

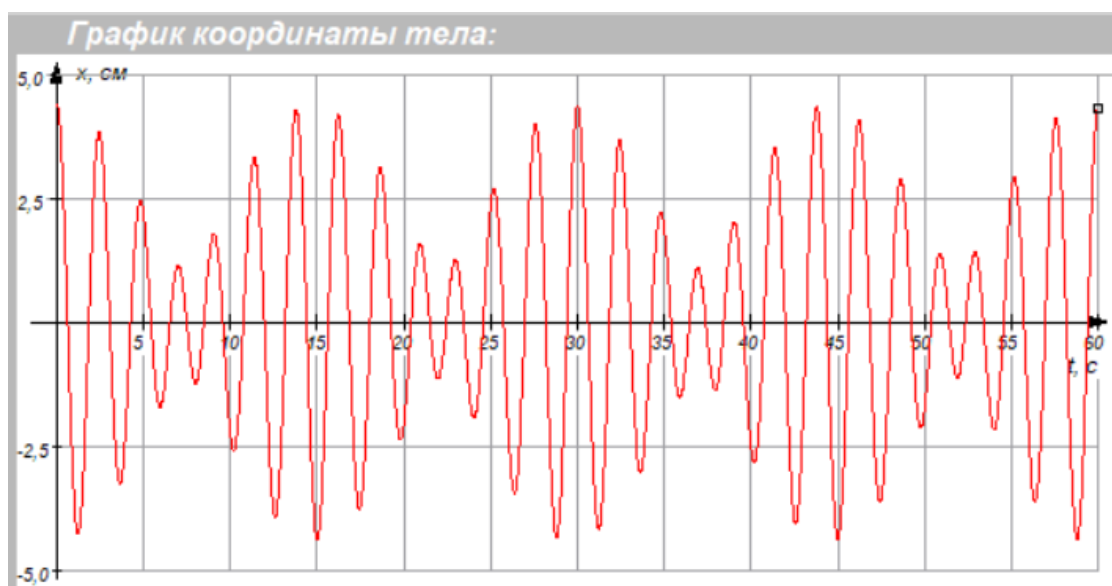
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.Г Рипп, В.В. Довгаленко

БИЕНИЯ

Учебное пособие
по общей физике для студентов технических
и естественно-научных специальностей



Севастополь
СевГУ
2024

УДК 535.416.5(075.8)
ББК 22.213.35Я73
Р537

Рецензент:
Ю.В. Браславский – канд. техн. наук, доцент

Рипп А. Г.

Р537 Биения: учебное пособие по общей физике для студентов технических и естественно-научных специальностей / А.Г. Рипп, В.В. Довгаленко ; Севастопольский государственный университет. – Севастополь: СевГУ, 2024. – 20 с. – Текст : электронный.

Учебное пособие разработано преподавателями кафедры «Физика» СевГУ и предназначено для студентов 1 и 2 курсов технических и естественно-научных специальностей, выполняющих лабораторные работы по дисциплинам: «физика» и «физический практикум». В пособии студентам предлагается познакомиться с особенностями сложений колебаний осциллятора – в частности, пружинного маятника, исследовать условия, при которых наблюдаются два крайних типа сложения колебаний: колебания с модулированным средним значением и колебания с модулированной амплитудой (биения). Кроме того, студентам предлагается исследовать зависимость частоты биений от частоты внешнего периодического воздействия на маятник (внешней частоты) и освоить метод измерения собственной частоты маятника, основанный на явлении биений – метод биений. Лабораторная установка, на которой предлагается провести эксперименты, виртуальная.

Пособие содержит краткий теоретический материал, описание лабораторной установки, порядок выполнения лабораторной работы и методы оценки погрешности измерений. Материал изложен подробно и в доступной форме. Для студентов, желающих получить больше информации, в конце пособия приводится список литературы.

УДК 535.416.5(075.8)
ББК 22.213.35Я73

Учебное пособие рассмотрено и утверждено на заседании кафедры «Физика», протокол № 5 от 25 января 2024 г.

РАБОТА 55. БИЕНИЯ

Цель работы

Изучение особенностей сложения колебаний одного направления движения. Наблюдение двух типов сложения колебаний пружинного маятника, на который действует внешняя периодическая сила. Исследование зависимости частоты биений маятника от частоты внешней силы. Измерение собственной частоты пружинного маятника с помощью явления биений.

1. Краткая теория

1.1. Сложение колебаний

Биения – это такой вид колебаний в объекте, при котором амплитуда колебаний является периодической функцией времени, то есть *совершает колебания*. Иными словами, амплитуда колебаний осциллятора сама является осциллятором. Биения относятся к классу модулированных колебаний. Термин «модуляция» в теории колебаний означает, что какой-либо параметр колебательного процесса (или несколько параметров) является функцией времени.

Причиной биений является *сложение колебаний*. Понятие сложения колебаний можно понимать с точки зрения физики и с точки зрения математики.

- С точки зрения физики, сложение колебаний – это колебания, которые вызваны *несколькими* причинами, каждая из которых может вызвать колебания в объекте.

Например, в пространстве распространяются две волны, генерированные *разными* независимыми источниками. Каждая из этих волн порождает колебания, поэтому суперпозиция этих волн порождает сложение колебаний.

Второй пример: в некотором объекте возможны *собственные* колебания, которые возникают при кратковременном внешнем воздействии на объект (такими объектами являются, в частности, маятники и электрические колебательные контуры). Причиной собственных колебаний является специфическое устройство объекта. Если, кроме того, на данный объект оказывает воздействие некоторый внешний *периодический* фактор, то колебания в нём порождаются двумя причинами, и поэтому их можно считать сложением колебаний. Именно такая ситуация реализована в лабораторной установке, с которой вы познакомитесь в предлагаемой лабораторной работе.

- С точки зрения математики, сложением колебаний называется процесс, в котором осциллятор (периодически изменяющаяся функция состояния объекта) представляет собой сумму нескольких периодических функций.

Лабораторная установка, с которой вам предлагается познакомиться в данной лабораторной работе – это пружинный маятник, совершающий одномерные колебания (вдоль оси пружины), и на этот маятник вдоль линии, по которой он движется, действует внешняя периодическая сила. Таким образом, с

точки зрения физики, колебания маятника представляют собой сложение колебаний. Убедимся, что это так и с точки зрения математики. Маятник показан на следующем рисунке 1.

