

УДК 681.015.42

ОПТИМАЛЬНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ В ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ

Карапетьян В.А.

Рассматривается задача оптимального сглаживания для линейных дискретных динамических систем. Получено общее представление решения задачи для оптимальной оценки и ковариации ошибки оценки. Как следствие, из этого представления выведены известные рекуррентные алгоритмы решения трех стандартных задач линейного сглаживания: на заданном интервале, в заданной точке, с заданной задержкой.

Представляет интерес перенести результаты [1] на класс линейных дискретных динамических систем. В общей постановке рассматривается задача оптимального линейного сглаживания. Приведено ее решение в замкнутой нерекуррентной форме: представлены выражения для оптимальной оценки и ковариации ошибки оценки. Получены как частные случаи три известных алгоритма решения задач сглаживания [2,3]. В основе всех рассуждений лежит систематическое применение формулы Коши-Лагранжа, уравнений для матриц перехода и понятия "обновляющего" процесса [3].

Задача сглаживания формулируется следующим образом: требуется по данным измерений, известных до момента t_2 , построить несмещенную оценку в момент $t_1 \leq t_2$ оптимальную в среднеквадратическом [2,3].

Считается, что задача оптимальной фильтрации до момента t_2 решена. С учетом этого факта приведем уравнения, определяющие поведение системы, алгоритм калмановской фильтрации и некоторые вспомогательные соотношения. В дальнейшем будем обозначать значение какого-либо объекта в момент времени t_i не как $X(t_i)$, а как принято в теории дискретных систем – X_i .

Пусть линейная система и фильтр представлены следующими соотношениями [2, 3]:

– уравнение объекта

$$x_{i+1} = A_i x_i + w_i, \quad i \geq i_0, \quad (1)$$

в начальный момент времени t_0 заданы $\bar{x}_{i_0} = M\{x_{i_0}\}$ – среднее и $P_{i_0} = \text{cov}\{x_{i_0} - \bar{x}_{i_0}\}$ – матрица ковариаций;

– уравнение измерений $z_i = H_i x_i + v_i$.

Здесь, как обычно, w и v – "белые" центрированные гауссовы шумы с матрицами интенсивностей $Q \geq 0$ и $R > 0$ соответственно,

некоррелированные между собой и с вектором начального состояния системы x_{i_0} ;

– уравнения фильтра Калмана

$$\hat{x}_{i+1} = A_i \hat{x}_i + K_{i+1} [z_{i+1} - H_{i+1} A_i \hat{x}_i], \quad \hat{x}_{i_0} = \bar{x}_{i_0}, \quad (2)$$

$$K_{i+1} = \tilde{P}_{i+1} H_{i+1}^T [H_{i+1} \tilde{P}_{i+1} H_{i+1}^T + R_{i+1}]^{-1},$$

$$\tilde{P}_{i+1} = A_i P_i A_i^T + Q_i,$$

$$P_{i+1} = [I - K_{i+1} H_{i+1}] \tilde{P}_{i+1}, \quad P_{i_0}; \quad (3)$$

– "обновляющая" последовательность $J_{i+1} = z_{i+1} - H_{i+1} A_i \hat{x}_i$,

– уравнение для ошибки оценки $\varepsilon_i = x_i - \hat{x}_i$

$$\varepsilon_{i+1} = A_i \varepsilon_i + w_i - K_{i+1} J_{i+1}, \quad \varepsilon_{i_0} = x_{i_0} - \bar{x}_{i_0}, \quad (4)$$

или

$$\varepsilon_{i+1} = [I - K_{i+1} H_{i+1}] A_i \varepsilon_i + [I - K_{i+1} H_{i+1}] w_i - K_{i+1} v_{i+1}; \quad (5)$$

