

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О.Р. Ластовенко

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА. АЛГЕБРА

Методические указания
к проведению практических занятий
по курсу «Элементарная математика»
для студентов направления
44.03.05 «Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки)»,
профили: «Математика и физика», «Математика и информатика»

Севастополь
СевГУ
2023

УДК 511.1(076.5)
ББК 22.1я73
Л266

Р е ц е н з е н т:

С.О. Папков – д-р физ.-мат. наук,
заведующий кафедрой «Высшая математика»

Ластовенко О.Р.

Л266 Элементарная математика. Алгебра: методические указания к проведению практических занятий по курсу «Элементарная математика» для студентов направления 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)», профили: «Математика и физика», «Математика и информатика» / О.Р. Ластовенко ; Севастопольский государственный университет. – Севастополь: СевГУ, 2023. – 49 с.: ил. – Текст: электронный.

В пособии приведены основные сведения из теории, а также подробные решения примеров задач. В конце приведены варианты индивидуальных заданий с ответами, приводится список рекомендуемой литературы.

Методические указания разработаны преподавателем кафедры «Высшая математика» СевГУ и предназначены для студентов 3 и 4 курсов направления 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)», (профили: «Математика и физика», «Математика и информатика»), а также для студентов-практикантов. Пособие может быть использовано преподавателями, ведущими практические занятия.

УДК 511.1(076.5)
ББК 22.1я73

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Высшая математика», № 4 от 20 ноября 2023 года.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Уравнения и неравенства с одной неизвестной.....	4
2. Линейные и квадратные уравнения.....	5
3. Линейные и квадратные неравенства.....	6
4. Рациональные уравнения с одной неизвестной.....	8
5. Метод интервалов решения рациональных неравенств.....	9
6. Уравнения и неравенства с модулем.....	11
7. Многочлены.....	14
8. Иррациональные уравнения и неравенства.....	18
9. Показательные уравнения и неравенства.....	22
10. Логарифмические уравнения и неравенства.....	25
11. Метод замены множителя или метод рационализации.....	29
12. Тригонометрические уравнения и неравенства.....	32
13. Задания для самостоятельного решения.....	44
Литература.....	49

1. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ

Уравнение с одной неизвестной x может быть записано в виде $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – функции переменной x .

Число a называется *корнем* или *решением* уравнения, если для него справедливо числовое равенство: $f(a) = g(a)$. Решить уравнение означает найти все его корни, или доказать, что уравнение не имеет решений.

Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения называется множество значений x , при которых определены и функция $f(x)$, и функция $g(x)$.

Два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называются *равносильными*, если совпадают их множества решений. При этом пишут: $f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$. **В частности, два уравнения являются согласно определению равносильными, если оба уравнения не имеют решений.**

Неравенство с одной неизвестной x может быть записано в виде $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – функции переменной x . Число a называется *решением неравенства* $f(x) > g(x)$, если для него справедливо числовое неравенство: $f(a) > g(a)$. Аналогично определяется решение неравенства $f(x) < g(x)$. **Решить неравенство означает найти все его решения или доказать, что неравенство решений не имеет.** Множество всех решений неравенства принадлежит ОДЗ неизвестной этого неравенства, т.е. пересечению областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$.

Два неравенства $f_1(x) > g_1(x)$ и $f_2(x) > g_2(x)$ называются *равносильными*, если совпадают множества их решений. При этом пишут $f_1(x) > g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) > g_2(x)$.

Решить систему уравнений (неравенств) с одной неизвестной – значит найти все числа, являющиеся решением каждого из уравнений (неравенств), входящих в систему, или доказать, что таких чисел не существует.

Система двух уравнений с одной неизвестной записывается следующим образом:

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) = g_2(x). \end{cases}$$

Аналогично обозначаются системы неравенств и смешанные системы.

Говорят, что уравнение (неравенство, система) равносильно некоторой системе, если множество решений уравнения (неравенства, системы) и системы совпадают.

Решить совокупность уравнений (неравенств, систем) с одной неизвестной – значит найти все числа, являющиеся решением хотя бы одного уравнения (неравенства, системы), входящего в данную совокупность, или доказать, что таких чисел не существует.

Совокупность уравнений $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ записывается следующим образом: $\begin{cases} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) = g_2(x). \end{cases}$ Аналогично обозначается совокупность, в которую входят

уравнения, неравенства и системы. Говорят, что уравнение (неравенство, система) равносильно некоторой совокупности уравнений (неравенств, систем), если множество решений уравнения (неравенства, системы) совпадает с множеством решений этой совокупности.

2. ЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Линейным уравнением называется уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b – действительные числа, причём $a \neq 0$.

Решение уравнения:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{a}, & a \neq 0; \\ x \in R, & a = b = 0; \\ x \in \emptyset, & a = 0, b \neq 0. \end{cases}$$

Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – числа, причём $a \neq 0$. Решение квадратного уравнения зависит от *дискриминанта* D квадратного уравнения, который вычисляется по формуле $D = b^2 - 4ac$.

Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два действительных различных корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ и тогда } ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет два совпадающих действительных корня: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ и тогда $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

Если коэффициент b квадратного уравнения является чётным числом, то корни

квадратного уравнения удобнее вычислять по формуле: $x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$, где

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac.$$

Теорема Виета. Произведение корней x_1 и x_2 квадратного уравнения равно $\frac{c}{a}$, а сумма равна $-\frac{b}{a}$: $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = c/a \\ x_1 + x_2 = -b/a \end{cases}$.

В частности, если квадратное уравнение является приведённым, т.е. $a = 1$, то

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = c \\ x_1 + x_2 = -b \end{cases}$$

3. ЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Линейным неравенством называется неравенство вида $ax + b > 0$ или $ax + b < 0$, где a и b – действительные числа, причём $a \neq 0$.

Решение неравенства $ax + b > 0$

$$ax + b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{b}{a}, & a > 0; \\ x < -\frac{b}{a}, & a < 0; \\ x \in R, a = 0, b > 0; \\ x \in \emptyset, a = 0, b \leq 0. \end{cases}$$

Нестрогое неравенство $ax + b \geq 0$ равносильно совокупности строгого неравенства и уравнения:

$$ax + b \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax + b > 0, \\ ax + b = 0. \end{cases}$$

Поэтому, чтобы получить решение нестрогого неравенства $ax + b \geq 0$, достаточно к решению строгого неравенства $ax + b > 0$ присоединить решение уравнения $ax + b = 0$, т.е. число $-\frac{b}{a}$. Аналогично решаются неравенства $ax + b < 0$ и $ax + b \leq 0$.

Квадратным неравенством называется неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$, где a , b и c – действительные числа, причём $a \neq 0$.

Если $a < 0$, то, умножив обе части неравенства на (-1) и, изменив знак неравенства на противоположный, мы получим неравенство, равносильное исходному и имеющее положительный коэффициент при x^2 .

Рассмотрим решение квадратного неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$). Решение такого неравенства нетрудно получить на основе анализа расположения графика функции $y = ax^2 + bx + c$ (т.е. параболы) относительно оси Ox в зависимости от коэффициентов a , b и c . Так как согласно предположению $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх (в положительном направлении оси Oy). Пусть D – дискриминант квадратного трёхчлена. Если $D < 0$, то квадратный трёхчлен не имеет корней, парабола не пересекает ось Ox , а, значит, расположена выше оси Ox , как показано на рис. 1, а. Поэтому решением неравенства является любое действительное число: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Если $D = 0$, то квадратный трёхчлен имеет два одинаковых корня $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, парабола касается оси Ox в точке с абсциссой $x = -\frac{b}{2a}$, а, следовательно, $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, что изображено на рис. 1, б.

Если $D > 0$, то квадратный трёхчлен имеет два действительных различных корня $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, парабола пересекает ось Ox в точках с абсциссами x_1 и x_2 , а решением неравенства является любое действительное число, которое меньше меньшего корня x_1 или больше большего корня x_2 : $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, представлено на рис. 1, в.

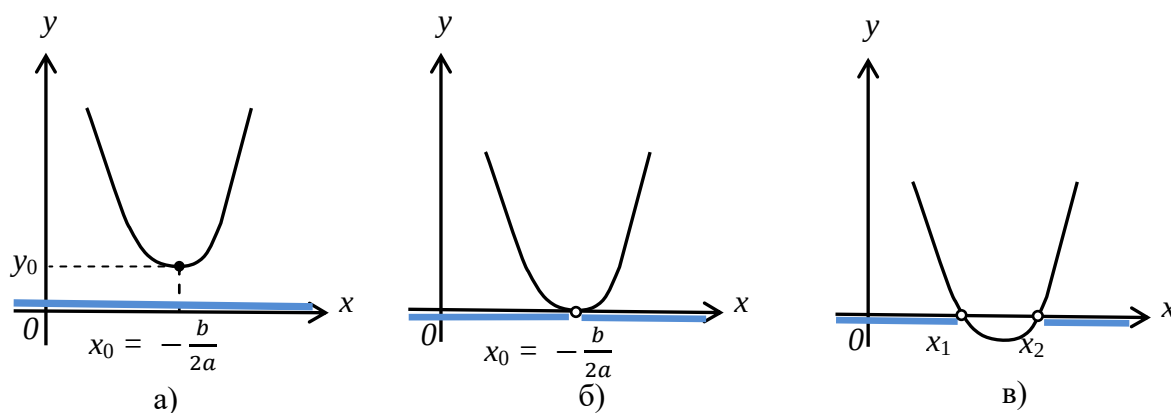


Рисунок 1. Расположение параболы относительно осей координат: а) $D < 0$, б) $D = 0$, в) $D > 0$

Рассмотрим решение квадратного неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$). Если $D \leq 0$, то $x \in \emptyset$. Если $D > 0$, то $x \in (x_1, x_2)$. Каждое нестрогое квадратное неравенство $ax^2 + bx + c \geq 0$ или $x^2 + bx + c \leq 0$ равносильно совокупности соответствующего строгого квадратного неравенства и квадратного уравнения. Поэтому, для того чтобы получить решение нестроого неравенства, достаточно к решению строгого неравенства присоединить решения квадратного уравнения. Отметим также, что при решении нестроого неравенства уравнение и строгое неравенство решаются одновременно. Квадратные неравенства можно также решать методом интервалов.

4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ

Рациональное уравнение с одной неизвестной может быть записано в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены n -й степени. Степенью рационального уравнения $P(x) = 0$ называется степень многочлена $P(x)$. В частности, если $Q(x) \equiv 1$, то рациональное уравнение принимает вид $P(x) = 0$ и называется целым рациональным уравнением. В ином случае рациональное уравнение называется дробно-рациональным.

Очевидно, что $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$ Это значит, что решение дробно-рациональных

уравнений сводится к решению целых рациональных уравнений. Решаются они разложением числителя и знаменателя на простейшие множители.

Линейные и квадратные уравнения представляют собой целые рациональные уравнения первой и второй степени соответственно. Решения линейного и квадратного уравнений очень просто выражаются через коэффициенты этих уравнений и могут быть найдены по соответствующим формулам. В случае уравнений более высоких степеней таких формул либо не существует, либо они являются практически малоприменимыми и не используются при решении уравнений. Поэтому рациональные уравнения третьей, четвёртой и т.д. степеней стремятся свести к равносильной совокупности линейных или квадратных уравнений. Основными приёмами, которые используются для достижения указанной цели, являются *разложение на множители* и *замена переменной*. Эти методы также используются при решении дробно-рациональных уравнений. Ниже приведены некоторые типы рациональных уравнений и способы их решения.

1. Биквадратные уравнения, т.е. уравнения вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Замена переменной $x^2 = y, y \geq 0$ позволяет свести это уравнение к квадратному относительно y .
2. Трёхчленные уравнения, аналогичные биквадратному, т.е. уравнения вида $ax^{2n} + bx^n + c = 0$. Замена: $x^n = t$.
3. Симметричные уравнения 4-й степени, т.е. уравнения вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$. Такое уравнение нужно разделить на x^2 и ввести замену $x + \frac{1}{x} = t$.
4. Возвратные уравнения 4-й степени, т.е. уравнения вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, где $ad^2 = eb^2$. Замена $x + \frac{d}{bx} = t$. Возвратные уравнения являются обобщением симметричных уравнений и решаются аналогично.
5. Уравнения вида $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = A$. В этом случае нужно множители разместить по возрастанию коэффициентов a, b, c, d и объединить в группы первый, четвёртый и второй, третий множители.
6. Уравнения вида $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = Ax^2$. Объединить в группы первый и четвёртый, второй и третий множители, как в случае 5.
7. Уравнения вида $(f(x))^2 + f(x)g(x) + (g(x))^2 = 0$ – однородные уравнения 2-й степени однородности относительно $f(x)$ и $g(x)$. Замена $f(x) = t \cdot g(x)$.
8. Уравнения вида $(x-a)^4 + (x-b)^4 = A$. Замена: $x - \frac{a+b}{2} = t$.

5. МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ РЕШЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Рациональным неравенством называется неравенство вида:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0,$$

где $P(x), Q(x)$ – многочлены. Если $Q(x)$ – многочлен нулевой степени, то неравенство называется целым рациональным и записывается так:

$$P(x) > 0, P(x) < 0, P(x) \geq 0, P(x) \leq 0.$$

Для того чтобы решить неравенство методом интервалов, нужно выполнить следующие действия:

- 1) записать неравенство в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0\right)$ или $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0\right)$;

- 2) разложить многочлены $P(x)$, $Q(x)$ на линейные и квадратичные множители, дискриминант которых меньше нуля;
- 3) избавиться от квадратичных множителей, которые не меняют знак на всей числовой оси;
- 4) отметить на числовой оси корни многочленов $P(x)$, $Q(x)$, причём корни знаменателя $Q(x)$ – **прозрачные точки**;
- 5) определить знак левой части неравенства в каждом из интервалов, на которые корни многочленов разбивают числовую ось;
- 6) записать ответ в виде объединения интервалов.

$$1. \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x)Q(x) > 0$$

$$2. \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)Q(x) \geq 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$3. \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \Leftrightarrow P(x)Q(x) < 0$$

$$4. \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)Q(x) \leq 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

Если в разложении на множители числителя и знаменателя x записать первым с коэффициентом 1, то расположив по возрастанию корни многочленов на числовой оси слева направо, расставляем знаки промежутков по следующему правилу: начиная с крайнего правого промежутка, имеющего знак «+», меняем знак на нечётной степени и сохраняем на чётной.

Пример 1. Пусть дано неравенство $\frac{(x-3)^2(7-x)^3(x+1)}{(x+2)^4(x-2)} \geq 0$. Представим неравенство в виде $\frac{(x-3)^2(-1)^3(x-7)^3(x+1)}{(x+2)^4(x-2)} \geq 0$, тогда умножая на (-1) получим $\frac{(x-3)^2(x-7)^3(x+1)}{(x+2)^4(x-2)} \leq 0$. Отметим чёрными точками нули числителя, а прозрачными – нули знаменателя, как показано на рисунке 2. Если бы неравенство было строгим, то нужно было бы все нули сделать прозрачными.

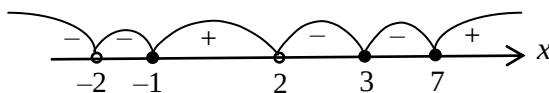


Рисунок 2. Метод интервалов

Расставляем знаки по правилу, указанному выше и записываем ответ.

Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (-2; -1] \cup (2; 7]$.

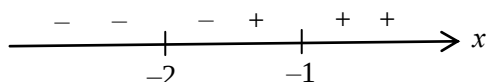
6. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Модулем действительного числа a называется неотрицательное число a , если $a \geq 0$, и число $(-a)$, если $a < 0$. Модуль числа a обозначают символом $|a|$. Таким образом, согласно определению:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Из определения видно, что модуль любого числа неотрицателен. В примере ниже рассмотрим случай раскрытия модуля по определению, т.е. применён метод промежутков.

Пример 2. $|x + 1| + |x + 2| = 2$. Подмодульные выражения обращаются в нуль при $x = -1, -2$. Отметим эти значения на числовой оси и рассмотрим три промежутка. Исходное уравнение на каждом промежутке заменяется равносильным ему, не содержащим знаков абсолютной величины. Для этого на каждом промежутке выбирают некоторое значение x и при данном значении определяют знак подмодульного выражения и записывают его со знаком «+», либо со знаком «-» согласно определению.



1. При $x \leq -2$: $|x + 1| = -x - 1$, $|x + 2| = -x - 2$, тогда получим выражение $-x - 1 - x - 2 = 2$, $-2x = 5$, $x = -5/2$, $-5/2 \leq 2$. В ответ запишем $x = -5/2$.

2. При $-2 \leq x \leq -1$: $|x + 1| = -x - 1$, $|x + 2| = x + 2$, тогда получим выражение $-x - 1 + x + 2 = 2$ – нет решений.

3. При $x \geq -1$: $|x + 1| = x + 1$, $|x + 2| = x + 2$, тогда получим выражение $x + 1 + x + 2 = 2$, $2x = -1$, $x = -1/2$, $-1/2 > -1$. В ответ запишем $x = -1/2$.

Ответ: $-5/2, -1/2$.

Также можно знаки подмодульных выражений отметить в порядке их следования на числовой оси, а затем только записывать выражения на соответствующих промежутках, как показано на рисунке.

Основные свойства модуля

- 1) $|a| \geq 0$;
- 2) $|a| \geq a$;
- 3) $|-a| = |a|$;
- 4) $|ab| = |a| \cdot |b|$;
- 5) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$;

$$6) |a| + |b| = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0; \end{cases} \quad 7) |a| + |b| = |a + b| \Leftrightarrow ab \geq 0; \quad 8) |a + b| \leq |a| + |b|;$$

$$9) |a - b| \geq ||a| - |b||; \quad 10) |a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|; \quad 11) |a|^2 = a^2.$$

Геометрический смысл модуля

С геометрической точки зрения $|x|$ – расстояние от точки начала отсчёта O числовой оси до точки, изображающей число x , а $|x - a|$ – расстояние между точками x и a числовой оси.

Уравнения с модулем

Не во всех уравнениях целесообразно раскрывать модуль, пользуясь определением модуля. В таких случаях переходят к равносильным системам уравнений или совокупности уравнений. Ниже приведены такие случаи.

$$1. |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \quad 2. |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \end{cases}$$

$$3. |f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \quad 4. |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}, \text{ но есть лишние корни}$$

$$5. |f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x)$$

Пример 3. $|x^2 + 5x + 9| = x + 6$. Дискриминант квадратного трёхчлена, стоящего под знаком модуля отрицательный, следовательно, ни при каких значениях x это выражение не обращается в нуль. Воспользуемся схемой номер 1.

$$\begin{cases} x + 6 \geq 0 \\ x^2 + 5x + 9 = x + 6 \\ x^2 + 5x + 9 = -x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -6 \\ x^2 + 4x + 3 = 0 \\ x^2 + 6x + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -6 \\ x = -3 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Квадратный трёхчлен $x^2 + 6x + 15 = 0$ не имеет действительных корней, т.к. его дискриминант отрицателен.

Ответ: $-3; -1$.

Эту же задачу можно решить воспользовавшись схемой 2, но решение будет длиннее.

Вообще, выбор способа решения зависит от того, что проще решить.

Пример 4. $|x^2 + 13x + 35| = |35 - x^2|$. Квадратный трёхчлен $x^2 + 13x + 35$ имеет действительные корни, но дискриминант равен 29, что не позволяет вычислить корни точно. Поэтому воспользуемся схемой 3.

$$\begin{aligned} |x^2 + 13x + 35| = |35 - x^2| &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 13x + 35 = 35 - x^2 \\ x^2 + 13x + 35 = -(35 - x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 13x = 0 \\ 13x + 70 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -13/2 \\ x = -70/13 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $-13/2, -70/13, 0$.

Пример 5. Рассмотрим решение этого примера, применяя схему 5.

$$\begin{aligned} |x^2 + 13x + 35| = |35 - x^2| &\Leftrightarrow (x^2 + 13x + 35)^2 = (35 - x^2)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 13x + 35)^2 - (35 - x^2)^2 = 0 \end{aligned}$$

Далее применим формулу разности квадратов:

$$\begin{aligned} ((x^2 + 13x + 35) - (35 - x^2))((x^2 + 13x + 35) + (35 - x^2)) &= 0 \\ (2x^2 + 13x)(13x + 70) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -13/2 \\ x = -70/13 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $-13/2, -70/13, 0$.

Пример 6. $|\sin x| = \cos 2x$. При решении этой задачи сделаем замену и применим схему 4.

Пусть $\sin x = t$, тогда $\cos 2x = 1 - 2t^2$, отсюда

$$\begin{cases} t = 1 - 2t^2 \\ t = 2t^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 + t - 1 = 0 \\ 2t^2 - t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1/2 \\ t = -1 \\ t = -1/2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Найденные решения нужно проверить, для этого подставим эти значения в начальное условие. Проверка показала, что 1 и -1 не подходят, поэтому запишем:

$$\begin{cases} t = 1/2 \\ t = -1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1/2 \\ \sin x = -1/2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Неравенства с модулем

При решении неравенств с модулем можно раскрывать модуль, пользуясь определением либо использовать метод равносильных переходов, что является более рациональным способом решения.

$$1. |f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases} \quad 2. |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

$$3. |f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ f(x) \leq -g(x) \end{cases} \quad 4. |f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases}$$

Стоит отметить, что функция $g(x)$, стоящая справа может быть постоянной.

Пример 7. $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$.

$$|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 3x - 3 \\ x^2 - 2x - 3 > -3x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x < 0 \\ x^2 + x - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 5) < 0 \\ (x - 2)(x + 3) > 0 \end{cases}$$

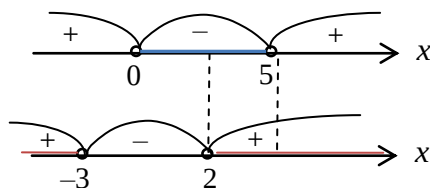


Рисунок 3. Множество решений.

Решим систему неравенств методом промежутков. Из рисунка видно, что множеством решений является интервал $(2; 5)$.

Ответ: $(2; 5)$.

7. МНОГОЧЛЕНЫ

Многочленом (полиномом) степени n относительно одной переменной x называется выражение вида:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_kx^{n-k} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ – заданные действительные или комплексные числа, которые называются коэффициентами многочлена, причём $a_0 \neq 0$. Вышеприведенная форма называется канонической записью многочлена n – ой степени. Слагаемое a_0x^n называется старшим членом многочлена $P(x)$, a_0 – старший коэффициент, a_n – свободный член. Если $a_0 = 1$, то многочлен называется приведённым. Многочлен 1-ой степени $P_1(x) = a_0x + a_1$ представляет собой линейную функцию, многочлен $P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ представляет собой квадратичную функцию (квадратный трёхчлен) и т.д.

Многочлены равны, если равны коэффициенты при одинаковых степенях x . Многочлены можно складывать, вычитать, умножать друг на друга, возводить в натуральную степень – в результате получается также многочлен. Эти действия

производятся по известным правилам и сводятся, в конечном счёте, к приведению подобных членов.

Операции сложения и умножения многочленов обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

Если многочлен $P(x)$ можно представить в виде произведения $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$, то говорят, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$. При этом $P(x)$ – делимое, $Q(x)$ – делитель, $S(x)$ – частное от деления. Покажем на примере, как производится деление многочленов.

Пример 8. Пусть требуется разделить многочлен $(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$ на двучлен $(x + 1)$. Для этого расположим многочлены по убывающим степеням x . Далее делим старший член делимого x^3 на старший член делителя x . Полученное частное нужно поставить в строку для результата. Умножить это частное на делитель и записать результат под делимым так, чтобы члены, имеющие одинаковые степени, располагались в одной колонке. Затем производим вычитание. Далее приписываем к разности следующие члены делимого и снова повторяем вышеуказанные действия:

$$\begin{array}{r} x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \mid x + 1 \\ \underline{-x^3 + x^2} x^2 \\ 5x^2 + 11x + 6 \\ \dots \end{array}$$

Так продолжаем до тех пор, пока остаток не будет равен нулю, либо степень остатка не будет меньше степени делителя:

$$\begin{array}{r} x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \mid x + 1 \\ \underline{-x^3 + x^2} x^2 + 5x + 6 \\ 5x^2 + 11x + 6 \\ \underline{-5x^2 + 5x} 6x + 6 \\ \underline{-6x + 6} 0 \end{array}$$

Таким образом, можно записать: $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x^2 + 5x + 6)(x + 1)$. Квадратный трёхчлен $x^2 + 5x + 6$ имеет корни -2 , -3 , тогда окончательно многочлен можно представить $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

Если многочлен $P(x)$ можно представить в виде $P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x)$, то говорят, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$ с остатком. При этом $P(x)$ – делимое, $Q(x)$ – делитель, $S(x)$ – неполное частное от деления, $R(x)$ – остаток от деления. Алгоритм деления такой же, как и в рассмотренном примере 8.

Пример 9. Пусть нужно разделить многочлен $(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$ на двучлен $(x + 4)$:

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \overline{) x + 4} \\
 \underline{-x^3 + 4x^2} \\
 2x^2 + 11x + 6 \\
 \underline{-2x^2 + 8x} \\
 3x + 6 \\
 \underline{-3x + 12} \\
 -6
 \end{array}$$

Теперь можно записать $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x^2 + 2x + 3)(x + 4) - 6$.

Теорема Безу

Если при некотором значении $x = x_0$ многочлен $P(x)$ обращается в нуль, т.е. $P(x_0) = 0$, то число x_0 называется **корнем** многочлена.

Теорема Безу. Пусть $P_n(x)$ – многочлен степени n , a – произвольное число, то при делении многочлена $P_n(x)$ на двучлен $(x - a)$ получается остаток, равный значению многочлена при $x = a$, т.е. $R = P_n(a)$.

Следствие 1. Если $x = a$ – корень многочлена $P(x)$, т.е. $P(a) = 0$, то $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$.

Многочлен $P(x)$ делится на $(x - a)$ тогда и только тогда, когда $P(a) = 0$, т.е., когда a – корень многочлена $P(x)$.

Следствие 2. Если многочлен $P_n(x)$ имеет n корней $x_1, x_2, \dots, x_n$, то $P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$, где a_0 – старший коэффициент многочлена $P_n(x)$.