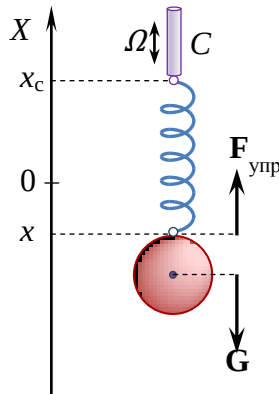


Рис. 1. Пружинный маятник и действующие на него силы

Некоторое тело массой m , которое собственно и называется маятником (на рисунке – это шарик), соединено с вертикально расположенной пружиной, упругость пружины (коэффициент жёсткости) равна k . Второй конец пружины прикреплён к некоторому телу C (на рисунке – это стержень), которое приводится в вертикальное колебательное движение с частотой Ω мотором (на рисунке не показан). Колебательное движение стержня и представляет собой *внешний* для маятника *периодический* фактор.

Движение маятника в установке – одномерное, поэтому для его количественного описания достаточно системы координат, содержащей только одну вертикальную ось. Обозначим эту ось OX и направим её вверх.

На маятник действуют две силы: сила тяжести $\mathbf{G}$ и сила упругости пружины $\mathbf{F}_{\text{упр}}$. Сила тяжести направлена вниз, поэтому её проекция на ось OX равна

$$G_x = -mg.$$

Сила упругости пружины направлена вверх, если пружина растянута, и вниз, если пружина сжата. Будем считать, что деформация пружины не слишком велика, так что выполняется закон Гука: сила упругости пропорциональна деформации. Это можно записать в следующем виде:

$$F_{\text{упр},x} = k(\ell - \ell_0),$$

где ℓ – длина деформированной пружины, а ℓ_0 – длина недеформированной пружины. Из рисунка 1 видно, что $\ell = (x_c - x)$. Здесь x_c – это координата точки прикрепления пружины к стержню, а x – координата точки прикрепления пружины к маятнику, в дальнейшем будем считать x координатой маятника. Таким образом,

$$F_{\text{упр},x} = k(x_c - x - \ell_0).$$

Теперь запишем Второй закон Ньютона для маятника в проекциях на ось OX .

$$\ddot{x} = \frac{-mg + k(x_c - x - \ell_0)}{m}. \quad (1)$$

Здесь $\ddot{x}$ – это вторая производная от координаты маятника, то есть ускорение a_x .

Будем считать, что стержень C совершает *гармонические* колебания, так что координата точки его соединения с пружиной x_c – это гармонический осциллятор, уравнение которого следующее:

$$x_c(t) = x_{c0} + A_c \cos(\Omega t + \varphi_0),$$

где Ω – частота колебаний стержня (внешняя частота), A_c – амплитуда колебаний, φ_0 – начальная фаза колебаний, x_{c0} – среднее значение x_c в процессе колебаний, то есть точка, вокруг которой совершаются колебания. В предлагаемой вам лабораторной установке стержень C в начальный момент времени $t = 0$ находится в самом верхнем своём положении (в амплитудном) и начинает опускаться вниз. Это означает, что $\varphi_0 = 0$ и уравнение колебаний имеет вид:

$$x_c(t) = x_{c0} + A_c \cos(\Omega t). \quad (2)$$

Подставив (2) в (1) и проделав некоторые преобразования, получим

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{k(x_{c0} - \ell_0) - mg}{m} + \frac{kA_c}{m} \cos(\Omega t). \quad (3)$$

Это – дифференциальное уравнение второго порядка. Прежде чем решать уравнение, полезно его немного упростить, а именно: избавиться от второго (постоянного) слагаемого в правой части. В это слагаемое входит число x_{c0} , значение которого зависит от того, где на оси OX выбрано начало координат. Следовательно, можно так подобрать начало координат, чтобы всё второе слагаемое обратилось в нуль. Тогда уравнение (3) будет иметь вид

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{kA_c}{m} \cos(\Omega t).$$

Теперь введём следующие обозначения:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (4)$$

$$a = \frac{k}{m}A_c = \omega_0^2 A_c. \quad (5)$$

При этом получим дифференциальное уравнение в следующем наиболее лаконичном (стандартном) виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = a \cos(\Omega t). \quad (6)$$

Это уравнение – линейное и неоднородное. Его решают в три этапа.

Первый этап: отбрасывается неоднородный член, то есть член, не зависящий от искомой функции $x(t)$ и от её производных, но зависящий от времени t – это правая часть уравнения $a \cos(\Omega t)$. В результате уравнение становится однородным:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Это уравнение хорошо известно в математике, физике и во многих других науках. Оно называется *уравнением гармонических колебаний*, так как его решение – это гармоническая функция

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1).$$

Физический смысл функции $x_1(t)$ достаточно прозрачен: если на маятник не действует внешний периодический фактор (колеблющийся стержень C), то колебания маятника вызваны только особенностью его внутреннего устройства – в нём есть пружина, которая порождает возвращающую силу. В результате возникают *собственные* колебания маятника. Эти колебания – гармонические,

их частота равна $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и называется *собственной частотой*.

Второй этап: находится любое *частное* решение исходного неоднородного уравнения (6). Такое решение обычно ищут в виде неоднородного члена (правой части уравнения). Например, так:

$$x_2(t) = A_2 \cos(\Omega t + \varphi_2).$$

Для определения параметров A_2 и φ_2 надо подставить функцию $x_2(t)$ в исходное уравнение (6). Производные от этой функции равны:

$$\dot{x}_2(t) = -A_2 \Omega \sin(\Omega t + \varphi_2), \quad \ddot{x}_2(t) = -A_2 \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_2).$$

Тогда подстановка $x_2(t)$ и $\ddot{x}_2(t)$ в уравнение (6) даёт:

$$-A_2 \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_2) + \omega_0^2 A_2 \cos(\Omega t + \varphi_2) = a \cos(\Omega t),$$

$$A_2 (\omega_0^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t + \varphi_2) = a \cos(\Omega t).$$

Последнее равенство должно выполняться для всех значений t . Это возможно при следующих условиях.

$$\varphi_2 = 0, \quad A_2 = \frac{a}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

С учётом формулы (5) получим:

$$A_2 = \frac{a}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{\omega_0^2 A_c}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (7)$$

Обратите внимание: параметр A_2 – это не амплитуда гармонической функции $x_2(t)$, так как амплитуда – величина положительная, но значение A_2 , как следует из (7), положительно только при $\Omega < \omega_0$. Амплитудой является $|A_2|$.

Третий этап: находится общее решение неоднородного дифференциального уравнения (6), которое представляет собой сумму функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\Omega t). \quad (8)$$

Вот и получилось, что осциллятор $x(t)$ – это сумма двух гармонических осцилляторов, то есть процесс колебаний маятника в лабораторной установке является сложением колебаний как с точки зрения физики, так и с точки зрения математики.

