

УДК 681.5.09

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ АСИНХРОННЫХ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ ЛИНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕПРЕРЫВНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Филипович О.В., Конн В.Я.

Рассматриваются вопросы построения математических моделей функционирования накопительных устройств участков асинхронных автоматизированных линий на базе непрерывных вероятностных приближений с целью определения временных резервов, создаваемых этими устройствами.

Рассматривается однопоточная асинхронная автоматизированная линия (АЛ), состоящая из технологических ячеек (ТЯ), последовательно соединенных через накопители (Н), со структурой приведенной к нормальному виду, показанной на рисунке 1.

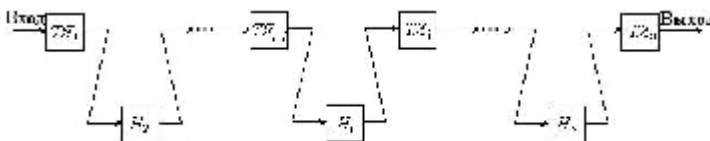


Рисунок 1 – Структура однопоточной асинхронной АЛ

Предполагается, что линия содержит n ячеек, нумерация накопителей производится со 2-го по n -й. При разбиении ее структуры на отдельные элементы в рассмотрение вводится два типа участков: первый участок, называемый сопряженным, содержит, например, i -й накопитель (H_i) и $(i-1)$ -ю технологическую ячейку ($ТЯ_{i-1}$), а второй участок, называемый основным, содержит i -й накопитель (H_i) и последующую i -ю ячейку $ТЯ_i$. Математическое описание рассмотренных вариантов структур элементов АЛ идентично и может рассматриваться как модель технологической ячейки с временным резервом: для основного участка это резерв времени, в течение которого $ТЯ_{i-1}$ может продолжать функционировать при отказе $ТЯ_i$, создаваемый накопителем на прием продукции, а для сопряженного – резерв времени на выдачу продукции, в

течение которого $ТЯ_i$ сохраняет работоспособность при отказе $ТЯ_{i-1}$.

Одним из способов повышения производительности АЛ является разработка компоновочных схем, позволяющих в полной мере использовать функциональные возможности транспортно-накопительных систем. Процессы функционирования линий являются сложными и характеризуются вероятностными закономерностями, поэтому математическое моделирование является одним из основных средств анализа и проектирования систем подобного класса. Определение надежностных параметров и производительности АЛ может проводиться на базе полумарковских математических моделей. Использование итерационного подхода при построении указанных моделей, методология которого изложена в [1], позволяет определять длины очередей в накопителях и оперирует с исходными функциями распределения в общем виде.

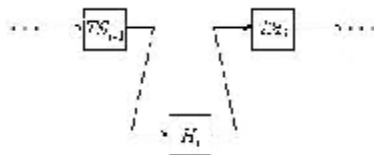


Рисунок 2 – Структура СМО типа G/G/1/K

Одной из проблем при построении итерационной модели АЛ является определение временных резервов τ_i ,

создаваемых i -ми межоперационными накопителями ($i = \overline{2, n}$). Они зависят от длин очередей в соответствующих H_i , которые определяются на основании функции распределения числа заявок в системах массового обслуживания (СМО) типа G/G/1/K, каждая из которых имеет структуру показанную на рисунке 2.

Интенсивность потока заявок, поступающих в систему, формирует технологическая ячейка $ТЯ_{i-1}$ с присоединенными к ней слева остальными частями АЛ. Интенсивность потока обслуживания заявок, находящихся в i -м накопителе (H_i), формирует $ТЯ_i$ с частями линии, присоединенными к ней справа. При наличии частых переналадок линии на выпуск изделия новой номенклатуры возникает задача построения математических моделей накопителей, при помощи которых можно анализировать параметры их функционирования как в стационарных, так и в переходных режимах работы.

В любой СМО процессы поступления и обслуживания заявок в зависимости от времени являются дискретными вероятностными процессами со скачками. Для оценки работы системы в случае, когда система находится в условиях большой нагрузки, допустимо использовать непрерывные вероятностные приближения и заменить эти скачки

сглаженными непрерывными временными функциями (подобный подход подробно изложен в [2]).