Преобразование многочлена в произведение нескольких сомножителей – многочленов или одночленов – называется **разложением многочлена** на множители. Нахождение корней многочлена равносильно нахождению его линейных множителей.

Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами

Теорема. Если многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_kx^{n-k} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$, с целыми коэффициентами имеет рациональный корень $x_0 = p/q$, причём эта дробь несократима, то p – делитель свободного члена a_n , а q – делитель старшего коэффициента a_0 .

Следствие. Если все коэффициенты многочлена степени $n \geq 1$ – целые числа и корень x_0 этого многочлена – также целое число, то x_0 – делитель свободного члена многочлена a_n .

Теорема. Если многочлен $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_kx^{n-k} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами и $a_0 = 1$, имеет рациональный корень, то этот корень – целое число.

Теорема. Всякий многочлен степени большей или равной единице имеет по крайней мере один действительный или комплексный корень.

Теорема. Если многочлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $\alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in R$, то число $\alpha - i\beta$ также корень.

Следствие. Любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами.

Теорема. Многочлен $P_n(x)$ может быть единственным образом, с точностью до порядка следования множителей, представлен в виде $P_n(x) = a_0(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_s)^{m_s}$, $m_1 + m_2 + \dots + m_s = n$, где $x_1, x_2, \dots, x_s$ – корни многочлена (в общем случае комплексные), а числа $m_1, m_2, \dots, m_s$ – кратности соответствующих корней.

Корни кратности 1 называют простыми, корни кратности 2 – двукратные и т.д.

Теорема. Всякий многочлен степени n имеет ровно n корней действительных или комплексных. При этом каждый корень считается столько раз, сколько раз соответствующая ему скобка входит в разложение многочлена на линейные множители.

Пример 10. Разложить на множители многочлен $P(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$. Так как многочлен является приведённым, то делителями свободного члена являются целые числа $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$. Подставим их в заданный многочлен: $P(1) = 12, P(-1) = 30, P(2) = 0$. Корнем многочлена является $x = 2$. Разделим многочлен на $(x - 2)$:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \mid x - 2 \\
 \underline{-x^3 + 2x^2} \\
 -x^2 - 10x + 24 \\
 \underline{-x^2 + 2x} \\
 -12x + 24 \\
 \underline{-12x + 24} \\
 0
 \end{array}$$

Корнями многочлена $x^2 - x - 12$ являются числа $-3, 4$. Тогда получим $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x - 2)(x + 3)(x - 4)$.

Если удалось найти хотя бы один корень многочлена $P(x)$, например, a , то нужно разделить его на $(x - a)$. Получится многочлен $Q(x)$ меньшей степени. Если угадать корень многочлена $Q(x)$, например, b , то нужно разделить $Q(x)$ на $(x - b)$ и получить многочлен ещё меньшей степени и т.д. Если ничто не мешает угадывать корни, то в итоге они все

будут найдены и можно представить многочлен $P(x)$ в виде произведения множителей. Если многочлен не является приведённым, то удобно старший член a_0 вынести за скобки.

8. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Если задача касается кубического корня, то её нужно решать просто уединяя корни и возводя их в куб. Это будет являться равносильным преобразованием. Если корень квадратный, то нужно строго следить за ОДЗ, а также проверять найденные решения.

Способ решения – освобождение от иррациональности:

- равносильные преобразования;
- переход к уравнению-следствию;
- замена переменной.

Ниже приведены равносильные преобразования для различных видов уравнений:

$$1. \sqrt[2k+1]{f(x)} = \sqrt[2k+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$2. \sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ или } \sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

$$3. \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \text{ не является ошибкой написать так:}$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Уравнения решаются, а неравенства проверяются.

$$4. \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} + g(x) = h(x) \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \text{ если функции } f(x),$$

$g(x), h(x)$ – линейные. В случае, когда хоть одна из функций не является линейной, то общего метода решения не существует.

$$5. \sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0, \text{ произведение двух сомножителей равно нулю, если} \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

хотя бы один из них равен нулю, а второй имеет смысл.

О последней части этого утверждения часто забывают, следствием чего является включение посторонних корней в ответ. Если знак совокупности не использовать, то нужно рассмотреть два случая. К этому же типу можно отнести уравнения вида:

$$\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \frac{\sqrt{g(x)}}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}.$$

$$6. \quad \sqrt[2k]{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^{2n}, \text{ если } a \geq 0,$$

$$\sqrt[2k]{f(x)} = a \Leftrightarrow x = \emptyset, \text{ если } a < 0.$$

Частой ошибкой при решении иррациональных уравнений является неверное преобразование корня из произведения двух функций в произведение корней и обратное преобразование. Область определения $\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)}$ уже области определения $\sqrt{f(x)g(x)}$, поэтому при переходе от корня произведения к произведению корней можно потерять решения, чтобы этого не произошло, рассматривают два случая. При обратном переходе возможно приобретение посторонних корней. Эти решения исключаются с помощью проверки.

$$7. \quad \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} \text{ определено, если } \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)g(x)} \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)}, \text{ если } \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)g(x)} \Leftrightarrow \sqrt{-f(x)} \cdot \sqrt{-g(x)}, \text{ если } \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Дополнительно нужно выполнять проверку решений.

$$8. \quad af(x) + b\sqrt{f(x)} + c = 0, \text{ замена } z = \sqrt{f(x)}, z \geq 0.$$

Нужно помнить ещё одно важное соотношение: $\sqrt[2k]{f^{2k}(x)} = |f(x)|$.

Пример 11. Решить уравнение $x\sqrt{36x + 1261} = 18x^2 - 17x$. Один корень этого уравнения очевиден $x = 0$.

$$\text{Рассмотрим выражение: } \sqrt{36x + 1261} = 18x - 17 \Leftrightarrow \begin{cases} 36x + 1261 = (18x - 17)^2 \\ 18x - 17 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36x + 1261 = 324x^2 - 612x + 289 \\ x \geq 17/18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 324x^2 - 648x - 972 = 0 \\ x \geq 17/18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x \geq 17/18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases} \\ x \geq 17/18 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: 0, 3.

Пример 12. Решить уравнение $\sqrt{3x+7} \cdot (x^2 - 5|x| + 6) = 0$. Преобразуем уравнение в равносильную ему совокупность.

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+7} \cdot (x^2 - 5|x| + 6) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+7=0 \\ x^2 - 5|x| + 6 = 0 \\ 3x+7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7/3 \\ x^2 - 5|x| + 6 = 0 \\ x \geq -7/3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -7/3 \\ x^2 + 5x + 6 = 0 \\ -7/3 \leq x < 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7/3 \\ \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases} \\ -7/3 \leq x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7/3 \\ x = -2 \\ -7/3 \leq x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7/3 \\ x = -2 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7/3 \\ x = -2 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $-7/3, -2, 2, 3$.

Пример 13. Решить уравнение $1 - \sqrt{1 - x\sqrt{16 + x^2}} = x$. Преобразуем уравнение и составим равносильную систему:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - x\sqrt{16 + x^2}} = 1 - x &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 1 - x\sqrt{16 + x^2} = x^2 - 2x + 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{16 + x^2} = 2 - x \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 + 16 = 4 - 4x + x^2 \\ 2 - x \geq 0 \\ x = 0 \end{cases} \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 3 \\ x \leq 2 \\ x = 0 \end{cases} \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $-3, 0$.

Пример 14. Решить уравнение $2\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt{1-2x} + \sqrt{2x(1+2x)}$.

Найдём ОДЗ: $\begin{cases} 1+2x \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \\ 2x(1+2x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0; 0,5] \cup \{-0,5\}$.

Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$\begin{aligned} 4(1+2x) + 4\sqrt{1+2x}\sqrt{1-2x} + (1-2x) &= 1-2x + \sqrt{2x(1+2x)} \\ 4\sqrt{(1+2x)}^2 + 4\sqrt{1+2x}\sqrt{1-2x} &= \sqrt{2x(1+2x)} \end{aligned}$$

Далее вынесем общий множитель за скобки:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+2x} (4\sqrt{1+2x} + 4\sqrt{1-2x} - \sqrt{2x}) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+2x} = 0 \\ 4\sqrt{1+2x} + 4\sqrt{1-2x} = \sqrt{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,5 \\ 16(1+2x) + 32\sqrt{(1+2x)(1-2x)} + 16(1-2x) = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,5 \\ 16\sqrt{(1+2x)(1-2x)} = x - 16 \end{cases} \end{aligned}$$

Один корень $x = -0,5$ определён, второе уравнение решим отдельно.

$$16\sqrt{(1+2x)(1-2x)} = x - 16 \Leftrightarrow \begin{cases} 256(1-4x^2) = x^2 - 32x + 256 \\ x - 16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1025x^2 + 32x = 0 \\ x \geq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(-1025x + 32) = 0 \\ x \geq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 32/1025 - \text{решений нет.} \\ x \geq 16 \end{cases}$$

Таким образом корнем является значение $x = -0,5$.

Ответ: $-0,5$.

Иррациональные неравенства

При решении иррациональных неравенств, применяют равносильные преобразования. Важно помнить, что *возводить обе части неравенства в квадрат можно только, если они неотрицательны.*

$$1. \sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad 3. \sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$2. \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad 4. \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Пример 15. Решить неравенство $\sqrt{2x - x^2 + 1} \geq 2x - 3$.

Рассмотрим совокупность двух систем:

$$\left[\begin{cases} 2x - x^2 + 1 \geq (2x - 3)^2 \\ 2x - 3 \geq 0 \\ 2x - x^2 + 1 \geq 0 \\ 2x - 3 < 0 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 5x^2 - 14x + 8 \leq 0 \\ x \geq 3/2 \\ x^2 - 2x - 1 \leq 0 \\ x < 3/2 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 4/5 \leq x \leq 2 \\ x \geq 3/2 \\ 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2} \\ x < 3/2 \end{cases} \right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{matrix} 3/2 \leq x \leq 2 \\ 1 - \sqrt{2} \leq x < 3/2 \end{matrix} \right] \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 2$$

Ответ: $x \in [1 - \sqrt{2}, 2]$.

Пример 16. Решить неравенство $\sqrt{|1 - 8x| - 2} \leq x + 1$.

Учитывая, что $|1 - 8x| = |8x - 1|$, тогда

$$\begin{cases} |8x-1|-2 \leq (x+1)^2 \\ x+1 \geq 0 \\ |8x-1|-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |8x-1| \leq x^2+2x+3 \\ x \geq -1 \\ |8x-1| \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-1 \leq x^2+2x+3 \\ 8x-1 \geq -(x^2+2x+3) \\ x \geq -1 \\ \begin{cases} 8x-1 \geq 2 \\ 8x-1 \leq -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+4 \geq 0 \\ x^2+10x+2 \geq 0 \\ \begin{cases} x \geq 3/8 \\ x \leq -1/8 \\ x \geq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-\infty; 3-\sqrt{5}] \cup [3+\sqrt{5}; \infty] \\ x \in [-\infty; -5-\sqrt{23}] \cup [-5+\sqrt{23}; \infty] \\ \begin{cases} x \geq 3/8 \\ x \leq -1/8 \\ x \geq -1 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-5+\sqrt{23}, -1/8] \cup [\frac{3}{8}, 3-\sqrt{5}] \cup [3+\sqrt{5}, \infty)$.

Пример 17. Решить неравенство $\sqrt{7x-6} - \sqrt{3x-16} > \sqrt{5x-22}$.

Найдём область допустимых значений: $\begin{cases} 7x-6 \geq 0 \\ 3x-16 \geq 0 \\ 5x-22 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 16/3$.

На ОДЗ: $7x-6 > 3x-16$, тогда

$$(7x-6) - 2\sqrt{7x-6}\sqrt{3x-16} + (3x-16) > 5x-22 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{7x-6}\sqrt{3x-16} < 5x \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4(7x-6)(3x-16) < 25x^2 \\ x \geq 16/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 59x^2 - 520x + 384 < 0 \\ x \geq 16/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 59(x-8)\left(x-\frac{48}{59}\right) < 0 \\ x \geq \frac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{16}{3}; 8\right).$$

Ответ: $x \in \left[\frac{16}{3}; 8\right)$.

В этом примере корни квадратного трёхчлена найдены по теореме Виета, условия системы выполняются на ОДЗ.

9. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Степенная функция $y = a^x$ имеет смысл только при $a > 0$ и определена при любых значениях x , т.е. $x \in \mathbb{R}$.

Определение: $a^x = b \Leftrightarrow x = \begin{cases} \log_a b, & a > 0, b > 0, a \neq 1 \\ \emptyset, & a = 1, b \neq 1 \\ \text{любое}, & a = b = 1 \end{cases}$.

На графиках показано, что функция $y = a^x$ возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$ на всей числовой прямой.