1.2. Учёт начальных условий

Общее решение уравнения колебаний маятника (8) содержит два параметра, значения которых неизвестны: A_1 и φ_1 . Это естественно, так как дифференциальное уравнение (6) – это уравнение второго порядка, поэтому в его общем решении должны быть две произвольные постоянные. Их определяют из начальных (или конечных) условий.

Начальное состояние маятника в предлагаемой вам лабораторной установке приготавливается так. Сначала стержень поднимается в амплитудное состояние, то есть на высоту A_c от своего среднего положения, так что

$$x_c(0) = x_{c0} + A_c.$$

При этом маятник устанавливается в положении равновесия. Затем маятник смещают от положения равновесия вверх на величину s и осторожно (без толчка) отпускают. С этого момента и начинаются колебания.

Итак, первое начальное условие: скорость маятника в момент $t = 0$ равна нулю, то есть $\dot{x}(0) = 0$. Уравнение для скорости маятника следует из (8):

$$\dot{x}(t) = -A_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) - A_2 \Omega \sin(\Omega t), \quad \dot{x}(0) = -A_1 \omega_0 \sin(\varphi_1).$$

Следовательно, первое начальное условие означает, что $\sin(\varphi_1) = 0$, так что начальную фазу можно положить равной нулю: $\varphi_1 = 0$.

Второе начальное условие можно записать так:

$$x(0) = x_p(0) + s, \quad (9)$$

где x_p – координата равновесного положения маятника. Движение стержня меняет положение равновесия маятника, поэтому значение x_p зависит от времени:

$x_p = x_p(t)$. Определим эту зависимость. Условие равновесия маятника имеет

вид: $F_x = 0$, а проекция силы, действующей на маятник равна, в соответствии с уравнением (1):

$$F_x(t) = -mg + k(x_c(t) - x(t) - \ell_0).$$

Приравняв силу к нулю и учтя, что $x_c(t) = x_{c0} + A_c \cos(\Omega t)$, получим:

$$-mg + k(x_{c0} + A_c \cos(\Omega t) - x_p(t) - \ell_0) = 0. \quad (10)$$

При упрощении дифференциального уравнения (3) было так выбрано начало координат, чтобы выполнялось равенство

$$k(x_{c0} - \ell_0) - mg = 0.$$

Тогда из (10) следует:

$$\begin{aligned} k(A_c \cos(\Omega t) - x_p(t)) &= 0, \\ x_p(t) &= A_c \cos(\Omega t). \end{aligned} \quad (11)$$

Из формулы (11) следуют два вывода.

Во-первых, начало координат находится в точке положения равновесия маятника в тот момент времени, когда стержень находится в своём среднем положении.

Во-вторых, $x_p(0) = A_c$. С учётом этого начальное условие (9) можно записать так:

$$x(0) = A_c + s.$$

Это условие надо теперь подставить в уравнение колебаний (8). С учётом того, что $\varphi_1 = 0$, получается:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= A_c + s, & A_1 &= s + (A_c - A_2) = s + \left(A_c - \frac{\omega_0^2 A_c}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right), \\ A_1 &= s - A_c \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \end{aligned}$$

Согласно этой формуле, параметр A_1 может быть как положительным, так и отрицательным, так что амплитуда гармонической функции $x_1(t)$ – это $|A_1|$.

Итак, уравнение колебаний маятника с учётом начальных условий имеет вид

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \cos(\Omega t), \quad (12)$$

причём амплитуды складываемых колебаний равны

$$A_1 = \left| s - A_c \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right|, \quad A_2 = \left| \frac{\omega_0^2 A_c}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right| \quad (13)$$

1.3. Два предельных типа сложения колебаний

Результат сложения колебаний – это, конечно, не гармонические колебания. Лишь в частном случае равенства частот – внешней Ω и собственной ω_0 –

получаются гармонические колебания. Однако есть предельные случаи, когда колебания не являются строго гармоническими, но *похожи* на них. Это – *модулированные* колебания. Под модуляцией понимается ситуация, когда какой-то из параметров осциллятора является, в свою очередь, функцией времени – в частности, это может быть гармоническая функция. Таким параметром (модулированным) может быть амплитуда, частота, начальная фаза, среднее значение. В данной лабораторной работе вы сможете наблюдать колебания с модулированной амплитудой (биения) и колебания с модулированным средним значением.

Колебания с модулированным средним значением.

Пусть частоты складываемых колебаний сильно отличаются друг от друга. Для определённости будем считать, что внешняя частота Ω много меньше частоты собственных колебаний маятника ω_0 . Тогда в уравнении колебаний (12) второе слагаемое – это медленно осциллирующая функция. Если $\Omega = 0$, то эта функция равна константе A_2 , которая представляет собой среднее значение осциллятора, то есть $x_2 = A_2 = \langle x(t) \rangle$. Если же $\Omega \neq 0$ и при этом $\Omega \ll \omega_0$, то функция $x_2(t)$ за время T_1 , равное периоду колебаний первого осциллятора, изменяется незначительно, так что её тоже можно считать средним значением $\langle x(t) \rangle$ – с той лишь разницей, что усреднение производится за время, равное *одному периоду* колебаний T_1 . При переходе от одного периода к следующему среднее значение осциллятора $\langle x(t) \rangle$ постепенно изменяется, причём гармонически, с частотой Ω . Иными словами, результат сложения колебаний представляет собой периодический процесс с модулированным средним значением. Пример такого процесса показан на следующем рисунке 2.

