутости траектории:

$$\frac{2\gamma M}{r_0 v_0^2} - 1 > 0, \quad \frac{2\gamma M}{r_0 v_0^2} > 1, \quad v_0^2 < \frac{2\gamma M}{r_0}, \quad v_0 < \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}}.$$

Вот и выходит, что

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}}. \quad (8)$$

Для получения второго граничного значения начальной скорости v_1 будем считать, что начальное положение спутника – это перигей. Тогда вторая крайняя точка – апогей, так что $r' = r_a$, и из (7) следует:

$$r_a = \frac{r_0}{\frac{2\gamma M}{r_0 v_0^2} - 1}.$$

Разумеется, должно выполняться неравенство $r_a > r_p = r_0$, поэтому

$$\begin{aligned} r_a = \frac{r_0}{\frac{2\gamma M}{r_0 v_0^2} - 1} > r_0, \quad \frac{1}{\frac{2\gamma M}{r_0 v_0^2} - 1} > 1, \quad \frac{2\gamma M}{r_0 v_0^2} - 1 < 1, \\ \frac{2\gamma M}{r_0 v_0^2} < 2, \quad v_0^2 > \frac{\gamma M}{r_0}, \quad v_0 > \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}}. \quad (9)$$

При $v_0 > v_1$ точка запуска спутника – **перигей**, а при $v_0 < v_1$ – **апогей**. Если же $v_0 = v_1$, то перигей равен апогею, значит орбита спутника **круговая**.

А теперь будем считать для определённости, что начальное положение спутника – перигей, то есть $v_0 \in (v_1; v_2)$, и выясним, как влияет величина начальной скорости спутника на параметры орбиты. Чтобы решить эту задачу, обратимся к Первому закону Кеплера. Его можно получить не только эмпирически, как это сделал И. Кеплер, но и теоретически. Для этого надо решить уравнение движения спутника:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}}{m},$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор спутника, а $\mathbf{F}$ – сила, действующая на спутник со стороны планеты. Сила $\mathbf{F}$ определяется законом всемирного тяготения. Решение уравнения движения в полярных координатах с учётом закона сохранения момента импульса $\mathbf{L}$ как раз и приводит к Первому закону Кеплера: уравнение траектории спутника – это *уравнение эллипса* (5), в котором фокальный параметр p равен

$$p = \frac{L^2}{\gamma M m^2}.$$

Выразив момент импульса спутника через параметры начального состояния спутника $L = mr_0 v_0$, получим:

$$p = \frac{r_0^2 v_0^2}{\gamma M}. \quad (10)$$

Эта формула определяет зависимость *каждого* параметра орбиты спутника от его начальной скорости v_0 – ведь, как указывалось выше, есть только два независимых параметра эллипса (а значит, и орбиты), поэтому знание перигея $r_p = r_0$ и фокального параметра p автоматически означает, что известны все параметры орбиты. Отсюда следует и обратное: при заданном значении перигея можно для каждого набора параметров орбиты (то есть для каждой орбиты спутника) *однозначно* определить значение начальной скорости спутника v_0 , которое обеспечивает реализацию желаемой орбиты. Разумеется, масса планеты M должна быть известна, иначе формулой (10) невозможно воспользоваться.

2. Постановка задачи

Как указано выше, при заданном перигее орбиты спутника $r_p = r_0$ можно обеспечить спутнику любую возможную орбиту выбором значения *единственной* величины: начальной скорости. Однако эту возможность управления орбитой спутника нужно обязательно как-то проверить перед тем, как запускать реальные спутники. Для этой проверки можно использовать, например, компьютерную модель движения космического тела в гравитационном поле, разработанную в Национальном исследовательском Томском политехническом университете. Модель позволяет устанавливать перигей и начальную скорость спутника, а затем измерять параметры установившейся орбиты. Наиболее просто измерить значения полуосей эллипса a и b . Поэтому указанная компьютерная модель позволяет получить экспериментальные зависимости $a(v_0)$ и $b(v_0)$. Сравнение этих зависимостей с теоретическими является главным критерием правильности технологии управления орбитой запускаемого спутника.

