

УДК 681.31(07)

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭНТРОПИЙНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕССОВ ОБУЧЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Скатков И.А.

Предлагается аналитическая модель для оценки энтропийных характеристик процессов обучения операторов автоматизированных систем. Доказана теорема, позволяющая по заданным информационным функциям находить энтропию системы. Приведены решения некоторых специальных задач вычисления энтропии.

Рассмотрим класс задач принятия решений по управлению информационными процессами в автоматизированных системах (АС) в предположении что имеется априорная информация о вероятностных характеристиках ее основных элементов. Точнее, для каждого момента времени $t \in [0, T]$ известны функции $P_I(t)$ – вероятность наличия обучающей информации и $P_L(t)$ – вероятность восприятия обучающей информации. Оптимальная стратегия принятия решений при обучении должна обеспечить синтез управлений, придающих функциям $P_I(t)$ и $P_L(t)$ необходимые значения с точки зрения достижения экстремума выбранного показателя качества функционирования АС.

Наиболее объективно результаты обучения оцениваются

эффективностью применения АС при ее эксплуатации, которая

определяется её технико-экономическими показателями. В некоторых

работах [1,2] в подобных случаях используются различные частные

критерии: вероятность исполнения задания, точность решения задачи,

время исполнения задания. Однако при проектировании и отработке АС

необходимо предусмотреть использование таких критериев, которые

комплексно оценивают качество проектируемой АС, а их вычисление не

вызывает принципиальных или существенных трудностей.

В связи с этим предлагается более общий критерий, целесообразность

использования которого определяется удовлетворительной

точностью аппроксимации показателей эффективности АС – это информационный критерий – среднее количество информации, получаемое системой.

Введем некоторые определения и дадим формализованную постановку задачи.

Определение 1. Измеримое пространство (L, Z) , где Z – алгебра Z содержит все одиночные множества из L , будем называть фазовым пространством состояний АС.

Определение 2. Измеримое пространство (V, U) , где U – алгебра U содержит все одноточечные множества из V , будем называть фазовым пространством управления.

Определение 3. Управляемым случайным процессом формирования обучающей информации $\{I_n, n = 0; 1; \dots\}$ назовем последовательность случайных величин, для которой заданы условные распределения вида

$$F(I_n | L_0, L_1, \dots, L_{n-1}; U_0, U_1, \dots, U_{n-1}). \quad (1)$$

Если условные вероятности (1) обладают свойством

$$F(I_n | L_0, L_1, \dots, L_{n-1}; U_0, U_1, \dots, U_{n-1}) = F_n(I_n | L_{n-1}, U_{n-1}), \quad (2)$$

то управляемый процесс $\{I_n\}$ является марковским.

Определим стратегию управления информационными процессами в АС.

Определение 4. Решающей функцией Π_n назовем условное распределение величины U_n при заданных значениях $L_0, L_1, \dots, L_{n-1}$ и $U_0, U_1, \dots, U_{n-1}$, т.е.

$$\Pi_n(U_n | L_0, L_1, \dots, L_{n-1}; U_0, U_1, \dots, U_{n-1}). \quad (3)$$

Определение 5. Последовательность Π решающих функций $\{\Pi_0, \Pi_1, \dots\}$ будем называть стратегией управления или стратегией принятия решений при проектировании АС. Если решающая функция (3) обладает свойством

$$\Pi_n(I_n | L_0, L_1, \dots, L_{n-1}; U_1, \dots, U_{n-1}) = \Pi_n(I_n | L_{n-1}, U_{n-1}), \quad (4)$$

то стратегия управления $\{\Pi_0, \Pi_1, \dots\}$ является марковской. При распределении Π_n , сосредоточенном в точке, стратегия управления является нерандомизированной. Стратегия определяет правило выбора управлений $\{U_n, n = 0; 1; \dots\}$ в зависимости от наблюдаемых состояний процесса $\{L_0, L_1, \dots\}$, описывающего функционирование АС с учетом выражений (2)-(4).