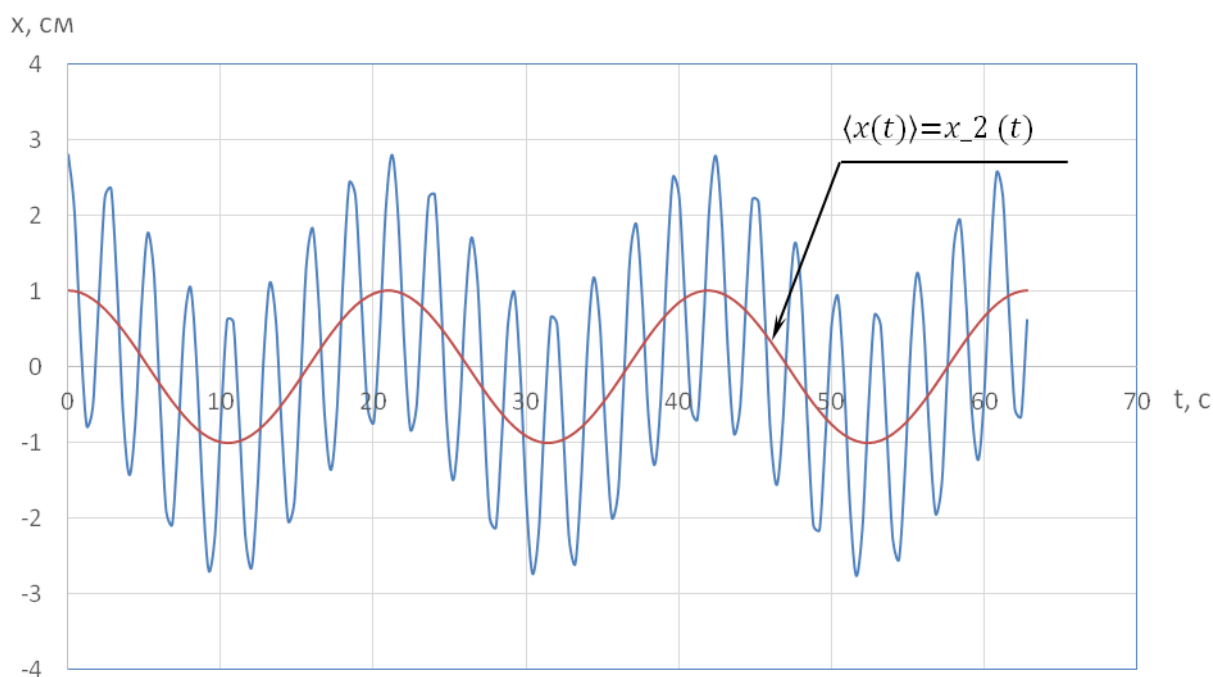


Рис. 2. Колебания с модулированным средним значением

Аналогичными являются колебания, если внешняя частота Ω много больше частоты собственных колебаний маятника ω_0 , но в предлагаемой вам установке внешнюю частоту можно увеличивать только до 6 рад/с, этого недостаточно, чтобы колебания были с модулированным средним значением.

Колебания с модулированной амплитудой (биения).

Этот тип колебаний наблюдается при условии, что частоты складываемых колебаний мало отличаются друг от друга. Для определённости будем считать, что внешняя частота Ω чуть меньше частоты собственных колебаний маятника ω_0 . Введём обозначения:

$$\omega_{\delta} = \frac{\omega_0 - \Omega}{2}, \quad \langle \omega \rangle = \frac{\omega_0 + \Omega}{2}. \quad (14)$$

Тогда частоты складываемых колебаний можно выразить через ω_{δ} и $\langle \omega \rangle$:

$$\Omega = \langle \omega \rangle - \omega_{\delta}, \quad \omega_0 = \langle \omega \rangle + \omega_{\delta}.$$

С учётом этого уравнение колебаний маятника (12) можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cos((\langle \omega \rangle + \omega_{\delta})t) + A_2 \cos((\langle \omega \rangle - \omega_{\delta})t) = \\ &= A_1 [\cos(\langle \omega \rangle t) \cos(\omega_{\delta} t) - \sin(\langle \omega \rangle t) \sin(\omega_{\delta} t)] + \\ &\quad + A_2 [\cos(\langle \omega \rangle t) \cos(\omega_{\delta} t) + \sin(\langle \omega \rangle t) \sin(\omega_{\delta} t)] = \\ &= (A_1 + A_2) \cos(\langle \omega \rangle t) \cos(\omega_{\delta} t) - (A_1 - A_2) \sin(\langle \omega \rangle t) \sin(\omega_{\delta} t) \end{aligned}$$

Введём ещё обозначения:

$$C_1 = (A_1 + A_2) \cos(\omega_{\delta} t), \quad C_2 = (A_1 - A_2) \sin(\omega_{\delta} t). \quad (15)$$

Тогда уравнение колебаний приводится к виду

$$x(t) = C_1 \cos(\langle \omega \rangle t) + C_2 \sin(\langle \omega \rangle t) = C \cos(\langle \omega \rangle t + \alpha), \quad (16)$$

где

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{C_2}{C_1}.$$

Подставив в последние две формулы выражения для C_1 и C_2 (15), получим:

$$C = C(t) = \sqrt{4A_1 A_2 \cos^2(\omega_{\delta} t) + (A_1 - A_2)^2}, \quad (17)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1} \operatorname{tg}(\omega_{\delta} t). \quad (18)$$

Вывод, который следует из этих формул: сложение колебаний – это колебания с модулированной амплитудой $C(t)$ и с модулированной начальной фазой

$\alpha(t)$. Правда, имеет важное значение то, что частоты складываемых колебаний мало отличаются друг от друга и частота ω_6 много меньше частот Ω и ω_0 . Это означает следующее.

Первое. Амплитуда колебаний $C(t)$ медленно колеблется с частотой ω_6 в диапазоне от $C_{min} = |A_1 - A_2|$ до $C_{max} = |A_1 + A_2|$. Такой колебательный процесс называется *биениями*, а частота ω_6 называется *частотой биений*. Как следует из (17), период биений равен $T_6 = \frac{\pi}{\omega_6}$.

Второе. Начальная фаза α осциллирует тоже медленно – с той же частотой биений ω_6 , однако эти осцилляции имеют значение только в течение *одного* периода колебаний косинуса $\cos(\langle\omega\rangle t + \alpha)$. За время каждого такого периода T фаза косинуса меняется от 0 до 2π , а начальная фаза α изменяется гораздо меньше. Учитывая это, можно получить приближённую формулу для α . В формуле (18) аргумент тангенса мал: $\omega_6 t \ll \langle\omega\rangle t$. Величина $\langle\omega\rangle t$ – это основная часть фазы косинуса $\cos(\langle\omega\rangle t + \alpha)$, и за период T значение $\langle\omega\rangle t$ изменяется от нуля до примерно 2π (даже меньше), поэтому $\omega_6 t \ll 2\pi$. Можно даже записать, что $\omega_6 t \ll 1$. Тогда в первом приближении

$$tg(\omega_6 t) \approx \omega_6 t, \quad tg \alpha \approx \alpha, \quad \alpha \approx \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1} \omega_6 t.$$

В результате

$$\cos(\langle\omega\rangle t + \alpha) \approx \cos \left[\left(\langle\omega\rangle + \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1} \omega_6 \right) t \right].$$

Это выражение означает, что $\cos(\langle\omega\rangle t + \alpha)$ – является в первом приближении гармонической функцией, у которой начальная фаза равна нулю (*не модулирована*), а частота колебаний равна

$$\omega = \langle\omega\rangle + \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1} \omega_6. \quad (19)$$

Итак, результат сложения колебаний с близкими частотами (биения) в достаточно хорошем приближении описывается уравнением

$$x(t) = C(t) \cos(\omega t), \quad (20)$$

где $C(t)$ – амплитуда биений, определяемая формулой (17), а частота колебаний ω определяется формулой (19). Модуляция начальной фазы практически *не проявляется*. Кроме того, так как $\omega_6 \ll \langle\omega\rangle$, то второе слагаемое в (19) много меньше первого, и тогда вторым слагаемым вообще можно пренебречь, считая (в нулевом приближении), что частота колебаний – это среднее арифметическое частот складываемых колебаний: $\omega = \langle\omega\rangle$.

