

УДК 681.5.011

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ПОСТРОЕНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Пряшников Ф.Д., Пряшникова П.Ф.

Предложены квадратурные формулы для построения переходных процессов в системах автоматического управления.

Для построения переходных процессов в устойчивых системах автоматического управления широко используется вещественная форма интеграла обратного преобразования Лапласа

$$h(t) = \int_0^{\infty} u(\omega) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega, \quad (1)$$

где $u(\omega) = \operatorname{Re}\{j\omega h(j\omega)\}$, $h(p)$ – изображение переходной функции. Применение соотношения (1) позволяет: 1) использовать экспериментально полученные значения $u(\omega)$; 2) устранять в ряде случаев жесткость математических моделей временной области; 3) строить отдельные точки $h(t)$. В системах без запаздывания альтернативой применения соотношения (1) является использование формулы вычетов. В системах с запаздыванием применение формулы вычетов практически является малоэффективным.

Наибольшее распространение в задачах вычисления интеграла (1) получил метод трапецеидальных частотных характеристик. Этот метод является трудно алгоритмизуемым, имеет большую методическую ошибку, и следовательно, не обладает достаточной эффективностью при использовании ЭВМ. Разработанные в настоящее время машинно-ориентированные методы вычисления переходных функций по частотным характеристикам основаны на квадратурных формулах с применением полиномиальной интерполяции, разложения в ряды, сплайн-интерполяции [1-3]. Эти методы не учитывают особенностей подынтегральной функции интеграла (1) и для частотных характеристик со сложным характером изменения могут приводить к большим методическим ошибкам. Разработанные в теории приближенного вычисления интегралов квадратурные формулы для сильно осциллирующих функций, а также адаптивные квадратурные формулы, рассчитанные на широкий класс функций, не учитывают особенности интеграла (1) и могут приводить к расходимости

В настоящее время в задачах приближенного вычисления интегралов широко используются квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (КФ НАСТ), имеющие малую методическую и вычислительную ошибки для широкого класса функций. Хорошо известные КФ НАСТ Гаусса с равномерным весом могут непосредственно использоваться для вычисления интеграла (1). Однако скорость сходимости можно в значительной мере повысить, если получить квадратурные формулы типа Гаусса, учитывающие характер изменения подынтегральной функции интеграла (1). Здесь получены такие формулы, учитывающие наличие у подынтегральной функции сильно осциллирующего множителя $\sin(wt)/w$. Применение предложенных формул позволяет значительно сократить объем вычислений при построении переходных процессов в системах с запаздыванием.

Для получения КФ НАСТ рассматриваются квадратурные формулы типа Гаусса с неравномерным весом

$$J = \int_a^b v(x)y(x)dx \cong \sum_{i=1}^n a_{ni}y(x_{ni}). \quad (2)$$

С целью получения узлов и весов квадратурной формулы (2), не зависящих от параметра t , в интеграле (1) с помощью замены переменной $x = wt$ приведем подынтегральную функцию к виду

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u(x/t)\sin(x)}{x} dx. \quad (3)$$

В КФ НАСТ весовая функция $v(x)$ на интервале интегрирования должна быть неотрицательной. С целью получения такой весовой функции, в которую входил бы осциллирующий множитель $\sin(x)$, представим интеграл (3) в виде

$$h(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u(\omega/t) d\omega + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u(\omega/t)(\sin \omega / \omega + 1) d\omega = \frac{2}{\pi} (J_2 - tJ_1), \quad (4)$$

где $J_1 = \int_0^{\infty} u(\omega) d\omega$; $J_2 = \int_0^{\infty} u(\omega/t)(\sin \omega / \omega + 1) d\omega$. Вычисление интеграла J_1 , не зависящего от t , может быть осуществлено однократно для всех t . Поскольку подынтегральная функция интеграла J_1 не является осциллирующей, для вычисления J_1 могут использоваться известные

квадратурные формулы Гаусса, например с равномерным весом. При этом необходимо приведение бесконечного интервала интегрирования к конечному, что может быть осуществлено путем замены переменной интегрирования. В качестве таких замен наиболее часто используются замены $w = -\ln(x)$, $w = ((1-x)/x)^{1/2}$, $w = \operatorname{tg}(px/2)$, переводящие интервал $[0, \infty)$ в стандартный интервал $[0, 1]$.

