

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МОРСКОЙ ИНСТИТУТ

Т Е О Р И Я СУДОВОЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Методические указания
к практическим занятиям
для студентов специальности
26.05.07 – Эксплуатация судового электрооборудования
и средств автоматики
дневной и заочной форм обучения

В шести частях

Часть 6

Севастополь
СевГУ
2024

УДК [621.3.01:629.5.064.5](076.5)

ББК 31.21я73-5*я73

Т33

Р е ц е н з е н т:

Ю.В. Матвеев - канд. техн. наук, доцент кафедры
судового электрооборудования Морского института СевГУ

Составители: Л.Н. Канов, А.К. Пронина

Т33 Теория судовой электротехники : методические указания к практическим занятиям для студентов специальности 26.05.07 – Эксплуатация судового электрооборудования и средств автоматики дневной и заочной форм обучения. – В 6-ти частях. Ч. 6 / Севастопольский государственный университет, Морской институт ; сост.: Л. Н. Канов, А. К. Пронина. – Севастополь: СевГУ, 2024. – 60 с. – Текст : электронный.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам в подготовке к практическим занятиям и выполнении расчетно – графических и контрольных заданий, а также для самостоятельной работы по индивидуальным графикам по дисциплине СЗ.Б.13 «Теория судовой электротехники». Методические указания предназначены для отработки компетенций ПСК-3 кодекса ПДНВ, раздел А–III / 6 78/95 и ФГОС ВПО, компетенции ОПК-2.

УДК [621.3.01:629.5.064.5](076.5)
ББК 31.21я73-5*я73

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры СЭО, протокол № 6 от 24 января 2024 г.

© Канов Л.Н., Пронина А.К., сост., 2024
© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Условные обозначения.	4
1. Практическое занятие № 21 Уравнения электромагнитного поля. Электростатическое поле. Расчет емкостей электротехнических устройств..5	
2. Практическое занятие № 22. Поле постоянного тока. Расчет сопротивлений заземлителей.	21
3. Практическое занятие № 23. Расчет переменного электромагнитного поля в прямоугольных токоведущих шинах.	30
4. Практическое занятие № 24. Расчет поверхностного эффекта в цилиндрическом проводнике	49
Библиографический список	60

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

α – поворотный множитель, град.;
 B – магнитная индукция, Тл;
 β – коэффициент загрузки;
 C – емкость, Ф;
 E, e – электродвижущая сила (ЭДС), В;
 E_A, E_B, E_C – трехфазная система ЭДС, В;
 ε – коэффициент пульсаций;
 φ – потенциал, В;
 F – магнитодвижущая сила, А;
 H – напряженность магнитного поля, А/м;
 δ – немагнитный зазор, м;
 g – активная проводимость, См;
 I, i – ток, А;
 J – источник тока, А;
 L – индуктивность, Гн;
 $KЗ$ – знак короткого замыкания;
 ψ – начальная фаза, град.;
 ν – частота, Гц;
 η – коэффициент полезного действия;
 P – активная мощность, Вт;
 R, r – активное сопротивление, Ом;
 R_m – магнитное сопротивление, Гн⁻¹;
 Q – реактивная мощность, ВАр;
 $\underline{S}$ – комплексная мощность, ВА;
 t – время, с;
 T – период колебания, с;
 τ – постоянная времени, с;
 Φ – магнитный поток, Вб;
 U, u – напряжение, В;
 U_m – магнитное напряжение, А;
 X, x – реактивное сопротивление, Ом;
 XX – знак холостого хода;
 $\underline{Y}$ – комплексная проводимость, См;
 w – число витков;
 ω – круговая частота;
 $\underline{Z}$ – комплексное сопротивление, Ом;
 $*$ – знак комплексного сопряжения.

Практическое занятие № 21

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ. РАСЧЕТ ЕМКОСТЕЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

Достижаемые компетенции: Практическое занятие направлено на формирование компетенции ОПК-2, в частности способность применять базовые знания фундаментальных и профессиональных дисциплин, проводить технико-экономический анализ, обосновывать принимаемые решения по использованию судового электрооборудования и средств автоматики, решать на их основе практические задачи профессиональной деятельности таблицы А-III/7 Кодекса ПДНВ с поправками.

Учебная цель: освоение методики анализа электростатического поля, применение теории поля для анализа емкостей кабельных линий; расчета напряженности, потенциала и энергии в электростатических полях; отработка компетенции ОПК-2; формирование практических навыков по теме: определение собственных и взаимных емкостей судовых электрических систем.

Ожидаемые результаты: формирование компетенции ОПК-2 в части получения и отработки способности к определению собственных и взаимных емкостей судовых электрических систем на базе полученных знаний.

Критерии оценивания правильности выполнения: на основе ответов на контрольные вопросы оценивается результат выполнения поставленных задач и делается вывод об успешности занятия.

Объем: 2 академических часа.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ

1. Определения основных величин.
2. Интегральная и дифференциальная форма уравнений электромагнитного поля.
3. Особенности уравнений магнитостатического поля.
4. Математическое описание переменного электромагнитного поля.
5. Уравнения электростатического поля.
6. Закон Кулона.
7. Потенциал электростатического поля.
8. Уравнения Пуассона и Лапласа.
9. Граничные условия.
10. Электрическое поле длинных линий.
11. Энергия поля системы заряженных тел.
12. Электрическая емкость.
13. Емкость длинного провода относительно земли.
14. Емкость между длинными параллельными проводами.
15. Емкость кабельных линий.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1. Определения основных величин. Электромагнитное поле – это особый вид материи, характеризующийся совокупностью взаимно связанных и взаимно обуславливающих электрического и магнитного полей и характеризующийся непрерывным распределением в пространстве. Силовое воздействие поля на электрические заряды и токи лежит в основе определения основных векторных величин, которыми характеризуют поле:

– напряженность электрического поля $\vec{E}$, которая измеряется в Вольтах на метр;

– индукция магнитного поля $\vec{B}$, которая измеряется в Теслах.

Кроме напряженностей к основным векторным величинам относятся:

– напряженность магнитного поля $\vec{H}$, связанная с магнитной индукцией соотношением $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$, где μ_r – относительная магнитная проницаемость $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – абсолютная магнитная проницаемость.

– вектор электрического смещения $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$, где ϵ_r – относительная электрическая проницаемость, $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^9}$ Ф/м – абсолютная электрическая проницаемость;

– $d\vec{S}, d\vec{l}$ – векторы соответственно элемента площади и элемента длины;

– $\vec{\delta}$ – вектор плотности тока проводимости, измеряется в Амперах на квадратный метр.

К основным скалярным величинам электромагнитного поля относятся:

– Φ – магнитный поток, измеряется в Веберах;

– q – электрический заряд, единицей измерения является Кулон;

– ρ – удельная объемная плотность заряда;

– γ – удельная проводимость среды.

2. Интегральная и дифференциальная форма уравнений электромагнитного поля. Электромагнитное поле для неподвижных тел и сред описывается четырьмя уравнениями Максвелла, сформулированными в 1873 г.

Закон полного тока: интеграл по замкнутому контуру (циркуляция) от вектора магнитной напряженности равен суммарному току, охватываемому этим током. В суммарный ток входит как ток проводимости, так и ток смещения, а также ток переноса движущимися частицами

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \oint_s \vec{\delta} d\vec{s} + \frac{d}{dt} \oint_s \vec{D} d\vec{s},$$

где первое слагаемое в правой части представляет ток проводимости через контур, а второе – ток смещения.

Закон электромагнитной индукции: интеграл по замкнутому контуру (циркуляция) от вектора электрической напряженности равен скорости изменения магнитного потока через этот контур

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

При неизменном магнитном потоке в постоянном магнитном поле этот интеграл равен нулю.

Принцип непрерывности магнитного поля: интеграл по замкнутой поверхности от вектора магнитной индукции равен нулю или магнитный поток через замкнутую поверхность равен нулю

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Теорема Гаусса: интеграл по замкнутой поверхности от вектора электрического смещения равен суммарному свободному заряду, находящемуся внутри этой поверхности

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{СВОБ}}.$$

Кроме этих соотношений в уравнения электромагнитного поля входит определение плотности тока проводимости

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E}.$$

Дифференциальная форма уравнений предполагает использование для записи такие элементы векторного анализа, как ротор (вихрь) *rot*, дивергенцию (расходимость) *div* и градиент *grad*.

Дивергенция является скалярной функцией от вектора $\vec{A}$ и равна пределу отношения потока вектора через замкнутую поверхность к объему, ограниченному этой поверхностью, когда объем стягивается к исследуемой точке пространства и стремится к нулю

$$\text{div} \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{A} d\vec{S}}{V}.$$

Дивергенция характеризует удельную мощность источников и стоков вектора в исследуемой точке объема, т.е. источники и стоки электромагнитного поля.

Ротор является векторной функцией от вектора $\vec{A}$ и равен пределу отношения циркуляции по границе плоской площадки, проходящей через исследуемую точку поля, к площади этой площадки, когда граница площадки стягивается к этой точке

$$\text{rot} \vec{A} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_l \vec{A} d\vec{l}}{S}.$$

Ротор характеризует склонность электромагнитного поля образовывать замкнутые вихри. Направление вектора ротора показывает направление образующихся вихрей в соответствии с правилом правого винта при обходе замкнутого контура.

Градиент является векторной операцией от скалярного поля и показывает направление в сторону которого скалярная величина возрастает скорее всего. Координатами градиента являются частные производные от исследуемой величины по координатам.

Конкретная запись всех этих операций зависит от принятой системы координат.

Закон полного тока в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$$

закон электромагнитной индукции

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

принцип непрерывности магнитного поля

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0;$$

теорема Гаусса

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

3. Особенности уравнений магнитостатического поля.

Электростатическое и магнитостатическое поля характеризуются медленным изменением всех величин и низкой скоростью протекания процессов. Поэтому запись уравнений Максвелла упрощается: производные по времени приравниваются к нулю.

Электростатическое поле характеризуется неизменными во времени зарядами, находящимися в непроводящей среде:

– закон электромагнитной индукции в интегральной форме

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0$$

или в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0;$$

– формулировка теоремы Гаусса сохраняется полностью;

– магнитное поле отсутствует.

Магнитостатическое поле характеризуется неизменными во времени индукцией и напряженностью и отсутствием электрических зарядов:

– закон полного тока в интегральной форме

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = 0$$

или в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0;$$

– принцип непрерывности магнитного поля сохраняется полностью;

– электростатическое поле отсутствует.

В случае, когда среда, в которой существует поле, является проводящей $\gamma \neq 0$, существует плотность тока проводимости, и закон полного тока принимает вид в интегральной форме

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \oint_S \vec{\delta} d\vec{s}$$

или в дифференциальной форме

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{\delta}.$$

4. Математическое описание переменного электромагнитного поля.

Переменное электромагнитное поле описывается уравнениями Максвелла в комплексной форме для комплексных векторных действующих значений:

– закон полного тока

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \oint_S \vec{\delta} d\vec{s} \quad \text{или} \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{\delta};$$

– закон электромагнитной индукции

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -j\omega \Phi \quad \text{или} \quad \text{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{B}.$$

В областях, где ток проводимости отсутствует, формулы приобретают вид

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = j\omega \oint_S \vec{D} d\vec{s} \quad \text{или} \quad \text{rot} \vec{H} = j\omega \vec{D}.$$

5. Уравнения электростатического поля. Электростатическое поле создается неподвижными электрическими зарядами, находящимися в непроводящей среде

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \gamma = 0.$$

Закон электромагнитной индукции имеет вид в интегральной и в дифференциальной формах соответственно

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad \text{и} \quad \text{rot} \vec{E} = 0;$$

теорема Гаусса аналогично

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{СВОБ}} \quad \text{и} \quad \text{div} \vec{D} = \rho.$$

В этих формулах вектор электрического смещения $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$, где ϵ_r – относительная электрическая проницаемость, $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^9} \text{ Ф/м}$ – абсолютная электрическая проницаемость; $\vec{E}$ – вектор электрической напряженности.

Напряженность – силовая характеристика поля и численно равна силе, действующей на единичный заряд

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}.$$

Напряженность в точке от нескольких зарядов равна геометрической сумме напряженностей.

6. Закон Кулона. Два точечных заряда в вакууме взаимодействуют друг с другом с силой, прямо пропорциональной произведению зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Сила

направлена по линии, соединяющей заряды. Заряды с одинаковыми знаками отталкиваются, с противоположными – притягиваются

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2} \vec{1}_R,$$

где $\vec{1}_R$ – единичный вектор по линии действия силы.

Предполагается, что размеры заряженных тел гораздо меньше расстояния между ними. В поле точечного заряда напряженность обратно пропорциональна квадрату расстояния до исследуемой точки

$$\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2} \vec{1}_R.$$

7. Потенциал электростатического поля. Потенциал обозначается φ и является скалярной характеристикой поля. Потенциал в точке поля определяется работой, совершаемой силой поля при переносе единичного положительного заряда из исследуемой точки поля в ту точку, потенциал которой принимается нулевым. Часто полагается, что точка с нулевым потенциалом находится в бесконечности, тогда

$$\varphi_1 = \int_1^{\infty} \vec{E} d\vec{l}.$$

Также часто полагается, что точка с нулевым потенциалом находится на поверхности земли. Напряжение или разность потенциалов – это работа, затрачиваемая силой поля при переносе единичного заряда из начальной точки 1 в конечную точку 2

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}.$$

Напряжение и потенциал измеряются в Вольтах.

Потенциал исследуемой точки в поле точечного заряда имеет вид

$$\varphi_1 = \int_1^{\infty} \vec{E} d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}.$$

Напряженность в точке поля равна скорости изменения потенциала, взятой с обратным знаком. Согласно определения градиента

$$\vec{E} = -grad\varphi.$$

Компоненты вектора градиента равны частным производным от потенциала в исследуемой точке по координатам. Вид этих компонентов зависит от выбранной системы координат. В прямоугольной системе формула напряженности имеет вид

$$\vec{E} = -\left(\vec{1}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{1}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{1}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

8. Уравнения Пуассона и Лапласа. Эти уравнения вытекают из теоремы Гаусса. Уравнение Пуассона имеет вид

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_{св}}{\varepsilon_r \varepsilon_0},$$

а уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

В этих формулах $\rho_{св}$ – объемная плотность свободных зарядов, ∇^2 – оператор Лапласа, который в прямоугольной системе координат записывается в форме

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Решение уравнения Пуассона представляется формулой

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0} \int_L \frac{\tau dL}{R},$$

где ρ, σ, τ – объемная, поверхностная и погонная соответственно плотности распределения зарядов. Единственность решения уравнения Лапласа – Пуассона вытекает из граничных условий.

9. Граничные условия. На границе между проводящим телом и диэлектриком отсутствует тангенциальная (касательная) напряженности поля, а вектор электрического смещения в любой точке диэлектрика, непосредственно примыкающей к поверхности проводящего тела, численно равен плотности заряда на поверхности проводящего тела в этой точке.

На границе раздела двух диэлектриков с различными диэлектрическими проницаемостями равны тангенциальные составляющие напряженности поля, а также равны нормальные составляющие вектора электрической индукции. Граничные условия представляют следствие теоремы Гаусса.

При переходе через границу раздела двух диэлектриков потенциал не претерпевает разрыва, т.е. является непрерывной функцией.

Падающий и преломленный углы наклона силовой линии по отношению к нормали поверхности подчиняются соотношению (рис. 1).

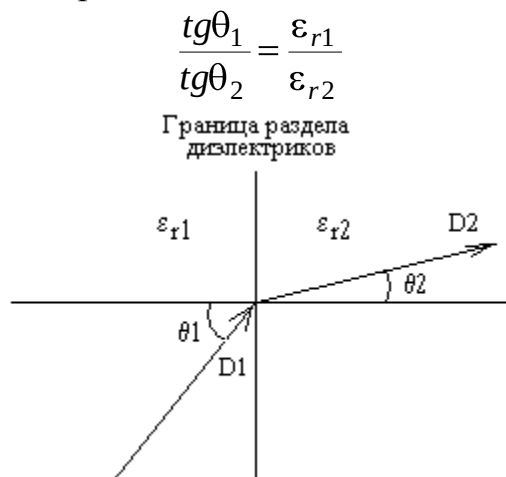


Рис. 1. Граничные условия на границе раздела двух диэлектриков

10. Электрическое поле длинных линий. Электрическая напряженность поля уединенного заряженного провода обратно пропорциональна расстоянию R от оси провода и прямо пропорциональна погонной плотности заряда

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 R}.$$

потенциал изменяется по логарифмическому закону

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0} \ln \frac{1}{R}.$$

Напряженность поля около двух длинных параллельных заряженных проводов равна геометрической сумме напряженностей τ каждого провода, а потенциал равен алгебраической сумме потенциалов

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0} \ln \frac{R_1}{R_2}.$$

Поле заряженного провода, подвешенного параллельно поверхности земли. Если заменить проводящую среду зеркальным изображением провода с изменением знака заряда, то в области над проводящей средой поле останется таким же, как в действительных условиях. В этом заключается принцип зеркальных изображений. Принцип справедлив при любом числе длинных проводов, натянутых параллельно земле и друг другу.