– формула Коши

$$x_{i_k} = \Phi^T(i_k, i_0) x_{i_0} + \sum_{i=i_0}^{i=i_k-1} \Phi^T(i_k, i+1) w_i, \quad i_k > i_0,$$

$$x_{i_0} = \Phi^T(i_0, i_k) x_{i_k} + \sum_{i=i_0}^{i=i_k-1} \Phi^T(i_0, i+1) w_i, \quad i_k > i_0, \quad (6)$$

– уравнение для матрицы перехода F системы (1) как функции первого аргумента

$$\Phi^T(i+1, i_0) - A_{i-1} \Phi^T(i, i_0) = 0, \quad \Phi^T(i_0, i_0) = I,$$

как функции второго аргумента

$$\Phi^T(i_k, i) - \Phi^T(i_k, i+1) A_i = 0, \quad \Phi^T(i_k, i_k) = I;$$

– уравнения для матрицы перехода F системы (2) как функция

первого аргумента

$$F^T(i+1, i_0) - [I - K_{i+1} H_{i+1}] A_i F^T(i, i_0) = 0, \quad F^T(i_0, i_0) = I,$$

как функция второго аргумента

$$F^T(i_k, i) - F^T(i_k, i+1) [I - K_{i+1} H_{i+1}] A_i = 0, \quad F^T(i_k, i_k) = I.$$

Оптимальную оценку вектора x будем обозначать как $\hat{x}_{i_1|i_2}$, где относительное расположение моментов времени i_1 и i_2 определяют одну из известных задач оценивания:

$i_1 = i_2$ – оценка фильтрации; $i_1 > i_2$ – оценка экстраполяции (предсказания); $i_1 < i_2$ – оценка сглаживания.

Рассматривая в дальнейшем задачу сглаживания ($i_1 < i_2$), выделим в ней три стандартных подзадачи [2,3]:

1) задача сглаживания на фиксированном(закрепленном) интервале, т.е.

$$i_2 = \text{const}, i_1 = i = \text{var}, \text{ оценка } - \mathbf{x}_{i|i_2};$$

2) задача сглаживания в фиксированной(закрепленной) точке, т.е.

$$i_1 = \text{const}, i_2 = i = \text{var}, \text{ оценка } - \mathbf{x}_{i|i};$$

3) задача сглаживания с фиксированной(постоянной) задержкой, т.е.

$$i_1 = i = \text{var}, i_2 = i_1 + N = \text{var}, N = \text{const} > 0, \text{ оценка } - \mathbf{x}_{i|i+N}.$$

Оценку сглаживания будем искать в виде

$$\mathbf{x}_{i_1|i_2} = S^T \mathbf{x}_{i_2} + \sum_{i=i_1}^{i=i_2-1} G^T_{i+1} J_{i+1}.$$

Здесь $\mathbf{x}_{i_2}$ – калмановская оценка вектора $\mathbf{x}_{i_2}$, она предполагается известной, поскольку считается решенной задача фильтрации до момента времени t_2 .

Необходимо выбрать матрицу S и матричную функцию G_i таким образом, чтобы оценка $\mathbf{x}_{i_1|i_2}$ была несмещенной $M\{\mathbf{x}_{i_1|i_2}\} = M\{\mathbf{x}_{i_1}\} = \bar{\mathbf{x}}_{i_1}$ и функционал $q = \text{tr} N P_{i_1|i_2}$ (матрица N положительно определена) достигал своего минимума. Здесь: $P_{i_1|i_2} = M\{\varepsilon_{i_1|i_2} \varepsilon_{i_1|i_2}^T\}$, $\varepsilon_{i_1|i_2} = \mathbf{x}_{i_1} - \mathbf{x}_{i_1|i_2}$ – ошибка сглаживания.