Достаточно проверить одну из этих зависимостей – например, $a(v_0)$. Поэтому выясним сначала, какой является *теоретическая* зависимость $a(v_0)$. Из формул (2), (4) и (6) следует:

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{a^2(1 - e^2)}{a} = a(1 - e^2),$$

$$r_p = a - c = a(1 - e).$$

Из этой пары уравнений можно сначала выразить эксцентриситет:

$$\frac{p}{r_p} = 1 + e, \quad e = \frac{p}{r_p} - 1,$$

а затем – большую полуось:

$$a = \frac{r_p}{1 - e} = \frac{r_p}{2 - \frac{p}{r_p}}.$$

С учётом формулы (10) получаем искомую зависимость $a(v_0)$:

$$a = \frac{r_p}{2 - \frac{p}{r_p}} = \frac{r_0}{2 - \frac{p}{r_0}} = \frac{r_0}{2 - \frac{r_0 v_0^2}{\gamma M}}. \quad (11)$$

Для того чтобы эту зависимость сравнить с экспериментальной, её удобно сначала линеаризовать, то есть какой-то заменой переменных привести её к линейной зависимости. Например, это можно сделать так. Сначала перевернём дробь в выражении (11):

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\gamma M}.$$

А теперь перейдём от переменных v_0 и a к новым переменным:

$$x = v_0^2, \quad y = \frac{1}{a}. \quad (12)$$

В результате получается линейная зависимость:

$$y = kx + b, \quad (13)$$

параметры которой равны

$$k = -\frac{1}{\gamma M}, \quad b = \frac{2}{r_0}. \quad (14)$$

Итак, задача исследования орбит спутника на компьютерной модели состоит в следующем.

1. Меняя значение начальной скорости спутника, наблюдать его траекторию и убедиться, что начальное положение спутника является перигеем только при условии, что $v_0 \in (v_1; v_2)$, где значения v_1 и v_2 , определяются формулами (8) и (9). Если же $v_0 < v_1$, то начальным положением спутника является апогей, а при $v_0 > v_2$, то орбита спутника – незамкнутая.
2. Провести серию измерений большой полуоси орбиты спутника a при различных значениях начальной скорости спутника v_0 в диапазоне $(v_1; v_2)$ при каком-то фиксированном значении r_0 . В результате получится экспериментальная зависимость $a(v_0)$.
3. Перейти по формулам (12) от экспериментальных значений v_0 и a к вспомогательным переменным x и y , тем самым получив экспериментальную зависимость $y(x)$, и убедиться, что эта зависимость – линейная.
4. Измерить параметры линейной зависимости k и b , а затем убедиться, что результаты измерений согласуются с теоретическими значениями, которые определяются формулами (14). Из этих формул, в частности, следует:

$$r_0 = \frac{2}{b}, \quad M = -\frac{1}{\gamma k}. \quad (12)$$

Поэтому, измерив k и b , можно тем самым косвенным способом измерить перигей r_0 и массу планеты M . Согласие между этими результатами изме-

рений и известными значениями r_0 и M является дополнительным критерием правильности формул (13) и (11).

3. Описание экспериментальной установки

При запуске экспериментальной установки, то есть вышеуказанной компьютерной модели движения тела в гравитационном поле на дисплей компьютера выводится окно «Движение инертного тела в гравитационном поле». После этого вам надо нажать кнопку «Эксперимент», в результате чего на дисплее появится окно «Эксперимент», которое позволяет экспериментатору наблюдать траекторию тела в гравитационном поле планеты и проводить измерения параметров траектории. Это окно показано на следующем рисунке 4.

