

УДК 519.2

КРИТЕРИЙ ПЕРВОЙ СЕРИИ НЕУДАЧ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМ ПРОЦЕССОМ Чабаненко П.П.

Предложены распределение числа испытаний Бернулли до первой серии успехов (неудач) и способ определения момента появления причины дефектов в продукции на его основе.

К критериям, применяемым в управлении технологическими процессами, предъявляются известные требования. С течением времени эти требования изменяются. Так, требование простоты вычислимости ослабевает в связи с широким внедрением ЭВМ. С другой стороны, усиливается требование физической ясности, убедительности применяемого критерия.

Этому требованию удовлетворяет, в частности, критерий первой серии неудач (успехов), широко применяемый на практике интуитивно. Действительно, появление серии бракованных изделий свидетельствует о наличии причины этого брака, и чем больше длина (размер) серии, тем убедительней. Напротив, появление серии успехов – весомое доказательство устранения причины брака.

Проверку каждого изделия можно рассматривать как испытание. При определённых допущениях такие испытания можно отнести к схеме независимых испытаний Бернулли с постоянной вероятностью p успеха и неудачи $q = 1 - p$ в одном испытании. При этих условиях в [1, с. 339] получено асимптотическое распределение числа n испытаний до первой серии r успехов

$$p_r(n) \sim \frac{(x-1)(1-px)}{(r+1-rx) \cdot q \cdot x^{n+1}}, \quad (1)$$

где r – длина серии; $x = f(p, r)$, $n \geq r$.

Значение x нужно находить как наименьший по абсолютной величине корень уравнения

$$x = 1 + q \cdot p^r \cdot x^{r+1},$$

имеющего r корней и посторонний корень $x = 1/p$.

Можно показать, что при $p < r/(r+1)$ корень $1 < x < (1/p)$ определяется методом последовательных приближений рекуррентно как

$$x_{i+1} = 1 + q \cdot p^r \cdot x_i^{r+1} \quad (2)$$

при $x_0 = 1$, а при $p > r/(r+1)$ он $x > 1/p$ вычисляется по формуле

$$x_{i+1} = 2x_i - 1 - q \cdot p^r \cdot x_i^{r+1} \quad (3)$$

при ином начальном условии $x_0 = 1 + 1/r$.

Погрешности вычислений $p_r(n)$ по (1)-(3) очень быстро падают даже при малых n , однако после минимума они растут, проходят некоторый максимум, и лишь при дальнейшем увеличении n точность аппроксимации повышается. При решении конкретных задач особенно важно иметь точный прогноз при небольших превышениях n числа r , где асимптотика (1)-(3) неудовлетворительна.

С другой стороны, вывод точного выражения для $p_r(n)$ связан с существенными трудностями, а его громоздкость растёт с увеличением отношения n/r . В связи с этим целесообразно объединить точное решение для $p_r(n)$ в достаточном для широкого круга задач диапазоне n с последующим приближённым решением, но с незначительными погрешностями.

Такой результат имеет вид

$$p_r(n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n < r, \\ p^r & \text{при } n = r, \\ q p^r \left[1 - \sum_{i=0}^{k-r} (i+1) C_{k-r}^i q^i p^{k-i} \right] & \text{при } r < n \leq 3r+1, \\ p_r(n-1)/x \quad (\text{рекуррентно}) & \text{при } n > 3r+1, \end{cases} \quad (4)$$

где $k = n - r - 1$, а x вычисляется по формуле

$$x = \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^r p_r(2r+i) / p_r(2r+1+i).$$

При $n < 3r+2$ по (4) имеем точный результат, при больших n – приближённый, но с высокой точностью.

Для сравнения на рисунке 1 показаны результаты вычислений по формулам (1)-(3) и по (4) для распределения числа испытаний n до первой серии трёх успехов при $p = 0,8$. Выигрыш по точности при $n < 3r$ очевиден, при больших n зависимости сливаются.