В силу формулы Коши для уравнения (1) можно записать

$$\varepsilon_{i_1|i_2} = \Phi^T(i_1, i_2) \mathbf{x}_{i_2} - \sum_{i=i_1}^{i=i_2-1} \Phi^T(i_1, i+1) \mathbf{w}_i - S^T \mathbf{x}_{i_2} - \sum_{i=i_1}^{i=i_2-1} G^T_{i+1} J_{i+1}.$$

Для выполнения условия несмещенности оптимальной оценки, достаточно положить $S^T = \Phi^T(i_1, i_2)$, тогда

$$\varepsilon_{i_1|i_2} = \Phi^T(i_1, i_2) \varepsilon_{i_2} - \sum_{i=i_1}^{i=i_2-1} [\Phi^T(i_1, i+1) \mathbf{w}_i + G^T_{i+1} J_{i+1}].$$

Определив выражение для ε_{i_2} из (4) и учитывая транзитивные свойства переходной матрицы Φ , получим

$$\varepsilon_{i_1|i_2} = \varepsilon_{i_1} - \sum_{i=i_1}^{i=i_2-1} [\Phi^T(i_1, i+1)K_{i+1} + G_{i+1}^T] J_{i+1}.$$

Это соотношение позволяет довольно просто показать, что формула для матрицы ковариаций ошибки сглаживания $P_{i_1|i_2}$ имеет вид

$$P_{i_1|i_2} = P_{i_1} + \sum_{i=i_1}^{i=i_2-1} \left\{ L_{i+1} [H_{i+1} P_{i+1} H_{i+1}^T + R_{i+1}] L_{i+1}^T - P_{i_1} F(i, i_1) A_i^T H_{i+1}^T L_{i+1}^T - \right. \\ \left. - L_{i+1} H_{i+1} A_i F^T(i, i_1) P_{i_1} \right\}. \quad (7)$$

Здесь $F^T(i, j)$ – переходная матрица уравнения (5), а $L_{i+1} = \Phi^T(i_1, i+1)K_{i+1} + G_{i+1}^T$.

Введем обозначение $(\dots) = (H_{i+1} \tilde{P}_{i+1} H_{i+1}^T + R_{i+1})$ и, выделяя "полный квадрат" в (7), последнее соотношение для $P_{i_1|i_2}$ преобразуем к виду:

$$P_{i_1|i_2} = P_{i_1} + \sum_{i=i_1}^{i=i_2-1} \left\{ [L_{i+1} - P_{i_1} F(i, i_1) A_i^T H_{i+1}^T (\dots)^{-1}] (\dots) [L_{i+1} - P_{i_1} F(i, i_1) A_i^T H_{i+1}^T (\dots)^{-1}]^T - \right. \\ \left. - P_{i_1} F(i, i_1) A_i^T H_{i+1}^T (\dots)^{-1} H_{i+1} A_i F^T(i, i_1) P_{i_1} \right\}.$$

Из требования минимума функционала качества сглаживания q , сразу следует, что $L_{i+1} - P_{i_1} F(i, i_1) A_i^T H_{i+1}^T (\dots)^{-1} = 0$, а это в свою очередь определяет искомую матрицу G^T :

$$G_{i+1}^T = P_{i_1} F(i, i_1) A_i^T H_{i+1}^T [H_{i+1} \tilde{P}_{i+1} H_{i+1}^T + R_{i+1}]^{-1} - \Phi^T(i_1, i+1) K_{i+1}.$$

Последнее выражение позволяет (с учетом (6)) записать соотношение для оптимальной оценки сглаживания $\hat{x}_{i_1|i_2}$ и матрицы ковариаций ошибки оценки

$$\hat{x}_{i_1|i_2} = \hat{x}_{i_1} + P_{i_1} \sum_{i=i_1}^{i=i_2-1} F(i, i_1) A_i^T H_{i+1}^T (H_{i+1} \tilde{P}_{i+1} H_{i+1}^T + R_{i+1})^{-1} J_{i+1}, \quad (8)$$

$$P_{i_1|i_2} = P_{i_1} - P_{i_1} \sum_{i=i_1}^{i=i_2-1} F(i, i_1) A_i^T H_{i+1}^T (H_{i+1} \tilde{P}_{i+1} H_{i+1}^T + R_{i+1})^{-1} H_{i+1} A_i F(i, i_1) P_{i_1}. \quad (9)$$

Два последних выражения вместе с необходимыми формулами, определяющими матрицы переходных функций, представляют собой алгоритм оптимального сглаживания и являются основой для синтеза рекуррентных алгоритмов решения трех подзадач сглаживания.