Для построения КФ НАСТ вычисления интеграла J_2 будем использовать моменты весовой функции

$$h_i = \int_a^b x^i v(x) dx, \quad (i = 0, 1, \dots). \quad (5)$$

С целью обеспечения сходимости для рассматриваемого случая интегралов (5) представим интеграл J_2 в виде

$$J_2 = \int_0^\infty \frac{u(\omega/t)(1+\omega^2)}{(1+\omega^2)(\sin \omega/\omega+1)} d\omega. \quad (6)$$

Для определения выражения для моментов в интеграле (6) делаем замену переменной интегрирования $x = 1/(1+\omega^2) \Leftrightarrow \omega = ((1-x)/x)^{1/2}$. При такой замене $dw = -1/(2wx^2)dx$ и выражение (6) принимает вид

$$J_2 = \int_1^0 y(\omega, t) x (\sin \omega/\omega + 1) \frac{-1}{2x^2\omega} d\omega. \quad (7)$$

Приняв в качестве весовой функции интеграла (7)

$v(x) = -\frac{1}{2x\omega} \left(\frac{\sin \omega}{\omega} + 1 \right)$, получим для моментов (5) выражение

$$h_i = -\frac{1}{2} \int_1^0 \frac{x^{i-1}}{\omega} \left(\frac{\sin \omega}{\omega} + 1 \right) dx, \quad (i = 0, 1, \dots), \quad (8)$$

где $w = ((1-x)/x)^{1/2}$. Погрешность вычисления моментов существенно влияет на точность квадратурных формул, в силу чего желательно получить для моментов (8) аналитические выражения.

С целью получения аналитических выражений для вычисления моментов (8) переходной функции (4) сделаем замену переменной $w = ((1-x)/x)^{1/2}$, при которой

$$h_i = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+\omega^2)^{i+1}} \left(\frac{\sin \omega}{\omega} + 1 \right) d\omega = J_3 + J_4, \quad (9)$$

где $J_3 = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+\omega^2)^{i+1}} d\omega$; $J_4 = \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega(1+\omega^2)^{i+1}} d\omega$. Интеграл J_3 вычисляется аналитически [4]:

$$J_3 = \frac{\pi(2i-1)!!}{2(2i)!!}. \quad (10)$$

При $i=0,1$ для интеграла J_4 в [5] указаны аналитические формулы

$$J_4 = \begin{cases} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega(\omega^2+1)} d\omega = \frac{\pi}{2}(1-e^{-1}), & i=0; \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega(\omega^2+1)^2} d\omega = \frac{\pi}{2}(1-\frac{3}{2}e^{-1}), & i=1. \end{cases} \quad (11)$$

Для вычисления по аналитическим формулам при $i=0,1$ проинтегрируем J_4 по частям, приняв $u = \sin w$, $dv = dw/(w^2+1)$. Для принятых u и v имеем, соответственно $du = \cos w dw$ и

$$v = \int \frac{1}{\omega(\omega^2+1)^{i+1}} d\omega = 0,5 \sum_{l=1}^i \frac{1}{(i+1-l)(\omega^2+1)^{i+1-l}} + 0,5 \ln \left(\frac{\omega^2}{\omega^2+1} \right). \quad (12)$$

При интегрировании по частям используем равенство

$$J_4 = u(\infty)v(\infty) - u(0)v(0) - \int_0^{\infty} v du. \quad \text{При } w \rightarrow \infty: u(w) \text{ является}$$