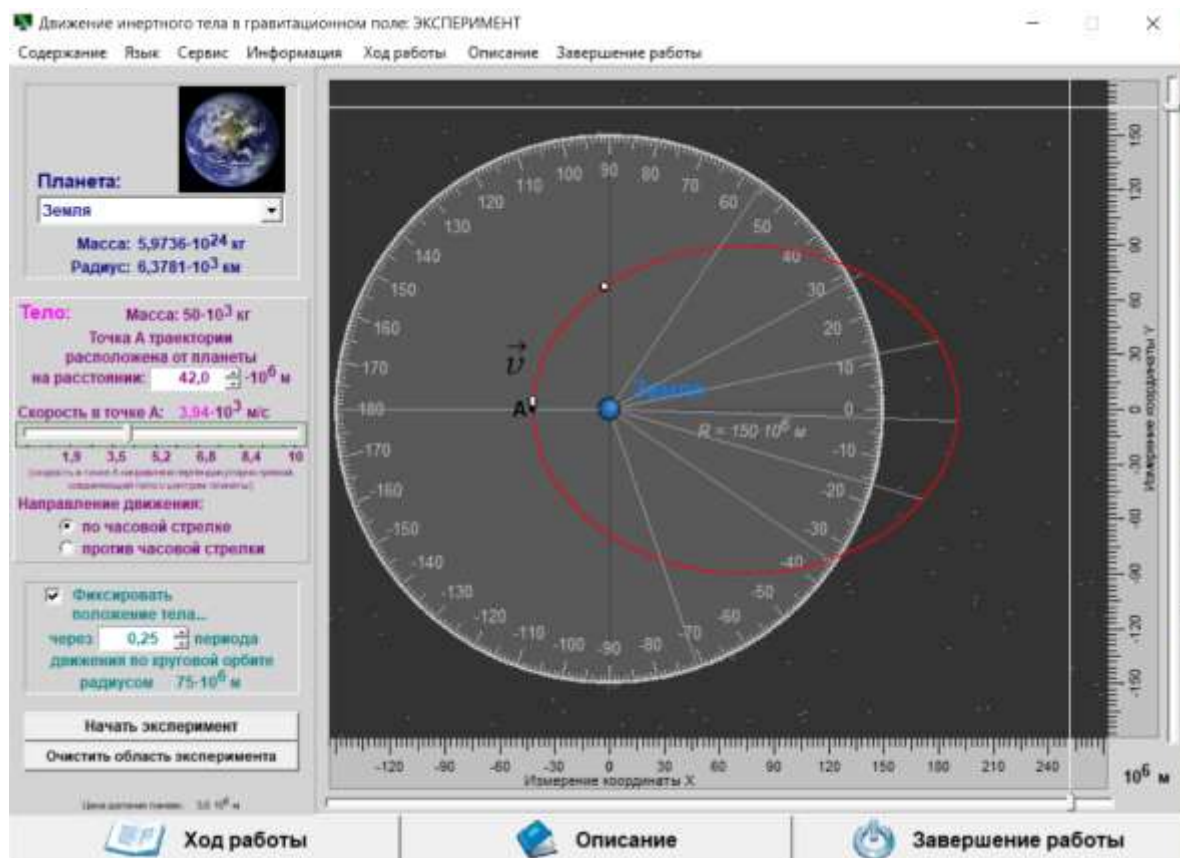


Рис. 4 Окно «Эксперимент»

В левой части окна расположена *приборная панель*, позволяющая выбирать следующие условия эксперимента.

- Планету Солнечной системы.
- Начальное состояние тела. Предполагается, что в начальный момент времени тело находится крайней точке орбиты, то есть в перигее или в апогее. У экспериментатора есть возможность установить следующие параметры начального состояния: расстояние тела от планеты r_0 , скорость тела v_0 и направление движения.

В правой части окна расположена *область визуализации*, в которой движется тело, там же есть две линейки с бегунками, позволяющие измерять де-

картовые координаты тела, и транспортир для измерения полярного угла. Обратите внимание: в установке начало декартовой системы координат и полюс полярной системы координат находятся, как и указывалось выше, в точке расположения планеты (точнее – в центре планеты).

Для управления экспериментом на приборной панели расположены окошко «**Фиксировать положение тела**» и две кнопки: «**Начать эксперимент**» и «**Очистить область эксперимента**». При нажатии на кнопку «**Начать эксперимент**» тело начинает движение и рисуется траектория тела, при этом надпись на кнопке превращается в «**Остановить эксперимент**». При нажатии на кнопку «**Очистить область эксперимента**» траектории тела, сохранённые в области визуализации, стираются. Окошко «**Фиксировать положение тела**» нужно для того, чтобы в процессе вращения тела *через равные промежутки времени* на экране появлялись фокальные радиусы тела. Для этого, однако, надо установить флажок в окошке. В данной лабораторной работе фокальные радиусы не нужны, поэтому указанный флажок устанавливать не надо.

4. Порядок выполнения работы

4.1. Выберите по согласованию с преподавателем планету и начальное расстояние спутника от планеты r_0 . Результаты запишите в следующую таблицу 1.

Таблица 1

Условия эксперимента

Планета			
Масса планеты	M	кг	
Гравитационная постоянная	γ	$\text{м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$	
Масса спутника	m	кг	
Начальное расстояние спутника от планеты	r_0	Мм	
Границы начальной скорости спутника (расчётные значения)	v_1	км/с	
	v_2	км/с	
Погрешности прямых измерений	$\Delta(v_0)$	км/с	
	$\Delta(r_0)$	Мм	
	$\Delta(x)$	Мм	
	$\Delta(c)$	Мм	

4.2. Заполните до конца таблицу 1.