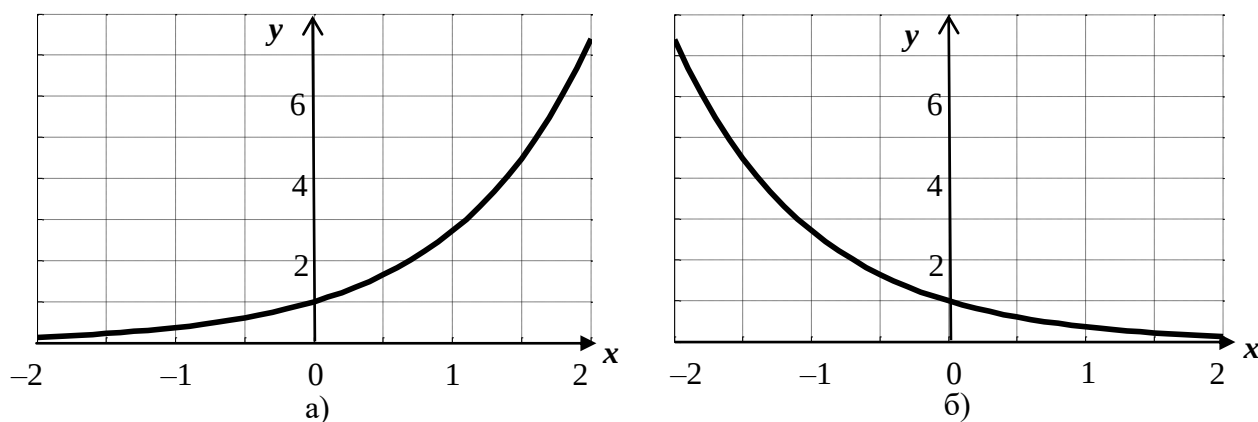


Рисунок 4. Графики функции $y = a^x$

а) График функции $y = e^x$ б) График функции $y = e^{-x}$

Для преобразования показательных уравнений и неравенств используют свойства степеней: $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$,

$$(ab)^x = a^x b^x, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Чтобы устранить степени применяются равносильные переходы:

$$a^{g(x)} = a^{f(x)} \Leftrightarrow g(x) = f(x), a > 0, a \neq 1;$$

$$f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) = h(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 1 \\ g(x), h(x) \text{ существуют} \end{cases} \end{cases};$$

$$\begin{aligned} 1) \quad f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) > h(x) \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < h(x) \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \end{cases}; & \quad 2) \quad f(x)^{g(x)} \geq f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) \geq h(x) \\ f(x) \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \leq h(x) \\ 0 < f(x) \leq 1 \end{cases} \end{cases}; \\ 3) \quad f(x)^{g(x)} < f(x)^{h(x)} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) < h(x) \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > h(x) \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \end{cases}; & \quad 4) \quad f(x)^{g(x)} \leq f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) \leq h(x) \\ f(x) \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq h(x) \\ 0 < f(x) \leq 1 \end{cases} \end{cases}. \end{aligned}$$

Пример 20. Решить уравнение $8^x - 7 \cdot 2^{x+1} + 3 \cdot 2^{4-x} = 0$.

Обозначим $2^x = t, t > 0$, тогда $t^3 - 14 \cdot t + 48 \cdot \frac{1}{t} = 0 \Leftrightarrow t^4 - 14 \cdot t^2 + 48 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (t^2 - 6)(t^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 6 \\ t^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \pm\sqrt{6} \\ t = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}, \text{ отрицательные значения } t \text{ не подходят в}$$

силу свойств показательной функции. Вернёмся к первоначальной переменной:

$$\begin{cases} 2^x = \sqrt{6} \\ 2^x = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2 \sqrt{6} \\ x = \log_2 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,5 \cdot (1 + \log_2 3) \\ x = 1,5 \end{cases}.$$

Ответ: 1,5; $0,5 \cdot (1 + \log_2 3)$.

Пример 21. Решить уравнение $\frac{15^x + 9^x + 6}{2 \cdot 15^x + 25^x + 3} = 2$.

В знаменатель дроби входят положительные величины, поэтому $2 \cdot 15^x + 25^x + 3 > 0$ при

$$x \in \mathbb{R}, \text{ тогда: } \frac{15^x + 9^x + 6}{2 \cdot 15^x + 25^x + 3} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{-3 \cdot 15^x + 9^x - 2 \cdot 25^x}{2 \cdot 15^x + 25^x + 3} = 0 \Rightarrow 9^x - 3 \cdot 15^x - 2 \cdot 25^x = 0.$$

Разделим уравнение на $25^x \neq 0$: $\frac{9^x}{25^x} - 3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x - 2 = 0$. Введём замену $\left(\frac{3}{5}\right)^x = t$, $t > 0$,

$$\text{тогда } t^2 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \\ t = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Обратная замена: } \begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \\ \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \log_{3/5} \frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \quad \frac{3 - \sqrt{17}}{2} < 0.$$

Ответ: $\log_{3/5} \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$.

Пример 22. Решить неравенство $(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3$.

Выражение в скобках $x^2 + x + 1 > 0$ при $x \neq -2$, тогда рассмотрим два случая:

$$1) (x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \frac{x+5}{x+2} \geq 3 \\ x^2 + x + 1 > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x+5}{x+2} \leq 3 \\ 0 < x^2 + x + 1 < 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \frac{x+5}{x+2} - 3 \geq 0 \\ x^2 + x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x+5}{x+2} - 3 \leq 0 \\ -1 < x^2 + x < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \frac{-2x-1}{x+2} \geq 0 \\ x(x+1) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{-2x-1}{x+2} \leq 0 \\ x(x+1) < 0 \\ x^2 + x + 1 > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \frac{2x+1}{x+2} \leq 0 \\ x(x+1) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{2x+1}{x+2} \geq 0 \\ x(x+1) < 0 \\ x^2 + x + 1 > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2, -1) \\ x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} x^2 + x + 1 = 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x = 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) = 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-2, -1] \cup \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

Пример 23. Решить неравенство $\frac{3 \cdot 6^x - 6^{x+1} + 3}{6^x - 5} + \frac{6^{x+1} - 39}{6^x - 7} \leq 6^x + 5$.

Замена $6^x = t, t > 0$ приводит неравенство к виду:

$$\frac{t^2 - 6t + 3}{t - 5} + \frac{6t - 39}{t - 7} \leq t + 5, \text{ тогда } \Leftrightarrow \frac{(t^2 - 6t + 3)(t - 7) + (t - 5)(6t - 39) - (t + 5)(t - 5)(t - 7)}{(t - 5)(t - 7)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(t - 1)}{(t - 5)(t - 7)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t \leq 1 \\ 5 < t < 7 \end{cases}$$

Вернёмся к первоначальной переменной: $\begin{cases} 6^x \leq 1 \\ 5 < 6^x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \log_6 5 < x < \log_6 7 \end{cases}$

Ответ: $x \in (-\infty, 0] \cup (\log_6 5, \log_6 7)$.

10. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Определение. Пусть $a > 0, b > 0, a \neq 1$, тогда $\log_a b$ есть такое число c , что $a^c = b$. Можно записать это определение так: $a^{\log_a b} = b, a > 0, b > 0, a \neq 1$.

Свойства логарифмов

1. $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1, a > 0, a \neq 1$
2. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c, a, b, c > 0, a \neq 1$
3. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c, a, b, c > 0, a \neq 1$
4. $\log_a(b^k) = k \cdot \log_a b, a, b > 0, a \neq 1$
5. $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b, a, b > 0, a \neq 1, k \neq 0$
6. $\log_a(b^{2n}) = 2n \cdot \log_a |b|, a > 0, a \neq 1, b \neq 0, n \in \mathbb{N}$
7. $\log_a \left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b, a, b > 0, a \neq 1$
8. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, a, b, c > 0, a, c \neq 1$
9. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, a, b > 0, a, b \neq 1$
10. $\log_a(bc) = \log_a |b| + \log_a |c|, a > 0, b \cdot c > 0, a \neq 1$
11. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a |b| - \log_a |c|, a > 0, b \cdot c > 0, a \neq 1$

Решение всех задач на логарифмы должно начинаться с нахождения ОДЗ!

Основная идея – сведение к одному или нескольким простейшим уравнениям. Для этого применяют: равносильные преобразования, переход к уравнению-следствию, разложение на множители, замена переменной, свойства функций.

Для частных случаев справедливы следующие равносильные системы:

$$а) \quad \log_a g(x) = \log_a h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = h(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$б) \quad \log_a g(x) = \log_a h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = h(x) \\ h(x) > 0. \end{cases}$$

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b, a, b - \text{числа}, a > 0, a \neq 1.$$

$$\log_{f(x)} h(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) = (f(x))^b \\ f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$$

Решение большинства логарифмических уравнений сводится к следующей равносильной системе:

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = h(x) \\ g(x) > 0, (\text{можно } h(x) > 0) \\ f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$$

При решении уравнений важно знать, что в равенстве $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a(f(x)g(x))$ области определения левой и правой частей различны. Левая часть определена при $f(x) > 0, g(x) > 0$, а правая при $f(x) \cdot g(x) > 0$. Область определения правой части равенства шире, чем левой, поэтому при решении уравнения, чтобы избежать посторонних корней, в начале решения определяют ОДЗ или, получив корни, выполняют проверку.

Если выполняется переход от $\log_a(f(x)g(x))$ к $\log_a f(x) + \log_a g(x)$, то область определения сужается и при решении уравнения можно потерять корни. Тогда рассматривают два случая:

$$а) \quad f(x) > 0, g(x) > 0 \text{ и } \log_a(f(x)g(x)) = \log_a f(x) + \log_a g(x),$$

$$б) \quad f(x) < 0, g(x) < 0 \text{ и } \log_a(f(x)g(x)) = \log_a(-f(x)) + \log_a(-g(x)).$$

Также поступают и в случае преобразования логарифма частного в разность логарифмов и наоборот.

Логарифмические неравенства

При решении логарифмических неравенств рассматривают два случая: основание больше единицы при этом знак неравенства сохраняется, основание меньше единицы и больше нуля, когда знак неравенства меняется на противоположный.

$$\log_{f(x)} g(x) > \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) > h(x) \\ h(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < h(x) \\ g(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\log_{f(x)} g(x) < \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) < h(x) \\ g(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > h(x) \\ h(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\log_{f(x)} g(x) \geq \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) \geq h(x) \\ h(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \leq h(x) \\ g(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\log_{f(x)} g(x) \leq \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) \leq h(x) \\ g(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq h(x) \\ h(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Если } a > 0, a \neq 1, \text{ то } \log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a^b, a > 1 \\ 0 < f(x) < a^b, a < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Если } a > 0, a \neq 1, \text{ то } \log_a f(x) \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq a^b, a > 1 \\ 0 < f(x) \leq a^b, a < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Если } a > 0, a \neq 1, \text{ то } \log_a f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < a^b, a > 1 \\ f(x) > a^b, a < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Если } a > 0, a \neq 1, \text{ то } \log_a f(x) \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) \leq a^b, a > 1 \\ f(x) \geq a^b, a < 1 \end{cases}.$$

Полезно запомнить: $e \approx 2,7182$, $\ln 1 = 0$, $\ln 2 \approx 0,6931$, $\ln 3 \approx 1,0986$.

Пример 24. Решить уравнение $\frac{1}{2}\log_2(x^2) + \log_2(x - 6) = 4$.

Найдём область допустимых значений: $\begin{cases} x - 6 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 6$.

$\log_2|x| + \log_2(x - 6) = 4 \Leftrightarrow \log_2(|x|(x - 6)) = 4 \Leftrightarrow |x|(x - 6) = 16$. Учитывая ОДЗ
 $x(x - 6) = 16 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 8$.

Ответ: 8.

Пример 25. Решить уравнение $\log_{49}(2x^2 + x - 5) + \log_{\frac{1}{7}}(1 + x) = 0$.

Перепишем уравнение $\frac{1}{2}\log_7(2x^2 + x - 5) - \log_7(1 + x) = 0 \Leftrightarrow \log_7 \frac{\sqrt{2x^2 + x - 5}}{1 + x} = 0$. Решим систему:

$$\begin{cases} 1 + x > 0 \\ 2x^2 + x - 5 > 0 \\ \log_7 \frac{\sqrt{2x^2 + x - 5}}{1 + x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 2x^2 + x - 5 > 0 \\ \frac{\sqrt{2x^2 + x - 5}}{1 + x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 2x^2 + x - 5 > 0 \\ \frac{\sqrt{2x^2 + x - 5} - x - 1}{1 + x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 2x^2 + x - 5 > 0 \\ \sqrt{2x^2 + x - 5} = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 2x^2 + x - 5 > 0 \\ 2x^2 + x - 5 = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 2x^2 + x - 5 > 0 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 2x^2 + x - 5 > 0 \\ \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: 3.

В этом примере неравенство $2x^2 + x - 5 > 0$ не решалось отдельно, поскольку оно имеет иррациональные корни. При проверке решений достаточно учесть выполнение этого неравенства. При $x = 3$ получим $2 \cdot 3^2 + 3 - 5 > 0$, следовательно, $x = 3$ является решением уравнения.

Пример 26. Решить неравенство $\log_3(2x^2 - x) - 1 \leq \log_3(6x - 3)$.

Перепишем это неравенство так $\log_3 \frac{(2x^2 - x)}{3} \leq \log_3(6x - 3)$, тогда, учитывая, что

основание больше единицы запишем: $\log_3 \frac{(2x^2 - x)}{3} \leq \log_3(6x - 3) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2x^2 - x)}{3} \leq 6x - 3 \\ 2x^2 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 19x + 9 \leq 0 \\ x(2x - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x - 9)(x - 1/2) \leq 0 \\ x(2x - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 9\right].$$

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{2}, 9\right]$.