Так, известно, что при использовании приближения первого порядка, количество требований, находящихся в системе в любой момент времени t , равно

$$L(t) = \bar{\alpha}(t) - \bar{\delta}(t),$$

где $\bar{\alpha}(t)$ - среднее количество поступлений на интервале $\{0, t\}$; $\bar{\delta}(t)$ - среднее количество уходов на интервале $\{0, t\}$; $L(0) = 0$.

Данное приближение можно усовершенствовать, вводя для рассматриваемых процессов центральные моменты второго и высших порядков. При этом процесс, протекающий в системе, аппроксимируется процессом с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний $X(t)$. В [2] рассмотрены дифференциальные уравнения в частных производных для $X(t)$ и показано, что функция распределения (ФР) длины очереди в СМО является решением уравнения, известного как уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [a_n(x, t) F(x, t)], \quad (1)$$

где $F(x, t)$ – функция распределения числа заявок в системе; $a_n(x, t)$ – инфинитезимальные n -е моменты распределения количества заявок.

Приближение второго порядка уравнения (1) является диффузионным уравнением или прямым уравнением Колмогорова. Для проведения более точного анализа параметров рассматриваемой СМО предлагается использовать три первых члена ряда, стоящего в правой части уравнения Фоккера–Планка. В этом случае система аппроксимируется приближением третьего порядка, а уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [a_1(x, t) F(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [a_2(x, t) F(x, t)] - \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} [a_3(x, t) F(x, t)], \quad (2)$$

где $m(x, t) = a_1$, $\sigma^2(x, t) = a_2$, $a_3(x, t) = a_3$ – инфинитезимальные среднее, дисперсия и третий центральный момент распределения количества заявок в системе соответственно

Предполагается, что величины a_n ($n = \overline{1, 3}$) являются постоянными (формулы для их определения приводятся в работах [1, 3]), тогда уравнение (2) можно переписать следующим образом:

$$-\frac{a_3}{6} \frac{d^3 F(x,t)}{dx^3} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2 F(x,t)}{dx^2} - m \frac{dF(x,t)}{dx} = \frac{dF(x,t)}{dt}. \quad (3)$$

Для получения частных решений (3) вводятся следующие граничные условия

$$\begin{cases} F(0,t) = 0; \\ F(K,t) = 1; \\ F'(0,t) = J_0 \end{cases} \quad (4)$$

и начальное условие

$$F(x,0) = F_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < x_0; \\ 1, & x_0 \leq x < K, \end{cases} \quad (5)$$

которые выбираются, исходя из определения функции распределения, и по своему физическому смыслу соответствуют функционированию межоперационных накопителей (x_0 - количество заявок в системе в момент времени $t = 0$, K - емкость накопителя) [3].

Один из вариантов решения рассматриваемого уравнения приведен в [3], где для нахождения искомой функции использовался операционный метод. Здесь при сохранении общей методологии предлагается решить уравнение (3) при следующих допущениях:

1) третье краевое условие в (4) не зависит от времени и является постоянной величиной, равной [3]

$$J_0 = -\frac{2m}{\sigma^2(1 - e^{2mK/\sigma^2})};$$

2) начальное условие (5) может быть разложено в ряд Фурье на интервале $[0, K]$:

$$F_0(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(b_n x), \quad (6)$$

$$\text{где } a_0 = \frac{K - x_0}{K}; \quad a_n = -\frac{2 \sin(\frac{\pi n x_0}{K})}{\pi n}; \quad b_n = \frac{\pi n}{K}.$$

Предполагая, что искомая функция распределения является оригиналом и производя преобразования по Лапласу уравнения (3) и краевых условий (4) по переменной t (считая независимую переменную x параметром), получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^3 f(x, p)}{dx^3} - \frac{3\sigma^2}{a_3} \frac{d^2 f(x, p)}{dx^2} + \frac{6m}{a_3} \frac{df(x, p)}{dx} + \frac{6p}{a_3} f(x, p) = \frac{6}{a_3} F_0(x), \quad (7)$$

с краевыми условиями

$$f(0, p) = 0; \quad f(K, p) = \frac{1}{p}; \quad f'_x(0, p) = \frac{J_0}{p}, \quad (8)$$

где $f(x, p)$ – изображение функции $F(x, t)$.

