

УДК 517.92

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ НА ТЕРМИНАЛЬНУЮ ОШИБКУ РЕГУЛЯТОРА ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОКАЗАТЕЛЯ КАЧЕСТВА

Козырев В.Г.

Для нестационарной линейно–квадратичной задачи выполнен качественный анализ влияния коэффициентов терминальной матрицы критерия качества на терминальную ошибку регулятора, позволяющий давать рекомендации по выбору коэффициентов для обеспечения заданной точности регулятора.

Приведение системы в заданное положение за конечное время целесообразно осуществлять при помощи оптимального регулятора, который обеспечивает не только конечную цель управления – заданное конечное положение, но и качество процесса на протяжении всего промежутка управления в целом. При этом с практической точки зрения представляется целесообразным строить не регулятор точного приведения системы в заданное положение, а регулятор приближенного приведения, который переводит систему в указанное положение с некоторой удовлетворительной точностью. Такой регулятор не содержит бесконечно больших коэффициентов в цепях обратных связей (ОС), легче реализуется физически и менее чувствителен к разного рода помехам, проникающим на его вход по цепям ОС. Однако для подобного (приближенного) регулятора встает вопрос о численной величине его терминальной ошибки (ошибки приведения). Эмпирический подбор коэффициентов регулятора для обеспечения нужного значения терминальной ошибки представляется неудовлетворительным. Поэтому необходимо аналитическое исследование зависимости этой ошибки от параметров регулятора и коэффициентов выбранного функционала качества.

Здесь данная задача рассматривается для линейной системы с квадратичным функционалом качества. Динамика системы задана уравнением пространства состояний на фиксированном отрезке времени $0 \leq t \leq T$ с произвольным начальным условием

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u(t), \quad x(0) = x^0, \quad (1)$$

где $x \in E^n$ – вектор состояния; $u \in E^r$ – вектор управления; матрицы $A(t)$ и $B(t)$ являются непрерывными функциями времени t для всех $t \in [0, T]$. Приведение системы в заданное положение (для определенности примем его нулевым без ограничения общности) осуществляется оптимально в смысле минимизации квадратичного функционала

$$I[u(t)] = \frac{1}{2\lambda} x'(T)H'FHx(T) + \frac{1}{2} \int_0^T [x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)]dt, \quad (2)$$

где $\lambda > 0$ – малый параметр (призванный обеспечить малость терминальной ошибки по выходу $y(T) = Hx(T)$); H – постоянная матрица размера $m \times n$, $m < n$; F – постоянная положительно определенная матрица $n \times n$; матрицы $Q(t)$ и $R(t)$ являются непрерывными функциями времени t для всех $t \in [0, T]$; $Q(t)$ – неотрицательно определенная; $R(t)$ – положительно определенная на отрезке $[0, T]$; штрих означает транспонирование.

Коэффициент $1/\lambda$ в функционале (2) выражает идею метода штрафных функций, примененную в работе [1] к регулятору состояния. Здесь эта идея применена к регулятору выхода $y(T) = Hx(T)$. Чем больше отклонение выхода $y(T) = Hx(T)$ в конечный момент времени $t = T$ от нуля, тем больший штраф накладывается на управление в виде величины терминального члена $\frac{1}{\lambda} x'(T)H'FHx(T)$. Матрица F в этом члене задает

относительные веса штрафа для каждой компоненты выхода. Величина $1/\lambda$ определяет порядок штрафа. С убыванием λ к нулю штраф повышается, и регулятор будет стремиться уменьшить терминальную ошибку $y(T) = Hx(T)$, чтобы избежать большого штрафа. Малый параметр λ служит, таким образом, в качестве конкретного выражения достаточной для данной задачи точности приведения системы в ноль.

В [2] показана принципиальная возможность влиять на величину терминальной ошибки $y(T) = Hx(T)$ путем уменьшения параметра λ так, что при $\lambda \rightarrow 0$ терминальная ошибка неограниченно убывает: $y(T) \rightarrow 0$. Однако зависимость терминальной ошибки $y(T) = Hx(T)$ от коэффициентов матрицы F и малого параметра λ остается невыясненной. Поэтому требуются исследования для выявления этой связи. Здесь данный вопрос рассматривается для задачи (1), (2), а также для простейшего регулятора скалярной системы, хорошо демонстрирующего характер исследуемой связи.