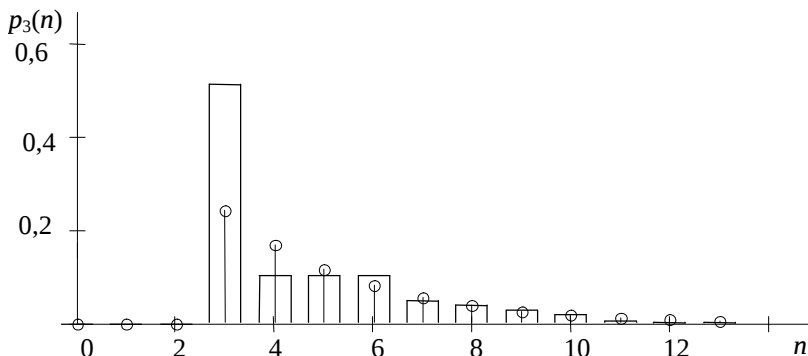


Рисунок 1 – Вероятности появления первой серии трёх успехов при $p = 0.8$
(о - асимптотически по В. Феллеру)

Заметим, что $p_r(n)$ – вероятность появления первой серии r успехов на испытании n . Отсюда математическое ожидание числа испытаний до первого её появления

$$M_r = \sum_{n=r}^{\infty} n \cdot p_r(n)$$

характеризует среднюю продолжительность испытаний от момента начала воздействия причины дефекта до появления первой серии r бракованных изделий (при вероятности выпуска бракованного изделия, равной p). На рисунке 2 изображены зависимости M_r от p и $r = \overline{3,6}$.

При детерминированной причине брака серии неудач следуют сразу за её воздействием. При случайной её природе результат её воздействия обнаруживается тем позже, чем меньше вероятность появления дефектов по этой причине. Причём эта вероятность, как правило, неизвестна, а её M_r

оценка по частости дефектных изделий затруднительна из-за неопределённости момента появления причины дефектов. Обозначим через Dm_1 разность математических ожиданий чисел испытаний до появления первой

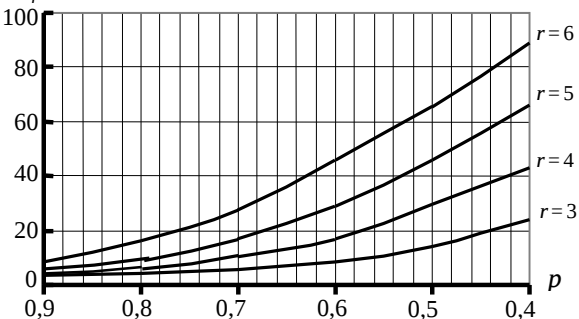


Рисунок 2 – Математические ожидания M_r числа испытаний до первой серии r неудач в функции от вероятности p неудачи в одном испытании

серии $r+1$ успехов и первой серии r успехов

$$\Delta m_l = M_{r+l} - M_r = \sum_{n=r+l}^{\infty} n[p_{r+l}(n) - p_r(n)] - \sum_{n=r}^{r+l-1} n \cdot p_r(n). \quad (5)$$

Эта разность не зависит от момента появления причины дефектов и поэтому может быть измерена для любых $l > 0$.

Располагая вектор измеренных значений $\overrightarrow{\Delta m_l^*}$ на оси r по близости к вектору расчётных значений $\overrightarrow{\Delta m_l}$ по формуле (5), можно найти как оценку r вероятности дефектного изделия, так и оценку n_0 момента появления причины дефектов в выпускаемой продукции.

Так, r может быть найдена из условия

$$\sum_l (\Delta m_l - \Delta m_l^*)^2 = \min,$$

где суммирование осуществляется по наблюдавшимся l , а n_0 — как разность

$$n_0 = n_1 - M_r,$$

где n_1 — номер испытания, на котором зарегистрирована первая серия неудач; r — длина (размер) этой серии.

Последующий анализ организационно-технических изменений в технологическом процессе и условий его реализации в окрестностях момента n_0 упрощает выявление причины снижения качества продукции.

Библиография

1 Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения / В. Феллер. — М.: Мир, 1967. — 527 с.

Поступила в редакцию 26.07.2001 г.