Общим решением (7) без правой части является функция

$$\bar{f}(x, p) = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x} + C_3 e^{s_3 x},$$

где $s_1 = s_1(p)$, $s_2 = s_2(p)$, $s_3 = s_3(p)$ – корни характеристического уравнения

$$s^3 - \frac{3\sigma^2}{a_3} s^2 + \frac{6m}{a_3} s + \frac{6p}{a_3} = 0,$$

равные $s_1(p) = u(p) + v(p) + s_0$; $s_{2,3}(p) = -\frac{u(p) + v(p)}{2} \pm i\sqrt{3} \frac{u(p) - v(p)}{2} + s_0$,

где $u(p) = \sqrt[3]{-\frac{E(p)}{2} + \sqrt{D(p)}}$; $v(p) = \sqrt[3]{-\frac{E(p)}{2} - \sqrt{D(p)}}$; $s_0 = \frac{\sigma^2}{a_3}$;

$$D(p) = \left(\frac{E(p)}{2}\right)^2 + \left(\frac{G}{3}\right)^3; \quad G = \frac{3(2ma_3 - \sigma^4)}{a_3^2}; \quad E(p) = \frac{2\sigma^2(3ma_3 - \sigma^4)}{a_3^3} + \frac{6p}{a_3}.$$

Частное решение (7) в соответствии с видом функции $F_0(x)$ определяется следующим образом:

$$f^*(x, p) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(b_n x) + d_n \sin(b_n x). \quad (9)$$

Коэффициенты $c_0(p)$, $c_n(p)$, $d_n(p)$ являются решениями системы уравнений, получаемой при подстановке (6) и (9) в (7), и определяются соотношениями

$$c_0(p) = \frac{K - x_0}{pK}; \quad c_n(p) = \frac{a_n(p - \alpha_n)}{(p - (\alpha_n + i\beta_n))(p - (\alpha_n - i\beta_n))};$$

$$d_n(p) = \frac{-\beta_n a_n}{(p - (\alpha_n + i\beta_n))(p - (\alpha_n - i\beta_n))},$$

где $\alpha_n = -\frac{\sigma^2 b_n^2}{2}$; $\beta_n = \frac{b_n^3 a_3}{6} - b_n m$.

Общее решение уравнения (7) имеет вид:

$$f(x, p) = \bar{f}(x, p) + f^*(x, p). \quad (10)$$

Неизвестные коэффициенты C_i ($i = \overline{1,3}$) определяются из системы уравнений, получаемых в результате подстановки в (10) краевых условий

(8). Подставляя выражения, полученные для данных коэффициентов в (10) и проводя алгебраические преобразования, находим:

$$f(x, p) = f_1(x, p) + f_2(x, p) + f_3(x, p) + f_4(x, p) + f_5(x, p) + f_6(x, p) + f_7(x, p), \quad (11)$$

$$\text{где } f_1(x, p) = c_0(p) + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n(p) \cos(b_n x) + d_n(p) \sin(b_n x)]; \quad (12)$$

$$f_2(x, p) = \frac{f_{c1}(x, p)}{pf_z(p)}; \quad f_3(x, p) = J_0 \frac{f_{c2}(x, p)}{pf_z(p)}; \quad (13)$$

$$f_4(x, p) = c_0 \frac{f_{c3}(x, p) - f_{c1}(x, p)}{f_z(p)};$$

$$f_5(x, p) = q_0 \frac{f_{c3}(x, p)}{f_z(p)}; \quad f_6(x, p) = -q_1 \frac{f_{c1}(x, p)}{f_z(p)}; \quad (14)$$

$$f_7(x, p) = -q_2 \frac{f_{c2}(x, p)}{f_z(p)};$$

$$q_0 = q_0(p) = \sum_n c_n(p); \quad q_1 = q_1(p) = \sum_n c_n(p) \cos(b_n K) + d_n(p) \sin(b_n K);$$