Пример 27. Решить неравенство $\log_{x+2}(2x^2 + x) \leq 2$. Приведём неравенство к стандартному виду $\log_{x+2}(2x^2 + x) \leq \log_{x+2}(x + 2)^2$ и рассмотрим два случая. Первый:

$$\begin{cases} 2x^2 + x \leq (x + 2)^2 \\ 2x^2 + x > 0 \\ x + 2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ x(2x + 1) > 0 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 4)(x + 1) \leq 0 \\ x(2x + 1) > 0 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1, -1/2) \cup (0, 4].$$

Второй: $\begin{cases} 2x^2 + x \geq (x + 2)^2 \\ (x + 2)^2 > 0 \\ 0 < x + 2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ x \in \mathbb{R} \\ -2 < x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 4)(x + 1) \geq 0 \\ -2 < x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2, -1).$

Ответ: $x \in (-2, -1) \cup (-1, -1/2) \cup (0, 4]$.

Пример 28. Решить уравнение $x^{\log_2 x + 2} = 256$. ОДЗ уравнения $x > 0$, прологарифмируем обе части уравнения: $\log_2 x^{\log_2 x + 2} = \log_2 2^8$. Учитывая свойства логарифмов, получим уравнение: $\log_2 x (\log_2 x + 2) = 8$. Обозначим $\log_2 x = t$, тогда

$$t(t + 2) = 8 \Rightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -4 \end{cases}.$$

Вернёмся к первоначальной переменной: $\begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1/16 \end{cases}$

Ответ: 4; 1/16.

11. МЕТОД ЗАМЕНЫ МНОЖИТЕЛЯ ИЛИ МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ

Метод замены множителя основывается на таких понятиях как равносильность, рационализация, алгебраизация и реализуется в виде замены показательных, логарифмических, иррациональных и трансцендентных неравенств на равносильные им рациональные алгебраические неравенства. Решение последних легко осуществляется методом интервалов для рациональных функций. Метод замены множителя реализуется только при приведении исходного неравенства к каноническому виду:

$$\frac{f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \dots \cdot g_n(x)} \vee 0,$$

где множители представляют собой рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические функции, функции с модулями и другие; знак сравнения $\vee$ обозначает один из знаков $>$, $\geq$, $<$, $\leq$, $=$. Решение этого неравенства зависит **только от знаков** входящих в него сомножителей.

Суть метода замены множителей состоит в том, чтобы с помощью равносильных преобразований заменить каждый множитель в области его существования на более простой множитель, в конечном счете, рациональный и имеющий те же интервалы знакопостоянства (на множитель равного знака).

Два неравенства $f_1(x) \vee g_1(x)$ и $f_2(x) \vee g_2(x)$ называются равносильными на множестве M , если множества их решений совпадают. Замена одного неравенства другим, равносильным данному на M , называется равносильным преобразованием на M .

Принцип монотонности для неравенств. Пусть функция $y = f(t)$ — сложная функция, определенная и строго монотонна на промежутке T .

1. Если функция $y = f(t)$ **возрастает** на промежутке T , т.е. $f(t_2) > f(t_1)$, $t_2 > t_1$, то

$$f(t_1(x)) - f(t_2(x)) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (t_1(x) - t_2(x)) < 0 \\ t_1(x) \in M \\ t_2(x) \in M \end{cases}.$$

2. Если функция $y = f(t)$ **убывает** на промежутке T , т.е. $f(t_2) < f(t_1)$, $t_2 > t_1$, то

$$f(t_1(x)) - f(t_2(x)) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -(t_1(x) - t_2(x)) < 0 \\ t_1(x) \in M \\ t_2(x) \in M \end{cases}.$$

Теорема о корне. 1. Если в уравнении $f(x) = C = \text{const}$, функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на множестве M , то уравнение имеет на M не более одного корня.

2. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функция $y = f(x)$ непрерывна и строго возрастает, а функция $y = g(x)$ непрерывна и строго убывает на множестве M , то уравнение имеет на M не более одного корня.

Ниже, в таблице 1 приведены некоторые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G , где f, g, h – выражения с переменной x , $h > 0$, $g > 0$, $f > 0$, $h \neq 1$.

Таблица 1. Выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G

Выражение F	Выражение G
$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$
$\log_h f - 1$	$(h-1)(f-h)$
$\log_h f$	$(h-1)(f-1)$
$\log_f h - \log_g h$, $f > 0, g > 0, h > 0, f \neq 1, g \neq 1$	$(f-1)(h-1)(g-1)(g-f)$
$h^f - h^g$	$(h-1)(f-g)$
$h^f - 1$	$(h-1) \cdot f$
$f^h - g^h$, $f > 0, g > 0, f \neq 1, g \neq 1$	$(f-g) \cdot h$
$ f - g $, f, g – любые	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$, $f \geq 0, g \geq 0$	$f-g$

Рассмотрим неравенство $\log_h f - \log_h g > 0$. В своей области определения это неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \begin{cases} h > 1 \\ f > g \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h < 1 \\ f < g \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} h - 1 > 0 \\ f - g > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} h - 1 < 0 \\ f - g < 0 \end{cases} \end{cases},$$

что равносильно неравенству $(h - 1)(f - g) > 0$. Следовательно, исходное неравенство

равносильно системе неравенств:
$$\begin{cases} h > 0 \\ h \neq 1 \\ f > 0 \\ g > 0 \\ (h - 1)(f - g) > 0 \end{cases}. \quad \text{Аналогично доказываются}$$

остальные выражения.

Пример 29. а) Решить неравенство $4^{\frac{2x+2}{x}} - \frac{4}{3} \cdot 12^{\frac{x+1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}} - 4^{\frac{1}{x}} \geq 0$. ОДЗ: $x \neq 0$, тогда

$$4^{2\left(1+\frac{1}{x}\right)} - \frac{4}{3} \cdot (3 \cdot 4)^{\left(1+\frac{1}{x}\right)} + 3^{\frac{1}{x}} - 4^{\frac{1}{x}} \geq 0, \quad 16 \cdot 4^{\frac{2}{x}} - 16(3 \cdot 4)^{\left(\frac{1}{x}\right)} + 3^{\frac{1}{x}} - 4^{\frac{1}{x}} \geq 0.$$

Сгруппируем первое и четвёртое, второе и третье слагаемые:

$$\left(4^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{x}}\right)\left(16 \cdot 4^{\frac{1}{x}} - 1\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(4^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{x}}\right)\left(4^{\frac{1}{x}} - 4^{-2}\right) \geq 0.$$

Воспользуемся указанными выше соотношениями и получим:

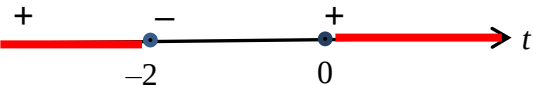
$(4 - 3)^{\frac{1}{x}}(4 - 1)\left(\frac{1}{x} + 2\right) \geq 0$ или $3^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x} + 2\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1/2}{x^2} \geq 0$. Решаем неравенство методом интервалов: $x \in [-1/2, 0) \cup (0, +\infty)$. Это же неравенство можно решить методом замены переменной.

Ответ: $x \in [-1/2, 0) \cup (0, +\infty)$.

б) Решим неравенство методом замены переменной: $x \neq 0$, приведём неравенство к виду

$$\left(4^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{x}}\right)\left(4^{\frac{1}{x}} - 4^{-2}\right) \geq 0. \text{ Пусть } (1/x) = t, \text{ тогда } (4^t - 3^t)(4^t - 4^{-2}) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4^t \cdot 4^t \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^t\right) (1 - 4^{-2-t}) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\left(\frac{3}{4}\right)^t - 1\right) (4^{-(t+2)} - 1) \geq 0, \quad 4^t > 0.$$

Решим неравенство методом интервалов: 

$$\begin{cases} t \leq -2 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} \leq -2 \\ \frac{1}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1/2, 0) \cup (0, +\infty).$$

Ответ: $x \in [-1/2, 0) \cup (0, +\infty)$.

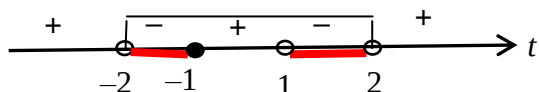
Пример 30. Решить неравенство $\log_{(2-x)}(x+2) \cdot \log_{(x+3)}(3-x) \leq 0$. Запишем ОДЗ

неравенства:
$$\begin{cases} x+2 > 0 \\ 2-x > 0 \\ 2-x \neq 1 \\ 3-x > 0 \\ x+3 > 0 \\ x+3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2, 1) \cup (1, 2). \text{ Применим метод рационализации:}$$

$$(2-x-1)(x+2-1)(x+3-1)(3-x-1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-x)(x+1)(x+2)(2-x) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+2)(x-2) \leq 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $x \in (-2, -1] \cup (1, 2)$.

Пример 31. Решить неравенство $\frac{|2x-1|-|5x+4|}{|2,5x^2+2x-4,5|-|-1,5x^2+3x-1,5|} \geq 0$. Согласно методу

рационализации: $\frac{(2x-1-5x-4)(2x-1+5x+4)}{(2,5x^2+2x-4,5+1,5x^2-3x+1,5)(2,5x^2+2x-4,5-1,5x^2+3x-1,5)} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(-3x-5)(7x+3)}{(4x^2-x-3)(x^2+5x-6)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(3x+5)(7x+3)}{4(x+3/4)(x+6)(x-1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \in (-6, -5/3] \cup (-3/4, -3/7).$$

Ответ: $x \in (-6, -5/3] \cup (-3/4, -3/7]$.

12. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Основные тригонометрические тождества:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Формулы приведения позволяют привести к функциям угла α функции следующих углов $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$, $(\pi \pm \alpha)$, $\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$, $(2\pi \pm \alpha)$. Считается, что угол α – острый угол:

1) для углов $(2\pi \pm \alpha)$, $(\pi \pm \alpha)$ название приводимой функции сохраняют, а для углов $\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ – меняют на кофункцию;

2) знак функции угла α определяется по знаку исходной функции в соответствующей четверти.

Формулы сложения и вычитания

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha \pm \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

Формулы двойных, тройных, половинных аргументов

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1;$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{ctg} \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha; \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha;$$

$$\sin \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad \alpha \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta));$$

Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \alpha, \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \alpha, \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right);$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right).$$

Все тригонометрические уравнения решаются сведением к одному из четырёх простейших:

$$1. \sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \arcsin a + n\pi, & n \in \mathbb{Z}, \quad |a| \leq 1, \\ \emptyset, & |a| > 1, \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2};$$

$$2. \cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \arccos a + 2n\pi, & n \in \mathbb{Z}, \quad |a| \leq 1, \\ \emptyset, & |a| > 1, \end{cases} \quad 0 \leq \arccos a \leq \pi,$$

$$\pm \arccos(-a) = \pm(\pi - \arccos(a)) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$3. \operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad -\pi/2 < \operatorname{arctg} a < \pi/2;$$

$$4. \operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 0 < \operatorname{arcctg} a < \pi,$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Частные случаи:

$$1. \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$4. \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2. \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$5. \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$3. \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$6. \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Однородные тригонометрические уравнения:

$$1) a \sin x + b \cos x = 0, \quad 2) a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0,$$

$$3) a \sin^3 x + b \sin^2 x \cos x + c \sin x \cos^2 x + d \cos^3 x = 0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0, \quad d \neq 0$$

решаются делением обеих частей уравнения на $\cos^n x \neq 0$ или $\sin^n x \neq 0$, где n – степень уравнения.

Уравнения вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$ сводятся к однородному уравнению 2-й степени при помощи основного тригонометрического тождества $d = d(\sin^2 x + \cos^2 x) = d \sin^2 x + d \cos^2 x$.

Уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$ решаются методом введения вспомогательного угла.

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \Rightarrow \alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \alpha \text{ рад}; \quad 1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \Rightarrow \alpha \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \alpha;$$

$$1^\circ \approx 0,017 \text{ рад}; \quad 1 \text{ рад} \approx 57^\circ.$$

Группировка и разложение на множители. При применении этого метода могут быть полезны следующие соотношения:

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2, \quad a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab, \quad \left(a \pm \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} \pm 2,$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tgy} = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}.$$

Пример 32. Решить уравнение: $16 \sin x - \sin 2x = 1 - \cos 2x$.