Типичный график биений показан на следующем рисунке 3.

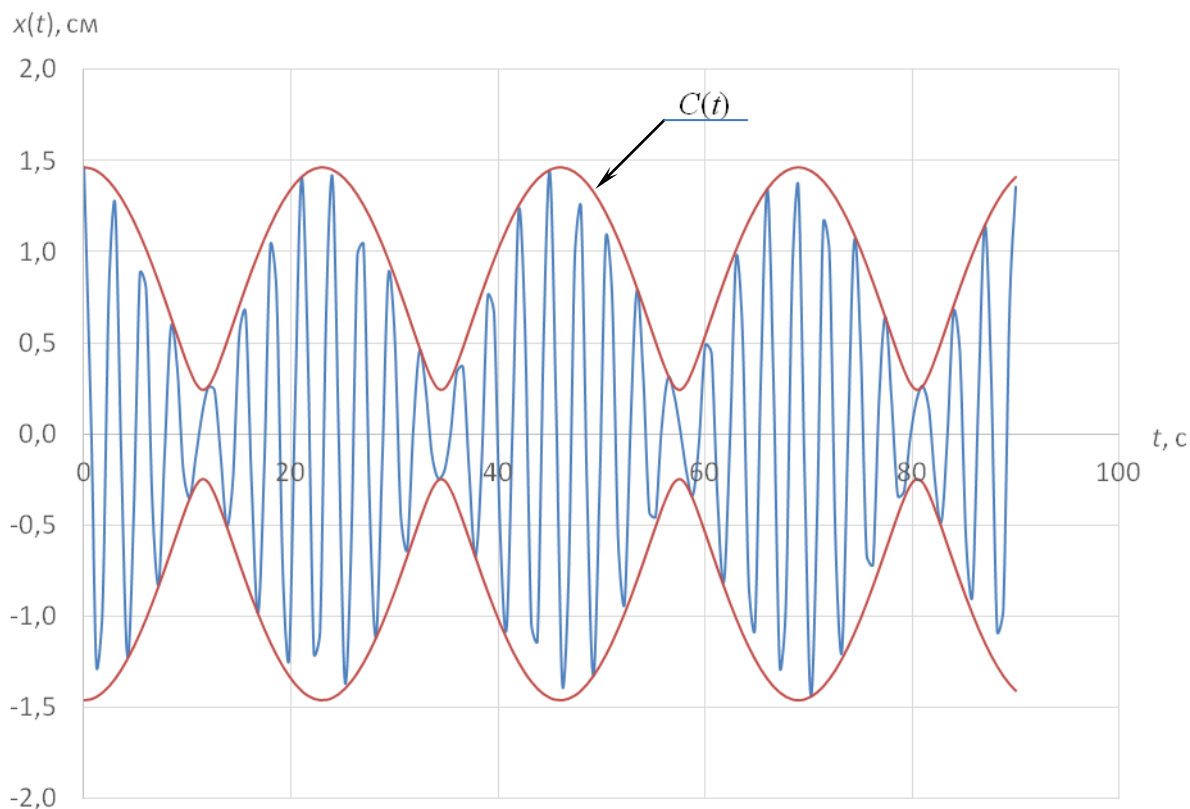


Рис. 3. График биений

2. Использование явления биений для измерения собственной частоты осциллятора

Простейший способ измерения частоты собственных колебаний осциллятора ω_0 состоит в следующем. Надо сосчитать количество полных колебаний N за некоторое время t . Это даст возможность измерить период собственных колебаний, используя формулу $T_0 = \frac{t}{N}$, после чего частоту колебаний можно по формуле $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Этот способ, однако плохо работает для измерения больших частот, так как в этом случае колебания происходят очень быстро – буквально мелькают, так что считать количество колебаний N без специальной техники практически невозможно. Если же включить внешний генератор гармонических колебаний, влияющий на осциллятор, то при постепенном увеличении частоты генератора (внешней частоты Ω) можно добиться возникновения биений. Частота биений ω_6 много меньше собственной частоты осциллятора, и количество биений N_6 можно считать даже вручную – без всякой специальной техники. Поэтому можно измерить период биений: $T_6 = \frac{t}{N_6}$, затем – частоту биений: $\omega_6 = \frac{\pi}{T_6}$, а затем и частоту собственных колебаний осциллятора ω_0 . Последнее можно сделать, воспользовавшись формулой (14) $\omega_6 = \frac{\omega_0 - \Omega}{2}$. Эта формула, правда, получена в предположении, что внешняя частота Ω меньше собственной частоты ω_0 . В общем случае её следует писать так:

$$\omega_{\text{б}} = \begin{cases} \frac{\omega_0 - \Omega}{2} & \text{при } \Omega < \omega_0, \\ \frac{\Omega - \omega_0}{2} & \text{при } \Omega > \omega_0. \end{cases} \quad (21)$$

В соответствии с этой формулой частота биений с ростом внешней частоты сначала линейно падает, а после перехода Ω через ω_0 – линейно нарастает. График функции $\omega_{\text{б}}(\Omega)$ в окрестности собственной частоты ω_0 показан на следующем рисунке 4.

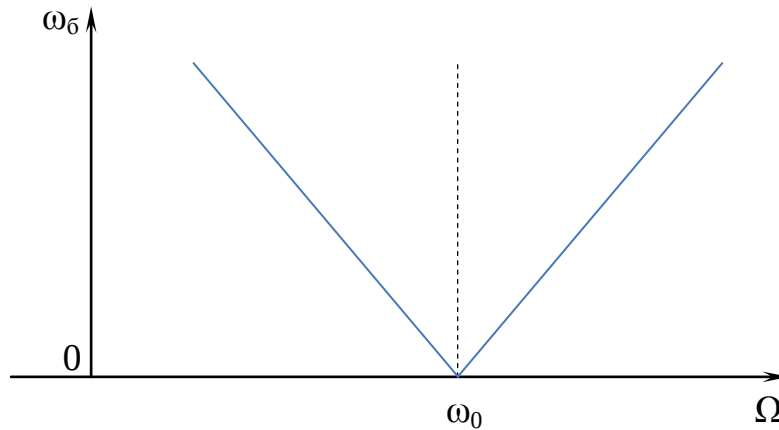


Рис. 4. Зависимость частоты биений $\omega_{\text{б}}$ от внешней частоты Ω

Этот рисунок подсказывает способ измерения собственной частоты ω_0 . Сначала надо постепенно увеличивать частоту генератора Ω , дожидаясь, когда колебательный процесс станет биениями. Как только появятся биения, надо провести серию измерений частоты биений $\omega_{\text{б}}$ при постепенном увеличении Ω , получив два участка зависимости $\omega_{\text{б}}(\Omega)$ – падающий и возрастающий. А затем можно поступить двумя способами.