$$q_2 = q_2(p) = \sum_n d_n(p) b_n;$$

$$f_z(p) = (s_2 - s_3)e^{s_1 K} - (s_1 - s_3)e^{s_2 K} + (s_1 - s_2)e^{s_3 K};$$

$$f_{c1}(x, p) = (s_2 - s_3)e^{s_1 x} - (s_1 - s_3)e^{s_2 x} + (s_1 - s_2)e^{s_3 x};$$

$$f_{c2}(x, p) = (e^{s_3 K} - e^{s_2 K})e^{s_1 x} - (e^{s_3 K} - e^{s_1 K})e^{s_2 x} + (e^{s_2 K} - e^{s_1 K})e^{s_3 x};$$

$$f_{c3}(x, p) = (s_2 e^{s_3 K} - s_3 e^{s_2 K})e^{s_1 x} - (s_1 e^{s_3 K} - s_3 e^{s_1 K})e^{s_2 x} + (s_1 e^{s_2 K} - s_2 e^{s_1 K})e^{s_3 x}.$$

Оригинал $F(x, t)$ может быть восстановлен при помощи обратного преобразования Лапласа. Выражение (12) представляет собой дробно-рациональную функцию, степень знаменателя которой превосходит степень числителя. Так как точки $p_n = \alpha_n \pm i\beta_n$ являются простыми полюсами слагаемых данной функции, то переход в пространство оригиналов можно совершить, используя формулу

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\psi} \frac{A(p_n)}{B'(p_n)} e^{p_n t}, \quad (15)$$

где $A(p)$, $B(p)$ - числитель и знаменатель дробно-рациональной функции соответственно; p_n - простые полюсы функции; ψ - количество полюсов.

Применяя формулу (15), получаем оригинал рассматриваемой функции

$$F_1(x, t) = \frac{K - x_0}{K} + \sum_n \left[a_n e^{i\alpha_n} \cos(b_n x + \beta_n t) \right]. \quad (16)$$

Рассмотрим остальные слагаемые правой части соотношения (11). Предполагая, что для них выполняются условия второй теоремы разложения, приведенные в [3], оригиналами $f_j(x, p)$ ($j = \overline{(2,7)}$) являются функции, определяемые следующим образом

$$F_j(x, t) = \sum_{(p_k)}^{\infty} \text{Res} \{ f_j(x, p) \} e^{p_k t}, \quad j = \overline{(2,7)}, \quad (17)$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функций $f_j(x, p)$.

Рассмотрим нули знаменателей соотношений (13), (14). Точка $p = 0$ является простым полюсом функций (13). Обозначим

$$L^{-1}(f_2(x, p)|_{p=0}) = F_1(x); \quad L^{-1}(f_3(x, p)|_{p=0}) = F_2(x); \quad L^{-1}(f_3(x, p)|_{p=0}) = F_3(x),$$

где L^{-1} - оператор обратного преобразования Лапласа.

Оригиналы $f_j(x, p)$ ($j = \overline{(2,4)}$) в соответствии с формулой (17) равны

$$F_1(x) = \frac{f_{c1}(x, 0)}{f_z(0)}; \quad F_2(x) = J_0 \frac{f_{c2}(x, 0)}{f_z(0)}; \quad F_3(x) = c'_0 \frac{f_{c3}(x, 0) - f_{c1}(x, 0)}{f_z(0)}, \quad (18)$$

где $c'_0 = \frac{K - x_0}{K}$. Здесь и далее при определении оригиналов используются подобные обозначения ввиду ограниченного объема статьи.

Рассмотрим выражения (14). Получим оригиналы $f_j(x, p)$ ($j = \overline{(5,7)}$), определяемые как сумма вычетов, взятых в простых полюсах $p_n = \alpha_n \pm i\beta_n$. Обозначим

$$L^{-1}(f_5(x, p)|_{p_n = \alpha_n \pm i\beta_n}) = F_2(x, t); \quad L^{-1}(f_6(x, p)|_{p_n = \alpha_n \pm i\beta_n}) = F_3(x, t);$$

$$L^{-1}(f_7(x, p)|_{p_n = \alpha_n \pm i\beta_n}) = F_4(x, t),$$

тогда оригиналы рассматриваемых функций будут определяться соотношениями

$$F_2(x, t) = \sum_n \frac{a_n}{2} \left[e^{(\alpha_n + i\beta_n)t} \left[\frac{f_{c3}(x, p)}{f_z(p)} \right]_{p_n = \alpha_n + i\beta_n} + e^{(\alpha_n - i\beta_n)t} \left[\frac{f_{c3}(x, p)}{f_z(p)} \right]_{p_n = \alpha_n - i\beta_n} \right]; \quad (19)$$