Поле заряженного провода подвешенного параллельно границе раздела двух диэлектриков. Анализ поля проводится введением двух дополнительных фиктивных зарядов τ_2, τ_3 . Поле в любой точке верхнего полупространства анализируют от двух зарядов: заданного τ_1 и дополнительного, расположенного симметрично заданному в нижнем полупространстве

$$\tau_2 = \frac{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \tau_1.$$

Оба полупространства в этом случае заполняются диэлектриком с проницаемостью ϵ_{r1} .

Поле в любой точке нижнего полупространства определяется как поле от единственного дополнительного заряда τ_3 . Все пространство при этом заполняется диэлектриком с относительной проницаемостью ϵ_{r2} . Дополнительный заряд определяется выражением

$$\tau_3 = \frac{2\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \tau_1.$$

11. Энергия поля системы заряженных тел. Энергия поля, образованного системой n заряженных тел, имеющих потенциалы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ и заряды $q_1, q_2, \dots, q_n$, определяется выражением

$$W_{\Sigma} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k \varphi_k .$$

Заряды на проводящих телах, находящихся в диэлектрике, всегда распределяются по поверхности этих тел. Поэтому энергия электростатического поля между ними минимальна.

12. Электрическая емкость. Под электрической емкостью между двумя телами, на которых имеются равные по величине и противоположные по знаку заряды, понимают абсолютное значение заряда на одном из тел к напряжению между телами

$$C = \frac{q}{U} .$$

Единицей емкости является Фарада. На практике используют более мелкие единицы: микрофарады, пикофарады. Емкостью обладают любые два проводящих тела, разделенные диэлектриком.

Под емкостью уединенного тела (собственной емкостью) понимают отношение заряда на этом теле к его потенциалу, полагая, что второе тело находится в бесконечности, и его потенциал равен нулю. Так как напряжение между двумя телами в электростатическом поле линейно зависит от заряда, то отношение $\frac{q}{U}$ не зависит ни от заряда, ни от напряжения. Таким образом, емкость определяется только конфигурацией тел, их размерами, расстоянием между ними и диэлектрической проницаемостью.

13. Емкость длинного провода, расположенного параллельно поверхности земли. Обозначим через h расстояние между поверхностью земли и осью провода, а через R – радиус провода. Тогда его емкость определяется выражением

$$C = \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{h}{R} + \sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2 - 1}\right)} .$$

Так как обычно высота подвеса гораздо больше радиуса провода, то приближенно получаем

$$C = \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 l}{\ln \frac{2h}{R}} .$$

14. Емкость между длинными параллельными проводами. Обозначим радиусы проводов $R_1 = R_2 = R$, расстояние между осями D , тогда емкость между проводами определяется выражением

$$C = \frac{\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 l}{\ln \left(\frac{D}{2R} + \sqrt{\left(\frac{D}{2R} \right)^2 - 1} \right)}.$$

Если расстояние между проводами гораздо больше их радиусов, имеет место упрощенная формула

$$C = \frac{\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 l}{\ln \frac{D}{R}}.$$

Рассмотрим выражение емкости между проводами с учетом поверхности земли. Пусть провода подвешены на одинаковой высоте h от земли и на расстоянии D друг от друга. Радиусы проводов одинаковы и равны R . Емкость линии вычисляется по формуле

$$C = \frac{\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 l}{\ln \left(\frac{2p}{R} \frac{D}{\sqrt{4h^2 + D^2}} \right)}.$$

Если высота подвеса h гораздо больше расстояния между проводами D , то $\sqrt{4h^2 + D^2} \approx 2h$, поэтому

$$C = \frac{\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 l}{\ln \frac{D}{R}},$$

влияние земли незначительно.

Рассмотрим выражение емкости в линии с тремя проводами с учетом поверхности земли. Провода могут быть расположены так, как изображено на рис. 2. Для симметрирования линии выполняется транспозиция проводов (круговая перестановка). При этом сокращается также влияние на соседние линии связи. Средние значения параметров всей линии оказываются одинаковыми для всех проводов, и линия рассматривается как симметричная.

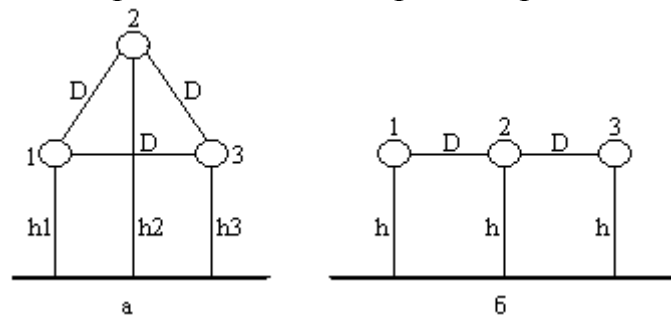


Рис. 2. Трехпроводные линии:
а) симметричная; б) несимметричная

В общем случае для линии по рис. 2, а емкость провода относительно земли имеет вид

$$C = \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 l}{\ln \left(2 \frac{\sqrt[3]{h_1 h_2 h_3}}{\sqrt[3]{R_1 R_2 R_3}} \frac{D}{\sqrt[3]{r_{12}' r_{23}' r_{31}'}} \right)},$$

где R_i – радиус провода; $r_{12}', r_{23}', r_{31}'$ – расстояния между проводами и их зеркальными отображениями относительно поверхности земли. При расположении проводов согласно рис.2,б получаем

$$C = \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 l}{\ln \left(\frac{2hD}{R^3 \sqrt{(4h^2 + D^2)} \sqrt{h^2 + D^2}} \right)}.$$

Пренебрегая влиянием земли $D \ll h$, получаем

$$C = \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 l}{\ln \frac{\sqrt[3]{2D}}{R}}.$$

15. Емкость кабельных линий. Рассмотрим коаксиальный кабель, радиус внутренней жилы которого равен r , а внутренний радиус наружной оболочки R . Тогда емкость на единицу длины составляет

$$C = \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_0}{\ln \frac{R}{r}}.$$

Сечения двух и трех жильных кабелей с внешней оболочкой изображены на рис. 3.

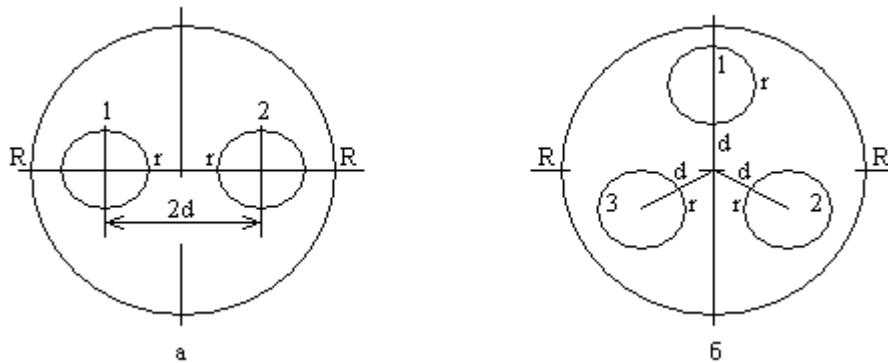


Рис. 3. Сечения кабелей:
а) двухжильный кабель; б) трехжильный кабель

Емкость двухжильного кабеля по рис. 2, а на единицу длины

$$C = \frac{\pi\epsilon_r\epsilon_0}{\ln \left(\frac{R^2 - d^2}{R^2 + d^2} \frac{2d}{r} \right)}.$$

Частичные емкости между проводами в трехжильном кабеле оцениваются приближенно

$$C_{12} = C_{23} = C_{31} \approx \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_0}{3\ln\left(\frac{R^2 - d^2}{\sqrt{R^4 + d^4 + R^2d^2}} \frac{\sqrt{3}d}{r}\right)} - N,$$

где

$$N \approx \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_0}{3\ln\left(\left(1 - \left(\frac{d}{R}\right)^6\right) \frac{R^3}{3d^2r}\right)}.$$

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Внутри полого заземленного металлического шара с радиусами d и R_0 находится другой полый металлический шар с радиусами b и c и с избыточным зарядом Q_0 , рис. 4. Сферический слой с внутренним радиусом a и внешним радиусом b заполнен диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_2 и с равномерным зарядом Q_1 . Относительная диэлектрическая проницаемость в остальных областях ϵ_1 .

Определить зависимость потенциала и напряженности поля от расстояния до центра шара.

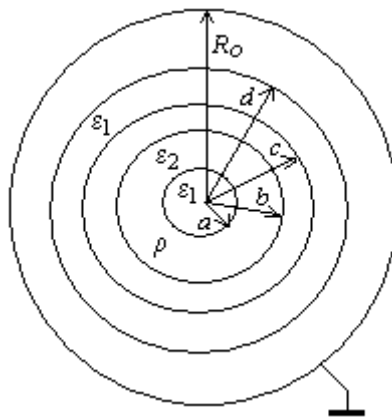


Рис. 4. Металлический шар с избыточным зарядом

Для решения применим теорему Гаусса $\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q$; в качестве замкнутой поверхности, по которой будет выполняться интегрирование, удобнее всего взять сферу, совпадающую с одной из эквипотенциальных поверхностей радиуса R . Эту поверхность силовые линии пересекают под прямым углом, и в силу симметрии вектор смещения во всех точках поверхности будет одинаков по величине. Поэтому поток вектора смещения через сферическую поверхность $\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \oint_S D dS = D \oint_S dS = D 4\pi R^2$.

Заряд q , охватываемый поверхностью интегрирования, зависит от того, в какой области расположена поверхность.

Во внутренней области, где $R < a$, заряд $q_1 = 0$. Поэтому напряженность поля $E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_1 \epsilon_0} = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_1 \epsilon_0 R^2} = 0$.

В области с равномерно распределенным зарядом $a < R < b$

$$q_2 = \frac{R^3 - a^3}{b^3 - a^3} Q_1.$$

Поэтому $E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2 \epsilon_0} = \frac{q_2}{4\pi \epsilon_2 \epsilon_0 R^2} = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_2 \epsilon_0} \left(R - \frac{a^3}{R^2} \right) \frac{1}{b^3 - a^3}.$

В области между металлическими сферами ($c < R < d$) заряд $q_3 = Q_1 + Q_0$ и $E_3 = \frac{q_3}{4\pi \epsilon_1 \epsilon_0 R^2} = \frac{Q_1 + Q_0}{4\pi \epsilon_1 \epsilon_0 R^2}.$

В области, занимаемой проводящей сферой ($c < R < d$) и ($d < R < R_0$) электростатическое поле отсутствует и напряженность равна нулю. В этих областях потенциал не изменяется. Поскольку внешняя металлическая сфера заземлена, то полагаем ее потенциал $\varphi' = 0$. Тогда потенциал произвольной точки, находящейся на расстоянии R от центра, имеет вид $\varphi = \int_R^d E dR$.

Для области ($c < R < d$) получаем

$$\varphi_3 = \int_R^d E_3 dR = \frac{Q_1 + Q_0}{4\pi \epsilon_1 \epsilon_0} \int_R^d \frac{dR}{R^2} = \frac{Q_1 + Q_0}{4\pi \epsilon_1 \epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d} \right).$$

Все точки слоя $b < R < c$ имеют одинаковый потенциал

$$\varphi'' = (\varphi_3)_{R=c} = \frac{Q_1 + Q_0}{4\pi \epsilon_1 \epsilon_0} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right).$$

Для области $a < R < b$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \int_R^d E dR &= \int_R^b E_2 dR + \int_c^d E_3 dR = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_2 \epsilon_0 (b^3 - a^3)} \int_R^b \left(R - \frac{a^3}{R^2} \right) dR + \varphi'' = \\ &= \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_2 \epsilon_0 (b^3 - a^3)} \left(\frac{b^2 - R^2}{2} + \frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{R} \right) + \varphi''. \end{aligned}$$

Для области $0 < R \leq a$

$$\varphi_1 = \int_R^a E_1 dR + \int_a^b E_2 dR + \int_c^d E_3 dR = \varphi_2(a) = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_2 \epsilon_0 (b^3 - a^3)} \left(\frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{a^3}{b} - a^2 \right) + \varphi''.$$

2. При решении этой задачи другим способом воспользуемся лапласианом в сферической системе координат

$$\Delta \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\varphi}{dR} \right),$$

так как здесь в силу симметрии поля $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$.

Во внутренней области ($0 < R < a$) применяем уравнение Лапласа

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\varphi_1}{dR} \right) = 0.$$

Дважды интегрируя и разделяя переменные, получаем

$$\varphi_1 = \frac{A_1}{R} + B_1; \quad (1)$$

$$E_1 = -\frac{d}{dR} \varphi_1 = \frac{A_1}{R^2}. \quad (2)$$

В области с пространственным зарядом ($a < R < b$), применяя уравнение Пуассона $\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\varphi_2}{dR} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} = -\frac{Q_1}{\frac{4}{3} \pi \varepsilon_2 \varepsilon_0 (b^3 - a^3)}$, получаем

$$\frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\varphi_2}{dR} \right) = -\frac{\rho R^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}; \quad R^2 \frac{d\varphi_2}{dR} = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 \varepsilon_2} - A_2;$$

$$\varphi_2 = -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0 \varepsilon_2} + \frac{A_2}{R} + B_2; \quad (3)$$

$$E_2 = -\frac{d\varphi_2}{dR} = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0 \varepsilon_2} + \frac{A_2}{R^2}. \quad (4)$$

В области между металлическими сферами применим уравнение Лапласа $\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\varphi_3}{dR} \right) = 0$. Аналогичным путем получаем

$$\varphi_3 = \frac{A_3}{R} + B_3; \quad (5)$$

$$E_3 = \frac{A_3}{R^2}. \quad (6)$$

Постоянные интегрирования A и B определяем из граничных условий:
– при $R = d$

$$\varphi_3 = 0; \quad (7)$$

$$E_3 = \frac{D_3}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} = \frac{Q_0 + Q_1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_1 d^2}; \quad (8)$$

– при $R = b$

$$\varphi_2(b) = \varphi'' = \varphi_c(c); \quad (9)$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} = \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_2 b^2}; \quad (10)$$

– при $R = a$

$$\varphi_1 = \varphi_2; \quad (11)$$

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2. \quad (12)$$

Из уравнений (6) и (8) получаем $\frac{A_3}{d^2} = \frac{Q_0 + Q_1}{4\pi \varepsilon_1 \varepsilon_0 d^2}$, откуда

$$A_3 = \frac{Q_0 + Q_1}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0}. \quad (13)$$

Из уравнений (5), (7) и (13) получаем $\frac{Q_0 + Q_1}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0 d} + B_3 = 0$, откуда

$$B_3 = -\frac{Q_0 + Q_1}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0 d}. \quad (14)$$

Из уравнений (4) и (10) получаем $\frac{\rho b}{3\epsilon_0\epsilon_2} + \frac{A_2}{b^2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2 b^2}$, откуда

$$A_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} - \frac{\rho b^3}{3\epsilon_0\epsilon_2}. \quad (15)$$

Из уравнений (3), (5), (9), (13), (14) и (15) получаем

$$\begin{aligned} -\frac{\rho b^2}{6\epsilon_0\epsilon_2} + \frac{1}{b} \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} - \frac{\rho b^3}{3\epsilon_0\epsilon_2} \right) + B_2 &= \frac{Q_1 + Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1 c} - \frac{Q_1 + Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1 d}, \\ B_2 &= \frac{Q_1 + Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right) + \frac{\rho b^2}{6\epsilon_0\epsilon_2} - \frac{1}{b} \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} - \frac{\rho b^3}{3\epsilon_0\epsilon_2} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Из уравнений (2), (4) и (12) получаем

$$\epsilon_1 \frac{A_1}{a^2} = \frac{\rho a}{3\epsilon_0} + \frac{\epsilon_2}{a^2} \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} - \frac{\rho b^3}{3\epsilon_0\epsilon_2} \right) = 0, \text{ так как } Q_1 = \frac{4}{3}\pi\rho(b^3 - a^3). \text{ Поэтому} \quad (17)$$

$$A_1 = 0.$$

Из уравнений (1), (3), (11), (15), (16) и (17) получаем

$$\begin{aligned} B_1 = \varphi_2(a) &= -\frac{\rho a^2}{6\epsilon_2\epsilon_0} + \frac{1}{a} \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_2\epsilon_0} - \frac{\rho b^3}{3\epsilon_2\epsilon_0} \right) + \\ &+ \frac{Q_0 + Q_1}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right) + \frac{\rho b^2}{6\epsilon_2\epsilon_0} - \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_2\epsilon_0} - \frac{\rho b^3}{3\epsilon_2\epsilon_0} \right) \frac{1}{b} = \\ &= \frac{\rho(b^2 - a^2)}{6\epsilon_2\epsilon_0} - \frac{\rho a^3}{3\epsilon_2\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q_0 + Q_1}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Окончательные выражения для потенциала и напряженности получаем после подстановки в уравнения (1) – (6) значений постоянных интегрирования из Уравнений (13) – (18). Уравнения, полученные из решений уравнений Пуассона и Лапласа, должны совпасть с уравнениями, полученными первоначально, исходя из теоремы Гаусса.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Охарактеризуйте понятие «Электростатическое поле».
2. Что понимается под силовой линией и эквипотенциальной поверхностью?