ограниченной функцией, $v(w)$ – бесконечно малая, следовательно, $u(\infty)v(\infty) = 0$. При $w \rightarrow 0: u(w)$ – бесконечно малая, первое слагаемое правой части выражения (12) – ограниченная величина, таким образом $u(\infty)v(\infty) - u(0)v(0) = -\lim_{\omega \rightarrow 0} \left(0,5 \ln \frac{\omega^2}{\omega^2+1} \sin \omega \right)$. Находим:

$$\sin \omega \ln \left(\frac{\omega^2}{\omega^2+1} \right) = 2 \sin \omega \ln \omega -$$

$$-\sin \omega \ln(\omega^2 + 1) = 2 \frac{\sin \omega}{\omega} \ln \omega^\omega - \sin \omega \ln(\omega^2 + 1) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 2 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

Окончательно

$$u(\infty)v(\infty) - u(0)v(0) = 0 \quad (13)$$

и

$$\begin{aligned} J_4 &= - \int_0^\infty v du = -0,5 \sum_{l=1}^i \frac{1}{i+1-l} \int_0^\infty \frac{\cos \omega}{(\omega^2 + 1)^{i+1-l}} d\omega - 0,5 \int_0^\infty \cos \omega \ln \frac{\omega^2}{\omega^2 + 1} d\omega = \\ &= -0,5 \sum_{l=1}^i \frac{r_{i+1-l}}{i+1-l} - 0,5 J_5, \end{aligned}$$

где $r_k = \int_0^\infty \frac{\cos \omega}{(\omega^2 + 1)^k} d\omega$; $J_5 = \int_0^\infty \cos \omega \ln \frac{\omega^2}{(\omega^2 + 1)} d\omega$. Значение r_k может быть вычислено по аналитической формуле [4]:

$$r_k = \frac{\pi}{e 2^{2k-1} (k-1)!} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(2k-2-j)! 2^j}{j! (k-1-j)!}. \quad (14)$$

Значение J_5 может быть преобразовано к виду

$$J_5 = - \int_0^\infty \cos \omega \ln \left(1 + \frac{1}{\omega^2} \right) d\omega \quad \text{и также вычислено по аналитической формуле:}$$

$$J_5 = -\pi(1 - e^{-1}). \quad (15)$$

Подставляя (14) и (15) в (13), получаем

$$\begin{aligned} J_4 &= -0,5 \sum_{l=1}^i \frac{\pi}{e(i+1-l) 2^{2k-1} (k-1)!} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(2k-1-2-j)! 2^j}{j! (k-1-j)!} + 0,5\pi(1 - e^{-1}) = \\ &= 0,5\pi \left[(1 - e^{-1}) - e^{-1} \sum_{l=1}^i \frac{1}{i+1-l} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(2k-2-j)! 2^j}{2^{2k-1} (k-1)! j! (k-1-j)!} \right] = \\ &= 0,5\pi \left[1 - e^{-1} \left(1 + \sum_{l=1}^i \frac{1}{i+1-l} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(2k-2-j)!}{2^{2k-1} (k-1)! j! (k-1-j)!} \right) \right], \end{aligned}$$

где $k = i + 1 - l, i > 1$. (16)

Формулы (9-11), (13-16) позволяют аналитически вычислять моменты h_i ($i=0,1,\dots$). Полученные моменты используются для построения ортогональных полиномов $p_i(x)$ ($i=0,1,\dots$), корни которых являются узлами квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности. Обычно ортогональные полиномы для произвольных весовых функций представляют в виде (17) однако, как показывают практические вычисления, непосредственное использование соотношений (17) может приводить к численной неустойчивости. Поэтому более удобным для вычислений являются рекуррентные соотношения, которые для реализации на ЭВМ удобно записать в виде:

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n-1} & h_n & \dots & h_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}, \text{ где } \Delta_n = \begin{vmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_n \\ h_1 & h_2 & \dots & h_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_n & h_{n+1} & \dots & h_{2n} \end{vmatrix}, \quad (17)$$

$$\begin{cases} p_0(x) = \alpha_{1,0}; & p_1(x) = \alpha_{1,1}x + \alpha_{2,1}; \\ p_n(x) = (\alpha_{1,n}x + \alpha_{2,n})p_{n-1}(x) + \alpha_{3,n}p_{n-2}(x); & (n \geq 2). \end{cases} \quad (18)$$

При построении ортогональных полиномов для той или иной весовой функции основная проблема заключается в вычислении значений множителей $\{\{\alpha_{ij}\}_{i=1}^3\}_{j=0}^n$ соотношений (18). Ниже предлагаются следующие формулы определения множителей.