$$F_3(x, t) = -\sum_n \frac{a_n}{2} \left[e^{(\alpha_n + i\beta_n)t + i b_n K} \left[\frac{f_{c1}(x, p)}{f_z(p)} \right]_{p_n = \alpha_n + i\beta_n} + e^{(\alpha_n - i\beta_n)t - i b_n K} \left[\frac{f_{c1}(x, p)}{f_z(p)} \right]_{p_n = \alpha_n - i\beta_n} \right]; \quad (20)$$

$$F_4(x, t) = \sum_n \frac{ia_n b_n}{2} \left[e^{(\alpha_n - i\beta_n)t} \left[\frac{f_{c2}(x, p)}{f_z(p)} \right]_{p_n = \alpha_n - i\beta_n} - e^{(\alpha_n + i\beta_n)t} \left[\frac{f_{c2}(x, p)}{f_z(p)} \right]_{p_n = \alpha_n + i\beta_n} \right]. \quad (21)$$

Последним шагом решения является переход в пространство оригиналов $f_j(x, p)$ ($j = \overline{2, 7}$), определяемый суммой вычетов, взятых в особых точках, являющихся нулями трансцендентного уравнения

$$f_z(p) = 0. \quad (22)$$

Получение точных аналитических выражений для определения корней этого уравнения затруднительно. В работе [3] предлагалось определять решения (22) как корни полинома, получающегося при разложении функции $f_z(p)$ в степенной ряд с конечным числом членов.

Здесь предлагается воспользоваться численными методами поиска корней, например, методом секущих, алгоритм которого реализован на ЭВМ в математической системе MathCad (функция root). Рассмотрим результаты отыскания корней трансцендентного уравнения

$$(s_2(p) - s_3(p))e^{s_1(p)K} - (s_1(p) - s_3(p))e^{s_2(p)K} + (s_1(p) - s_2(p))e^{s_3(p)K} = 0 \quad (23)$$

с параметрами

$$m=2; \sigma^2=23,5; a_3=-4,2; K=20,$$

входящими в уравнение (23) и функции $s_1(p)$, $s_2(p)$, $s_3(p)$. Предполагается, что аргумент p функции $f_z(p)$ не содержит комплексной части. Начальные приближения, используемые при поиске корней, могут быть определены по графику функции $f_z(p)$, показанному на рисунке 3.

Результаты поиска первых пяти корней уравнения (23) сведены в таблицу 1.

Таблица 1 – Результаты поиска корней уравнения $f_z(p) = 0$

Начальное приближение, p_0	Корни уравнения, s_g	Проверка решения, $f_z(s_g)$
------------------------------	------------------------	------------------------------

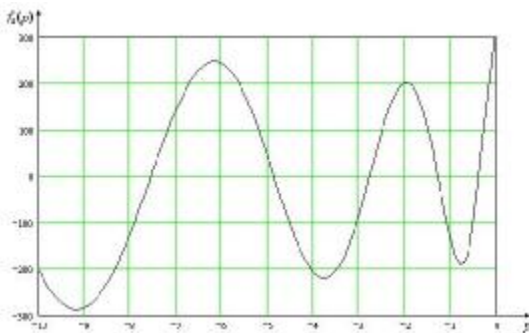


Рисунок 3 – График зависимости $f_z(p)$

-0,5	-0,38158681	$-2,251861 \cdot 10^{-11}$
-1,5	-1,27374308	$1,760514 \cdot 10^{-11}$
-2,5	-2,76191166	$-3,650083 \cdot 10^{-12}$
-5	-4,84795246	$1,211652 \cdot 10^{-11}$
-7,5	-7,5344647	$7,291949 \cdot 10^{-12}$

В результате поиска корней трансцендентного уравнения указанным выше методом при различных параметрах, входящих в функции (23), установлено:

1) корни уравнения являются действительными (даже при использовании при поиске начальных приближений, содержащих комплексные части);

2) корни уравнения лежат в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} p < 0$) и являются однократными.