3. Назовите основные принципы построения картины электростатического поля.
4. Охарактеризуйте поле точечного, линейного заряда, поле диполя.
5. Как выражается энергия поля заряженных тел через их заряды и потенциалы?
6. Дайте обоснование методу зеркальных изображений.
7. Опишите параметры плоскопараллельного поля.
8. Объясните основные свойства электростатического поля,
9. Назовите отличительные особенности уравнений электростатического поля.
10. Сформулируйте закон Кулона.
11. Объясните понятие «потенциал электростатического поля», назовите единицы его измерения.
12. Для чего предназначены уравнения Лапласа и Пуассона? Чем они отличаются одно от другого?
13. Сформулируйте граничные условия на границе раздела диэлектрика и проводящей среды, на границе раздела двух диэлектриков.
14. Напишите выражения для напряженности и потенциала в поле длинного уединенного провода, провода над поверхностью земли, системы нескольких проводов.
15. В чем заключается принцип зеркальных соотношений?
16. От чего зависит количество энергии электростатического поля системы заряженных тел?
17. Дайте определение емкости, собственной емкости, частичной емкости.
18. Как емкость длинного провода относительно земли зависит от высоты подвеса? от радиуса провода? от состояния атмосферы?
19. Как отличается рабочая емкость между двумя проводами в присутствии и отсутствии земли?
20. Для чего выполняется транспозиция трехпроводной линии в присутствии земли?
21. Оцените собственную емкость провода трехпроводной линии в присутствии земли.
22. В чем состоит особенность подсчета емкостей кабелей с проводящей оболочкой? с непроводящей оболочкой?
23. Приведите формулы рабочей емкости между жилами двухпроводного кабеля, трехжильного кабеля.

Практическое занятие № 22

ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА. РАСЧЕТ СОПРОТИВЛЕНИЙ ЗАЗЕМЛИТЕЛЕЙ

Достигаемые компетенции: Практическое занятие направлено на формирование компетенции ОПК-2, в частности способность применять базовые знания фундаментальных и профессиональных дисциплин, проводить технико-экономический анализ, обосновывать принимаемые решения по использованию судового электрооборудования и средств автоматики, решать на их основе практические задачи профессиональной деятельности.

Учебная цель: формирование практических навыков по знанию: расчет электрического поля постоянного тока в проводящей среде; понимание формальной аналогии между полем постоянного тока и электростатическим полем; расчет сопротивлений утечки и заземлителей.

Ожидаемые результаты: формирование компетенции ОПК-2 в части получения и отработки способности к анализу полей постоянного тока.

Критерии оценивания правильности выполнения: на основе ответов на контрольные вопросы оценивается результат выполнения поставленных задач и делается вывод об успешности занятия.

Объем: 2 академических часа.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ

1. Уравнения поля постоянного тока в проводящей среде.
2. Граничные условия в поле постоянного тока.
3. Аналогия между полем в проводящей среде и электростатическим полем.
4. Расчет тока утечки коаксиального кабеля.
5. Сопротивление заземлителя.
6. Определение шагового напряжения.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1. **Уравнения поля постоянного тока в проводящей среде.** Свойство среды, характеризующее ее способность проводить ток, называется удельной проводимостью γ . Удельная проводимость измеряется в Сименсах на метр. Основной величиной в электрическом поле постоянного тока является плотность тока $\vec{\delta}$ – вектор, направленный по напряженности поля. Плотность тока равна отношению тока, протекающего через малый элемент поверхности, нормальный к вектору напряженности, к размеру этой поверхности

$$\vec{\delta} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta \vec{S}}.$$

Электрический ток есть поток вектора плотности тока через поверхность

$$I = \int_S \vec{\delta} d\vec{S}.$$

Закон Ома в дифференциальной форме устанавливает связь между плотностью тока в заданной точке проводящей среды и напряженностью поля в этой точке

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E}.$$

Часто в среде имеется стороннее электрическое поле, обусловленной химическими, тепловыми, термохимическими процессами. Напряженность стороннего поля обозначим $\vec{E}_{стор}$. Тогда обобщенный закон Ома принимает вид

$$\vec{\delta} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{стор}).$$

Принцип непрерывности электрического тока говорит о том, что суммарный ток, входящий в некоторый замкнутый объем равен суммарному току, выходящему из этого объема, т.е. поток вектора плотности тока через замкнутую поверхность равен нулю

$$\oint_S \vec{\delta} d\vec{S} = 0.$$

Это выражение представляет первый закон Кирхгофа в интегральной форме. В дифференциальной форме первый закон Кирхгофа означает, что в любой точке поля нет ни истока, ни стока линий плотности тока проводимости

$$\text{div} \vec{\delta} = 0.$$

Объемную плотность энергии, выделяемой током в заданной точке за единицу времени определяет закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме для удельной мощности

$$P_0 = \gamma E^2.$$

Так же, как и в электростатическом поле, в поле постоянного тока потенциал φ подчиняется уравнению Лапласа, т.е. поле постоянного тока в проводящей среде является потенциальным

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Оператор Лапласа раскрывается в зависимости от выбранной системы координат.

2. Граничные условия в поле постоянного тока. При переходе тока из проводящей среды с одной проводимостью в проводящую среду с другой проводимостью выполняются следующие граничные условия. Тангенциальные (касательные) составляющие вектора электрической напряженности равны по обе стороны границы

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}.$$

Это условие полностью совпадает с аналогичным условием для напряженности в электростатическом поле.

Вторым граничным условием является равенство нормальных составляющих вектора плотности тока

$$\delta_{1N} = \delta_{2N}.$$

Определим связь между углом падения β_1 и углом преломления β_2 линии тока при переходе тока из одной среды в другую. Если ток переходит из среды с большей удельной проводимостью в среду с меньшей, то угол преломления меньше угла падения. Имеет место следующая пропорция (рис. 1)

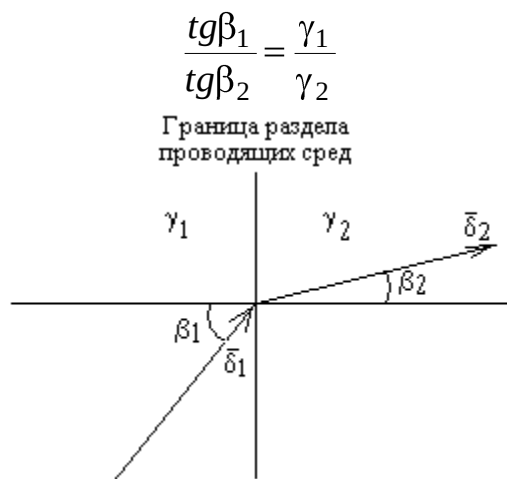


Рис. 1. Граничные условия на границе раздела проводящих сред

3. Аналогия между полем в проводящей среде и электростатическим полем. Природа поля электростатического и поля постоянного тока различны. Однако между ними существует формальная аналогия.

Электростатическое поле в областях, не занятых зарядами, подчиняется уравнению Лапласа. Электрическое поле тока в проводящей среде вне сторонних источников также подчиняется уравнению Лапласа. В обоих полях существует вектор электрической напряженности. С вектором электрического смещения $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$ сопоставляется вектор плотности тока $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$. С потоком вектора смещения $\vec{D}$ сопоставляется поток вектора плотности тока, т.е. электрический ток $I = \int_S \vec{\delta} d\vec{S}$. Граничные условия на

границе раздела двух диэлектриков для векторов напряженности и смещения совпадают с граничными условиями на границе раздела проводящих сред для векторов напряженности и плотности тока. Поэтому потенциалы в двух полях подчиняются одному и тому же уравнению Лапласа и имеют одно и то же решение. Картина полей будет одинакова.

Особенно эффектно эта аналогия проявляется между проводимостью и емкостью. Если электроды поместить в проводящую среду и присоединить к источнику ЭДС, то в проводящей среде возникнет поле постоянного тока. Проводимость между электродами определяется по закону Ома

$$G = \frac{I}{U}.$$

С другой стороны, в электростатическом поле с аналогичными электродами, на которых расположены равные по величине между собой и противоположные по знаку заряды q , имеет место емкость между электродами

$$C = \frac{q}{U}.$$

Поэтому имеет место соотношение

$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\gamma},$$

т.е. емкость между двумя телами, разделенными диэлектриком с абсолютной проницаемостью ε_a , так относится к проводимости G между теми же телами, если их поместить в среду с электрической проводимостью γ , как ε_a относится к γ .

Последнее соотношение позволяет по известному выражению емкости между какими – либо телами получить выражение для проводимости между этими телами, находящимися в проводящей среде.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Расчет тока утечки коаксиального кабеля. Определим ток утечки коаксиального кабеля на километр длины. Пусть пространство между жилой и оболочкой заполнено неидеальным диэлектриком с удельной проводимостью $\gamma = 10^{-8} \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$. Радиус жилы r_1 , радиус оболочки $r_2 = 2,73r_1$. Напряжение между жилой и оболочкой 10 кВ.

Ток утечки равен $I = UG$. Проводимость выразим через емкость коаксиального кабеля $C = \frac{2\pi\varepsilon_a l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$. Заменяя проницаемость на удельную

проводимость, получаем $G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi \cdot 10^{-8} \cdot 10^3}{\ln \frac{2,73r_1}{r_1}} = 6,28 \cdot 10^{-5} \text{ См}$. Тогда ток

утечки через несовершенную изоляцию $I = UG = 10^3 \cdot 6,28 \cdot 10^{-5} = 0,628 \text{ А/км}$.

2. Сопротивление заземлителя.

Заземлитель осуществляет соединение какой-либо точки электрической цепи с землей. Электрический ток, проходя через заземлитель в землю, встречает некоторое сопротивление, называемое сопротивлением заземлителя. Формула проводимости заземления на основании формальной аналогии с формулой емкости в электростатическом поле позволяет найти

сопротивление заземлителя и сравнить его со значениями, требуемыми Государственных стандартов. За нулевой потенциал целесообразно принять потенциал бесконечно удаленной точки. Тогда в выражении проводимости $I = UG$ величина U есть потенциал электрода, так же как в выражении $q = UC$ величина U есть потенциал заряженного тела.

Так как емкость уединенной сферы радиуса r есть

$$C = 4\pi\epsilon r,$$

то проводимость заземлителя для сферического электрода, погруженного глубоко в землю, на основании формальной аналогии

$$G = 4\pi\gamma r,$$

где $\gamma \approx 10^{-2}$ – средняя удельная проводимость земли.

Проводимость заземлителя в виде полушария, вдавленного в землю, составит

$$G = 2\pi\gamma r.$$

Рассмотрим заземлитель в виде трубы, забитой вертикально в землю. Пусть l – длина трубы, r – ее радиус. Предположим, что один конец трубы находится у самой поверхности земли. Длина трубы вместе с ее зеркальным отражением равна $2l$.

Емкость цилиндра длиной $2l$ и радиуса r при $r \ll 2l$ составляет

$$C = \frac{2\pi\epsilon_a 2l}{\ln \frac{2l}{r}},$$

поэтому проводимость заземлителя вместе с его зеркальным отображением

$$G = \frac{4\pi\gamma l}{\ln \frac{2l}{r}}.$$

Окончательно проводимость заземлителя составляет

$$G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln \frac{2l}{r}}.$$

3. Заземлитель в виде металлического шара радиуса $R_0 = 50$ см находится на глубине $h_1 = 5$ м от поверхности земли. **Определить, насколько изменится **сопротивление растекания заземлителя** и шаговое напряжение между точками a и b , если на расстоянии $h_2 = h_1$ от заземлителя образуется вертикальный обрыв, рис.2. Длина шага $s = 0,75$ м.**

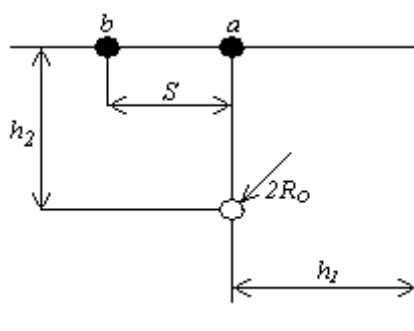


Рис.2. Заземлитель у края обрыва

Выполним расчет поля заземлителя вблизи обрыва. Для определения потенциала шара применим метод зеркальных изображений. Линии тока заземлителя на поверхности земли не имеют нормальных составляющих и направлены вдоль поверхности. Поэтому электрическое поле шара в неоднородной проводящей среде будет аналогично электрическому полю четырех шаров в однородной среде только в том случае, когда на зеркальных изображениях будут токи того же знака, что и на шаровом заземлителе, рис. 3.

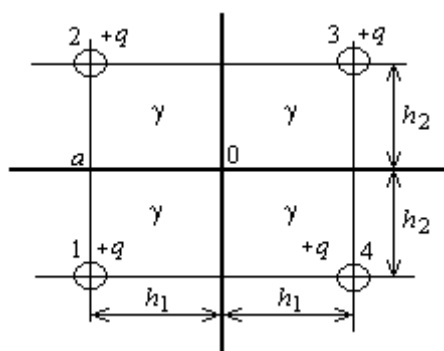


Рис.3. Зеркальные отображения

Потенциал шара φ_0 определим, суммируя потенциалы, обусловленные каждым из шаров: $\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$. Радиус шара значительно меньше расстояния между шарами. Поэтому при подсчете потенциала, обусловленного одним каким-либо из шаров, пренебрегаем искажением поля, вносимым другими шарами.

Рассмотрим поле уединенного сферического заземлителя с радиусом $R_0 = 50$ см, током растекания I , рис. 4.

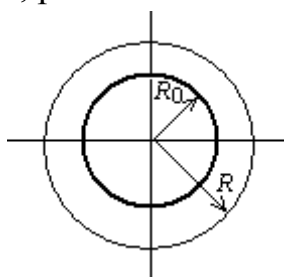


Рис. 4. Поле уединенного сферического заземлителя

Окружим мысленно заземлитель концентрической сферической поверхностью с радиусом $R > R_0$. В силу симметрии плотность тока на этой

поверхности направлена перпендикулярно по радиусам сферы, а по величине одинакова во всех точках и равна $\delta = \frac{I}{4\pi R^2}$.

Напряженность поля на расстоянии R по закону Ома в дифференциальной форме $E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I}{4\pi\gamma R^2}$, и потенциал

$\varphi = -\int E dR = \frac{I}{4\pi\gamma R} + C$. Предположим, что при $R \rightarrow \infty$ потенциал равен нулю $\varphi = 0$, тогда $C = 0$.

Поэтому в системе четырех шаров, рис.2 с одинаковыми токами I получаем потенциалы: $\varphi_1 = \frac{I}{4\pi\gamma R_0}$; $\varphi_2 = \frac{I}{4\pi\gamma 2h_1}$; $\varphi_3 = \frac{I}{4\pi\gamma 2\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$; $\varphi_4 = \frac{I}{4\pi\gamma 2h_2}$.

Сопротивление сферического заземлителя

$$R = \frac{\varphi_0}{I} = \frac{1}{8\pi\gamma} \left(\frac{2}{R_0} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right).$$

Потенциал точки a

$$\begin{aligned} \varphi_a = \varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3 + \varphi'_4 &= \frac{I}{4\pi\gamma h_1} + \frac{I}{4\pi\gamma h_1} + \frac{I}{4\pi\gamma \sqrt{h_1^2 + (2h_2)^2}} + \frac{I}{4\pi\gamma \sqrt{h_1^2 + (2h_2)^2}} = \\ &= \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + (2h_2)^2}} \right). \end{aligned}$$

Аналогично для точки b

$$\varphi_b = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2 + S^2}} + \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + (2h_2 + S)^2}} \right).$$

Напряжение между точками a и b

$$U_{ш} = \varphi_a - \varphi_b = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + S^2}} + \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + (2h_2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + (2h_2 + S)^2}} \right).$$

При отсутствии обрыва в расчете сопротивления заземлителя и шагового напряжения следует учитывать только одно зеркальное изображение. Поэтому при отсутствии обрыва потенциал шара $\varphi'_0 = \varphi_1 + \varphi_2$ и сопротивление растекания $R' = \frac{\varphi'_0}{I} = \frac{1}{8\pi\gamma} \left(\frac{2}{R_0} + \frac{1}{h_1} \right)$. Потенциал для точки a в

этом случае $\varphi'_a = \varphi'_1 + \varphi'_2$, а для точки b получаем $\varphi'_b = \frac{I}{2\pi\gamma} \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + S^2}}$.

$$\text{Шаговое напряжение } U'_{ш} = \varphi'_a - \varphi'_b = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + S^2}} \right).$$

Таким образом, сопротивление заземлителя после появления обрыва возрастает только на

$$\frac{R - R'}{R'} 100 = \frac{\frac{1}{h_2} + \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + (h_2)^2}}}{\frac{2}{R_0} + \frac{1}{h_1}} 100 = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{5\sqrt{2}}}{\frac{2}{0,5} + \frac{1}{5}} 100 = 8,1\%,$$

а шаговое напряжение возрастет на

$$\begin{aligned} \frac{U_{ш} - U'_{ш}}{U'_{ш}} 100 &= \frac{\frac{1}{\sqrt{h_1^2 + (2h_2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + (2h_2 + S)^2}}}{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + S^2}}} 100 = \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5^2 + (2 \cdot 5)^2}} - \frac{1}{\sqrt{5^2 + 10,75^2}}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{\sqrt{5^2 + 0,75^2}}} 100 = 260\%. \end{aligned}$$

Следовательно, шаговое напряжение увеличится в 3,6 раза.