4.3. Установите значение начальной скорости спутника v_0 меньшим, чем v_1 и убедитесь, что начальное положение спутника – апогей. Для этого нажмите на кнопку «**Начать эксперимент**». Спутник начнёт движение, за ним остаётся цветной след (траектория). Обратите внимание: в программе предусмотрено, что тело совершает два оборота, а потом движение прекращается. Однако нет смысла ждать окончания опыта – как только тело пошло на второй оборот, нажимайте кнопку «**Остановить эксперимент**». Заметьте, что у вас получилось. Прodelайте эту операцию для нескольких разных значений $v_0 < v_1$ и $v_0 > v_1$, а также, если получится, для значе-

ния $v_0 = v_1$ – в последнем случае ожидаемой орбитой является окружность. Если по внешнему виду орбиты спутника неясно, чем является начальная точка – перигеем или апогеем, измерьте с помощью горизонтальной линейки с бегунком координату второй крайней точки орбиты r' (первая крайняя точка – начальная) и сравните r' с r_0 . Некоторые из полученных вами орбит (какие вы сочтёте нужными) целесообразно в качестве примера показать в вашем отчёте. Для этого сделайте скриншот рабочего экрана, вырежьте из него область визуализации и скопируйте в отчёт. Прокомментируйте результаты ваших опытов.

- 4.4.** Установите значение начальной скорости спутника v_0 большим, чем v_2 и убедитесь, что орбита спутника – незамкнутая. Прodelайте эту операцию для нескольких разных значений v_0 , обратите внимание, как меняется орбита при переходе начальной скорости спутника через значение v_2 . Приведите в вашем отчёте те орбиты, которые на ваш взгляд являются наиболее показательными. Прокомментируйте результаты ваших опытов.
- 4.5.** Установите значение начальной скорости спутника чуть больше v_1 и запустите спутник. После того, как он совершит один оборот, нажмите кнопку «Остановить эксперимент», а затем с помощью линеек и бегунков измерьте те параметры орбиты, которые позволят определить значение большой полуоси a .

Есть два способа измерения большой полуоси.

Первый способ. Надо измерить апогей r_a , а после этого, в соответствии с рисунком 1, можно определить значение a так:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{r_0 + r_a}{2}. \quad (13)$$

Второй способ. Его рекомендуется использовать, если орбита выходит за пределы области визуализации, в результате чего невозможно измерить апогей r_a . В этом случае вместо апогея надо измерить фокальное расстояние c , и тогда, в соответствии с рисунком 1, значение a можно определить так:

$$a = r_p + c = r_0 + c. \quad (14)$$

Как измерить фокальное расстояние? По определению, это – расстояние от фокуса орбиты (то есть от планеты) до центра орбиты. X -координата планеты равна нулю, поэтому значение c равно x -координате центра орбиты. Запишите значение начальной скорости тела v_0 и результат измерения апогея r_a или фокального расстояния c в таблицу 2.

Таблица 2

Зависимость большой полуоси a орбиты спутника от его начальной скорости v_0

Номер опыта	v_0 км/с	r_a Мм	c Мм	a Мм	$x = v_0^2$ (км/с) ²	$y = 1/a$ Мм ⁻¹	$\Delta(x)$ (км/с) ²	$\Delta(y)$ Мм ⁻¹
1								
2								
...								
...								

4.6. Увеличьте значение начальной скорости v_0 и снова повторите опыт. Результаты измерений запишите в следующую строку таблицы 2. Продолжайте опыты до тех пор, пока значение начальной скорости не подойдёт к v_2 . Желательно, чтобы число всех опытов было не менее десяти.

4.7. Заполните до конца таблицу 2.

4.8. Используя данные из таблицы 2, постройте график зависимости между вспомогательными переменными $x = v_0^2$ и $y = 1/a$. Прокомментируйте в своём отчёте построенный график.

4.9. Если построенный вами график показал линейную зависимость y от x , то измерьте параметры этой зависимости: угловой коэффициент k и свободный член b , а затем используйте результаты измерений для определения перигея орбиты $r_p = r_0$ и массы планеты M , используя формулы (12):

$$r_0 = \frac{2}{b}, \quad M = -\frac{1}{\gamma k}.$$

Для этого используйте функцию ЛИНЕЙН и следующую таблицу 3.