1 Задача сглаживания на фиксированном (закрепленном) интервале:

$$i_2 = \text{const}, i_1 = i = \text{var}, \quad i \leq i_2.$$

В этом случае выражения для оценки $\hat{\mathbf{x}}_{i|i_2}$ и матрицы $P_{i|i_2}$ можно представить в виде:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i|i_2} = \hat{\mathbf{x}}_i + P_i \sum_{k=i}^{k=i_2-1} F(k, i) A_k^T H_{k+1}^T (H_{k+1} \tilde{P}_{k+1} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} J_{k+1}, \quad (10)$$

$$P_{i|i_2} = P_i - P_i \sum_{k=i}^{k=i_2-1} F(k, i) A_k^T H_{k+1}^T (H_{k+1} \tilde{P}_{k+1} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} H_{k+1} A_k F(k, i) P_i.$$

Если на основании (10) записать представление для $\hat{\mathbf{x}}_{i+1|i_2}$, выделить в (10) из суммы первое слагаемое, учесть соотношения алгоритма Калмана и уравнения для матрицы F как функции второго аргумента, то получим рекуррентное выражение для оптимальной оценки сглаживания в виде $\hat{\mathbf{x}}_{i|i_2} = \hat{\mathbf{x}}_i + P_i A_i^T \tilde{P}_{i+1}^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_{i+1} - A_i \hat{\mathbf{x}}_i)$, $i < i_2$ с начальными условиями $\hat{\mathbf{x}}_{i_2|i_2} = \hat{\mathbf{x}}_{i_2}$.

Аналогичным образом может быть получено и рекуррентное выражение для матрицы ковариаций ошибки оценки $P_{i|i_2}$ [2]

$$P_{i|i_2} = P_i + P_i A_i^T \tilde{P}_{i+1}^{-1} (P_{i+1|i_2} - \tilde{P}_{i+1}) \tilde{P}_{i+1}^{-1} A_i P_i \text{ с начальными условиями } P_{i_2|i_2} = P_{i_2}.$$

2 Задача сглаживания в фиксированной (закрепленной) точке:

$$i_1 = \text{const}, \quad i_2 = i = \text{var}, \quad i \geq i_1.$$

Уравнения (8), (9) здесь примут следующий вид:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i|i} = \hat{\mathbf{x}}_{i_1} + P_{i_1} \sum_{k=i_1}^{k=i-1} F(k, i_1) A_k^T H_{k+1}^T (H_{k+1} \tilde{P}_{k+1} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} J_{k+1},$$

$$P_{i|i} = P_{i_1} - P_{i_1} \sum_{k=i_1}^{k=i-1} F(k, i_1) A_k^T H_{k+1}^T (H_{k+1} \tilde{P}_{k+1} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} H_{k+1} A_k F(k, i_1) P_{i_1}.$$

Если в правых частях этих выражений добавить и вычесть слагаемые соответствующих сумм при $k = i$, выделить $\hat{\mathbf{x}}_{i|i+1}$ и $P_{i|i+1}$, тогда после некоторых преобразований получим

$$\hat{\mathbf{x}}_{i|i+1} = \hat{\mathbf{x}}_{i|i} + P_{i_1} F(i, i_1) A_i^T \tilde{P}_{i+1}^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_{i+1} - A_i \hat{\mathbf{x}}_i),$$

$$P_{i|i+1} = P_{i|i} - P_{i_1} F(i, i_1) A_i^T \tilde{P}_{i+1}^{-1} K_{i+1} H_{i+1} A_i F^T(i, i_1) P_{i_1}.$$

Из уравнений для F следует, что $P_{i_1} F(i, i_1) A_i^T \tilde{P}_{i+1}^{-1} = \prod_{k=i_1}^{k=i} P_k A_k^T \tilde{P}_{k+1}^{-1} = B_i$, а

из выражения (3) — $K_{i+1} H_{i+1} \tilde{P}_{i+1} = \tilde{P}_{i+1} - P_{i+1}$.