4. Сферический заземлитель радиусом $R_0 = 2$ м находится в земле ($\sigma_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ См/см) на расстоянии $h = 10$ м от ее поверхности. Ток заземлителя $I = 1000$ А.

Определим распределение шагового напряжения и поверхностного заряда на поверхности земли.

Для расчета поля в земле (первая среда) введем фиктивный ток

$$I_1 = I \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = n_1 I = I = 1000 \text{ А, (считая удельную проводимость воздуха}$$

$\sigma_2 = 0$; для расчета поля в воздухе (вторая среда) введем фиктивный заряд

$$q_2 = 2I \frac{\epsilon_0}{\sigma_1} = 0,886 \cdot 10^{-6} \text{ Кл. Это выражение заряда через ток получается из}$$

граничных условий: $E_{1t} = E_{2t}$ и $\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$.

В однородной проводящей среде при рассекании тока I напряженность поля $E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma R^2}$ и потенциал $\varphi = \int E dR + C = \frac{I}{4\pi\sigma R}$, если принять потенциал равным нулю в бесконечно удаленной точке.

Шаговое напряжение (разность потенциалов на поверхности земли между точками, находящимися на расстоянии 0,8 м друг от друга) с учетом токов I_1 и I определяется по формуле

$$U_{ш} = \frac{I}{4\pi\sigma} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + 0,8)^2 + h^2}} \right] = 8 \cdot 10^3 \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + 100}} - \frac{1}{\sqrt{(x + 0,8)^2 + 100}} \right],$$

где x – расстояние от точки расположения заземлителя на поверхности земли в метрах. Поэтому, например, шаговое напряжение непосредственно над заземлителем при $x = 0$ составляет около 800 В.

Исходя из граничных условий для нормальной составляющей электрического смещения $D_{2n} - D_{1n} = q_s$, получаем поверхностный заряд $q_s = \varepsilon_0 E_{2n}$, так как из $\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$ или $J_{1n} = J_{2n}$ получаем $J_{1n} = J_{2n} = 0$, т.е. тока во второй среде (воздухе) нет и в первой среде (земля) $E_{1n} = \frac{J_{1n}}{\sigma_1} = 0$.

Выразив во второй среде E_{2n} через q_s , получаем

$$q_s = \frac{q_2 h}{4\pi(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2I\varepsilon_0 h}{4\pi\sigma_1(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{0,7}{(100 + x^2)^{\frac{3}{2}}} E_{\text{мкКл/м}^2},$$

т.е. поверхностная плотность заряда быстро убывает по мере удаления от заземлителя.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем заключаются особенности уравнений поля постоянного тока в проводящей среде?
2. Приведите уравнения поля постоянного тока в интегральной и дифференциальной формах.
3. Объясните физический смысл граничных условий для векторов плотности тока и напряженности электрического поля на границе раздела двух проводящих сред.
4. В чем проявится особенность этих условий на границе раздела проводящей среды и диэлектрика?
5. Назовите признаки формальной аналогии между электростатическим полем и полем постоянного тока в проводящей среде.
6. На основе какой аналогии определяется проводимость утечки коаксиального кабеля?
7. Как рассчитывается сопротивление заземлителя?
8. Как рассчитывается шаговое напряжение?

Практическое занятие № 23

РАСЧЕТ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ТОКОВЕДУЩИХ ШИНАХ

Достижимые компетенции: Практическое занятие направлено на формирование компетенции ОПК-2, в частности способность применять базовые знания фундаментальных и профессиональных дисциплин, проводить технико-экономический анализ, обосновывать принимаемые решения по использованию судового электрооборудования и средств автоматики, решать на их основе практические задачи профессиональной деятельности.

Учебная цель: формирование практических навыков по знанию: расчет переменного электромагнитного поля в токоведущих шинах прямоугольного сечения.

Ожидаемые результаты: формирование компетенции ОПК-2 в части получения и отработки способности к анализу переменных электромагнитных полей.

Критерии оценивания правильности выполнения: на основе ответов на контрольные вопросы оценивается результат выполнения поставленных задач и делается вывод об успешности занятия.

Объем: 2 академических часа.

ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ

Цель лекции: ознакомление с основными уравнениями переменного электромагнитного поля в проводящей среде во временной и в комплексной форме, усвоение методики решения этих уравнений для электротехнических систем переменного тока; понимание явления электромагнитных волн; отработка компетенции ОПК-2.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ

1. Уравнения Максвелла для проводящей среды.
2. Электромагнитные параметры проводящей среды.
3. Распространение плоской волны в однородном проводящем пространстве.
4. Глубина проникновения и длина волны.
5. Явление поверхностного эффекта.
6. Магнитный поверхностный эффект в плоской шине прямоугольного сечения.
7. Электрический поверхностный эффект в плоской шине прямоугольного сечения.
8. Эффект близости.

9. Вытеснение тока в прямоугольной шине, находящейся в пазу электрической машины.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1. Уравнения Максвелла для проводящей среды.

Проводящая среда имеет удельную проводимость γ и магнитную проницаемость μ . Комплексная форма уравнений Максвелла для электрической и магнитной напряженностей имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \gamma \vec{E} + j\omega \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -j\omega \mu_r \mu_0 \vec{H}. \end{aligned}$$

В проводящей среде произведение $\omega \varepsilon_r \varepsilon_0$ гораздо меньше γ . Поэтому вторым слагаемым справа в первом уравнении пренебрегают и полученные уравнения решают совместно. Для этого вычисляется ротор от первого уравнения и подставляется ротор электрической напряженности из второго уравнения. В результате получается уравнение Лапласа для магнитной напряженности

$$\nabla^2 \vec{H} = j\omega \mu_r \mu_0 \gamma \vec{H}.$$

В плоском электромагнитном поле эти уравнения приобретают более простой вид

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{E}_x}{dz} &= -j\omega \mu \vec{H}_y; \quad -\frac{d\vec{H}_y}{dz} = \gamma \vec{E}_x; \\ \frac{d^2 \vec{E}_x}{dz^2} &= j\omega \mu \gamma \vec{E}_x; \quad \frac{d^2 \vec{H}_y}{dz^2} = j\omega \mu \gamma \vec{H}_y. \end{aligned} \quad (1)$$

Полученное уравнение является уравнением второго порядка для комплексных векторов напряженностей электрического и магнитного поля.

2. Электромагнитные параметры проводящей среды.

Далее рассматривается плоская электромагнитная волна, векторы напряженности которой расположены в плоскости xOy , перпендикулярной направлению распространению волны по оси z . Полагаем, что вектор электрической напряженности направлен по оси x , а вектор магнитной – по оси y . Так как во всех точках плоскости векторы напряженностей не зависят от координат, их производные по координатам x и y равны нулю

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0.$$

Решение уравнения (1) для электрической напряженности имеет вид

$$\vec{E} = A_1 e^{-pz} + A_2 e^{pz}.$$

Характеристическое уравнение $p^2 - j\omega \gamma \mu = 0$ имеет корни $p_{1,2} = \mp \sqrt{j\omega \gamma \mu}$, которые расписываются в алгебраической форме

$$p_{1,2} = \mp k \cdot (1 + j),$$

где

$$k = \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu_a}{2}}.$$

Напряженность магнитного поля определяем из выражения

$$\dot{H} = \vec{1}_y \left(-\frac{1}{j\omega\mu} \frac{d\dot{E}}{dz} \right). \quad (2)$$

Таким образом, $\dot{E} = \dot{A}_1 e^{-(1+j)z} + \dot{A}_2 e^{(1+j)z}$, и магнитная напряженность по (2)

$$\dot{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} (\dot{A}_1 e^{-(1+j)kz} \cdot (-(1+j)k) + \dot{A}_2 e^{(1+j)kz} \cdot (1+j)k).$$

Частное от деления $j\omega\mu$ на $(1+j)k$ называется волновым сопротивлением

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} e^{j45^\circ}.$$

Окончательно $\dot{H} = \frac{1}{\underline{Z}_B} (\dot{A}_1 e^{-(1+j)kz} - \dot{A}_2 e^{(1+j)kz})$.

Обе напряженности представляют суммы прямых и отраженных волн:

$$\dot{H} = \dot{H}_{nao} + \dot{H}_{omp},$$

где

$$\dot{H}_{nao} = \frac{1}{\underline{Z}_B} \dot{A}_1 e^{-pz}, \quad \dot{H}_{omp} = -\frac{1}{\underline{Z}_B} \dot{A}_2 e^{pz};$$

аналогично

$$\dot{E} = \dot{E}_{nao} + \dot{E}_{omp},$$

где

$$\dot{E}_{nao} = \dot{A}_1 e^{-pz}, \quad \dot{E}_{omp} = \dot{A}_2 e^{pz}.$$

3. Распространение плоской волны в однородном проводящем пространстве.

Пусть плоская электромагнитная волна распространяется в однородной проводящей среде, и обратной волны не возникает, и существуют только падающая волна. Обозначим напряженности на поверхности проводящей среды через $\dot{E}_a = E_a e^{j\psi_a}$. Тогда при $z=0$ $\dot{A}_1 = \dot{E}_a$ и для падающей волны получаем

$$\begin{aligned} \dot{E} &= E_a e^{-kz} e^{jkz} e^{j\psi_a}, \\ \dot{H} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}} E_a e^{-kz} e^{-jkz} e^{j\psi_a} e^{-j45^\circ}. \end{aligned}$$

Перейдем к записи мгновенных значений напряженностей

$$E = E_a e^{-kz} \sin(\omega t - kz + \psi_a);$$

$$\dot{H} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}} E_a e^{-kz} \sin(\omega t - kz + \psi_a - 45^\circ).$$

Последние выражения показывают, что с увеличением координаты z по мере проникновения волны в проводящую среду амплитуды напряженностей уменьшаются по экспоненте. Мгновенные значения напряженностей зависят от двух переменных: расстояния z и времени. Если принять значение t постоянным, то на графике функции H от z получена кривая 1. При времени $t + \Delta t$ – кривая 2 смещенная вправо на расстояние Δz , рис.1. Скорость распространения волны определяется отношением элемента расстояния Δz , которое проходит волна за время Δt к интервалу времени Δt

$$V = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{2\omega}{\gamma\mu}}.$$

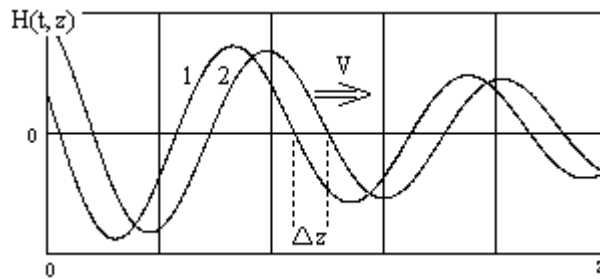


Рис. 1. Падающая волна магнитной напряженности

Для того, чтобы охарактеризовать, насколько быстро уменьшается амплитуда падающей волны по мере проникновения в проводящую среду, вводится понятие «глубина проникновения».

4. Глубина проникновения, длина волны, коэффициенты отражения и преломления

Под глубиной проникновения Δ понимается расстояние вдоль направления проникновения волны по оси z , на котором амплитуда падающей волны уменьшается в e раз, т.е. в 2,71 раз. Глубину проникновения определяют с помощью выражения $e^{-k\Delta} = e^{-1}$. Отсюда следует, что $k\Delta = 1$ или

$$\Delta = \frac{1}{k}.$$

Глубина проникновения зависит от свойств проводящей среды (удельной проводимости и магнитной проницаемости) и от частоты. Так, если волна имеет частоту 5 кГц и проникает в среду с удельной проводимостью 10^7 (Ом·м) $^{-1}$ и относительной проницаемостью 10^3 , то

$$k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \pi \cdot 5000 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^7}{2}} = 14100 \text{ м}^{-1}.$$

Глубина проникновения при этом составит 0,07 мм, т.е. на расстоянии 1 мм волна практически затухает.

Под длиной волны λ в проводящей среде понимается расстояние вдоль направления распространения волны по оси z , на котором фаза колебания изменяется на 2π . Длина волны определяется из уравнения $\lambda k = 2\pi$:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

Для рассмотренного примера получаем

$$\lambda = \frac{2\pi}{14100} = 0,445 \text{ мм.}$$

Определим, наконец, понятие «фазовой скорости». Под фазовой скоростью понимают скорость, с которой надо было бы перемещаться вдоль оси z , чтобы колебание имело одну и ту же фазу. Фаза колебания есть аргумент синусоиды $\omega t - kz + \psi_a$. Производная от постоянной есть нуль $\frac{d}{dt}(\omega t - kz + \psi_a) = 0$, откуда получаем

$$\omega - k \frac{dz}{dt} = 0; \quad \frac{dz}{dt} = V_{faz} = \frac{\omega}{k}.$$

Для рассмотренного примера фазовая скорость составляет 2,25 м/с.

Получим граничные условия при переходе падающей волны через поверхность раздела двух сред с различными волновыми сопротивлениями. Падающая волна из первой среды частично отражается от поверхности границы, а также частично преломляется и проходит во вторую среду. Полагая, что на границе координата $z = 0$, полностью по аналогии с распространением поля в непроводящей среде получаем коэффициент отражения $N_2 = \frac{Z_{B2} - Z_{B1}}{Z_{B2} + Z_{B1}}$ и коэффициент преломления $N_{21} = \frac{2Z_{B2}}{Z_{B2} + Z_{B1}}$,

5. Явление поверхностного эффекта.

Свойство электромагнитной волны затухать по мере продвижения в проводящей среде обуславливает явление поверхностного эффекта. Переменный электрический ток распределяется неравномерно по сечению проводов, причем плотность тока имеет наибольшее значение на поверхности проводника и убывает по мере удаления от поверхности вглубь провода.

Переменный магнитный поток в телах, обладающих конечной проводимостью, вызывает в этих телах вихревые токи, которые ослабляют магнитный поток внутри проводящего тела. Происходит размагничивающее действие вихревых токов. Так проявляется магнитный поверхностный эффект.

Явление поверхностного эффекта можно объяснить, рассматривая проникновение электромагнитного поля в глубь провода из пространства, окружающего провод. Потери энергии на нагревание проводов током следует рассматривать как поглощение энергии внутри провода, передаваемой в

провод через его поверхность. Переменная электромагнитная волна затухает по мере проникновения в глубь проводящей среды. Поэтому амплитуды плотностей тока и напряженностей магнитного и электрического полей при переменном токе и магнитном потоке имеют наибольшее значение у поверхности проводящих тел.

6. Магнитный поверхностный эффект в плоской шине прямоугольного сечения.

Рассматривается поле в стальном листе при прохождении вдоль листа переменного магнитного потока. Лист имеет толщину $2a$, высоту h и большую протяженность. Определим распределение магнитной и электрической напряженностей по сечению листа, рис. 2.

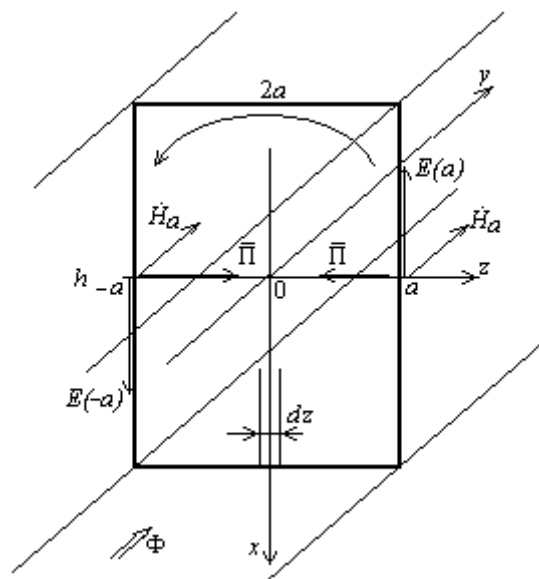


Рис. 2. Прямоугольная шина с переменным магнитным потоком

В силу симметрии напряженности на левой и правой сторонах листа одинаковы $\dot{H}_a$. Ось y расположим вдоль листа, ось z – поперек. Тогда $\vec{\dot{H}} = \vec{1}_y \dot{H}$. Ранее получено общее решение

$$\dot{H} = \underline{B}_1 e^{-pz} + \underline{B}_2 e^{pz},$$

где для краткости обозначено: $\underline{B}_1 = \frac{A_1}{\underline{z}_e}$; $\underline{B}_2 = -\frac{A_2}{\underline{z}_e}$.