Будем рассматривать ортонормированные полиномы, для которых существует простая формула вычисления весов. Тогда для вычисления $a_{1,0}$ можно воспользоваться условием

ортонормированности $\int_a^b v(x) p_n^2(x) dx = 1$, которое при $n=0$ принимает

вид

$$\int_a^b v(x) \alpha_{1,0}^2 dx = 1. \quad (19)$$

Из (19) следует, что множитель $a_{1,0}$ можно вычислить по формуле

$$\alpha_{1,0} = \left(\int_a^b v(x) dx \right)^{-1/2} = h_0^{-1/2}. \quad (20)$$

Из (17) при $n = 1$ для полинома $p_1(x)$ можно получить выражение

$$p_1(x) = \frac{1}{(\Delta_0 \Delta_1)^{1/2}} \begin{vmatrix} h_0 & h_1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = \frac{1}{\left(\begin{vmatrix} h_0 & h_1 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} \right)^{1/2}} \begin{vmatrix} h_0 & h_1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = \frac{h_0 x - h_1}{\sqrt{h_0(h_0 h_2 - h_1^2)}}, \text{ откуда}$$

$$\alpha_{1,1} = \sqrt{\frac{h_0}{h_0 h_2 - h_1^2}}; \quad \alpha_{2,1} = -\frac{h_1}{\sqrt{h_0(h_0 h_2 - h_1^2)}}. \quad (21)$$

Пусть

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n b_{ni} x^i,$$

(22)

тогда из (17) следует, что
$$b_{ni} = (-1)^{n-i} \frac{\Delta_{ni}}{\sqrt{\Delta_{n-1} \Delta_n}},$$

(23)

где D_{ni} – определитель (17) с вычеркнутыми последней строкой и i -м столбцом. Множители $\{\alpha_{in}\}_{i=1}^3$ могут быть найдены путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x в правой и левой частях третьего из соотношений (18). С учетом (22) соотношение (18) можно записать в виде

$$b_{nn}x^n + b_{n,n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots = \alpha_{1n}b_{n-1,n-1}x^n + (\alpha_{1n}b_{n-1,n-2} + \alpha_{2n}b_{n-1,n-1})x^{n-1} +$$

$$+ (\alpha_{1n}b_{n-1,n-3} + \alpha_{2n}b_{n-1,n-2} + \alpha_{3n}b_{n-3,n-3})x^{n-2} + \dots \quad (24)$$

Из (24) следуют равенства

$$\begin{cases} b_{nn} = \alpha_{1n}b_{n-1,n-1}; & b_{n,n-1} = \alpha_{1n}b_{n-1,n-2} + \alpha_{2n}b_{n-1,n-1}; \\ b_{n,n-2} = \alpha_{1n}b_{n-1,n-3} + \alpha_{2n}b_{n-1,n-2} + \alpha_{3n}b_{n-3,n-3}, \end{cases}$$

откуда

$$\alpha_{1n} = \frac{b_{nn}}{b_{n-1,n-1}}; \quad \alpha_{2n} = \frac{b_{n,n-1} - \alpha_{1n}b_{n-1,n-2}}{b_{n-1,n-1}}; \quad \alpha_{3n} = \frac{b_{n,n-2} - \alpha_{1n}b_{n-1,n-3} - \alpha_{2n}b_{n-1,n-2}}{b_{n-3,n-3}}. \quad (25)$$

Формулы (17) (20), (21), (23), (25), позволяют определить значения множителей рекуррентных соотношений (18).