В результате этих упрощений и преобразований можно записать рекуррентные уравнения алгоритма сглаживания в следующей форме [2]:

$$\begin{aligned}\xi_{i|i+1} &= \xi_{i|i} + B_i(\xi_{i+1} - A_i \xi_i), \quad \xi_{i|i_i} = \xi_{i_i}, \\ P_{i|i+1} &= P_{i|i} + B_i[P_{i+1} - \tilde{P}_{i+1}]B_i^T, \quad P_{i|i_i} = P_{i_i}.\end{aligned}$$

3 Задача сглаживания с фиксированной (постоянной) задержкой:

$$i_1 = i = \text{var}, \quad i_2 = i + N = \text{var}, \quad N = \text{const} > 0.$$

Уравнения (8), (9) в данном случае принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\xi_{i|i+N} &= \xi_i + P_i \sum_{k=i}^{k=i+N-1} F(k, i) A_k^T H_{k+1}^T (H_{k+1} \tilde{P}_{k+1} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} J_{k+1}, \\ P_{i|i+N} &= P_i - P_i \sum_{k=i}^{k=i+N-1} F(k, i) A_k^T H_{k+1}^T (H_{k+1} \tilde{P}_{k+1} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} H_{k+1} A_k F(k, i) P_i.\end{aligned}$$

Перепишав эти соотношения для момента $i+1$, уменьшив границы суммирования на единицу и упростив полученные слагаемые, последние два выражения можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\xi_{i+1|i+N+1} &= A_i \xi_{i|i+N+1} + \prod_{k=i+1}^{k=i+N} P_k A_k^T \tilde{P}_{k+1}^{-1} K_{k+N+1} J_{i+N+1} + Q_i (A_i P_i A_i^T)^{-1} A_i (\xi_{i|i+N} - \xi_i), \\ i &= i_0, i_0 + 1, \dots\end{aligned}$$

$$P_{i+1|i+N+1} = \tilde{P}_{i+1} - M_{i+N} K_{i+N+1} H_{i+N+1} \tilde{P}_{i+N+1}^T M_{i+N+1}^T - C_i (P_i - P_{i|i+N}) C_i^T,$$

$$\text{где} \quad M_{i+N} = \prod_{k=i+1}^{k=i+N} P_k A_k^T \tilde{P}_{k+1}^{-1}, \quad C_i = \tilde{P}_{i+1} (A_i P_i A_i^T)^{-1} A_i.$$

Начальные условия для этих рекуррентных соотношений соответственно $\xi_{i_0|i_0+N}$ и $P_{i_0|i_0+N}$, могут быть найдены с помощью алгоритма оптимального сглаживания на закреплённом интервале при $i = i_0$ и $i_2 = N + i_0$ или с помощью алгоритма оптимального сглаживания в закреплённой точке при $i_1 = i_0$ и $i = N + i_0$.

На этом завершён вывод из основных соотношений (8), (9)

рекуррентных уравнений алгоритмов оптимального сглаживания для всех трех подзадач сглаживания. Все уравнения приведены к форме, известной в литературе [2,3].

Библиография

1 Карапетян В.А. Оптимальное сглаживание в линейных непрерывных системах / В.А. Карапетян // Вестн. СевГТУ. Сер. Автоматизация процессов и управление: Сб. науч. тр. — Севастополь, 2000. — Вып. 27. — С. 47–53.

2 Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление / Дж. Медич. — М.: Энергия, 1973. — 440 с.

3 Сейдж Э. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении / Э. Сейдж, Д. Мелса. — М.: Радио и связь, 1976. — 496 с.

Поступила в редакцию 16.07.2001 г.