Первый способ. По данным измерений построить график экспериментальной зависимости $\omega_{\text{б}}(\Omega)$ и провести на этом графике две прямые линии: одну – на ниспадающем участке, другую – на возрастающем. Точка, где эти две линии пересекаются, должна оказаться на оси абсцисс, её координата – это и есть собственная частота ω_0 .

Второй способ. Каждую пару чисел $(\Omega; \omega_{\text{б}})$ в полученной экспериментальной зависимости $\omega_{\text{б}}(\Omega)$ надо использовать для получения значения собственной частоты ω_0 . Как следует из (21), это можно сделать так:

$$\omega_0 = \begin{cases} \Omega + 2\omega_{\text{б}} & \text{при } \Omega < \omega_0 \text{ (на ниспадающем участке),} \\ \Omega - 2\omega_{\text{б}} & \text{при } \Omega > \omega_0 \text{ (на возрастающем участке).} \end{cases} \quad (22)$$

Полученный массив значений ω_0 затем нужно усреднить, а заодно оценить среднеквадратичное отклонение для всей выборки и случайную погрешность.

Второй способ измерения ω_0 явно точнее, однако первый – нагляднее, поэтому целесообразно использовать оба способа.

3. Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка – виртуальная, то есть представляет собой компьютерную программу, имитирующую реальную установку. Программа разработана в Национальном исследовательском Томском политехническом университете.

При вызове программы открывается окно «Сложение колебаний. Биения». В центральной части окна приведены цель работы и краткое описание работы. Внизу окна – три управляющие кнопки:

- **Ход работы.** При нажатии этой кнопки открывается окно, в котором показан порядок выполнения работы.
- **Эксперимент.** При нажатии на эту кнопку отрывается окно с экспериментальной установкой.
- **Завершение работы.** Эта кнопка вызывает выход из программы.

Окно «Эксперимент» показано на рисунке 5. Оно содержит панели инструментов и два окна визуализации.

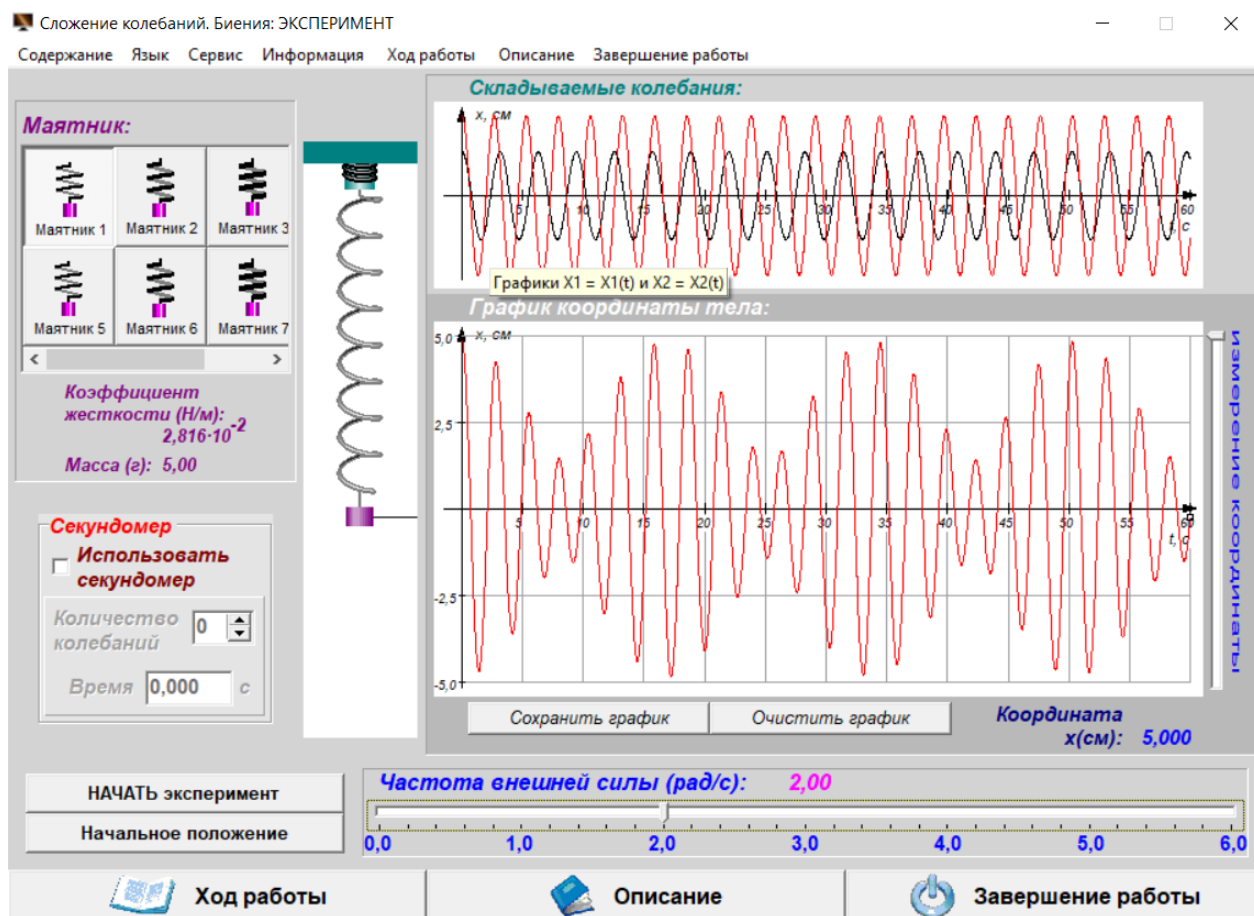


Рис. 5. Окно «Эксперимент»

■ Панели инструментов.