По заданному управляемому процессу $\{L_0, L_1, \dots\}$ и стратегии управления Π можно построить двумерную случайную $\{L_n, \Pi_n, n=0; 1, \dots\}$ последовательность с фиксированным начальным состоянием L_0 , которая задает управляемую стохастическую систему, являющуюся моделью управления информационными процессами в АС. С управляемой системой $\{L_n, U_n\}$ целесообразно агрегировать случайный процесс формирования обучающей информации $\{I_n\}$, тогда совокупность случайных процессов $\{I_n, L_n, U_n\}$ задает модель принятия решений при управлении информационными обменами.

С исследуемой системой $\{I_n, L_n, U_n\}$ можно связать различные функционалы, имеющие смысл стоимости, доходов выигрышей, рисков и т.д. В соответствии с поставленными целями будем использовать функционалы, оценивающие количество информации, накопленное в АС в процессе ее обучения [3]:

$$L = \Phi[I_n, L_n, U_n] = \sum_{i=1}^n L(I_i, U_i), \quad (5)$$

$$L_\gamma = \Phi_\gamma[I_n, L_n, U_n] = \sum_{i=1}^n \gamma_n L(I_i, U_i). \quad (6)$$

Параметр γ ($0 \leq \gamma \leq 1$) является коэффициентом дисконтирования и учитывает изменение ценности информации во времени, а L_γ – дисконтированной информацией.

Определение 6. Если существует такая стратегия Π управления информационными процессами в АС, что вычисляемые по формулам (5) и (6) величины обладают свойством: $L^*(\Pi) \geq L(\Pi)$, то будем называть ее оптимальной.

Количество информации L , получаемое АС в процессе обучения примем равным разности энтропий состояний АС до обучения и после, т.е.

$$L = H - \tilde{H}, \quad (7)$$

где H – априорная; $\tilde{H}$ – апостериорная энтропия.

Оптимальное управление информационными процессами при обучении

АС может быть найдено на основе следующей теоремы об энтропии АС.

Теорема 1 (энтропийная теорема АС).

Пусть T – время обучения АС, $P_I(t)$ – вероятность наличия обучающей информации в системе, $P_L(t)$ – вероятность восприятия обучающей информации системой, тогда апостериорная энтропия системы в момент времени T равна:

$$\begin{aligned} \hat{H}(T) = & - \int_T P_L(t) P_I(t) d(t) \frac{P_L(t) P_I(t)}{\int_T P_L(t) P_I(t) d(t)} \ln \frac{P_L(t) P_I(t)}{\int_T P_L(t) P_I(t) d(t)} dt - \\ & - \int P_L(t) [1 - P_I(t)] d(t) \frac{P_L(t) [1 - P_I(t)]}{\int_T P_L(t) [1 - P_I(t)] d(t)} \ln \frac{P_L(t) [1 - P_I(t)]}{\int_T P_L(t) [1 - P_I(t)] d(t)} dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Доказательство. Обозначим через $f_1(t)$ и $f_0(t)$ апостериорные плотности распределения времени восприятия и не восприятия информации АС, тогда условные апостериорные энтропии $H_1(t)$ и $H_0(t)$ для случаев восприятия и не восприятия обучающей информации равны

$$\begin{cases} H_1(T) = - \int_T f_1(t) \ln f_1(t) dt, \\ H_0(T) = - \int_T f_0(t) \ln f_0(t) dt, \end{cases} \quad (9)$$

и средняя апостериорная энтропия $\hat{H}(T)$ АС равна

$$\hat{H}(T) = P_{IT} H_1(T) + Q_{IT} H_0(T), \quad (10)$$

где P_{IT} и Q_{IT} – безусловные вероятности осуществления и неосуществления процесса обучения. Найдем выражения для вычисления $f_1(t)$ и $f_0(t)$, когда даны функции $P_I(t)$ и $P_L(t)$.