Постоянные находим из граничных условий для напряженности на правой и левой поверхностях листа

$$\dot{H}(z = -a) = \underline{B}_1 e^{pa} + \underline{B}_2 e^{-pa};$$

$$\dot{H}(z = a) = \underline{B}_1 e^{-pa} + \underline{B}_2 e^{pa}.$$

Совместное решение этих уравнений дает

$$\underline{B}_1 = \underline{B}_2 = \frac{\dot{H}_a}{2ch pa}.$$

Следовательно, в произвольной точке получаем

$$\dot{H} = \dot{H}_a \frac{ch pz}{ch pa}.$$

Напряженность электрического поля получаем в виде

$$\dot{E} = \vec{1}_x \cdot \left(-\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}}{dz} \right) = -\vec{1}_x \cdot \frac{p}{\gamma} \dot{H}_a \frac{sh pz}{ch pa}.$$

Таким образом, в поперечном сечении листа возникает вихревой ток, линии плотности $\vec{S} = \gamma \vec{E}$ которого направлены вдоль оси x .

Если известен магнитный поток Φ_m и среднее значение магнитной индукции B_{cp} по сечению листа, то напряженность магнитного поля на поверхности листа определяются следующим образом: $d\Phi = \mu \frac{H_a ch pz}{ch pa} h dz$.

Интегрируя по z от $-a$ до a , получаем выражение для магнитного потока

$$\Phi = \mu \frac{H_a 2h}{p} th pa, \text{ откуда } \dot{H}_a = \frac{ap B_{cp}}{\mu_a th pa}.$$

Графики модулей напряженностей в зависимости от z получим с учетом выражений $|sh pz| = \sqrt{\frac{ch 2kz - \cos 2kz}{2}}$; $|ch pz| = \sqrt{\frac{ch 2kz + \cos 2kz}{2}}$.

Напряженность магнитного поля в средней плоскости листа при $z = 0$ составляет

$$\dot{H}(z=0) = \frac{\dot{H}_a}{ch pa}.$$

Поэтому напряженность магнитного поля в средней плоскости листа может быть гораздо меньшей, чем на краю листа. Этот эффект тем более выражен, чем больше ширина листа a и чем больше частота ω . Электрическая напряженность на сторонах листа $E(a) = E(-a) = -\frac{p}{\gamma} H_a \cdot th pa = j\omega \frac{\Phi}{2h}$.

Явление неравномерного распределения магнитного поля по сечению листа, вызванное затуханием электромагнитной волны при ее распространении в проводящей среде, называется магнитным поверхностным эффектом.

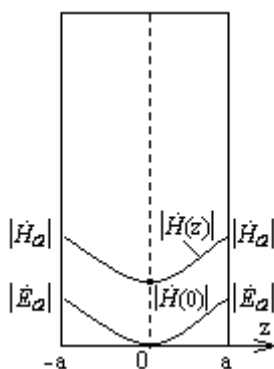


Рис. 3. Магнитный поверхностный эффект

На рис. 3 изображены графики модулей магнитной и электрической напряженностей по ширине листа. В средней плоскости листа магнитная напряженность не снижается до нуля в отличие от электрической напряженности. Кривая модуля плотности вихревых токов повторяет график электрической напряженности.

7. Электрический поверхностный эффект в плоской шине прямоугольного сечения.

При электрическом поверхностном эффекте вдоль шины направлен синусоидальный ток $\vec{I}$ с частотой ω , рис. 4. На этом рисунке оси направлены по-другому, чем на рис. 3. Ось y расположим вверх листа, ось z – поперек, ось x – вдоль листа.

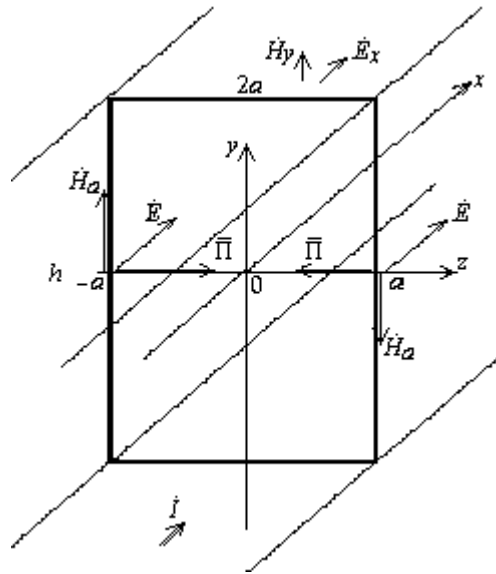


Рис. 4. Электрический поверхностный эффект

По полностью аналогичной методике получаем

$$\frac{d\vec{E}_x}{dz} = -j\omega\mu\vec{H}_y; \quad -\frac{d\vec{H}_y}{dz} = \gamma\vec{E}_x; \quad \frac{d^2\vec{E}_x}{dz^2} = j\omega\mu\gamma\vec{E}_x; \quad \frac{d^2\vec{H}_y}{dz^2} = j\omega\mu\gamma\vec{H}_y.$$

В силу симметрии напряженности на левой и правой сторонах листа одинаковы $\vec{H}_a$. Тогда $\vec{H} = \vec{1}_y \vec{H}$. Ранее получено общее решение

$$\vec{H} = \underline{B}_1 e^{-pz} + \underline{B}_2 e^{pz}.$$

Постоянные находим из граничных условий для напряженности на правой и левой поверхностях листа. По закону полного тока на правой и левой

сторонах листа получаем при условии $a \ll h$: $\vec{H}_a = \frac{I}{2h}$. При $z = -a$:

$$\vec{H}(z = -a) = \underline{B}_1 e^{pa} + \underline{B}_2 e^{-pa} = \vec{H}_a,$$

при $z = a$:

$$\vec{H}(z = a) = \underline{B}_1 e^{-pa} + \underline{B}_2 e^{pa} = -\vec{H}_a.$$

Совместное решение этих уравнений дает

$$\underline{B}_1 = -\underline{B}_2 = \frac{\dot{H}_a}{2 \cdot sh pa}.$$

Следовательно, в произвольной точке получаем

$$\dot{H}(z) = -\dot{H}_a \cdot sh pz = -\frac{\dot{I}}{2h} \frac{sh pz}{sh pa}.$$

Формулы напряженностей внутри пластины

$$\dot{H} = -\frac{\dot{I}}{2h} \frac{sh pz}{sh pa}; \quad \dot{E} = \frac{p}{\gamma} \frac{\dot{I}}{2h} \frac{ch pz}{sh pa} = z_B \frac{\dot{I}}{2h} \frac{ch pz}{sh pa}.$$

Плотность тока $\delta = \gamma \dot{E} = \frac{p \dot{I}}{2h} \frac{ch pz}{sh pa}.$

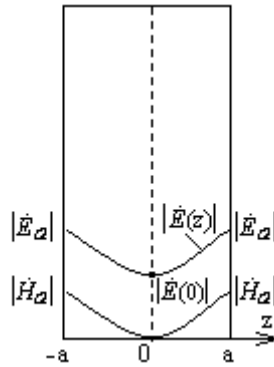


Рис. 5. Распределение электрической и магнитной напряженностей в прямоугольной шине

Модули напряженностей:

$$|\dot{H}(z)| = \left| -\frac{\dot{I}}{2h sh pa} \right| \cdot |sh pz|; \quad |\dot{E}(z)| = \left| \frac{p \dot{I}}{\gamma 2h sh pa} \right| \cdot |ch pz|.$$

При построении графиков на рис.5 применяем формулы

$$|sh pz| = \sqrt{\frac{ch 2kz - \cos 2kz}{2}}; \quad |ch pz| = \sqrt{\frac{ch 2kz + \cos 2kz}{2}}.$$

Модуль $|sh pa|$, показывает превышение электрической напряженности и плотности тока у краев листа к их значениям в середине.

.В этом случае зависимость модуля магнитной напряженности такая же, как модуля электрической на рис.3, а зависимость модуля электрической напряженности такая же, как модуля магнитной на этом же рисунке.

Далее получаем комплексное сопротивление единицы длины шины

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{E}}{\dot{I}} = \frac{p \dot{I}}{\gamma 2h sh pa} \frac{ch pa}{\dot{I}} = \frac{p}{\gamma 2h th pa}.$$

Так как $2h \approx$ периметр сечения шины, а $th pa \approx 1$, то оценка удельного комплексного сопротивления имеет вид

$$\underline{Z} = R + jX = \frac{p}{\gamma \cdot 2h \cdot th pa} \approx z_B \frac{1+j}{\text{периметр сечения шины}}.$$

Таким образом, активное и реактивное (индуктивное) сопротивления шины примерно одинаковы и несколько увеличиваются с ростом частоты, а индуктивность, наоборот, уменьшается.

8. Эффект близости.

Пусть по двум близко расположенным плоским шинам будет протекать в совпадающих направлениях синусоидальный ток $\dot{I}$ с частотой ω , и ширина шин, и расстояние между ними b гораздо меньше их высоты, рис.6. Уравнения для напряженности в обеих шинах и их решения совпадают с полученными в п.7.

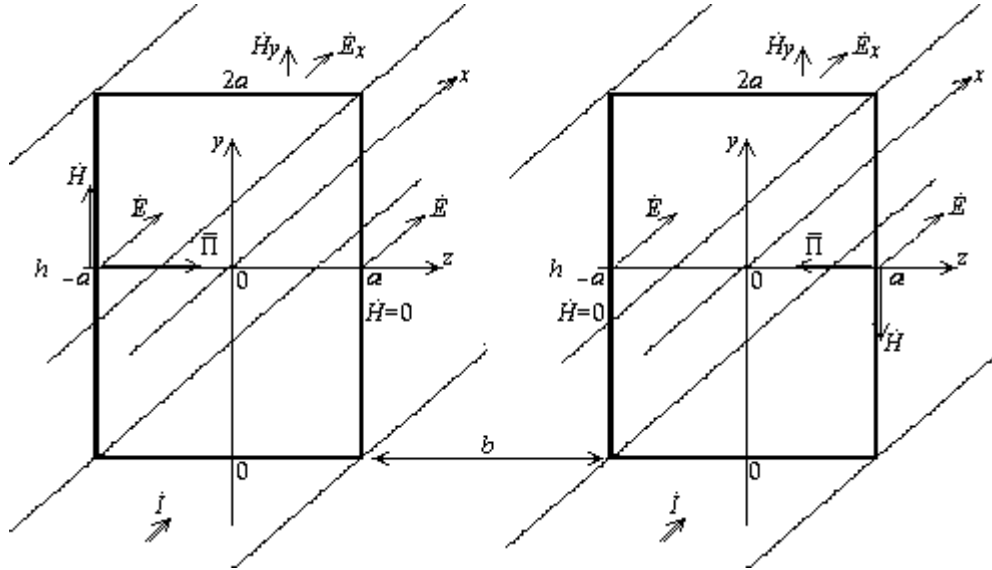


Рис. 6. Параллельные шины прямоугольного сечения в случае сонаправленных токов

Поместим начало координат в середине плоскости левой шины и учтем, что в пространстве между шинами напряженность магнитного поля равна нулю, в чем можно убедиться на основании закона полного тока. Закон полного тока для внешнего контура $\oint \vec{H} d\vec{l} = 2I$. Поэтому граничные условия

для левой шины: $H(a) = 0$; $H(-a) = \frac{\dot{I}}{h}$; для правой шины $H(a) = \frac{\dot{I}}{h}$; $H(-a) = 0$. Получаем для левой шины

$$H(-a) = \frac{\dot{I}}{h} = \underline{B}_1 e^{(1+j)ka} + \underline{B}_2 e^{-(1+j)ka};$$

$$H(a) = 0 = \underline{B}_1 e^{-(1+j)ka} + \underline{B}_2 e^{(1+j)ka}.$$

Решение этих двух уравнений дает $\underline{B}_1 = \dot{I} \frac{e^{pa}}{2h \cdot \text{sh } 2pa}$;

$\underline{B}_2 = -\dot{I} \frac{e^{-pa}}{2h \cdot \text{sh } 2pa}$. Подставляя эти величины в выражение для

напряженности, получим напряженность в левой шине $\dot{H}(z) = \frac{\dot{I}}{h} \frac{\text{sh } p(a-z)}{\text{sh } 2pa}$.

Электрическая напряженность в левой шине находим из выражения

$$\dot{E}(z) = -\frac{1}{\beta} \frac{d\dot{H}(z)}{dz} = \frac{\dot{I}}{h} z_B \frac{ch p(a-z)}{\text{sh } 2pa}.$$

На границах левой шины:

$$\dot{E}(-a) = \frac{\dot{I}}{h} \frac{z_B}{th 2pa}; \quad \dot{E}(a) = \frac{\dot{I}}{h} \frac{z_B}{sh 2pa}.$$

Определим электрическое сопротивление левой шины на единицу длины на основании вектора Пойнтинга:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{S}}{I^2} = \frac{\Pi \cdot S_{\text{бок лев}}}{I^2} + \frac{\Pi \cdot S_{\text{бок прав}}}{I^2}.$$

Второе слагаемое равно нулю, и, раскрывая вектор Пойнтинга через напряженности, получаем комплексное сопротивление $\underline{Z} = \frac{z_B}{h} \text{cth } 2pa$. Для

обеих шин будет вдвое меньше. Сопротивление взаимной индукции

$$\underline{Z}_{\text{вз инд}} = j \frac{\mu\omega}{h} 2b.$$

Комплексное сопротивление единицы длины двух плоских шин, расположенных в воздухе, равно двум комплексным сопротивлениям самих шин плюс индуктивное сопротивление, обусловленное магнитным потоком в пространстве между шинами.

На рис. 7 показаны графики модулей напряженностей для сонаправленных и для встречно направленных токов в шинах.

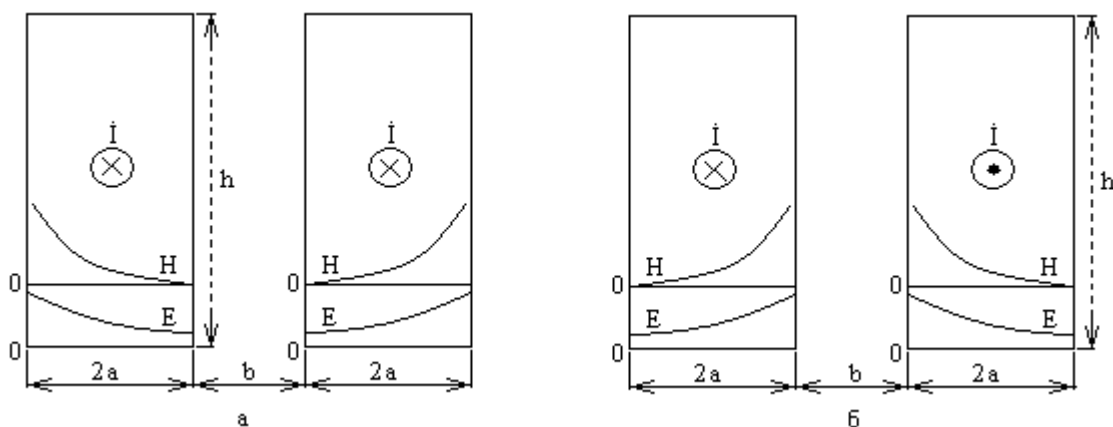


Рис. 7. Поверхностный эффект в параллельных шинах:

а) одинаковое направление токов; б) встречное направление токов

Поле одной шины влияет на распределение поля в другой шине. Это явление называется эффектом близости.

9. Вытеснение тока в прямоугольной шине, находящейся в пазу электрической машины.

Переменный электрический ток неравномерно распределяется по сечению прямоугольного провода, находящегося в пазу электрической машины. Расположим оси координат так, чтобы вектор электрической напряженности располагался вдоль провода, по которому проходит переменный ток. Ось z направим в глубь магнитного материала машины (статора или ротора). Тогда напряженность магнитного поля будет направлена поперек шины по касательной границы магнитного материала машины, рис. 8.