Следовательно точки $p = s_g$ являются простыми полюсами выражений (13), (14) и обращение $f_j(x, p)$ ($j = \overline{(2, 7)}$) может производиться по формулам (15), (17). Введем обозначения $L^{-1}(f_j(x, p))\big|_{p=s_g} = F_{j+3}(x, t)$, $j = \overline{(2, 7)}$, $\frac{df_j(p)}{dp} = f'(p)$. Оригиналами выражений (13), (14), определяемыми как сумма вычетов, взятых в простых полюсах $p = s_g$, служат функции

$$F_5(x, t) = \sum_{g=1}^{\infty} e^{s_g t} \frac{f_{c1}(x, s_g)}{s_g f'(s_g)}; \quad F_6(x, t) = J_0 \sum_{g=1}^{\infty} e^{s_g t} \frac{f_{c2}(x, s_g)}{s_g f'(s_g)}; \quad (24)$$

$$F_7(x, t) = \frac{K - x_0}{K} \sum_{g=1}^{\infty} e^{s_g t} \frac{f_{c3}(x, s_g) - f_{c1}(x, s_g)}{s_g f'(s_g)}; \quad (25)$$

$$F_8(x, t) = \sum_{g=1}^{\infty} e^{s_g t} \left[\frac{f_{c3}(x, s_g)}{f'(s_g)} \sum_n c_n(s_g) \right]; \quad (26)$$

$$F_9(x, t) = - \sum_{g=1}^{\infty} e^{s_g t} \left[\frac{f_{c1}(x, s_g)}{f'(s_g)} \sum_n (c_n(s_g) \cos(b_n K) + d_n(s_g) \sin(b_n K)) \right]; \quad (27)$$

$$F_{10}(x, t) = - \sum_{g=1}^{\infty} e^{s_g t} \left[\frac{f_{c2}(x, s_g)}{f'(s_g)} \sum_n d_n(s_g) b_n \right], \quad (28)$$

где $c_n(s_g) = \frac{a_n(s_g - \alpha_n)}{(s_g - (\alpha_n + i\beta_n))(s_g - (\alpha_n - i\beta_n))}$;

$d_n(s_g) = \frac{-\beta_n a_n}{(s_g - (\alpha_n + i\beta_n))(s_g - (\alpha_n - i\beta_n))}$, ζ - конечное число корней трансцендентного уравнения (22), определяемых численным методом.

Окончательным результатом решения уравнения (3) является сумма функций, определяемых соотношениями (16), (18) - (21), (24) - (28). Подстановкой точных аналитических выражений (16), (18) в (3) можно показать, что они являются решениями этого уравнения. Исходя из этого, можно сделать вывод о том, что обращение преобразования Лапласа произведено правильно. Среднее число заявок в очереди СМО определяется по формуле

$$\bar{L}_{оч} = \int_0^K (1 - F(x, t)) dx. \quad (29)$$

Теперь можно определить функцию распределения временного резерва накопителя ξ , являющегося случайной величиной (СВ). Для нахождения указанной функции (обозначим ее $R(t)$) необходимо поставить вспомогательную задачу, исходными данными для решения которой являются:

- 1) длина очереди в накопителе – СВ L с ФР $F(x, t)$ (или плотностью $f(x, t)$);
- 2) время обслуживания единицы продукции технологической ячейкой $ТЯ_{i-1}$ – СВ τ_{i-1} с ФР $F_{i-1}(t)$ (или плотностью $f_{i-1}(t)$);
- 3) время обслуживания единицы продукции технологической ячейкой $ТЯ_i$ – СВ τ_i с ФР $F_i(t)$ (или плотностью $f_i(t)$);
- 4) емкость накопителя - K мест.