- **Маятник.** Панель предназначена для выбора одного из восьми предлагаемых маятников. После выбора высвечиваются два параметра маятника: коэффициент жёсткости пружины (упругость) k и масса маятника m . На самом деле панель предназначена для выбора только пружины, так как масса всех маятников одна и та же: $m = 5,00$ г.
- **Секундомер.** В нём есть два окошка. Первое окошко **Количество колебаний** позволяет задавать количество полных колебаний осциллятора N , а во втором окошке **Время** высвечивается время t , в течение которого произошло N полных колебаний. Для включения секундомера предусмотрена радиокнопка **Использовать секундомер**. Секундомер нужен для того, чтобы измерять период и частоту колебаний маятника T и ω , которые затем можно использовать для измерения частоты собственных колебаний маятника ω_0 . Вам предлагается другой, более точный способ измерения собственной частоты, описанный в разделе 2. В этом случае секундомер не нужен.
- **Частота внешней силы.** Это окошко с бегунком, позволяющее выбирать частоту колебаний стержня (внешнюю частоту) в диапазоне от 0 до 6,0 рад/с.
- **Кнопки управления экспериментом.** Этих кнопок две – одна под другой. Надпись на каждой кнопке зависит от состояния эксперимента.

А) Перед началом эксперимента на верхней кнопке написано **НАЧАТЬ эксперимент**.

Б) В процессе эксперимента (после нажатия кнопки **НАЧАТЬ эксперимент**) на верхней кнопке написано **ОСТАНОВИТЬ эксперимент**, а нижняя кнопка – не активна.

В) После окончания эксперимента на верхней кнопке написано **НАЧАТЬ эксперимент**, а на нижней кнопке – **Начальное положение**.

При нажатии на кнопку **Начальное положение** стержень устанавливается в верхнем амплитудном положении, а маятник поднимается на некоторую высоту s над своим равновесным положением. Величина s неизвестна, разработчики не предусмотрели возможность экспериментатора задавать её значение и не указали это значение.
- Окна визуализации. Этих окон три.
 - В первом окне (слева) показывается движение маятника и стержня.
 - Во втором окне (вверху) под названием **Складываемые колебания** строятся два графика: график собственных колебаний с частотой ω_0 , то есть зависимость $x_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t)$, и график внешних колебаний (стержня) с частотой Ω , то есть функция $x_2(t) = A_2 \cos(\Omega t)$. Оба графика строятся синхронно с движением маятника и стержня.
 - В третьем окне (основном), которое расположено под вторым окном и называется **График координаты тела**, строится результат сложения колебаний, то есть график координаты маятника $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

Справа от поля основного графика расположено вертикальное окошко с бегунком **измерение координаты**, позволяющее измерить координату маятника x для любого момента времени. Перемещение бегунка вызывает движение по полю графика метки (она имеет вид горизонтальной линии), одновременно под графиком в окошке с надписью **Координата x (см)** высвечивается вертикальная координата метки x . Это можно использовать для измерения минимальной и максимальной амплитуд колебаний при биениях C_{min} и C_{max} . Вам это делать не предлагается.

Под третьим окном есть две кнопки **Сохранить график** и **Очистить график**. Если после окончания движения маятника нажать кнопку **Сохранить график**, то график будет сохранён в виде рисунка в отдельном файле. Из этого файла график можно будет затем перенести в отчёт, а также использовать его для измерения периода биений T_6 . Кнопка **Очистить график** нужна для подготовки к проведению следующего эксперимента.

4. Порядок выполнения работы

- 4.1. Выберите по согласованию с преподавателем маятник. Результаты запишите в таблицу 1.
- 4.2. Рассчитайте и впишите в таблицу 1 расчётное значение собственной частоты маятника. Для этого воспользуйтесь формулой (4) $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Таблица 1

Условия эксперимента

Номер маятника			
Коэффициент жёсткости пружины	k	Н/м	
Масса маятника	m	г	
Собственная частота (расчётное значение)	ω_0	рад/с	
Погрешности прямых измерений, заданных величин и расчётных значений	$\Delta(\Omega)$	рад/с	
	$\Delta(t)$	кг/с	
	$\Delta(k)$	Н/м	
	$\Delta(m)$	г	
	$\Delta(\omega_0)$	рад/с	

Первая часть исследований

- 4.3. Установите минимальное значение частоты внешней силы: $\Omega = 0,2$ рад/с.
- 4.4. Нажмите кнопку **НАЧАТЬ эксперимент**.

- 4.5. Понаблюдайте некоторое время за графиком колебаний. Скорее всего, это будут колебания с модулированным средним значением, так как $\Omega \ll \omega_0$. Ничего измерять и записывать пока не надо.
- 4.6. Нажмите кнопки **ОСТАНОВИТЬ эксперимент** и **Очистить график**, затем немного увеличьте внешнюю частоту Ω , снова запустите колебания и наблюдайте за ними. Ваша задача: повторяя эксперимент с постепенно увеличивающейся внешней частотой, определить диапазон внешней частоты, в котором возникают колебания с модулированным средним значением. Запишите результат в свой отчёт и вставьте туда для примера один из наиболее показательных графиков, который вы сможете сохранить в файле, нажав кнопку **Сохранить график**.
- 4.7. Продолжайте увеличивать внешнюю частоту и наблюдать колебания до тех пор, пока они не станут биениями. Не забывайте каждый раз после остановки эксперимента очищать график. Запишите в своей рабочей тетради минимальное значение внешней частоты, при котором наблюдаются биения.
- 4.8. Продолжайте эксперименты, постепенно увеличивая внешнюю частоту, для того чтобы определить диапазон значений внешней частоты, в котором возникают биения. Запишите результат в свой отчёт и вставьте туда для примера один из наиболее показательных графиков биений.

Вторая часть исследований

- 4.9. Установите значение внешней частоты немного больше нижней границы диапазона биений, нажмите кнопку **НАЧАТЬ эксперимент** и дождитесь окончания колебаний. Значение Ω запишите в таблицу 2.
- 4.10. Сохраните график, затем откройте файл с графиком и определите, сколько за время эксперимента произошло периодов биений N_6 и за какое время t . Обратите внимание: во-первых, число N_6 , которое вы определите, может быть *целым или полуцелым* (например, 2 или 5, или 3,5), во-вторых, время биений t – это не полное время эксперимента, а время, за которое произошло определённое вами N_6 периодов биений. Результаты измерений запишите в таблицу 2. Вставлять график в отчёт нет необходимости, однако в своей рабочей тетради запишите название сохранённого графика и внешнюю частоту, при которой был проведён эксперимент – возможно, вам придётся снова просмотреть результат этого эксперимента.

Таблица 2

Зависимость частоты биений ω_6 от внешней частоты Ω
и измерение собственной частоты маятника ω_0

Номер опыта	Ω	N_6	t	T_6	ω_6	$\Delta(\omega_6)$	ω_0
	рад/с		с	с	рад/с	рад/с	рад/с
1							
2							
...							