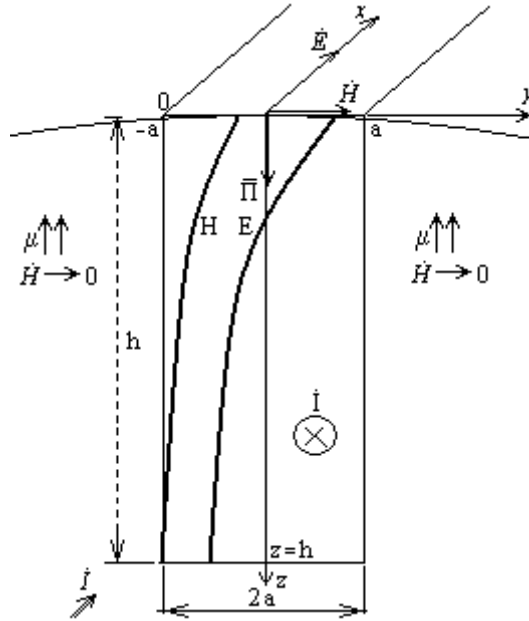


Рис. 8. Вытеснение тока в пазу электрической машины

Обозначим: I – ток по шине; $2a$ – ширина; h – высота паза. Магнитную проницаемость ферромагнитного материала, в котором сделан паз, полагаем большой. При этом индукция в ферромагнитном материале будет конечной величиной, а напряженность магнитного поля будет очень малой.

В шине вектор магнитной напряженности направлен по оси y , а электрической – по оси x . Электромагнитная волна проникает из диэлектрика в шину через наружную поверхность и по мере проникновения затухает.

По закону полного тока при $z=0$ получаем $\dot{H} = \frac{I}{2a}$. При $z=h$ имеем $\dot{H} \rightarrow 0$. Для определения постоянных интегрирования в выражении для магнитной напряженности

$$\dot{H} = \underline{B}_1 e^{-pz} + \underline{B}_2 e^{pz} \quad \text{при } p = (1+j)k = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\gamma\mu}{2}}$$

на основании граничных условий на внешней и внутренней границах шины составляем два уравнения

$$\frac{I}{2a} = \underline{B}_1 + \underline{B}_2, \quad 0 = \underline{B}_1 e^{-ph} + \underline{B}_2 e^{ph}.$$

Совместное решение этих уравнений дает

$$\underline{B}_1 = \frac{\dot{I}}{4a} \frac{e^{ph}}{\operatorname{sh} ph}, \quad \underline{B}_2 = -\frac{\dot{I}}{4a} \frac{e^{-ph}}{\operatorname{sh} ph}.$$

После определения этих постоянных и подстановки их в выражение напряженности получаем

$$\dot{H} = -\frac{\dot{I}}{2a} \frac{\operatorname{sh} p(z-h)}{\operatorname{sh} ph}; \quad \dot{E} = \frac{p}{\gamma} \frac{\dot{I}}{2a} \frac{\operatorname{ch} p(z-h)}{\operatorname{sh} ph} = z_B \frac{\dot{I}}{2a} \frac{\operatorname{ch} p(z-h)}{\operatorname{sh} ph}.$$

Графики модулей напряженностей на рисунке 8 показывают, что напряженность магнитного поля убывает по мере углубления в паз ферромагнитного материала и равна нулю на его дне. Напряженность электрического поля и плотность тока также убывают, однако не достигают нуля на дне паза.

Определяем комплексное сопротивление шины

$$\underline{Z} = \frac{\underline{S}}{I^2} = \frac{\dot{I} \cdot \text{площадь поверхности при } z=0}{I^2} = \dots = \frac{z_B}{2a} \operatorname{cth} ph.$$

Сопротивление имеет активно – индуктивный характер и увеличивается с ростом частоты. Нижняя часть шины сцепляется с большим магнитным потоком, так как внизу шина вся окружена железом и обладает большей индуктивностью и реактивным сопротивлением. Плотность тока там меньше, чем на внешней части поверхности шины, рис. 9.

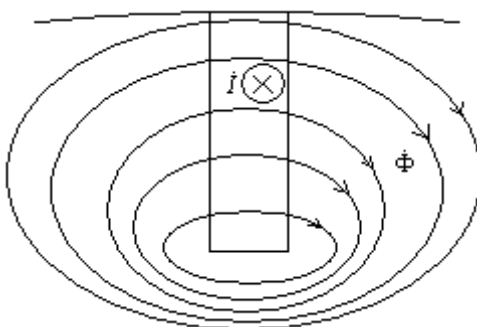


Рис. 9. Магнитное поле в прямоугольной шине

В составной шине из-за проявления эффекта близости плотность тока распределяется неравномерно по проводникам, рис. 10.

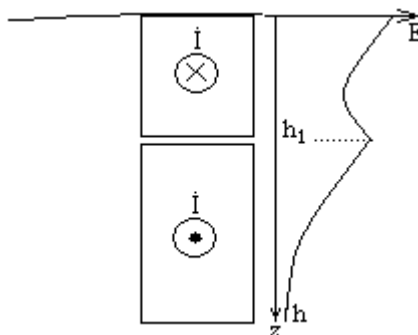


Рис. 10. Электрическая напряженность и плотность тока в составной шине

Этот эффект находит широкое применение для улучшения пусковых характеристик при изготовлении роторов асинхронных двигателей – двигатели с глубоким пазом. При пуске двигателя его скорость мала, и частота ток в проводниках обмотки ротора велика. Электрический ток вытесняется к поверхности проводника, эффективное сечение проводника уменьшается и соответственно увеличивается его сопротивление. Вследствие этого увеличивается его пусковой момент, и двигатель уверенно разгоняется.

По мере увеличения скорости частота тока в обмотке ротора снижается, поверхностный эффект ослабевает, ток распределяется по сечению проводника более равномерно, эффективное сечение увеличивается, сопротивление снижается, и двигатель меньше нагревается в номинальном режиме.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Три одинаковые стальные шины расположены симметрично (рис. 1). Толщина каждой шины $2a=1$ мм, ширина $h=10$ мм. Расстояние между смежными поверхностями $b=2$ мм. Относительная магнитная проницаемость материала шины в слабых полях $\mu=250$; удельная проводимость $\gamma=10^5$ См/см. Две правые шины соединены параллельно и служат обратным проводом для тока левой шины.

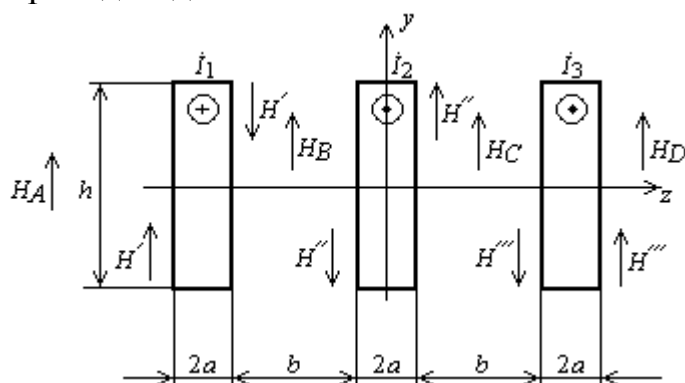


Рис. 1. Шины трехфазной линии передачи

Найдем полное сопротивление линии передачи на 1 м длины при частоте 5 кГц, полагая, что волны в рассматриваемой системе шин плоские.

Для определенности положим, что

$$I_3 = kI_1. \quad (1)$$

тогда получаем

$$I_2 = (1 - k)I_1, \quad (2)$$

так как по условию в данный момент $I_2 + I_3 = I_1$.

Ширина шин много больше их толщины и расстояний между ними. Потому считаем, что напряженность магнитного поля вблизи шин одинакова. Применяя закон полного тока к замкнутым контурам, проведенным около

каждой шины и полагая при каждом обходе, что ток в остальных шинах отсутствует, получаем $\dot{H}' = \frac{I_1}{2h}$, $\dot{H}'' = \frac{I_2}{2h}$, $\dot{H}''' = \frac{I_3}{2h}$.

Напряженность поля в промежутках между шинами и на наружных поверхностях крайних шин найдем по методу наложения, складывая геометрически напряженности полей, связанные с током каждой шины в отдельности:

$$\begin{aligned}\dot{H}_A &= \dot{H}' - \dot{H}'' - \dot{H}''' = \frac{I_1 - I_2 - I_3}{2h} = 0, \\ \dot{H}_B &= -\dot{H}' - \dot{H}'' - \dot{H}''' = \frac{-I_1 - I_2 - I_3}{2h} = -\frac{I_1}{h}, \\ \dot{H}_C &= -\dot{H}' + \dot{H}'' - \dot{H}''' = \frac{-I_1 + I_2 - I_3}{2h} = -\frac{I_3}{h}, \\ \dot{H}_D &= -\dot{H}' + \dot{H}'' + \dot{H}''' = -\dot{H}_A = 0.\end{aligned}$$

Выполним расчет поля внутри шин. Ранее при анализе движения плоской гармонической волны в проводнике для напряженности магнитного поля $H = H_y$ было найдено $\dot{H} = \dot{C}'e^{-pz} + \dot{C}''e^{pz}$.

На основе этого выражения для плоской волны магнитного поля определим напряженности магнитного поля во всех трех шинах. В левой шине $\dot{H}_1 = \dot{C}'_1e^{-pz} + \dot{C}''_1e^{pz}$.

Постоянные интегрирования $\dot{C}'_1$, $\dot{C}''_1$ находим из граничных условий, полагая начало координат на наружной поверхности шины:

на наружной поверхности шины при $z = 0$: $\dot{H}_1 = \dot{C}'_1 + \dot{C}''_1 = \dot{H}_A = 0$;

на внутренней поверхности шины при $z = 2a$:

$$\dot{H}_1 = \dot{C}'_1e^{-2pa} + \dot{C}''_1e^{2pa} = \dot{H}_B = -\frac{I_1}{h}$$

Из первого граничного условия следует что $\dot{C}'_1 = -\dot{C}''_1$, из второго –

$$\dot{C}'_1 = -\frac{I_1}{h} = \frac{1}{e^{-2pa} - e^{2pa}}.$$

$$\text{Таким образом } \dot{H}_1 = -\frac{I_1}{h} \frac{e^{-pz} - e^{pz}}{e^{-2pa} - e^{2pa}} = -\frac{I_1}{h} \frac{\text{sh } pz}{\text{sh } 2pa}.$$

В средней шине $\dot{H}_2 = \dot{C}'_2e^{-pz} + \dot{C}''_2e^{pz}$.

Для упрощения расположим теперь начало координат в середине шины. Тогда для определения постоянных интегрирования используем следующие граничные условия:

на левой стороне шины при $z = -a$: $\dot{H}_2 = \dot{C}'_2e^{pa} + \dot{C}''_2e^{-pa} = \dot{H}_B = -\frac{I_1}{h}$,

на правой стороне при $z = a$: $\dot{H}_2 = \dot{C}'_2e^{-pa} + \dot{C}''_2e^{pa} = \dot{H}_C = -\frac{I_3}{h}$.

Последовательно складывая и вычитая последние два уравнения, получаем сначала

$$\begin{aligned} C_2' + C_2'' &= -\frac{I_1 + I_3}{h} \frac{1}{e^{-pa} + e^{pa}} = -\frac{I_1}{h} \frac{1+k}{e^{-pa} + e^{pa}}; \\ C_2' - C_2'' &= -\frac{I_1 - I_3}{h} \frac{1}{-e^{-pa} + e^{pa}} = -\frac{I_1}{h} \frac{1-k}{-e^{-pa} + e^{pa}}, \end{aligned}$$

а затем

$$\begin{aligned} \dot{C}_2' &= -\frac{1}{2} \frac{I_1}{h} \left(\frac{1+k}{e^{-pa} + e^{pa}} + \frac{1-k}{-e^{-pa} + e^{pa}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{I_1 - ke^{-pa} + e^{pa}}{h \operatorname{sh} 2pa}, \\ \dot{C}_2'' &= -\frac{1}{2} \frac{I_1}{h} \left(\frac{1+k}{e^{-pa} + e^{pa}} - \frac{1-k}{-e^{-pa} + e^{pa}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{I_1 - ke^{pa} + e^{-pa}}{h \operatorname{sh} 2pa}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\dot{H}_2 = \frac{1}{2} \frac{I_1}{h} \left[(ke^{-pa} - e^{pa})e^{-pz} - (ke^{pa} - e^{-pa})e^{pz} \right] \frac{1}{\operatorname{sh} 2pa}.$$

Внутри правой шины $\dot{H}_3 = \dot{C}_3'e^{-pz} + \dot{C}_3''e^{pz}$. Располагая в этом случае начало координат на наружной поверхности шины, получаем:

$$\text{при } z = -2a: \dot{H}_3 = \dot{C}_3'e^{2pa} + \dot{C}_3''e^{-2pa} = \dot{H}_C = -\frac{I_3}{h},$$

$$\text{при } z = 0: \dot{H}_3 = \dot{C}_3' + \dot{C}_3'' = \dot{H}_D = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что $\dot{C}_3' = -\dot{C}_3''$. Из первого граничного условия $\dot{C}_3' = -\frac{I_3}{h} \frac{1}{e^{2pa} - e^{-2pa}}$. Таким образом, получаем напряженность в третьей шине $\dot{H}_3 = -\frac{I_3}{h} \frac{e^{-pz} - e^{pz}}{e^{2pa} - e^{-2pa}} = k \frac{I_1}{h} \frac{\operatorname{sh} pz}{\operatorname{sh} 2pa}$.

Напряженность электрического поля определяем из первого уравнения Максвелла для проводящей среды, где токами смещения можно пренебречь $\left(\frac{\partial D}{\partial t} = 0 \right)$: $\delta = \gamma E = \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\mathbf{i} \frac{dH}{dz}$, так как $H_z = H_x = 0$ и $\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial x} = 0$. Таким образом, электрическая напряженность имеет вид

$$\dot{E} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}}{dz} = -\frac{1}{\gamma} (\dot{C}_3'e^{-pz} + \dot{C}_3''e^{pz}) = Z_C (\dot{C}_3'e^{-pz} + \dot{C}_3''e^{pz}),$$

$$\text{где } Z_C = \frac{\rho}{\gamma} = \sqrt{\frac{j\omega\mu\mu_0}{\gamma}}.$$

Напряженность электрического поля на внутренней поверхности левой шины (при $z = 2a$)

$$\dot{E}_{1a} = Z_C - (\dot{C}_1'e^{-2pa} - \dot{C}_1''e^{2pa}) = -\frac{I_1 Z_C}{h} \frac{e^{-2pa} + e^{2pa}}{e^{-2pa} - e^{2pa}} = \frac{I_1 Z_C}{h} \frac{\operatorname{ch} 2pa}{\operatorname{sh} 2pa}.$$

На левой поверхности средней шины при $z = -a$ получаем

$$\begin{aligned}\dot{E}_{-2a} &= Z_C (\dot{C}'_2 e^{pa} - \dot{C}''_2 e^{-pa}) = -\frac{\dot{I}_1 Z_C}{2h \cdot \operatorname{sh} 2pa} \left[(ke^{-pa} - e^{pa}) e^{pa} + (ke^{pa} - e^{-pa}) e^{-pa} \right] = \\ &= \frac{\dot{I}_1 Z_C}{h} \frac{k - ch 2pa}{\operatorname{sh} 2pa}.\end{aligned}$$

На правой поверхности средней шины при $z = -2a$ аналогично

$$\dot{E}_{2a} = Z_C (\dot{C}'_2 e^{-pa} - \dot{C}''_2 e^{pa}) = \frac{\dot{I}_1 Z_C}{h} \frac{k \cdot ch 2pa - 1}{\operatorname{sh} 2pa}.$$

На внутренней поверхности правой шины при $z = -2a$

$$\dot{E}_{-3a} = Z_C (\dot{C}'_3 e^{2pa} - \dot{C}''_3 e^{-2pa}) = -k \frac{\dot{I}_1 Z_C}{h} \frac{ch 2pa}{\operatorname{sh} 2pa}.$$

Для определения распределения токов между правой и средней шинами применим закон электромагнитной индукции к замкнутому контуру, охватывающему магнитный поток в воздушном зазоре между средней и правой шинами (шириной b и длиной l):

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = E_{-3a} l - E_{2a} l = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 b l \frac{dH_C}{dt}.$$

В комплексной форме это выражение перепишем в следующем виде

$$\begin{aligned}\dot{E}_{2a} - \dot{E}_{-3a} &= j\omega\mu_0 b \dot{H}_C \\ \text{или} \quad \frac{Z_C \dot{I}_1}{h} \frac{k \cdot ch 2pa - 1}{\operatorname{sh} 2pa} + \frac{Z_C k \dot{I}_1}{h} \frac{ch 2pa}{\operatorname{sh} 2pa} &= -j\omega\mu_0 b \frac{k \dot{I}_1}{h}.\end{aligned}$$

$$\text{Отсюда получаем } k = \frac{Z_C}{2Z_C \cdot ch 2pa + j\omega\mu_0 b \cdot \operatorname{sh} 2pa}.$$

Активное r и внутреннее реактивное сопротивления шины находим из уравнения $Z_i = r + jx_i = -\frac{1}{2I^2} \oint [\mathbf{E}_{\text{м пов}} \hat{\mathbf{H}}_{\text{м пов}}] d\mathbf{S} = -\frac{1}{I^2} \oint [\mathbf{E}_{\text{пов}} \hat{\mathbf{H}}_{\text{пов}}] d\mathbf{S}.$

Для плоской волны векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ взаимно перпендикулярны и сохраняют одно и то же значение на боковых поверхностях шины. Учитывая, что в условиях задачи среднее значение вектора Умова-Пойнтинга за период соответствует направлению вектора внутрь шины, т.е. в сторону, противоположную вектору $d\mathbf{S}$, получаем

$$Z_i = \frac{1}{I^2} (\dot{E}_l \hat{H}_l S_l - \dot{E}_n \hat{H}_n S_n),$$

где $\dot{E}_l, \dot{E}_n$ – комплексная электрическая напряженность на левой и правой поверхностях шины;

$\hat{H}_l, \hat{H}_n$ – комплексная магнитная напряженность на левой и правой поверхностях шины;

$S_l = S_n = hl$ – площади левой и правой поверхностей шины.