Рассмотрим, например, сопряженный участок. При отказе $ТЯ_{i-1}$ накопитель участка будет работать на выдачу продукции, при этом резерв времени составляет

$$\xi = L\tau_i. \quad (30)$$

Предположим, что величины L и τ_i образуют систему случайных величин. В общем случае по законам распределения величин, входящих в

систему, нельзя восстановить закон распределения системы в целом. Функцию распределения $R(t)$ можно определить таким образом лишь в частном случае – когда СВ L и τ_i являются независимыми. На самом деле указанные величины связаны очевидной вероятностной (и функциональной) зависимостью: при фиксированном времени поступления заявок в накопитель очередь в нем будет изменяться прямо пропорционально величине τ_i . Подобная задача была рассмотрена в [4], где для ее решения принималось допущение о том, что времена обслуживания единицы продукции технологическими ячейками $ТЯ_{i-1}$ и $ТЯ_i$ являются постоянными величинами, равными математическим ожиданиям соответствующих СВ. В данной работе рассматривается второй вариант решения и принимается следующее: длина очереди в накопителе H_i является неслучайной величиной, равной математическому ожиданию СВ L , а указанные выше времена являются величинами стохастическими. В этом случае формула (30) примет вид

$$\xi = \bar{L}_i(t)\tau_i = \varphi(\tau_i),$$

где $\bar{L}_i(t)$ – математическое ожидание длины очереди в накопителе H_i , определяемое в конкретный момент времени t по формуле (29). Так как зависимость $\xi = \varphi(\tau_i)$ является монотонной функцией, то плотность распределения СВ ξ можно определить по формуле для функции случайной величины

$$r(\xi) = |\psi'(\xi)| f_i(\psi(\xi)),$$

где ψ – функция обратная по отношению к φ , $\psi(\xi) = \frac{\xi}{\bar{L}_i(t)}$. В этом случае

$$\psi'(\xi) = \frac{1}{\bar{L}_i(t)}, \text{ тогда}$$

$$r(\xi) = \left| \frac{1}{\bar{L}_i(t)} \right| f_i \left(\frac{\xi}{\bar{L}_i(t)} \right). \quad (31)$$

Аналогично для основного участка можно записать

$$r(\xi) = \left| \frac{1}{K - \bar{L}_i(t)} \right| f_i \left(\frac{\xi}{K - \bar{L}_i(t)} \right). \quad (32)$$

По найденным плотностям распределения (31), (32) функцию $R(t)$ можно определить по формуле

$$R(t) = \int_0^t r(\xi) d\xi.$$

Полученные результаты могут быть использованы при построении математических моделей участков асинхронных АЛ (приведенных в [4]) и полумарковских итерационных моделей однопоточных линий в целом.

Библиография

1 Копп В.Я. Итерационный подход при построении полумарковских моделей асинхронных автоматизированных линий / В.Я.Копп // Вестн. СевГТУ: Сб. науч. тр. — Севастополь, 2000. — Вып. 27. — С. 73 – 80.

2 Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями: Пер. с англ. /Л. Клейнрок. — М.: Мир, 1979. — 600 с.

3 Филипович О.В. Моделирование накопительных элементов автоматизированных линий /О.В.Филипович, В.Я.Копп, Ф.Д.Пряшников // Оптимизация производств. процессов: Сб. науч. тр. — Севастополь, 2001. — Вып. 4. — С. 8 – 20.

4 Филипович О.В. Моделирование участков автоматизированных линий с учетом стохастического характера межоперационных заделов / О.В.Филипович, В.Я.Копп, Л.В.Галкина // Сб. науч. тр. СИЯЭиП. — Севастополь: СИЯЭиП, 2001. — Вып. 5. — С. 213 – 217.

Поступила в редакцию 10.12.2001 г.

УДК 681.5.09

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ АСИНХРОННЫХ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ ЛИНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕПРЕРЫВНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Филипович О.В., Конн В.Я.

Рассматриваются вопросы построения математических моделей функционирования накопительных устройств участков асинхронных автоматизированных линий на базе непрерывных вероятностных приближений с целью определения временных резервов, создаваемых этими устройствами.

Рассматривается однопоточная асинхронная автоматизированная линия (АЛ), состоящая из технологических ячеек (ТЯ), последовательно соединенных через накопители (Н), со структурой приведенной к нормальному виду, показанной на рисунке 1.

