

УДК 681.5.011

РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ ПОСТРОЕНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ФУНКЦИЙ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ Пряшников Ф.Д.

Предложены рекуррентные формулы для построения переходных функций систем автоматического управления.

Для построения переходных процессов систем автоматического управления широко используют обратное преобразование Лапласа

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} x(p) dp, \quad (1)$$

где $x(t)$ и $x(p)$ – соответственно, функция-оригинал и функция-изображение переходного процесса. Аналитические методы вычисления интеграла (1) строятся на основе разложения функции $x(p)$ на простейшие дроби и применении для них таблиц функций-оригиналов, а также путем применения теоремы вычетов, согласно которой

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{p_i} \{x(p)e^{pt}\}, \quad (2)$$

где $\{p_i\}_{i=1}^n$ – полюсы функции $x(p)$. Первый способ требует решения систем линейных алгебраических уравнений или применения специальных матричных методов. Эти методы с ростом числа полюсов быстро становятся плохо обусловленными и не используются для систем автоматического управления высоких порядков. Второй способ требует в случае кратных полюсов вычисления производных функции $f(p) = x(p)e^{pt}$. Необходимость использования $x(p)$ с кратными полюсами возникает, в первую очередь, в задачах исследования переходных процессов в системах автоматического управления с полиномиальными входными воздействиями, а также при параметрическом исследовании систем автоматического управления.

При дифференцировании функции $f(p)$ возникает необходимость аналитических преобразований большого числа полиномов высокого порядка. В таблице 1 приведены степени полиномов, необходимых для

определения значений производных при заданной степени n полинома $a(p)$ знаменателя $x(p)$ и кратности полюсов k . С учетом того, что и число этих полиномов линейно возрастает с ростом степени полинома $a(p)$, в [1] сделан вывод, что метод, требующий расчета производных, из-за громоздкости вычислений применяется только для функций низкого порядка.

Таблица 1 – Степени полиномов

k/n	10	20	30	50
2	16	36	56	96
3	28	68	108	192
4	48	128	208	368
5	90	240	400	720

Здесь предлагаются рекуррентные формулы, позволяющие при дифференцировании функции $f(p)$ избежать необходимости действий с полиномами высоких степеней.

Будем рассматривать i -ое слагаемое формулы (2), представляющее из себя вычет в полюсе z кратности k :

$$x_i(t) = \underset{z}{\operatorname{res}}\{x(p)e^{pt}\}. \quad (3)$$

В случае кратного полюса для определения вычета (3) используется соотношение

$$x_i(t) = \lim_{p \rightarrow z} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \{x(p)(p-z)^k e^{pt}\} = \lim_{p \rightarrow z} \frac{1}{r!} \frac{d^r}{dp^{kr}} \{v(p)e^{pt}\}, \quad (4)$$

где $r = k-1$; $v(p) = x(p)(p-z)^k$. Используя формулу Лейбница для дифференцирования произведения, приведем выражение (4) к виду

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \lim_{p \rightarrow z} \frac{1}{r!} \sum_{l=0}^r C_r^l v^{(l)}(p) (e^{pt})^{(r-l)} = \lim_{p \rightarrow z} \sum_{l=0}^r \frac{r!}{r! l! (r-l)!} v^{(l)}(p) t^{r-l} e^{pt} = \\ &= \sum_{l=0}^r \frac{1}{(r-l)! l!} v^{(l)}(z) e^{zt} t^{r-l}. \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим

$\alpha = \operatorname{Re}\{z\}$, $\omega = \operatorname{Im}\{z\}$, $\rho_l = \left| \frac{v^{(l)}(z)}{l!} \right|$, $\varphi_l = \arg\left(\frac{v^{(l)}(z)}{l!} \right)$, $R_l = \left(\frac{v^{(l)}(z)}{l!} \right)$. Тогда

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sum_{l=0}^r \frac{\rho_l e^{j\varphi_l} e^{(\alpha+j\omega)t} t^{r-l}}{(r-l)!} = \sum_{l=0}^r \frac{\rho_l e^{\alpha t} e^{j(\omega t + \varphi_l)} t^{r-l}}{(r-l)!} = \\ &= \sum_{l=0}^r \frac{\rho_l}{(r-l)!} e^{\alpha t} (\cos(\omega t + \varphi_l) + j \sin(\omega t + \varphi_l)) t^{r-l} = \\ &= \begin{cases} \sum_{l=0}^r \frac{R_l}{(r-l)!} e^{\alpha t} t^{r-l}, & \omega = 0; \\ \sum_{l=0}^r \frac{2\rho_l}{(r-l)!} e^{\alpha t} \cos(\omega t + \varphi_l) t^{r-l}, & \omega \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Соотношения (5) и (6) получены с учетом комплексной сопряженности вычетов в комплексно-сопряженных полюсах. Поэтому при использовании соотношения (6) в формуле (2) необходимо суммировать вычеты только в одном из комплексно-сопряженных полюсов.