- 4.11. Приведите установку в начальное состояние, для чего нажмите кнопки **Начальное положение** и **Очистить график**.
- 4.12. Пункты 4.9 – 4.11 вам надо проделать 10 раз с разными значениями внешней частоты: 5 экспериментов со значениями $\Omega < \omega_0$ и 5 экспериментов со значениями $\Omega > \omega_0$. Какие именно значения внешней частоты Ω , вы выберете, – это ваше дело, но лучше, конечно, чтобы шаг изменения был примерно одинаков.
- 4.13. Заполните таблицу 2. Для определения частоты биений используйте формулы

$$T_6 = \frac{t}{N_6}, \quad \omega_6 = \frac{\pi}{T_6}.$$

Значения собственной частоты маятника ω_0 в каждом опыте определите по формулам (22):

$$\omega_0 = \begin{cases} \Omega + 2\omega_6 & \text{при } \Omega < \omega_0 \text{ (на ниспадающем участке),} \\ \Omega - 2\omega_6 & \text{при } \Omega > \omega_0 \text{ (на возрастающем участке).} \end{cases}$$

- 4.14. Прокомментируйте результаты в таблице 2.
- 4.15. На основании данных таблицы 2 постройте график экспериментальной зависимости $\omega_6(\Omega)$ в виде двух графиков на одном рисунке. Первый график – для ниспадающего участка зависимости (с ростом внешней частоты Ω частота биений ω_6 уменьшается), второй график – для возрастающего участка. Проведите на графиках линии тренда и вставьте планки погрешностей.
- 4.16. Прокомментируйте в своём отчёте построенный график.
- 4.17. Для более точного измерения собственной частоты маятника ω_0 проведите статистическую обработку результатов измерения ω_0 , содержащихся в таблице 2. Среднее значение $\langle \omega_0 \rangle$ следует определять с помощью Excel-функции СРЗНАЧ, среднеквадратичное (стандартное) отклонение $\sigma(\omega_0)$ – с помощью функции СТАНДОТКЛОН.В, абсолютную случайную погрешность измерения $\Delta(\omega_0)$ – с помощью функции ДОВЕРИТ.СТЮДЕНТ. Значение доверительной вероятности выберите самостоятельно – например, 90 % или 95 %.
- 4.18. Результаты измерений собственной частоты маятника запишите в стандартной форме:

$$\omega_0 = (... \pm ...) \text{ рад/с}, \quad \varepsilon(\omega_0) = ... \%$$

- 4.19. Прокомментируйте результаты. В частности, сравните измеренные значения собственной частоты маятника с расчётным значением, которое записано в таблице 1.
- 4.20. Сформулируйте общие выводы по лабораторной работе.

5. Оценка погрешностей измерений

5.1. Погрешности прямых измерений.

- Внешняя частота Ω . Эта величина задаётся и измеряется с помощью линейки и бегунка. Результат измерения высвечивается над линейкой с точностью до сотых долей рад/с. Поэтому естественно принять $\Delta(\Omega) = 0,01$ рад/с.
- Время биений t . Это время вы определяете, используя сохранённый график биений. Масштабные сетки шкалы времени на графике расставлены с интервалом 5 с, однако у вас есть возможность увеличивать масштаб рассмотрения графика, поэтому оцените самостоятельно ошибку, которую вы можете совершить при измерении времени биений.

5.2. Погрешность измерения расчётного значения собственной частоты колебаний маятника ω_0 .

Собственная частота рассчитывается по формуле $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Из этой формулы следует:

$$\varepsilon(\omega_0) = \frac{1}{2}(\varepsilon(k) + \varepsilon(m)), \quad \Delta(\omega_0) = \omega_0 \varepsilon(\omega_0).$$

5.3. Погрешность измерения частоты биений ω_6 .

Для определения частоты биений используется формула

$$\omega_6 = \frac{\pi}{T_6} = \frac{\pi N_6}{t}.$$

Так как число биений N_6 вы можете подсчитать точно, без ошибки, то

$$\varepsilon(\omega_6) = \varepsilon(t), \quad \Delta(\omega_6) = \omega_6 \varepsilon(\omega_6).$$

5.4. Погрешность однократного измерения собственной частоты маятника ω_0 .

Результаты однократных измерений собственной частоты и их погрешности вам нужны для заполнения таблицы 2. Значения ω_0 получаются с использованием формулы (22)

$$\omega_0 = \Omega \pm 2\omega_6.$$

Тогда, в соответствии с общим правилом,

$$\Delta(\omega_0) = \Delta(\Omega) + 2\Delta(\omega_6).$$

5.5. Погрешность многократного измерения собственной частоты маятника ω_0 .

Результат многократного измерения – это усреднение результатов многократных измерений. Основным достоинством многократных измерений является исключение случайных погрешностей, которые в результате становятся много меньше приборных погрешностей. Так как основная величина, определяющая собственную частоту колебаний маятника, на которую влияет случайный фактор, это – частота биений, то после исключения случайных погрешностей можно считать, что погрешность собственной

частоты $\Delta(\omega_0)$ – это приборная погрешность внешней частоты $\Delta(\Omega)$, указанная в таблице 1.

6. Контрольные вопросы

- 6.1. Что означает термин «сложение колебаний»?
- 6.2. Что такое собственные колебания пружинного маятника, и при каких условиях они происходят?
- 6.3. От чего зависят амплитуды и начальные фазы складываемых колебаний?
- 6.4. Что такое «модулированные колебания»?
- 6.5. Какие виды модулированных колебаний вам предлагается наблюдать в данной лабораторной работе?
- 6.6. Что такое «биения» и при каких условиях это явление происходит?
- 6.7. Как связаны друг с другом период биений и циклическая частота биений?
- 6.8. Как зависит частота биений пружинного маятника от частоты внешней периодической силы, действующей на него?
- 6.9. Как вы будете измерять частоту биений пружинного маятника?
- 6.10. В чём состоит способ измерения собственной частоты пружинного маятника, предлагаемый в данной лабораторной работе?

7. Рекомендуемая литература

- 7.1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 3. – М.: Наука, 1977–1985 г.
- 7.2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. – М.: Наука, 1989.
- 7.3. Трофимова Т.И. Курс физики. – М., Высшая школа, 2003.
- 7.4. Ревинская О.Г., Кравченко Н.С. Лабораторный практикум по изучению моделей физических процессов на компьютере. – Томск, Изд-во Томского политехнического университета, 2007.
- 7.5. Рипп А.Г. Обработка измерений: методическое пособие. – Севастополь: СНУЯЭП, 2012.

У ч е б н о е и з д а н и е

Рипп Александр Гешелевич
Довгаленко Владимир Васильевич

БИЕНИЯ

Учебное пособие

В авторской редакции