Исходное уравнение эквивалентно следующему:

$$16 \sin x - 2 \sin x \cos x = 1 - (1 - 2 \sin^2 x), \text{ тогда } 2 \sin x (8 - \cos x) - 2 \sin^2 x = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin x (8 - \cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 8 - \cos x - \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 33. Решить уравнение $\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0$, отобрать корни, принадлежащие

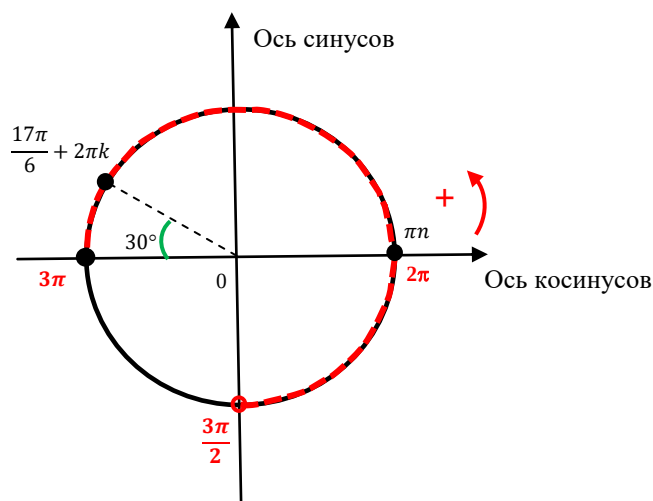
промежутку $[3\pi/2; 3\pi]$. Запишем условие равенства нулю дроби: $\begin{cases} 2 \sin^2 x - \sin x = 0 \\ 2 \cos x - \sqrt{3} \neq 0 \end{cases}$,

откуда

$$\begin{cases} \sin x (2 \sin x - 1) = 0 \\ \cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \\ x \neq \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi m \end{cases}, m, n, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Отберём корни с помощью тригонометрической окружности. Определим корни, попавшие в промежуток $[3\pi/2; 3\pi]$.

Если повернуть точку от значения корня 2π **против часовой стрелки** на π рад, то получим корень 3π . Вычислим оставшийся корень. Выберем удобное опорное значение угла 3π . Обозначим угол в 30° . Осталось повернуть точку на этот угол, чтобы получить искомое значение корня. Тогда этот корень вычислим следующим образом:



$$x = 3\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}.$$

Ответ: $x = \pi n$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$; 2π , 3π , $17\pi/6$.

Пример 34. Найти решение уравнения $(16^{\sin x})^{\cos x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\sqrt{3}\sin x}$. Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

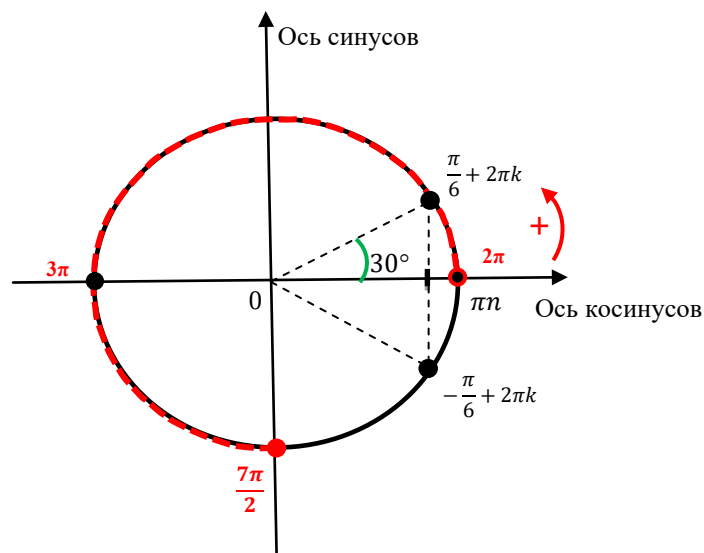
Перепишем уравнение $(4^{2\sin x})^{\cos x} = (4)^{\sqrt{3}\sin x}$,

$$\text{тогда } 2\sin x \cos x = \sqrt{3}\sin x, \quad \sin x(2\cos x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k; n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

На тригонометрическом круге красным цветом выделен указанный промежуток. Так как нужно попасть в промежуток положительных значений на оси Ox , то поворот точки на единичной окружности будем совершать **против хода часовой стрелки**, т.е. в положительном направлении. На рисунке это направление обозначено знаком «плюс». Два корня очевидны 2π и 3π . Вычислим оставшийся корень. Выберем удобное опорное значение угла 2π . Обозначим угол в 30° . Осталось повернуть точку на этот угол, чтобы получить искомое значение корня. Тогда этот корень вычислим следующим образом:

$$x = 2\pi + \pi/6 = 13\pi/6.$$



Ответ: $x = \pi n, x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}; 2\pi, 13\pi/6, 3\pi$.

Сведение к квадратным уравнениям.

Пример 35. Найти решение уравнения: $6 \sin^2 x - 5 \sin x - 4 = 0$.

Сделаем замену $\sin x = t, |t| \leq 1$, тогда получим квадратное уравнение

$$6t^2 - 5t - 4 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{12} = \frac{5 \pm 11}{12}$$

$$t_{1,2} = \frac{4}{3}, -\frac{1}{2}$$

Выбираем один корень $t = -1/2$ ($4/3$ – не подходит):

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n; n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$.

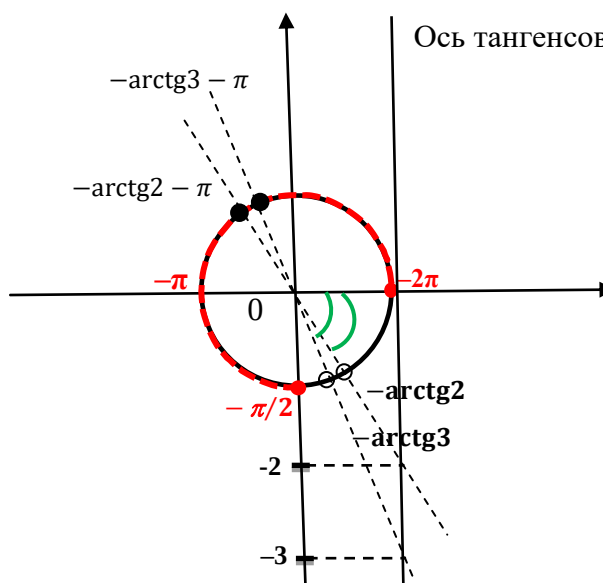
Пример 36. Найти решение уравнения: $\operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 6 = 0$. Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi/2]$.

Сделаем замену $\operatorname{tg} x = t$, тогда получим квадратное уравнение:

$$t^2 + 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -3 \end{cases}$$

Вернёмся к исходной переменной $\begin{cases} \operatorname{tg} x = -2 \\ \operatorname{tg} x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n \\ x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z}.$

Выполним отбор корней с помощью тригонометрической окружности. На рисунке выделен указанный промежуток и чёрными точками корни, которые принадлежат этому промежутку. Чтобы найти первый корень, возьмём точку на единичной окружности, соответствующую значению угла $-\arctg 2$ и повернём её по ходу часовой стрелки на угол π радиан. Тогда значение первого корня будет $-\arctg 2 - \pi$. Аналогично находим второй корень $-\arctg 3 - \pi$.



Ответ: $-\arctg 2 + \pi n, -\arctg 3 + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}; -\arctg 2 - \pi, -\arctg 3 - \pi$.

Преобразование суммы в произведение и наоборот.

Пример 37. Найти решение уравнения: $\sin x = \cos(4x + \pi/3)$.

Преобразуем уравнение, используя формулы приведения:

$$\begin{aligned} \sin x - \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) &= 0 \Leftrightarrow \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x - \sin\left(4x + \frac{5\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \sin \frac{x - \left(4x + \frac{5\pi}{6}\right)}{2} \cos \frac{x + \left(4x + \frac{5\pi}{6}\right)}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{5\pi}{12}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{5x}{2} + \frac{5\pi}{12}\right) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} + \frac{5\pi}{12} = \pi n \\ \frac{5x}{2} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi k}{5} \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi k}{5}, n, k \in \mathbb{Z}$.

Замена переменной. Пример 38. Найти решение уравнения:

$$3 + 2\sin 2x = 3\sin x + 3\cos x.$$

Сделаем замену переменной: $\sin x + \cos x = t$, тогда $\sin 2x = t^2 - 1$, перепишем уравнение $3 + 2(t^2 - 1) = 3t \Leftrightarrow 2t^2 + 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1/2 \\ t = 1 \end{cases}$.

Выполним обратную замену:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sin x + \cos x = 1/2 \\ \sin x + \cos x = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1/2 \\ \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \end{cases}, n, k, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2\pi n, n, k, m \in \mathbb{Z}$.

Метод оценок. Пример 39. Найти решение уравнения: $\sin 5x + \sin x = 2$.

Так как $|\sin 5x| \leq 1$ и $|\sin x| \leq 1$, то уравнение равносильно системе: $\begin{cases} \sin 5x = 1 \\ \sin x = 1 \end{cases}$ откуда

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, $\sin 5\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{2} + 10\pi n\right) \Leftrightarrow \cos(10\pi n) = 1$. Значит найденное значение x удовлетворяет обоим уравнениям системы.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 40. Найти решение уравнения: $\sin 2x \cdot \sin 4x = -1$.

Так как $|\sin 2x| \leq 1$ и $|\sin 4x| \leq 1$, то $|\sin 2x| \cdot |\sin 4x| \leq 1$ возможны два случая.

$$1) \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 4x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z}, 4k - 8n = 3. \text{ Поскольку левая часть равенства}$$

при целых значения n и k принимает чётные значения, а правая – нечётная, то система не имеет решений.

$$2) \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \sin 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z}, 8n - 4k = 3. \text{ Эта система также не имеет}$$

решений.

Ответ: $\emptyset$.

Метод вспомогательного аргумента.

$$a \sin x \pm b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x \pm \varphi)$$

Пусть дано выражение $a \sin x + b \cos x = c$, составим число $\sqrt{a^2 + b^2}$, тогда

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Поскольку

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1,$$

тогда

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a},$$

что наглядно иллюстрирует рисунок 4.

Исходное выражение можно представить в следующем виде:

$$\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Если правая часть выражения $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leq 1$, тогда получаем $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Откуда

$$x + \varphi = (-1)^n \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Окончательно получим

$$x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) - \varphi + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) - \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 41. Пусть задано выражение $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2$,

разделим всё выражения на 2, тогда $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = 1$. Представим коэффициенты $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\frac{1}{2}$ как функции угла $\frac{\pi}{6}$:

$$\cos \frac{\pi}{6} \sin x - \sin \frac{\pi}{6} \cos x = 1,$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1,$$

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 42. Пусть задано выражение $3 \sin x + 4 \cos x = 5$, разделим всё выражения на

5, тогда $\frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x = 1$. Заметим, что $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$. Обозначим коэффициенты $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ как функции угла φ : $\cos \varphi = \frac{3}{5}$, $\sin \varphi = \frac{4}{5}$. Тогда

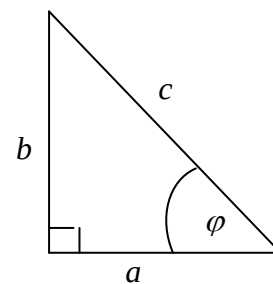


Рисунок 5

$$\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x = 1,$$

$$\sin(x + \varphi) = 1,$$

$$x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad x = -\varphi + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Далее стоит определиться со значением угла φ . Учитывая, что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$, то

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}.$$

Откуда $\varphi = \operatorname{arctg} 4/3$ и окончательный ответ:

$$x = -\operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 43. Преобразуем выражение $\sin x + \cos x$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Этот вывод можно обобщить и получить формулы: $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x \pm \frac{\pi}{4} \right)$.

Эта формула оказывается весьма полезной при решении задач тригонометрии.

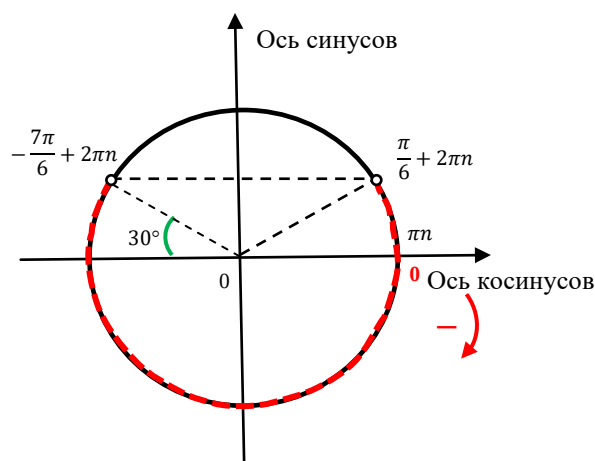
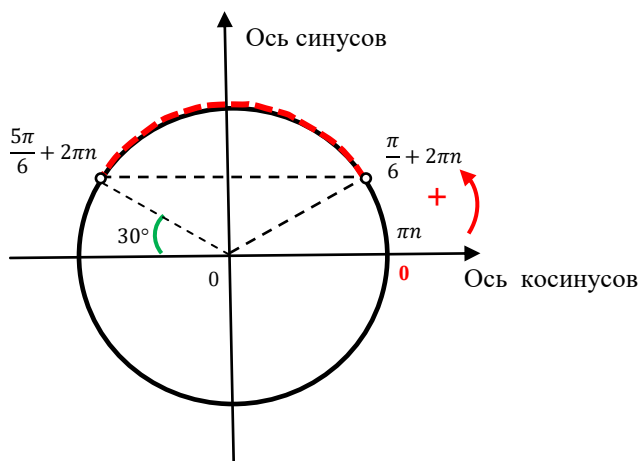
Тригонометрические неравенства

К простейшим тригонометрическим неравенствам относятся неравенства вида:

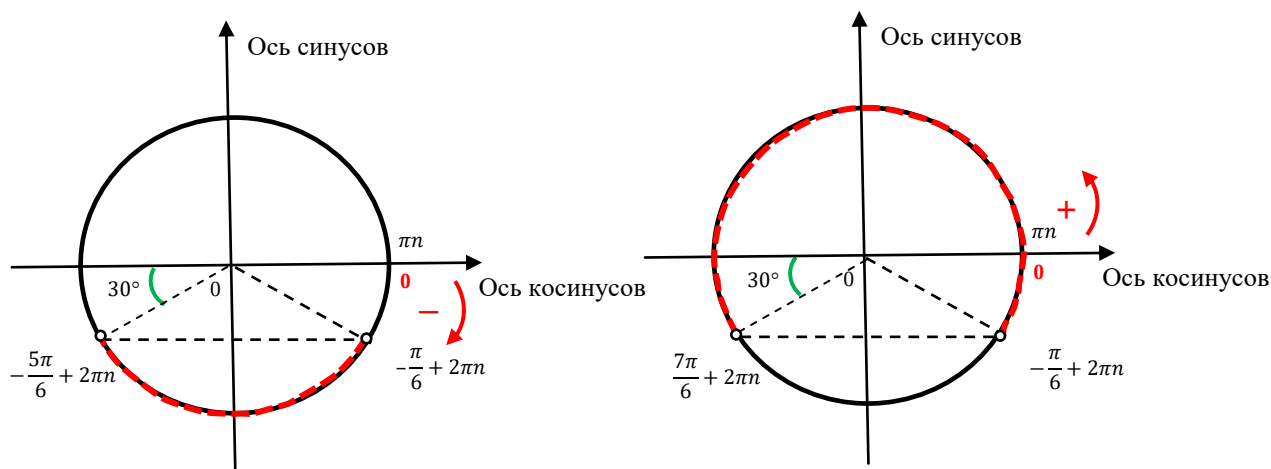
$\sin x < a$, $\sin x \leq a$, $\cos x > a$, $\cos x \geq a$ и т.д. Решение этих неравенств несложно выписать с помощью тригонометрической окружности.

$$1. \sin x > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2. \sin x < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



$$3. \sin x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad 4. \sin x > -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



Пример 44. Рассмотрим неравенство смешанного типа:

$$\log_{\sqrt{2}(\sin x + \cos x)}(\sqrt{6} \sin x + \sqrt{2} \cos x) \geq 1.$$

Данное неравенство равносильно совокупности систем:

$$2) \quad \begin{cases} \sqrt{2}(\sin x + \cos x) > 1 \\ \sqrt{6} \sin x + \sqrt{2} \cos x \geq \sqrt{2}(\sin x + \cos x) \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} 0 < \sqrt{2}(\sin x + \cos x) < 1 \\ 0 < \sqrt{6} \sin x + \sqrt{2} \cos x \leq \sqrt{2}(\sin x + \cos x) \end{cases}$$

Рассмотрим систему 1):

$$\begin{cases} 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 1 \\ (\sqrt{3} - 1) \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{2} \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2\pi n < x + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \\ 2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{12} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{12} + 2\pi n \\ 2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow 2\pi n \leq x < \frac{7\pi}{12} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим первое неравенство системы 2):

$$0 < 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 1 \Leftrightarrow 0 < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi n < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x + \frac{\pi}{4} < \pi + 2\pi n \end{cases}, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{12} + 2\pi n \\ \frac{7\pi}{12} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Рассмотрим второе неравенство системы 2): $0 < \sqrt{6} \sin x + \sqrt{2} \cos x \leq \sqrt{2}(\sin x + \cos x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{6} \sin x + \sqrt{2} \cos x > 0 \\ \sin x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x > 0 \\ \sin x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{6} \sin x + \sin \frac{\pi}{6} \cos x > 0 \\ \sin x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) > 0 \\ \sin x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k, l \in \mathbb{Z} \\ -\pi + 2\pi l \leq x \leq 2\pi l \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x \leq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Найдём пересечения решений первого и второго неравенств системы:

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{12} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

На рисунке 5 показано, что решением второй системы является серия интервалов $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{12} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$

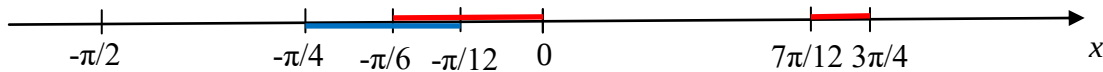


Рисунок 6. Пересечения решений
первого и второго неравенств системы

Окончательным ответом является объединение решений двух систем.

Ответ: $\left[2\pi n; \frac{7\pi}{12} + 2\pi n \right) \cup \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{12} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$

13. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. **Рациональные уравнения и неравенства.** Решите уравнения и неравенства.

- | | |
|---|--|
| 1. $(x^2 - 2x + 1)^2 = 1$ | 12. $\frac{1}{x^2 - 8x - 9} \geq \frac{1}{3x^2 + 5x + 2}$ |
| 2. $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$ | 13. $\frac{1}{x^2 + 5x + 6} \geq \frac{1}{2}$ |
| 3. $3x^6 + 7x^3 - 6 = 0$ | 14. $\frac{x-1}{x+1} < x$ |
| 4. $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 24$ | 15. $\frac{x+6}{x-6} + \frac{3x-2}{2} \geq 0$ |
| 5. $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{48}{(x-1)^2} = 10 \left(\frac{x-1}{3} - \frac{4}{x-1} \right)$ | 16. $\frac{(2-(x+1)^2)(x-4)^2}{x(x^2-x-6)} \geq 0$ |
| 6. $\frac{(x+1)^2}{3} + \frac{48}{(x+1)^2} = 10 \left(\frac{x+1}{3} - \frac{4}{x+1} \right)$ | 17. $\frac{x^2-4x-3}{x^2-4x+3} + \frac{x^2-4x+24}{x^2-4x} \geq 0$ |
| 7. $2x^2 - 6x + 5 \geq 0$ | 18. $\frac{x^4-2x^3+x^2}{x^2+x-2} - \frac{2x^3+x^2+x-1}{x+2} \leq 1$ |
| 8. $\frac{x^2+1}{x-1-x^2} < 0$ | 19. $\frac{(5x-3)^2}{x-2} \geq \frac{9-30x+25x^2}{14-9x+x^2}$ |
| 9. $\frac{3x^2+1}{x^2+5x+6} \geq 0$ | 20. $(x+4)(x+5)(x+6)(x+7) = 1680$ |
| 10. $\frac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x-30} > 0$ | |
| 11. $\frac{2x^2+3x-459}{x^2+1} > 1$ | |

Ответы: 1. $1 \pm \sqrt{3}$, 0, 2. $\pm\sqrt{5/2}$, ± 1 . 3. $-\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{2/3}$. 4. 6, 1. 5. $4 \pm \sqrt{21}$, 7, -1. 6. $2 \pm \sqrt{21}$, 5, -3. 7. $(-\infty, +\infty)$. 8. $(-\infty, +\infty)$. 9. $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$. 10. $(-\infty, -5) \cup (1, 2) \cup (6, +\infty)$. 11. $(-\infty, -23) \cup (20, +\infty)$. 12. $(-\infty, -11/2) \cup (-1, -2/3) \cup (9, +\infty)$. 13. $[-4, -5) \cup (-2, 1]$. 14. $(-1, +\infty)$. 15. $(-\infty, 0) \cup [2, 4] \cup (6, +\infty)$. 16. $(-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-2, 0) \cup [-1+\sqrt{2}, 3) \cup \{4\}$. 17. $(-\infty, 0) \cup (1, 3) \cup (4, +\infty)$. 18. $(-\infty, -2) \cup [-1, 1) \cup (1, +\infty)$. 19. $\{0, 6\} \cup (2, 7) \cup [8, +\infty)$. 20. -12, 1.

2. **Уравнения и неравенства с модулем.** Решите уравнения и неравенства.

- | | |
|---|---|
| 1. $ x+2 = x+2$ | 12. $\frac{6}{ x+9 } - \frac{6}{ x } < 4$ |
| 2. $ 3x+2 = x+11$ | 13. $ 2x-2 - \frac{4x+5}{2x} \geq \frac{2x-1}{2 x } - 6$ |
| 3. $ x-4 = 5-2x $ | 14. $\frac{(2x-1)^2}{ 2x-1 -2} \leq -\frac{1}{15}$ |
| 4. $ 2x-8 - x+5 = 12$ | 15. $ 3x+8 + 3x-2 \leq 10$ |
| 5. $ 5x+3 + 2x+1 = 7x+4 $ | 16. $4 x+1 + \frac{1}{2} x-4 - \frac{5}{2}x \leq 12$ |
| 6. $2 x-6 - x + x+6 = 18$ | 17. $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{ x } \geq 2$ |
| 7. $x^2 + x - 6 = 0$ | 18. $ x+6 > x^2 + 5x + 9 $ |
| 8. $x^2 + 6x + 8 + x+4 = 0$ | 19. $\frac{ x-3 -1}{4-2 x-4 } \geq -1$ |
| 9. $\left x^2 - \frac{29}{12}x - \frac{35}{12} \right \geq 2x^2 - \frac{61}{12}x - \frac{19}{12}$ | 20. $\frac{3}{ x+1 } \geq 5 - 2x$ |
| 10. $\frac{1}{ 2x+1 } \geq \frac{5+2x}{3}$ | |
| 11. $ x+1 > \frac{1-x}{2}$ | |

Ответы: 1. $[-2, +\infty)$. 2. $9/2, -13/4$. 3. 1, 3. 4. -3, 25. 5. $(-\infty, -3/5]$. 6. $[-6, 0]$, 12. 7. -2, 2. 8. -3, -4. 9. $[-1/2, 3]$. 10. $(-\infty, -2) \cup [-1, -1/2) \cup (-1/2, (\sqrt{7}-3)/2)$. 11. $(-\infty, -3) \cup (-1/3, +\infty)$.

12. $(-\infty, (-9-3\sqrt{15})/2) \cup [(-3\sqrt{10}-6)/2, 0) \cup (0, +\infty)$. **13.** $(-\infty, 0) \cup [1/2, +\infty)$. **14.** $(-1/2, 1/3] \cup [2/3, 3/2)$. **15.** $[-8/3, 2/3]$. **16.** $[-2, 5]$. **17.** $[1/\sqrt{2}, 0) \cup (0, 1)$. **18.** $(-3, -1)$. **19.** $(-\infty, 2) \cup (2, 6) \cup [8, +\infty)$. **20.** $[(3-\sqrt{37})/4, -1) \cup (-1, -1/2] \cup [2, +\infty)$.

3. Иррациональные уравнения и неравенства. Решите уравнения и неравенства.

1. $\sqrt{2x^2 + 7} = x - 4$.
2. $\sqrt{x^2 - 10} = \sqrt{2x + 5}$
3. $\sqrt{4x^4 + 8x^3 + 6x + 10} = 3 - 2x^2$
4. $\frac{\sqrt{(3x-2)-2x+1}}{256x^4-40x-51} = 0$
5. $\frac{x^2-x-\sqrt{x^4-2x^3+3x^2+3x+1}}{5x^3-6x+1} = 0$
6. $\sqrt{x+4-4\sqrt{x}} - \sqrt{x+25-10\sqrt{x}} = 1$
7. $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{3x-5} = 3$
8. $x(x+3) + (x+3)\sqrt{\frac{x}{x+3}} - 2 = 0$
9. $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} = 7$
10. $\sqrt{2x-1} = \sqrt{6-x} + \sqrt{x-1}$
11. $\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2+4x+4} = 4$
12. $\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{2x-6} = 2$
13. $\sqrt{x^2-5x+6}(x^2-2x-1) = 0$
14. $\sqrt{x^2-3x+2} - 3 - x > 0$
15. $\sqrt{x+46} \geq x+4$
16. $\sqrt{-x^2-8x-12} > x+4$
17. $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1$
18. $\sqrt{1-3x} - \sqrt{5+x} > 1$
19. $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$
20. $(x+2)\sqrt{x^2+7x+6} \geq 0$
21. $\frac{\sqrt{x^2+x-6+3x+13}}{x+5} > 1$
22. $\sqrt{7x-6} - \sqrt{3x-16} > \sqrt{5x-22}$
23. $\sqrt{1+x} \leq \sqrt[4]{5-x}$
24. $\sqrt{2-\sqrt{x}} < \sqrt{x+1}$
25. $\sqrt{x+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{x-\frac{1}{x^2}} > \frac{2}{x}$
26. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \geq 2$
27. $\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}} + \frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}} > 2$
28. $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} < \frac{3}{2}$

Ответы: **1.** $\emptyset$. **2.** 5. **3.** $-1/2$. **4.** 1. **5.** $-1, -1/2$. **6.** 16. **7.** 3. **8.** $-4; (-3+\sqrt{13})/2$. **9.** 6. **10.** 5. **11.** $[-2, 2]$. **12.** $-1, 3, 35$. **13.** $1 - \sqrt{2}, 2, 3$. **14.** $(-\infty, -7/9)$. **15.** $[-46, 3]$. **16.** $[-6, -4 + \sqrt{2}]$. **17.** $(-1, 15)$. **18.** $[-5, (-9-\sqrt{61})/8]$. **19.** $[-2, -1] \cup \{3\}$. **20.** $\{-6\} \cup [-1, +\infty)$. **21.** $(-\infty; -7) \cup (-5; -3] \cup [2; +\infty)$. **22.** $[16/3, 8)$. **23.** $[-1, 1]$. **24.** $((3-\sqrt{5})/2, 4]$. **25.** $(\sqrt[3]{5/4}, +\infty)$. **26.** $[1, +\infty)$. **27.** $(1, 2) \cup (2, (5+\sqrt{5})/2)$. **28.** $(-\infty, -5/3) \cup (1, +\infty)$.