Основная вычислительная проблема при использовании соотношений (6) заключается в определении значений $f_l(z) = \frac{v^{(l)}(z)}{l!}$, приводящих к необходимости действий с полиномами высоких степеней. Для исключения действий с полиномами высоких степеней приведем $f_l(p)$ к виду

$$\begin{aligned} f_l(p) &= \frac{1}{l!} \left(\frac{b(p)}{a(p)} \right)^{(l)} = \frac{1}{l!} (b(p)d(p))^l = \sum_{k=0}^l \frac{1}{l!} C_l^k b^{(l-k)}(p) d^k(p) = \\ &= \sum_{k=0}^l \frac{l!}{l!k!(l-k)!} b^{(l-k)}(p) d^k(p) = \sum_{k=0}^l \frac{b^{(l-k)}(p)}{(l-k)!} \cdot \frac{d^{(k)}(p)}{k!} = \\ &= \sum_{k=0}^l \mu_{l-k}(p) \eta_k(p), \end{aligned} \quad (7)$$

где $v(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$, $b(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^i$, $a(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i$, $d(p) = \frac{1}{a(p)}$,

$$\mu_l(p) = \frac{b^l(p)}{l!}, \quad \eta_k(p) = \frac{d^k(p)}{k!}.$$

Для вычисления $\mu_l(p)$ может быть получена формула типа формулы Горнера, требующая минимального объема вычислений

$$\begin{aligned} \mu_l(p) &= \sum_{i=l}^m \frac{i(i-1)\dots(i-l+1)}{l(l-1)\dots 1} b_i p^{i-l} = \\ &= \sum_{i=l}^m g_i b_i p^{i-l} = (\dots(g_m b_m p + g_{m-1} b_{m-1})p + \dots + g_{l+1} b_{l+1})p + g_l b_l, \end{aligned} \quad (8)$$

где $g_i = \frac{i(i-1)\dots(i-l+1)}{l(l-1)\dots 1}$. Для вычисления g_i могут быть получены рекуррентные соотношения, удобные для подстановки в формулу (8). Действительно, если записать выражение для $g_{i+1} = \frac{(i+1)i\dots(i-l+2)}{l(l-1)\dots 1}$, то, сравнивая g_i и g_{i+1} , получим рекуррентное соотношение

$$g_i = \frac{i+1}{i-l+1} \cdot \frac{i(i-1)\dots(i-l+1)}{l(l-1)\dots 1} \cdot \frac{i-l+1}{i+1} = g_{i+1} \frac{i-l+1}{i+1} = g_{i+1} \left(1 - \frac{l}{i+1}\right) \quad (9)$$

$(i = m-1, \dots, l),$

которое должно быть дополнено начальным значением

$$g_m = \prod_{i=1}^l \frac{m-i+1}{l-i+1}. \quad (10)$$

Для вычисления $\eta_k(p)$ воспользуемся соотношением

$$\eta_k(p) = \left(\frac{1}{k!} \prod_{l=1; p_l \neq p}^m (p - p_l)^{-1} \right)^{(k)} = \frac{1}{k!} \left(\prod_{l=1; p_l \neq p}^m \omega_l(p) \right)^{(k)}, \quad (11)$$

где $\omega_l(p) = (p - p_l)^{-1}$.

Введем в рассмотрение функцию $\rho(r, q, p) = \frac{1}{q!} \left(\prod_{l=r; p_l \neq p}^m \omega_l(p) \right)^{(q)}$.

Тогда (11) можно записать в виде

$$\eta_k = \rho(1, k, p). \quad (12)$$

Функция $\rho(r, k, p)$ может быть вычислена с использованием рекурсии, что позволяет эффективно ее вычислять с помощью ЭВМ. Действительно,

$$\rho(r, q, p) = \begin{cases} \frac{\omega_m^{(q)}(p)}{q!}, & r = m; \\ \frac{1}{q!} \left(\omega_r(p) \prod_{l=r+1; p_l \neq p}^m \omega_l(p) \right)^{(q)}, & r \neq m. \end{cases} \quad (13)$$

Для случая $r \neq m$ получаем

$$\begin{aligned} \rho(r, q, p) &= \sum_{i=0; p_r \neq p}^q \frac{1}{q!} C_q^i \omega_r^{(q-i)} \left(\prod_{l=r+1}^m \omega_l(p) \right)^{(i)} = \\ &= \sum_{i=0; p_r \neq p}^q \frac{q!}{q! i! (q-i)!} \omega_r^{(q-i)} \left(\prod_{l=r+1}^m \omega_l(p) \right)^{(i)} = \\ &= \sum_{i=0; p_r \neq p}^q \frac{\omega_r^{(q-i)}}{(q-i)!} \cdot \frac{1}{i!} \left(\prod_{l=r+1}^m \omega_l(p) \right)^{(i)} = \sum_{i=0; p_r \neq p}^q \frac{\omega_r^{(q-i)}}{(q-i)!} \rho(r+1, i, p). \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получаем

$$\rho(r, q, p) = \begin{cases} \frac{\omega_m^{(q)}(p)}{q!} = \zeta_m^q(p), & r = m; \\ \sum_{i=0; p_r \neq p}^q \frac{\omega_r^{(q-i)}}{(q-i)!} \rho(r+1, i, p) = \sum_{i=0; p_r \neq p}^q \zeta_r^{q-i}(p) \rho(r+1, i, p), & r \neq m. \end{cases} \quad (15)$$

Для вычисления значений $\zeta_l^q(p)$ могут быть получены соотношения

$$\zeta_l^q(p) = \begin{cases} \frac{(-1)(-2)\dots(-q)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot q} (p-p_l)^{-1-q} = (-1)^q (p-p_l)^{-1-q}, & \omega(p) \neq \text{const} \vee q=0; \\ 0, & \omega(p) = \text{const}. \end{cases} \quad (16)$$

Формулы (6-10), (12), (15), (16) позволяют определять аналитическое обратное преобразование Лапласа по формуле вычетов (2) без использования полиномов высоких степеней.

Библиография

1 Буров Г.А. Метод разложения дробно-рациональных функций и его использование для расчета переходных процессов / Г.А. Буров // Известия ВУЗов. Сер. Приборостроение. — 1979. — № 12. — С. 26–31.

Поступила в редакцию 20.12.2001 г.