Заметим, что к задаче (1), (2) относится задача управления выходом

$$y = C(t)x$$

рассматриваемой системы (1), в которой минимизируется функционал

$$I[u(t)] = \frac{1}{2\lambda} y'(T) F y(T) + \frac{1}{2} \int_0^T [y'(t) D(t) y(t) + u'(t) R(t) u(t)] dt,$$

где матрицы $C(t)$ и $D(t)$ непрерывны, а $D(t)$ неотрицательно определена на $[0, T]$. Это верно, если принять $H = C(T)$, $Q(t) = C'(t) D(t) C(t)$ и записать с учетом этого данный функционал в виде (2).

Решение задачи (1), (2) хорошо известно [3] и имеет вид

$$u(t) = -R^{-1}(t) B'(t) K(t) x(t), \quad (3)$$

где для матрицы $K = K(t)$ можно получить представление [2]

$$K = P + W' H' (H M H' + \lambda F^{-1})^{-1} H W \equiv P + W'_H (M_H + \lambda F^{-1})^{-1} W_H, \quad (4)$$

в котором матрицы $P = P(t)$, $W = W(t)$ и $M = M(t)$ – решения матричных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= -P A(t) - A'(t) P + P S(t) P - Q(t), & P(T) &= 0, \\ \frac{dW}{dt} &= -W (A(t) - S(t) P), & W(T) &= E, \\ \frac{dM}{dt} &= -W S(t) W', & M(T) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$S(t) = B(t) R^{-1}(t) B'(t)$; E – единичная матрица,

а матрицы W_H и M_H равны

$$\begin{aligned} W_H &= H W, \\ M_H &= H M H'. \end{aligned}$$

Для W_H и M_H можно выписать и отдельные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dW_H}{dt} &= -W_H (A(t) - S(t) P), & W_H(T) &= H, \\ \frac{dM_H}{dt} &= -W_H S(t) W'_H, & M_H(T) &= 0. \end{aligned}$$

Для существования решения требуется невырожденность (а более точно, в силу структуры последнего уравнения (5), положительная определенность) матрицы $M_H(t) = H M(t) H'$ на промежутке управления $[0, T]$. Нетрудно показать, по аналогии с [1], что необходимым и достаточным условием для положительной определенности $M_H(t)$

является полная управляемость системы (1) по выходу $y = C(t)x$, $C(T) = H$ на любом отрезке $[t_0, T] \subseteq [0, T]$.

Решение исходной задачи осуществим с помощью формулы для терминальной ошибки по выходу. Для вывода этой формулы запишем уравнение оптимального движения системы:

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B'Kx \equiv (A - SK)x. \quad (6)$$

Подставляя в (6) выражение для матрицы Риккати K , получаем:

$$\dot{x} = (A - SP)x - SW'_H(M_H + \lambda F^{-1})^{-1}W_H x.$$

Обозначим

$$f(t) = (M_H + \lambda F^{-1})^{-1}W_H x. \quad (7)$$

Легко убедиться что

$$\frac{d}{dt} f(t) \equiv 0, \quad (8)$$

т.е.

$$f(t) \equiv \text{const}.$$

В самом деле, продифференцируем $f(t)$ как произведение функций

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t) = & -(M_H + \lambda F^{-1})^{-1} \frac{dM_H}{dt} (M_H + \lambda F^{-1})^{-1} W_H x + \\ & + (M_H + \lambda F^{-1})^{-1} \frac{dW_H}{dt} x + (M_H + \lambda F^{-1})^{-1} W_H \frac{dx}{dt}. \end{aligned}$$

В силу уравнений (5) и (6) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t) = & (M_H + \lambda F^{-1})^{-1} W_H S W'_H (M_H + \lambda F^{-1})^{-1} W_H x - \\ & - (M_H + \lambda F^{-1})^{-1} W_H (A - SP)x + (M_H + \lambda F^{-1})^{-1} W_H (A - SK)x. \end{aligned}$$

Перегруппируя и приводя подобные члены в этом выражении с учетом (4), получаем соотношение (8).