Введем $P_{IL}(t)$ – вероятность успешного обучения системы во время t при условии, что на ее вход поступает обучающая информация.

По теореме о среднем значении интеграла имеем:

$$P_{IL}(t_0 < t < t_0 + \Delta t) = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f_1(t) dt = f_1(t_1) \Delta t, \quad (11)$$

где $t_0 + \Delta t \in [0; T]$ и $t_1 \in [0; T]$.

Одновременно с этим по теореме Байеса

$$P_{IL}(t_0 < t < t_0 + \Delta t) = \frac{P_L(t_0) \tilde{P}_{LA}(t_0 < t < t_0 + \Delta t)}{P(T)}, \quad (12)$$

где $\tilde{P}_{LA}$ – апостериорная вероятность готовности АС к обучению на интервале $[t_0 + \Delta t]$ и

$$\tilde{P}_{LA}(t_0 < t < t_0 + \Delta t) = P_I(t) \Delta t. \quad (13)$$

По формуле полной вероятности получаем

$$P(T) = \int_T P_L(t) P_I(t) dt. \quad (14)$$

Приравнявая выражения (11), (12) и используя соотношения (13) и (14), получаем

$$f_1(t) = \frac{P_I(t) P_L(t)}{\int_T P_I(t) P_L(t) d(t)}. \quad (15)$$

Аналогично находим

$$f_0(t) = \frac{Q_I(t) P_L(t)}{\int_T Q_I(t) P_L(t) d(t)}, \quad (16)$$

где $Q_I(t)$ – вероятность отсутствия обучающей информации на входе системы.

Условие нормировки $P_I(t)$ и $Q_I(t)$ считаем выполненным, т.е.

$$P_I(t) + Q_I(t) = 1, t \in [0; T]. \quad (17)$$

С учетом (17) равенство (16) принимает следующий вид:

$$f_0(t) = \frac{[1 - P_I(t)] P_L(t)}{\int_T [1 - P_I(t)] P_L(t) dt}. \quad (18)$$

Подставляя выражения (15) и (18) в (9) и с учетом (10), получаем формулу (8), что и доказывает энтропийную теорему.

Энтропийная теорема и выражение (7) являются конструктивным средством исследования стратегий управления обучением АС. Ее использование позволяет осуществить анализ обучающих функций $P_I(t)$ и $P_L(t)$ с целью отыскания управлений, обеспечивающих накопление максимального количества информации в АС при ее обучении

Рассмотрим две специальные задачи оценки энтропии систем,

возникающих при обучении, и их решение с использованием доказанной теоремы.

Задача 1 Найти энтропию системы, когда обучающие функции $P_I(t)$ и $P_L(t)$ являются константами: $P_I(t) = a$, $P_L(t) = b$.

С использованием формулы (8) получаем

$$\mathcal{H}(T) = bT \ln T.$$

Задача 2 Найти энтропию системы, когда обучающая функция $P_I(t)$ является константой, а $P_L(t)$ – линейно-возрастающей на отрезке $[0,1]$, т.е. $P_L(t) = t$. В этом случае получаем

$$\mathcal{H}(T) = \frac{1}{2}T(-\ln 2 + \ln T + \frac{1}{2}).$$

Библиография

1 Буш Р. Стохастические модели обучаемости / Р. Буш, Ф. Мостеллер. — М.: Физматгиз, 1962. — 484 с.

2 Маньшин Г.Г. Обеспечение качества функционирования автоматизированных систем / Г.Г. Маньшин, С.В. Кирпич. — Минск: Наука и техника, 1986. — 222 с.

3 Аткинсон Р. Введение в математическую теорию обучения / Р. Аткинсон, Г. Бауэр, Э. Кротерс. — М.: Радио и связь, 1984. — 486 с.

Поступила в редакцию 12.12.2001 г.