4. Показательные уравнения и неравенства. Решите уравнения и неравенства.

1. $4^x + 8 = 9 \cdot 2^x$,
2. $4^x = 2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x$,
3. $3 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0$,
4. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4-x^2}{2}} = 8^x$,
5. $\frac{2 \cdot 6^x - 4^x - 15}{6^x - 9^x - 5} = 3$,
6. $\frac{15^x + 9^x + 6}{2 \cdot 15^x + 25^x + 3} = 2$,
7. $4^{x^2} - 3 \cdot 2^{x^2} + 1 \geq 0$,
8. $4 \cdot 4^x < 7 \cdot 2^x + 2$,
9. $\frac{9^x + 2 \cdot 3^x - 117}{3^x - 27} \leq 1$,
10. $\frac{25^{x^2+x-10} - (0,2)^{x^2-2x-7}}{0,5 \cdot 4^{x-1} - 1} \leq 0$,
11. $49^{x+1} - 200 \cdot 14^x + 4^{x+2} = 0$,
12. $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} > 1$
13. $\frac{2^x - 2^{2-x} - 3}{2^x - 2} \geq 0$,

$$14. \frac{9x^2+5x-6-\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-2x-9}}{2^{3x-4}-(0.5)^{6-2x}} \leq 0,$$

$$16. \frac{4x^2+3x-2-0,5^{2x^2+2x-1}}{5^x-1} \leq 0,$$

$$15. \frac{5^{(x-1)^2}+0,04-5^{x^2-2}-5^{1-2x}}{\sqrt{2^{2x+3}-2^{x+1}-2^{x+1}}} \leq 0,$$

$$17. \frac{8^x+3 \cdot 2^x-32}{2^x-3} + \frac{8^x-2^{x+3}-7}{4^x-8} \geq 4^x + 2^{x+2} + 12$$

$$18. 3 \cdot 43^x - 3 \cdot 49^x + \frac{2 \cdot 7^{2x+1} - 7^{x+2} + 63}{7^x-9} + 7 \geq 0$$

$$19. 5^{x-2} + 5^{x-3} + 5^{x-4} > 7^{\frac{x}{2}+1} + 7^{\frac{x}{2}} + 7^{\frac{x}{2}-1}$$

$$20. \frac{33 \cdot 3^{x-1} - 93}{12 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^x - 15} \geq 5$$

Ответы: 1. 0, 3. 2. $\log_{2/7} 3$. 3. $\log_{2/5} 2, \log_{2/5} 1/3$. 4. 4, -1. 5. $\log_{3/2}((\sqrt{13}+1)/6)$. 6. $\log_{5/3}((\sqrt{17}-3)/4)$. 7. $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\log_2(3+\sqrt{5})-1}\right] \cup \left[\sqrt{\log_2(3+\sqrt{5})-1}, +\infty\right)$; 8. $x \in (-\infty, 1)$. 9. $x \in [2, 3)$. 10. $x \in (-\infty, -3] \cup (3/2, 3]$. 11. -2, $\log_{7/2} 4$. 12. $x \in (-\infty; -0.5) \cup (1; +\infty)$. 13. $x \in (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$. 14. $x \in (-\infty; -3,5] \cup (-2; 1,5]$. 15. $x \in [-2; -1) \cup \{0\} \cup [1,5; \infty)$. 16. $x \in (-\infty; -2,5] \cup (0; 0,5]$. 17. $x \in [\log_2 11-2; 1,5) \cup (\log_2 3; +\infty)$. 18. $x \in (-\infty; \log_7 2] \cup [\log_7 3; 1] \cup (\log_7 9; +\infty)$. 19. $\left(4 + \log_{5/\sqrt{7}} \frac{399}{31}; +\infty\right)$. 20. $x \in (-\infty; \log_3(1/2)] \cup [\log_3(3/5); \log_3(5/3))$.

5. Логарифмические уравнения и неравенства. Решите уравнения и неравенства.

$$1. \frac{1}{2} \log_2(x^2) + \log_2(x-6) = 4$$

$$2. \log_{49}(2x^2+x-5) + \log_{\frac{1}{7}}(1+x) = 0$$

$$3. \log_3(2x^2-x) - 1 \leq \log_3(6x-3)$$

$$4. \log_5((2+x)(x-5)) < \log_{25}(x-5)^2$$

$$5. \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+3}{x-2}\right) > 2$$

$$6. \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_4 \frac{x^2-2x}{x+10}\right) \geq 0$$

$$7. \log_4(x^2-4)^2 + \log_2\left(\frac{x-1}{x^2-4}\right) > 0$$

$$8. 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2) \geq 1$$

$$9. 1 + \log_4(x+2)^2 = \log_2(2x+8)$$

$$10. \log_2(x+1) > \log_{x+1} 16$$

$$11. \log_{1/2}(\sqrt{5-x}-x+5) > 0$$

$$12. \log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0$$

$$13. \log_{9x} 27 \leq \frac{1}{\log_3 x}$$

$$14. \log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geq \log_{2x^2-5x+3}(3-x)$$

$$15. \log_{x/6}(\log_x \sqrt{6-x}) > 0$$

$$16. \log_{(x-2)^2} \frac{5-x}{4-x} \leq 1 + \log_{(2-x)^2} \frac{1}{x^2-9x+20}$$

$$17. \frac{1}{2} \log_{x-1}(x^2-8x+16) + \log_{4-x}(-x^2+5x-4) > 3$$

$$18. \log_{2x}(x+4) \cdot \log_x(2-x) \leq 0$$

$$19. \log_{(x+1)} 2 \leq \log_{(3-x)} 2$$

$$20. \frac{\log_2(8x) \cdot \log_3(27x)}{x^2-|x|} \leq 0$$

Ответы: 1. 8. 2. 3. 3. $x \in (0, 5; 9]$. 4. $(-3; -2)$. 5. $(-14/3; -3)$. 6. $x \in [-4; -2) \cup (5; 10]$. 7. $x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$. 8. $x \in (2; 5]$. 9. $\emptyset$. 10. $x \in (-3/4; 0) \cup (3; +\infty)$. 11. $x \in ((7+\sqrt{5})/2; 5)$. 12. $x \in (-2; -1] \cup (1; 2)$. 13. $x \in (0; 1/9) \cup (1; 3]$. 14. $x \in (8/5; 5/3) \cup (7/4; 2) \cup (2; 3)$. 15. $(2, 5)$. 16. $x \in (1; 2) \cup (2; 3) \cup [3, 5; 4) \cup (5, +\infty)$. 17. $x \in (2; 5/2) \cup (5/2; 3)$. 18. $x \in (1/2; 1) \cup (1; 2)$. 19. $x \in (-1; 0) \cup [1; 2)$. 20. $x \in (0; 1/27] \cup [1/8; 1)$.

6. Тригонометрические уравнения и неравенства. Решите уравнения и найдите все корни, принадлежащие указанному промежутку.

$$1. 2 \sin^4 x + 3 \cos 2x + 1 = 0, [\pi; 3\pi]$$

$$2. 4 \sin^4 2x + 3 \cos 4x - 1 = 0, [\pi; 3\pi/2]$$

$$3. \frac{2 \sin^2 x - \sin x}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0, [3\pi/2; 3\pi]$$

$$4. (49^{\cos x})^{\sin x} = 7^{\sqrt{2} \cos x}, [5\pi/2; 4\pi]$$

$$5. (16^{\cos x})^{\sin x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{3} \sin x}, [2\pi; 7\pi/2]$$

$$6. 15^{\cos x} = 3^{\cos x} (0,2)^{-\sin x}, [-3\pi; -3\pi/2]$$

$$7. \cos 2x + 2 \cos^2 x - \sin 2x = 0, [3\pi/2; 5\pi/2]$$

$$8. 3 \sin^2 x + 5 \sin x + 2 = 0, [\pi/2; 2\pi]$$

$$9. 6 \sin^2 x - 5 \sin x - 4 = 0, [-7\pi/2; -3\pi/2]$$

$$10. \frac{3 \operatorname{ctg}^2 x + 4 \operatorname{ctg} x}{5 \cos^2 x - 4 \cos x} = 0$$

$$11. 7 \sin^2 x + 8 \cos x - 8 = 0, [-\pi/2; \pi/2]$$

$$12. \frac{\sin 2x}{\cos(x+3\pi/2)} = 0, [-5\pi/2; -\pi]$$

$$13. 5 \cos^2 x - 12 \cos x + 4 = 0, [-5\pi/2; -\pi]$$

$$14. 6 \sin^2 x + 7 \cos x - 7 = 0, [-3\pi; -\pi]$$

$$15. \cos 4x - \cos 2x = 0, [\pi/2; 2\pi]$$

$$16. \operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 6 = 0, [-2\pi; -\pi/2]$$

$$17. 7 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0, [3\pi/2; 5\pi/2]$$

$$18. \sin x + \sin 3x = \sin 2x, (-3\pi/2; \pi/2)$$

$$19. 2 \sin^2 x + (2 - \sqrt{2}) \cos x + \sqrt{2} - 2 = 0, [5\pi/2; 7\pi/2]$$

$$20. 2 \sin(\pi + x) \cdot \sin(\pi/2 + x) = \sin x, [-5\pi; -4\pi]$$

Ответы: 1. $x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 3\pi/2, 5\pi/2$. 2. $x = \pi/8 + \pi n/4, x = \pi/4 + \pi k/2, n, k \in \mathbb{Z}; 9\pi/8, 11\pi/8, 5\pi/4$. 3. $x = \pi n, x = 5\pi/6 + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}; 2\pi, 17\pi/6, 3\pi$. 4. $x = \pi/2 + \pi n, x = (-1)^k \cdot \pi/4 + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}; 5\pi/2, 11\pi/4, 7\pi/2$. 5. $x = \pi n, x = \pm 5\pi/6 + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}; 2\pi, 17\pi/6, 3\pi, 19\pi/6$. 6. $x = \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}; -11\pi/4, -7\pi/4$. 7. $x = -\arctg 3 + \pi n, x = \pi/4 + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}; 2\pi - \arctg 3, 9\pi/4$. 8. $x = -\pi/2 + 2\pi n, x = (-1)^{k+1} \cdot \arcsin(2/3) + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}; \pi + \arcsin(2/3), 3\pi/2, 2\pi - \arcsin(2/3)$. 9. $x = (-1)^{n+1} \cdot \pi/6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}; -17\pi/6, -13\pi/6$. 10. $x = \pi - \arccos(4/3) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. 11. $x = 2\pi n, x = \pm \arccos(1/7) + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}; 0, \pm \arccos(1/7)$. 12. $x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}; -5\pi/2, -3\pi/2$. 13. $x = \pm \arccos(2/5) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -2\pi \pm \arccos(2/5)$. 14. $x = 2\pi n, x = \pm \arccos(1/6) + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}; -2\pi, -2\pi \pm \arccos(1/6)$. 15. $x = \pi n/3, n \in \mathbb{Z}; 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3, 2\pi$. 16. $x = -\arctg 2 + \pi n, x = -\arctg 3 + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}; -\pi - \arctg 2, -\pi - \arctg 3$. 17. $x = \arctg(3/7) + \pi n, x = -\pi/4 + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}; 2\pi + \arctg(3/7), 7\pi/4$. 18. $x = \pi n/2, x = \pm \pi/3 + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}; -\pi, -\pi/2, -\pi/3, 0, \pi/3$. 19. $x = 2\pi n, x = \pm 3\pi/4 + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}; 11\pi/4, 13\pi/4$. 20. $x = \pi n, x = \pm 2\pi/3 + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}; -5\pi, -14\pi/3, -4\pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александрова О.В. Математика. Тригонометрия: Учеб. Пособие для подготовительных отделений и курсов высших учебных заведений / О.В. Александрова, Е.А. Сагомоян, Ю.С. Семенов. – М.: Илекса, 2016. – 160 с.
2. Мерзляк А.Г. Математика : новый полный справочник для подготовки к ЕГЭ / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – М.: АСТ, 2023. – 559 с.
3. Ткачук В.В. Математика абитуриенту / В.В. Ткачук. – М.: МЦНМО, 2008. – 1024 с.
4. Шахмейстер А.Х. Иррациональные уравнения и неравенства / А.Х. Шахмейстер. – М.: МЦНМО, 2011. – 216 с.
5. Шахмейстер А.Х. Логарифмы / А.Х. Шахмейстер. – М.: МЦНМО, 2011. – 280 с.

Ластовенко Ольга Ростиславовна

**ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА.
АЛГЕБРА**

*Методические указания
к проведению практических занятий*

В авторской редакции

Изд. № 213/2023. Объем 3,25 п.л. Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 3,185.
РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»