С помощью этого соотношения выведем общую формулу для ошибки приведения. Для этого запишем соотношение $f(t) \equiv \text{const}$ для граничных моментов времени: $f(0) = f(T)$ и учтем выражение (7), а также граничные условия (1), (5):

$$(M_H(0) + \lambda F^{-1})^{-1} W_H(0)x(0) = (M_H(T) + \lambda F^{-1})^{-1} W_H(T)x(T),$$

$$(M_H(0) + \lambda F^{-1})^{-1} W_H(0)x^0 = \frac{1}{\lambda} F H x(T),$$

$$Hx(T) = \lambda F^{-1} (M_H(0) + \lambda F^{-1})^{-1} W_H(0)x^0.$$

Отсюда получаем

$$y(T) = Hx(T) = \lambda(M_H(0)F + \lambda E)^{-1}HW(0)x^0. \quad (9)$$

Выражение (9) является точной формулой терминальной ошибки. При достаточно малом λ можно записать приближенное выражение для ошибки с точностью до членов более высокого порядка малости:

$$y(T) = Hx(T) = \lambda F^{-1}M_H^{-1}(0)W_H(0)x^0. \quad (10)$$

Формулы (9) и (10) позволяют рассчитать величину терминальной ошибки приведения на фиксированном отрезке управления при заданных начальных условиях и критерии качества. Один раз проинтегрировав уравнения (5) и получив $M_H(0) = HM(0)H'$ и $W_H(0) = HW(0)$, можно подбором малого параметра λ и матрицы F добиться приемлемой точности приведения на заданном отрезке управления, добиваясь таким образом компромисса между точностью и величиной коэффициентов усиления в цепи обратной связи.

Рассмотрим пример, демонстрирующий применение формул (9), (10) и характер влияния параметров регулятора на величину терминальной ошибки.

Пример:

$$\frac{dx}{dt} = ax + bu(t), \quad x(0) = x^0, \quad (11)$$

$$I[u(t)] = \frac{1}{2\lambda} \dot{x}^2(T) + \frac{1}{2} \int_0^T [x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)] dt. \quad (12)$$

Задача (11), (12) скалярная и все параметры в ней – постоянные величины. Положим также, что $b \neq 0$, $f > 0$, $r > 0$. Оптимальное управление для этой задачи выражается формулой (3):

$$u = -\frac{1}{r} bK(t)x,$$

где в данном случае

$$K(t) = \frac{W^2(t)}{M(t) + \lambda f^{-1}},$$

а функции $W(t)$ и $M(t) = M_H(t)$ являются решениями скалярных уравнений

$$\frac{dW}{dt} = -aW, \quad W(T) = 1,$$

$$\frac{dM}{dt} = -SW^2, \quad M(T) = 0,$$

$$S = \frac{b^2}{r},$$

и поэтому равны

$$W(t) = e^{-a(t-T)},$$

$$M(t) = -\frac{b^2}{2ar}[1 - e^{-2a(t-T)}],$$

$$K(t) = \frac{e^{-2a(t-T)}}{-\frac{b^2}{2ar}[1 - e^{-2a(t-T)}] + \frac{\lambda}{f}}.$$

Терминальная ошибка согласно (9) выражается формулой

$$x(T) = \frac{\lambda}{f} \cdot \frac{e^{aT}}{-\frac{b^2}{2ar}(1 - e^{2aT}) + \frac{\lambda}{f}} \cdot x^0. \quad (13)$$

При $\lambda \ll 1$ получаем формулу вида (10) для данного случая:

$$x(T) = \frac{\lambda}{f} \cdot \left(-\frac{2ar}{b^2} \right) \cdot \frac{e^{aT}}{1 - e^{2aT}} x^0. \quad (14)$$

Из (13) видно, что при больших значениях $\frac{\lambda}{f}$ (малых $\frac{f}{\lambda}$) терминальная ошибка перестает зависеть от параметров критерия качества и зависит только от свойств самой системы:

$$x(T) = e^{aT} x^0 \quad \text{при} \quad \frac{\lambda}{f} \gg 1.$$

Ошибка становится малой лишь для асимптотически устойчивой системы ($a < 0$) при больших временах управления T ($T \gg 1/(-a)$). При малых значениях $\frac{\lambda}{f}$ (большом коэффициенте штрафа $\frac{f}{\lambda}$) величина терминальной ошибки, как следует из (14), хорошо контролируется параметрами регулятора и может быть сделана сколь угодно малой на любом (даже малом) промежутке управления $[0, T]$.

Библиография

1 Глизер В.Я. Асимптотика решения одной сингулярно возмущенной задачи, связанной с методом штрафных функций / В.Я. Глизер, М.Г. Дмитриев // Дифференц. уравнения. — 1981. — Т. XVII. — № 9. — С. 1574–1580.

2 Козырев В.Г. Оптимальный регулятор почти точного приведения в ноль // Вестник СевГТУ. Автоматизация процессов и управление. — Севастополь, 1998. — Вып. 14. — С. 72–76.

3 Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-Ши. — М.: Мир, 1972. — 544 с.

Поступила в редакцию 19.12.2001 г.