Корни полиномов (18) вещественны и принадлежат интервалу интегрирования. Для отделения корней может быть использован тот факт [6], что корни полинома $p_n(x)$ лежат между корнями полинома $p_{n-1}(x)$. Найденные корни ортогональных полиномов являются искомыми узлами $\{\{x_{ij}\}_{j=1}^i\}_{i=1}^n$ КФ НАСТ (2).

Если узлы $\{\{x_{ij}\}_{j=1}^i\}_{i=1}^n$ найдены, веса квадратурных формул $\{\{a_{ij}\}_{j=1}^i\}_{i=1}^n$ проще всего могут быть вычислены путем использования соотношения $a_{ni} = \frac{b_{nn}}{b_{n-1,n-1}p'_n(x_{ni})p_{n-1}(x_{ni})}$, которое в силу равенств (21), (25) можно переписать в виде

$$a_{ni} = \frac{\alpha}{p'_n(x_{ni})p_{n-1}(x_{ni})}, \text{ где } \alpha = \begin{cases} \alpha_{11}/\alpha_{10}, & n=1; \\ \alpha_{1n}, & n>1. \end{cases} \quad (26)$$

В равенстве (26) вычисление значений $p_{n-1}(x_{ni})$ можно производить по формулам (18). Для вычисления значений $p'_{n-1}(x_{ni})$ могут быть использованы формулы

$$\begin{cases} p'_0(x) = 0; \quad p'_1(x) = \alpha_{1,1}; \\ p'_n(x) = \alpha_{1n}p_{n-1}(x) + (\alpha_{1,n}x + \alpha_{2,n})p'_{n-1}(x) + \alpha_{3,n}p'_{n-2}(x); \quad (n \geq 2), \end{cases}$$

полученные путем дифференцирования формул (18).

В таблице 1 представлены значения узлов и весов квадратурных формул для $n = 1 \dots 10$.

Таблица 1 – Значения узлов и весов квадратурных формул

n	x_{ni}	a_{ni}	n	x_{ni}	a_{ni}
1	0,58095	2,5637	8	0,0099002	0,19912
2	0,19073	1,0782		0,094006	0,20694
	0,86415	1,4856		0,23514	0,29526
3	0,083233	0,61328		0,41339	0,34271
	0,52158	0,93467		0,60519	0,36651

	0,93607	1,0158		0,78208	0,37906
4	0,043282	0,41543		0,91738	0,38563
	0,33090	0,64021		0,99058	0,38849
	0,70221	0,73986	9	0,0079074	0,17856
	0,96331	0,76823		0,073157	0,17026
5	0,025974	0,31705		0,18975	0,24445
	0,22622	0,45970		0,33938	0,29223
	0,51468	0,56593		0,50814	0,31753
	0,80015	0,60390		0,67650	0,33151
	0,97628	0,61714		0,82441	0,33948
6	0,017497	0,26116		0,93415	0,34387
	0,16394	0,34145		0,99253	0,34584
	0,38610	0,44685	10	0,0064425	0,16134
	0,63899	0,48995		0,057874	0,14611
	0,85741	0,50854		0,15599	0,20412
	0,98341	0,51578		0,28268	0,25124
7	0,012810	0,22514		0,42999	0,27762
	0,12279	0,26146		0,58439	0,29271
	0,29766	0,36051		0,73105	0,30170
	0,51090	0,40652		0,85575	0,30710
	0,72328	0,42821		0,94632	0,31019
	0,89339	0,43875		0,99394	0,31160
	0,98775	0,44314			

Библиография

1 Кузьмин Е.О. Частотные методы построения переходных процессов линейных автоматических систем /Е.О. Кузьмин, М.Я. Ситко. — К.: Высш. шк., 1974. —120 с.

2 Теория автоматического управления / Под. ред. А.А. Воронова. — М.: Высш. шк., 1986. — 396 с.

3 Прокофьев В.Е. Численное определение переходной характеристики по вещественной частотной характеристике системы управления / В.Е. Прокофьев. — с. 9. — Деп. в УкрНИИНТИ 16.08.84, № 640.

4 Прудников А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников — М.: Наука, 1981. — 800 с.

Поступила в редакцию 20.12.2001 г.