Потоками мощности через верхнюю и нижнюю поверхности шины пренебрегаем, так как $2a \ll h$.

Внутреннее сопротивление левой шины

$$Z_1 = \frac{hl}{I_1^2} (\dot{E}_{-1a} \hat{H}_A - \dot{E}_{1a} \hat{H}_B) = \frac{hl}{I_1^2} \left[\dot{E}_{-1a} \cdot 0 - \dot{I}_1 \frac{Z_C}{h} \frac{ch 2pa}{sh 2pa} \left(-\frac{\hat{I}_1}{h} \right) \right] = \frac{Z_C}{h} \frac{ch 2pa}{sh 2pa} l.$$

Среднюю и правую шины рассматриваем как две части одного обратного провода, так как обе шины соединены параллельно. Их общее сопротивление

$$Z_2 = \frac{hl}{I_1^2} (\dot{E}_{-2a} \hat{H}_B - \dot{E}_{3a} \hat{H}_D) = \frac{hl}{I_1^2} \left[\dot{I}_1 \frac{Z_C}{h} \frac{k - ch 2pa}{sh 2pa} \left(-\frac{\hat{I}_1}{h} \right) - \dot{E}_{3a} \cdot 0 \right] = \frac{Z_C}{h} \frac{ch 2pa - k}{sh 2pa} l.$$

Внешнее реактивное сопротивление обусловлено магнитным потоком между левой шиной и обратным проводом, т.е. между левой и средней шинами: $x_C = \omega L_C = \frac{\omega \Psi_C}{I_1} = \omega \frac{BS}{I_1} = \omega \frac{\mu_0 H_B b l}{I_1} = \omega \mu_0 \frac{b}{h} l.$

Общее комплексное сопротивление шинпровода на единицу длины

$$Z_0 = \frac{Z_1 + Z_2 + jx_C}{l} = \frac{Z_C}{h} \frac{2ch 2pa - k}{sh 2pa} + j\omega \mu_0 \frac{b}{h}$$

Получим численные результаты:

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 5000 = 31400 \text{ с}^{-1};$$

$$Z_C = \frac{p}{\gamma} = \sqrt{\frac{j\omega \mu_0}{\gamma}} = \sqrt{\frac{j\pi \cdot 10^4 \cdot 250 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{10^7}} = 0,994 \cdot 10^{-3} e^{j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$p = \sqrt{j\omega \mu_0 \gamma} = \sqrt{j\pi \cdot 10^4 \cdot 250 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^7} = 9,94 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1};$$

$$2pa = 2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 9,94 \cdot 10^3 \cdot e^{j45^\circ} = \sqrt{j\omega \mu_0 \gamma} = 7,04 + j7,04;$$

$$7,04 \text{ рад} = \frac{7,04}{3,14} 180^\circ = 403,5^\circ = 360^\circ + 43^\circ 30';$$

$$ch 2pa = \frac{e^{2pa} + e^{-2pa}}{2} = \frac{e^{7,04 + j7,04} + e^{-7,04 - j7,04}}{2} = 551 e^{j43^\circ 30'} = 400 + j379;$$

$$sh 2pa = \frac{e^{2pa} - e^{-2pa}}{2} = 400 + j379;$$

$$k = \frac{1}{2 \cdot ch 2pa + j\omega \mu_0 b \cdot \frac{1}{Z_C} \cdot sh 2pa} = \frac{1}{551 e^{j43^\circ 30'} \left(2 + j \frac{\pi \cdot 10^4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{0,994 \cdot 10^{-3} e^{j45^\circ}} \right)} = 0,882 \cdot 10^{-3} e^{-j45^\circ}.$$

Таким образом, благодаря «эффекту близости» ток в правой шине составит примерно 0,1% от тока в средней шине. Вследствие этого можно считать, что в правой шине при больших частотах ток практически отсутствует ($k \approx 0$) и

$$Z_0 \approx 2 \frac{Z_C}{h} + j\omega \mu_0 \frac{b}{h} = 2 \frac{0,994 \cdot 10^{-3} e^{j45^\circ}}{10 \cdot 10^{-3}} + j\pi \cdot 10^4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{2}{10} = 0,141 + j0,148 \text{ Ом/м}.$$

Следовательно: $r_0 = 0,141 \text{ Ом/м}$; $x_0 = 0,148 \text{ Ом/м}$.

Увеличение активного сопротивления проводников при переменном токе по сравнению с сопротивлением на постоянном токе примерно в 19 раз объясняется поверхностным эффектом и эффектом близости.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назовите особенности уравнений переменного электромагнитного поля в проводящей среде.
2. Что называется плоской прямой, отраженной и преломленной электромагнитной волной?
3. С какой скоростью плоская электромагнитная волна распространяется в проводящем пространстве?
4. Как определяется волновое сопротивление? коэффициент отражения?
5. Что такое глубина проникновения? длина волны?
6. Как устранить отражение электромагнитной волны от поверхности проводника?
7. Объясните сущность поверхностного эффекта.
8. В чем сущность магнитного поверхностного эффекта в плоской шине прямоугольного сечения?
9. Какой физический смысл имеет магнитный поверхностный эффект?
10. В чем сущность электрического поверхностного эффекта в плоской шине прямоугольного сечения?
11. Какой физический смысл имеет электрический поверхностный эффект?
12. Как электрический поверхностный эффект влияет на сопротивление проводника?
13. В чем сущность эффекта близости в системе двух прямоугольных шин?
14. Как распределяется плотность переменного тока по поперечному сечению прямоугольного проводника, находящегося в пазу электрической машины?
15. Каково практическое значение явления неравномерности распределения тока в пазу машины?

Практическое занятие № 24

РАСЧЕТ ПОВЕРХНОСТНОГО ЭФФЕКТА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПРОВОДНИКЕ

Достижимые компетенции: Практическое занятие направлено на формирование компетенции ОПК-2, в частности способность применять базовые знания фундаментальных и профессиональных дисциплин, проводить технико-экономический анализ, обосновывать принимаемые решения по использованию судового электрооборудования и средств автоматики, решать на их основе практические задачи профессиональной деятельности.

Учебная цель: формирование практических навыков по знанию: расчет переменного электромагнитного поля в токоведущих шинах круглого сечения.

Ожидаемые результаты: формирование компетенции ОПК-2 в части получения и отработки способности к анализу переменных электромагнитных полей.

Критерии оценивания правильности выполнения: на основе ответов на контрольные вопросы оценивается результат выполнения поставленных задач и делается вывод об успешности занятия.

Объем: 2 академических часа.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ

1. Уравнения переменного электромагнитного поля в цилиндрической системе координат.
2. Методика решения уравнений с помощью функций Бесселя.
3. Методика решения уравнений для плотности тока с помощью функций Бесселя.
4. Определение активного и индуктивного сопротивлений цилиндрического проводника.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1. Уравнения переменного электромагнитного поля в цилиндрической системе координат.

Рассмотрим явление поверхностного эффекта при прохождении переменного тока по цилиндрическому проводнику круглого сечения. Пусть по цилиндрическому проводнику протекает переменный синусоидальный ток I частотой ω . Определим формулы плотности тока δ и магнитной напряженности H в любой точке сечения провода. Полагаем обратный провод настолько удаленным от прямого, что его влияние можно не учитывать. Решение проводим в цилиндрической системе координат r, z, α ,

рис. 1. В плоском цилиндрическом поле $\vec{E} = E_z \vec{1}_z$, $\vec{H} = H_\alpha \vec{1}_\alpha$. В плоском цилиндрическом поле напряженности от α и z не зависят.

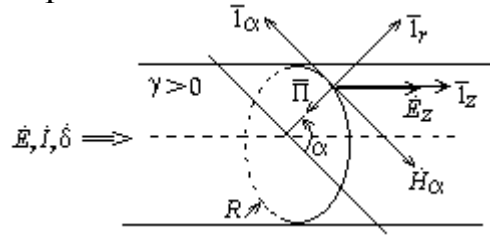


Рис. 1. Круглый проводник в цилиндрической системе координат

Уравнения Максвелла имеют вид

$$\text{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E}; \quad \text{rot} \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}.$$

Раскрывая rot в цилиндрической системе координат, получаем

$$\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{H}{r} = \gamma E; \quad \frac{\partial E}{\partial r} = j\omega\mu H; \quad \delta = \gamma E. \quad (1)$$

Подставляя H из второго уравнения в первое, получаем уравнение для электрической напряженности

$$\frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} - j\omega\gamma\mu E = 0. \quad (2)$$

Обозначим $g^2 = -j\omega\gamma\mu$, тогда

$$g = \sqrt{-j\omega\gamma\mu} = \sqrt{j\omega\gamma\mu} \cdot e^{-j45^\circ} = k e^{-j45^\circ} = k \sqrt{-j}, \quad \text{где } k = \sqrt{\omega\gamma\mu}.$$

Разделим уравнение (2) на g^2

$$\frac{d^2 E}{d(gr)^2} + \frac{1}{gr} \frac{dE}{d(gr)} + E = 0, \quad (3)$$

получаем уравнение Бесселя нулевого порядка. Полностью аналогично получаем уравнение для магнитной напряженности

$$\frac{d^2 H}{d(gr)^2} + \frac{1}{gr} \frac{dH}{d(gr)} + \left(1 - \frac{1}{(gh)^2}\right) H = 0,$$

это уравнение Бесселя первого порядка.

Уравнение для плотности тока получаем в виде

$$\text{rot} \vec{\delta} = -j\omega\gamma\mu_a \vec{H},$$

где вектор плотности тока направлен вдоль оси провода по координате z , магнитная напряженность имеет также только одну составляющую, направленную по касательной к поверхности провода, перпендикулярную радиусу и оси z . Применяя к последнему уравнению операцию ротора еще раз, получаем уравнение Пуассона для вектора плотности тока

$$\nabla^2 \vec{\delta} = j\omega\gamma\mu_a \vec{\delta}.$$

Оператор Лапласа раскрываем в цилиндрической системе координат с учетом того, что плотность тока не зависит от длины провода и угла поворота α радиуса – вектора. В результате получаем

$$\frac{1}{r} \left(\frac{d\delta}{dr} + r \frac{d^2\delta}{dr^2} \right) = j\omega\gamma\mu_a\delta$$

или

$$\frac{d^2\delta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\delta}{dr} = j\omega\gamma\mu_a\delta.$$

Переобозначая для краткости

$$q^2 = -j\omega\gamma\mu_a,$$

получаем

$$\frac{d^2\delta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\delta}{dr} + q^2\delta = 0,$$

или окончательно

$$\frac{d^2\delta}{d(qr)^2} + \frac{1}{qr} \frac{d\delta}{d(qr)} + \delta = 0.$$

Полученное уравнение относится к типу уравнений Бесселя.

2. Решение уравнений с помощью функций Бесселя.

Решение уравнения Бесселя нулевого порядка для электрической напряженности (3) имеет вид

$$\dot{E}(gr) = A \cdot J_0(gr) + B \cdot K_0(gr).$$

Первое слагаемое – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, второе – функция Бесселя второго рода нулевого порядка (так как эта функция при $r=0$ стремится к бесконечности, второе слагаемое далее не учитываем). Оставшуюся постоянную A найдем из граничного условия при $r=0$:

$$\dot{E}(0) = A \cdot J_0(0) = A \cdot 1 = A.$$

Поэтому решение для электрической напряженности получаем в виде $\dot{E}(gr) = \dot{E}(0) \cdot J_0(gr)$, эта напряженность зависит от комплексного аргумента gr .

Из уравнения (1) получаем магнитную напряженность

$$\dot{H} = \frac{1}{j\omega\gamma\mu} \frac{d\dot{E}}{dr} = \frac{1}{j\omega\gamma\mu} \cdot \frac{g}{g} \cdot A \cdot \frac{dJ_0(gr)}{dr} = \frac{gA}{j\omega\gamma\mu} \cdot \frac{dJ_0(gr)}{d(gr)}.$$

По свойствам функций Бесселя имеем $\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$, поэтому

$$\dot{H} = -\frac{gA}{j\omega\gamma\mu} J_1(gr) = \frac{\gamma A}{g} J_1(gr).$$

Теперь найдем A . При $r=R$, т.е. на поверхности магнитная напряженность равна $\dot{H}(R) = \frac{I}{2\pi R} = \frac{\gamma A}{g} J_1(gR)$, отсюда $A = \frac{I}{2\pi R} \frac{g}{\gamma J_1(gR)}$.

Окончательно получаем для обеих напряженностей и плотности тока

$$\dot{E} = \frac{\dot{I}}{2\pi R} \frac{g}{\gamma J_1(gR)} J_0(rg); \quad \dot{H} = \frac{\dot{I}}{2\pi R} \frac{1}{J_1(gR)} J_1(rg); \quad \delta = \gamma \dot{E}.$$

Для построения графиков Бесселевы функции представим в показательной форме: $J_0(gr) = b_0(kr)e^{j\beta_0(kr)}$; $J_1(gr) = b_1(kr)e^{j\beta_1(kr)}$, где b_0, b_1 – модули функций Бесселя соответственно $J_0(qR)$, $J_1(qR)$, β_0, β_1 – аргументы этих функций.

Плотность тока имеет вид

$$\delta = \gamma \dot{E} = \frac{\gamma k e^{-j45^\circ} \dot{I} \cdot b_0(kr) e^{j\beta_0(kr)}}{2\pi R \gamma \cdot b_1(kR) e^{j\beta_0(kR)}} = \frac{k \dot{I}}{2\pi R} \cdot \frac{b_0}{b_1} e^{j(\beta_0 - 45^\circ - \beta_1)}.$$

На рис. 2 показаны график плотности тока в зависимости от радиуса проводника и частоты по отношению к значению на оси проводника, а так же график фазы плотности тока.

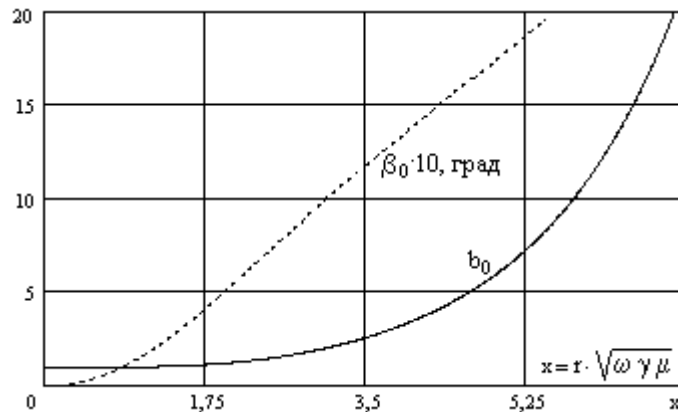


Рис. 2. Зависимость кратности плотности тока по радиусу провода по отношению к значению на оси от аргумента; аналогичная зависимость фазы плотности тока от аргумента

Так как с ростом аргумента $r\sqrt{\omega\gamma\mu_a}$ значение b_0 увеличивается, то амплитуда плотности тока имеет наименьшее значение на оси провода, и отношение амплитуд на поверхности и на оси провода будет тем больше, чем больше частота, удельная проводимость, магнитная проницаемость и радиус провода. Аргумент β_0 также монотонно нарастает, рис. 2. При больших значениях аргумента фаза плотности тока в точке на оси провода может оказываться прямо противоположной фазе плотности в теле проводника. Таким образом, и в случае цилиндрического проводника имеют место общие физические проявления поверхностного эффекта, что и в прямоугольных шинах и в плоской волне. По мере проникновения вглубь проводящей среды волна постепенно затухает, а ее колебания все больше запаздывают по фазе по отношению к колебаниям на поверхности проводника.

3. Методика решения уравнений для плотности тока с помощью функций Бесселя.