Таблица 3

Измерение перигея орбиты r_p и массы планеты M

Величина	k	b	$r_p = r_0$	M
Размерность	Мм ⁻¹ ·(км/с) ⁻²	Мм ⁻¹	Мм	кг
Значение				
Абсолютная погрешность				
Относительная погрешность				

Запишите результаты измерения r_p и M в стандартном виде и прокомментируйте эти результаты.

4.10. Сформулируйте общие выводы по лабораторной работе.

5. Оценка погрешностей измерений

5.1. Погрешности **прямых** измерений.

Прямым способом измеряется начальная скорость спутника v_0 и геометрические параметры орбиты (начальное расстояние спутника до центра планеты r_0 , апогей r_a и фокальное расстояние c).

- Начальная скорость спутника устанавливается в окне «Тело» с точностью до сотых долей км/с, поэтому $\Delta(v_0) = 0,01$ км/с.
- Начальное расстояние r_0 тоже устанавливается в окне «Тело» с точностью до десятых долей Мм, поэтому $\Delta(r_0) = 0,1$ Мм.

- Апогей измеряется горизонтальной линейкой в области визуализации. Погрешность этого измерения $\Delta(x)$ можно оценить как половину цены деления линейки.
- Фокальное расстояние. Этот параметр равен x -координате центра орбиты, поэтому он тоже измеряется горизонтальной линейкой в области визуализации. Однако погрешность $\Delta(c) > \Delta(x)$, так как *положение центра* экспериментатор определяет субъективно. Поэтому оцените сами эту погрешность.

5.2. Погрешность измерения большой полуоси a .

Для измерения большой полуоси используются формулы (13) и (14):

$$a = \frac{r_0 + r_a}{2}, \quad a = r_0 + c.$$

Если используется первая формула, то

$$\Delta(a) = \frac{\Delta(r_0) + \Delta(x)}{2}.$$

Вторая формула используется, если орбита выходит за пределы области визуализации. При этом апогей измерить не удаётся, вместо него измеряется фокальное расстояние c . Тогда

$$\Delta(a) = \Delta(r_0) + \Delta(c).$$

6. Контрольные вопросы

- 6.1. Какую форму имеет замкнутая траектория спутника в гравитационном поле планеты?
- 6.2. Что такое большая полуось эллипса?
- 6.3. Как связан фокальный параметр эллипса с его большой и малой полуосями?
- 6.4. Напишите уравнение орбиты спутника при его движении по замкнутой траектории в гравитационном поле планеты.
- 6.5. Что понимается под *крайними* точками орбиты спутника?
- 6.6. Что такое радиальная скорость и радиальная кинетическая энергия?
- 6.7. Какой является орбита спутника, если его начальная скорость больше v_2 ?
- 6.8. В чём отличие орбит спутника, в одной из которых начальная скорость спутника больше v_1 , а в другой – меньше?
- 6.9. В чём состоит Первый закон Кеплера?
- 6.10. Каким является начальное состояние тела в предлагаемой вам экспериментальной установке?
- 6.11. В какой точке выбрано начало координат в предлагаемой вам экспериментальной установке?

7. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики. В 4 т. Т. 1. Механика : учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по физ. спец. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1977–1985. — Текст : непосредственный.
2. Савельев И. В. Курс общей физики. В 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика : учебное пособие для вузов / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1989. — 432 с. — Текст : непосредственный.
3. Трофимова Т. И. Курс физики : учеб. пособие для инженер.-техн. спец. вузов / Т. И. Трофимова. – М. : Высшая школа, 2003. — 544 с. — Текст : непосредственный.
4. Ревинская О. Г., Кравченко Н. С. Лабораторный практикум по изучению моделей физических процессов на компьютере. – Томск : Томский политехнический университет, 2011. — 448 с. — Текст : непосредственный.
5. Рипп А. Г. Обработка измерений : методическое пособие / А. Г. Рипп. – СНУЯЭП, 2012. — 28 с. — Текст : непосредственный.

Учебное издание

**Рипп Александр Гешелевич
Довгаленко Владимир Васильевич**

ЗАПУСК СПУТНИКА

Учебное пособие

В авторской редакции

Изд. № 162/2023. Объем 1,25 п.л. Усл. печ. л. 1,16. Уч. изд. л. 1,23.
РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»