В общем виде уравнение Бесселя имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) y = 0,$$

где p – порядок функции Бесселя. В нашем случае имеем уравнение Бесселя нулевого порядка. Его решение состоит из двух слагаемых

$$\delta = \dot{A} J_0(qr) + \dot{B} N_0(qr),$$

где $\dot{A}$, $\dot{B}$ – постоянные интегрирования, $J_0(qr)$ – функция Бесселя нулевого порядка первого рода, $N_0(qr)$ – функция Бесселя нулевого порядка второго рода.

Функция $N_0(qr)$ обладает той особенностью, что при $qr = 0$, т.е. на оси провода она обращается в бесконечность. Поэтому второе слагаемое в решении должно отсутствовать, следовательно, постоянная $\dot{B} = 0$. Потому решение уравнения для плотности тока принимает вид

$$\delta = \dot{A} J_0(qr).$$

Из первого уравнения для плотности тока выражаем напряженность магнитного поля

$$\dot{H} = -\frac{1}{q^2} \text{rot} \delta = -\frac{1}{q^2} \frac{d}{dr} (\dot{A} J_0(qr)) = -\frac{\dot{A}}{q^2} \frac{dJ_0(qr)}{d(qr)} \frac{d(qr)}{dr} = \frac{\dot{A}}{q} J_1(qr),$$

где $J_1(qr)$ – функция Бесселя первого рода уже первого порядка.

Определим постоянную $\dot{A}$. Для этого по закону полного тока найдем напряженность на поверхности провода радиуса R

$$\frac{I}{2\pi R} = \frac{\dot{A}}{q} J_1(qR) \text{ и } \dot{A} = \frac{qI}{2\pi R J_1(qR)}.$$

Для плотности тока и напряженности окончательно получаем

$$\delta = \frac{qI \cdot J_0(qr)}{2\pi R J_1(qR)},$$

$$\dot{H} = \frac{I \cdot J_1(qr)}{2\pi R J_1(qR)}.$$

Так как $J(0) = 1$, то на оси провода плотность тока

$$\delta_0 = \frac{qI}{2\pi R J_1(qR)},$$

следовательно, общая формула плотности тока

$$\delta = \delta_0 \cdot J_0(qr),$$

а на поверхности провода получаем

$$\delta_R = \delta_0 \cdot J_0(qR).$$

Для оценки модуля плотности тока получим выражения бесселевых функций в показательной форме

$$J_0(qR) = b_0 e^{j\beta_0}, \quad J_1(qR) = b_1 e^{j\beta_1},$$

где b_0 , b_1 – модули функций Бесселя соответственно $J_0(qR)$, $J_1(qR)$, β_0 , β_1 – аргументы этих функций.

4. Определение активного и индуктивного сопротивлений цилиндрического проводника. Так как с ростом частоты, радиуса провода и магнитной проницаемости ток отжимается к поверхности, и эффективное сечение провода сокращается, для практики важно определить активное и реактивное сопротивление цилиндрического проводника с учетом поверхностного эффекта. Внутреннее сопротивление на метр длины оценивается по формуле

$$\underline{Z}_{внутр} = r + jx_{внутр} = \frac{\dot{E}_R}{2\pi R \cdot \dot{H}_R},$$

где $\dot{E}_R$, $\dot{H}_R$ – значения напряженностей на поверхности провода.

Подставляя выражения напряженностей, получаем

$$r + jx_{внутр} = \frac{1}{\gamma \cdot 2\pi R} \sqrt{-j\omega\gamma\mu} \frac{J_0(R\sqrt{-j\omega\gamma\mu})}{J_1(R\sqrt{-j\omega\gamma\mu})}.$$

Сопротивление провода на постоянном токе $r_0 = \frac{1}{\gamma \cdot \pi R^2}$, потому получаем

относительное комплексное сопротивление

$$\frac{\underline{Z}_{внутр}}{r_0} = \frac{r}{r_0} + j \frac{x_{внутр}}{r_0} = \frac{R\sqrt{-j\omega\gamma\mu}}{2} \frac{J_0(R\sqrt{-j\omega\gamma\mu})}{J_1(R\sqrt{-j\omega\gamma\mu})}.$$

Показательная форма относительного комплексного сопротивления

$$\frac{\underline{Z}_{внутр}}{r_0} = \frac{R\sqrt{\omega\gamma\mu}}{2} \cdot \frac{b_{0R}}{b_{1R}} e^{j\varphi} = \frac{z_{внутр}}{r_0} e^{j\varphi},$$

где угол $\varphi = \beta_{0R} - \beta_{1R} - \frac{\pi}{4}$. Тогда для относительного активного и реактивного сопротивлений получаем

$$\frac{r}{r_0} = \frac{z_{внутр} \cos \varphi}{r_0}, \quad \frac{x_{внутр}}{r_0} = \frac{z_{внутр} \sin \varphi}{r_0}.$$

Аналогично определяем индуктивность

$$\frac{L_{внутр}}{L_{внутр0}} = \frac{x_{внутр}}{r_0} \frac{r_0}{\omega L_{внутр0}} = \frac{x_{внутр}}{r_0} \frac{1}{\gamma \pi R^2} \frac{8\pi}{\omega\gamma} = \frac{x_{внутр}}{r_0} \frac{8}{(R\sqrt{\omega\gamma\mu})^2}.$$

На рис.3 приведены графики зависимостей относительных параметров, характеризующие возрастание активного и внутреннего сопротивлений провода и уменьшения его внутренней индуктивности при увеличении параметра $R\sqrt{\omega\gamma\mu}$.

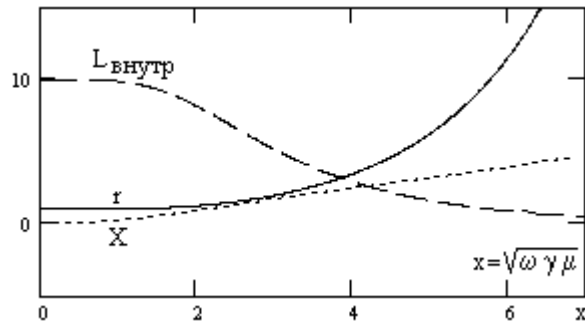


Рис. 3 Зависимость относительных значений активного сопротивления, внутреннего реактивного сопротивления и внутренней индуктивности от параметра

Если $R\sqrt{\omega\gamma\mu}$ достаточно велик, то при расчете активного сопротивления провода его условно можно заменить эквивалентным трубчатым проводом с тем же внешним радиусом и равномерным распределением плотности тока по сечению. Для определения толщины d стенки эквивалентного трубчатого провода (эквивалентной глубины проникновения) получаем

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu}}.$$

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. По медному цилиндрическому проводнику диаметром $d = 2a = 3$ см проходит ток 760А при частоте 500Гц. Удельное сопротивление нагретого проводника $\rho = 2,06 \cdot 10^{-6}$ Ом·см.

Распределение плотности тока по сечению проводника приведено в табл. 1.

Таблица 1

Распределение плотности тока по сечению проводника

R , см	kR	δ_{Rm} , А/см ²	Ψ^0
0	0	28,7	-200,46
0,299	1	29,0	-186,24
0,457	2	35,1	-148,18
0,686	3	50,0	-103,94
0,914	4	98,5	-62,27
1,143	5	179,0	-22,53
1,370	6	331,0	19,26
1,500	6,55	467,0	41,54

Построим график мгновенных значений вектора Умова – Пойнтинга в зависимости от расстояния до оси проводника для момента, когда плотность тока на поверхности будет составлять 45 % от своего положительного максимального значения.

Учитывая, что векторы электрической и магнитной напряженностей E, H внутри провода составляют в пространстве угол 90^0 , мгновенные значения вектора Умова – Пойнтинга $P = E_R H_R$, где $E_R = E_{Rm} \sin(\omega t + \psi)$ – мгновенное значение напряженности электрического поля на расстоянии R от оси провода, $H_R = H_{Rm} \sin(\omega t + \psi_H)$ – мгновенное значение напряженности магнитного поля в той же точке. E_{Rm}, H_{Rm} – амплитудные значения напряженностей, а ψ, ψ_H – их начальные фазы.

Расчет выполним в момент времени, определяемый из условия, что на поверхности ($kR = 6,55$)

$$\delta_{md} \sin(\omega t + 41,54^0) = 0,45\delta_{md},$$

т.е. $\omega t = \arcsin 0,45 - 41,54^0 = -15,08^0$.

По закону Ома в дифференциальной форме комплексная амплитуда $E_{Rm} = 2,06 \cdot 10^{-6} \delta_{Rm}$. Таким образом, начальные фазы напряженности электрического поля будут совпадать с начальными фазами плотности тока, а их амплитуды будут отличаться только на величину удельного сопротивления.

Комплексная амплитуда напряженности магнитного поля в круглом проводнике

$$H_{Rm} = \frac{I}{\sqrt{2\pi a}} \frac{J_1(\sqrt{-jkR})}{J_1(\sqrt{-jka})} = 6,55b_1 e^{-j(155^0 46' + \beta_1)},$$

где b_1 – модуль, а β – аргумент функции Бесселя нулевого порядка.

Амплитуды и фазы напряженности магнитного поля, полученные по приведенной формуле и таблицам бесселевых функций, приведены в таблице 2 вместе с амплитудами напряженности электрического поля.

Таблица 2

Амплитуды и фазы напряженности магнитного и электрического поля

kR	b_1	β^0	$H_{Rm}, \text{ A/см}$	ψ_H^0	$10^5 E_{Rm}, \text{ В/см}$
0	0,0	45	0	-200,16	5,7
1	0,5014	37,837	3,31	-193,297	5,97
2	1,0411	16,732	6,83	-172,192	7,23
3	1,7998	-15,714	11,80	-139,746	11,54
4	3,1729	-57,84	20,70	-97,62	20,3
5	5,8118	-93,85	38,20	-51,91	36,9
6	10,850	-133,45	71,00	-22,01	68,2
6,55	15,36	-155,46	101,0	0	96,0

График мгновенных значений вектора Умова – Пойнтинга построен на основе расчета по приведенным формулам (рис. 4), табл. 3.

Мгновенные значения вектора Умова – Пойнтинга

kR	$\omega t + \psi^0$	$\sin(\omega t + \psi_0)$	$\omega t + \psi_H^0$	$\sin(\omega t + \psi_H^0)$	$10^5 E_R$, В/см	H_R , А/см	Π_R , Вт/см
0	-215,5	0,581	-215,2	0,577	3,32	0	0
1	-201,3	0,364	-208,38	0,475	2,17	1,572	3,4
2	-163,3	-0,288	-187,2	0,125	-2,08	0,855	-1,8
3	-119,0	-0,874	-154,8	-0,425	-10,09	-5,01	50,6
4	-77,35	-0,976	-112,7	-0,923	-19,8	-19,1	379
5	-37,61	-0,61	-66,99	-0,92	-22,52	-35,2	794
6	4,18	0,073	-37,09	-0,603	4,98	-42,9	-214
6,55	26,46	0,445	-15,08	-0,26	42,7	-26,3	-1124

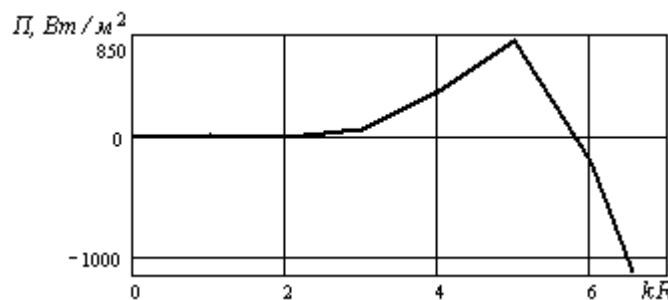


Рис. 4. Мгновенные значения вектора Умова – Пойнтинга

Определим частоту и среднее значение вектора Умова – Пойнтинга на поверхности провода

$$E_d = E_{dm} \sin(\omega t + \psi) = 96 \cdot 10^{-5} \sin(\omega t + 41,54^\circ) \text{ В/см};$$

$$H_d = H_{dm} \sin \omega t = 101 \sin \omega t \text{ А/см}.$$

Так как векторы этих напряженностей для любого момента времени взаимно перпендикулярны, то мгновенное значение вектора Умова – Пойнтинга на поверхности проводника

$$\Pi_d = E_d H_d = E_{dm} H_{dm} \sin \omega t \sin(\omega t + \psi) = \frac{E_{dm} H_{dm}}{2} (\cos \psi - \cos(2\omega t + \psi)).$$

Из полученного выражения следует, что вектор Умова – Пойнтинга меняется во времени с частотой в два раза большей частоты тока, т.е. $f_{\Pi} = 1f = 1000 \text{ Гц}$, а среднее значение этого вектора за время, кратное периоду, составляет

$$\Pi_{CP} = \frac{E_{dm} H_{dm}}{2} \cos \psi = \frac{101 \cdot 96 \cdot 10^{-5}}{2} \cos 41,54^\circ = 0,0645 \text{ Вт/см}^2 = 645 \text{ Вт/м}^2.$$

2. Определим активное и внутреннее реактивное сопротивления проводника для трех частот: 50, 500 и 5000 Гц с учетом поверхностного эффекта. Полученные по формулам с бесселевыми функциями значения двух последних частот сравним с результатами расчета по формулам для резкого

проявления поверхностного эффекта. Активные сопротивления сравним во всех трех случаях с сопротивлением проводника при постоянном токе.

Сопротивление проводника постоянному току на длине 1 м

$$r_{пост} = \frac{\rho}{\pi a^2} = \frac{2,06 \cdot 10^{-8}}{3,14 \cdot (1,5 \cdot 10^{-2})^2} = 2,91 \cdot 10^{-5} \text{ Ом/м.}$$

Активное сопротивление провода при поверхностном эффекте

$$\frac{r}{r_{пост}} = \frac{ka}{2} \frac{b_{0a}}{b_{1a}} \cos(\beta_{0a} - 45^\circ - \beta_{1a}),$$

а внутреннее реактивное

$$\frac{x_{внутр}}{r_{пост}} = \frac{ka}{2} \frac{b_{0a}}{b_{1a}} \sin(\beta_{0a} - 45^\circ - \beta_{1a}).$$

В этих формулах $k = \sqrt{\omega \mu_0 \gamma}$; b_{0a}, b_{1a} – модули функций Бесселя первого рода нулевого и первого порядка от значения переменной $ka\sqrt{-j}$; β_{0a}, β_{1a} – их аргументы.

Сопротивления провода при резком проявлении поверхностного эффекта определяются отношениями $\frac{r_0}{r_{пост}} = \frac{x_{0\text{ внутр}}}{r_{пост}} = \frac{ak}{2\sqrt{2}}$. Результаты расчета приведены в табл. 4.

Таблица 4

Сопротивления провода при резком проявлении поверхностного эффекта

f	ka	b_{0a}	b_{1a}	β_{0a}^0	β_{1a}^0	$\frac{r}{r_{пост}}$	$\frac{x_{внутр}}{r_{пост}}$	$\frac{r_0}{r_{пост}} = \frac{x_{0\text{ внутр}}}{r_{пост}}$
50	2,08	1,25	1,1	57,8	-14,5	1,06	0,54	–
200	4,16	3,78	4,49	144,8	60,2	1,73	1,44	1,74
800	8,32	47,07	48,12	313,9	226,8	3,01	2,74	2,94

Расчеты показывают резкое увеличение активного и реактивного сопротивления проводника при увеличении рабочей частоты напряжения вследствие проявления поверхностного эффекта. Это объясняется увеличением плотности тока у поверхности проводника и снижения площади эффективного сечения проводника.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем состоит особенность уравнений переменного электромагнитного поля в длинном проводнике круглого сечения?
2. Вывести уравнение для плотности синусоидального тока по сечению круглого проводника.
3. Как определяется активное сопротивление и индуктивность круглого проводника для переменного тока?
4. Как сопротивление и индуктивность круглого проводника зависит от частоты, радиуса и магнитной проницаемости?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Л. А. Бессонов. – М.: Юрайт, 2012. – 701 с.
2. Гаврилов Л. П. Расчет и моделирование линейных электрических цепей с применением ПК / Л. П. Гаврилов, Д. А. Соснин. – М.: Солон-Пресс, 2009. – 448 с.
3. Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин, В. Л. Чечурин. – СПб.: Питер, 2009. – 463 с.
4. Лоторейчук Е. А. Теоретические основы электротехники / Е. А. Лоторейчук. – М.: ИД ФОРУМ. ИНФРА, 2009. – 320 с.
5. Прянишников В. А. Теоретические основы электротехники / В. А. Прянишников. – СПб.: Корона-принт, 2010. – 368 с.
6. Улахович Д. А. Основы теории линейных электрических цепей / Д. А. Улахович. – СПб.: БХВ-Петербург, 2009. – 816 с.
7. Фриск В. В. Основы теории цепей / В. В. Фриск. – М.: Солон-Пресс, 2009. – 160 с.

**Т Е О Р И Я
СУДОВОЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

Методические указания

В шести частях

Часть 6

Составители: **Канов** Лев Николаевич,
Пронина Анна Константиновна

В авторской редакции