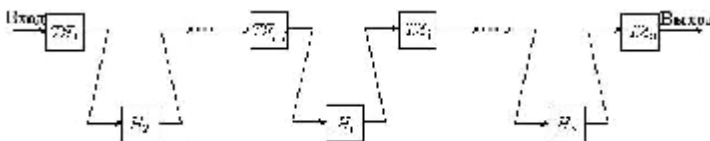


Рисунок 1 – Структура однопоточной асинхронной АЛ

Предполагается, что линия содержит n ячеек, нумерация накопителей производится со 2-го по n -й. При разбиении ее структуры на отдельные элементы в рассмотрение вводится два типа участков: первый участок, называемый сопряженным, содержит, например, i -й накопитель (H_i) и $(i-1)$ -ю технологическую ячейку ($ТЯ_{i-1}$), а второй участок, называемый основным, содержит i -й накопитель (H_i) и последующую i -ю ячейку $ТЯ_i$. Математическое описание рассмотренных вариантов структур элементов АЛ идентично и может рассматриваться как модель технологической ячейки с временным резервом: для основного участка это резерв времени, в течение которого $ТЯ_{i-1}$ может продолжать функционировать при отказе $ТЯ_i$, создаваемый накопителем на прием продукции, а для сопряженного – резерв времени на выдачу продукции, в

течение которого $ТЯ_i$ сохраняет работоспособность при отказе $ТЯ_{i-1}$.

Одним из способов повышения производительности АЛ является разработка компоновочных схем, позволяющих в полной мере использовать функциональные возможности транспортно-накопительных систем. Процессы функционирования линий являются сложными и характеризуются вероятностными закономерностями, поэтому математическое моделирование является одним из основных средств анализа и проектирования систем подобного класса. Определение надежностных параметров и производительности АЛ может проводиться на базе полумарковских математических моделей. Использование итерационного подхода при построении указанных моделей, методология которого изложена в [1], позволяет определять длины очередей в накопителях и оперирует с исходными функциями распределения в общем виде.

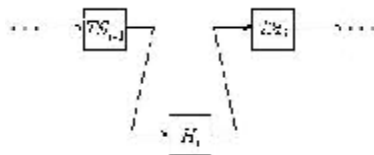


Рисунок 2 – Структура СМО типа G/G/1/K

Одной из проблем при построении итерационной модели АЛ является определение временных резервов τ_i ,

создаваемых i -ми межоперационными накопителями ($i = \overline{2, n}$). Они зависят от длин очередей в соответствующих H_i , которые определяются на основании функции распределения числа заявок в системах массового обслуживания (СМО) типа G/G/1/K, каждая из которых имеет структуру показанную на рисунке 2.

Интенсивность потока заявок, поступающих в систему, формирует технологическая ячейка $ТЯ_{i-1}$ с присоединенными к ней слева остальными частями АЛ. Интенсивность потока обслуживания заявок, находящихся в i -м накопителе (H_i), формирует $ТЯ_i$ с частями линии, присоединенными к ней справа. При наличии частых переналадок линии на выпуск изделия новой номенклатуры возникает задача построения математических моделей накопителей, при помощи которых можно анализировать параметры их функционирования как в стационарных, так и в переходных режимах работы.

В любой СМО процессы поступления и обслуживания заявок в зависимости от времени являются дискретными вероятностными процессами со скачками. Для оценки работы системы в случае, когда система находится в условиях большой нагрузки, допустимо использовать непрерывные вероятностные приближения и заменить эти скачки

сглаженными непрерывными временными функциями (подобный подход подробно изложен в [2]).

Так, известно, что при использовании приближения первого порядка, количество требований, находящихся в системе в любой момент времени t , равно

$$L(t) = \bar{\alpha}(t) - \bar{\delta}(t),$$

где $\bar{\alpha}(t)$ - среднее количество поступлений на интервале $\{0, t\}$; $\bar{\delta}(t)$ - среднее количество уходов на интервале $\{0, t\}$; $L(0) = 0$.

Данное приближение можно усовершенствовать, вводя для рассматриваемых процессов центральные моменты второго и высших порядков. При этом процесс, протекающий в системе, аппроксимируется процессом с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний $X(t)$. В [2] рассмотрены дифференциальные уравнения в частных производных для $X(t)$ и показано, что функция распределения (ФР) длины очереди в СМО является решением уравнения, известного как уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [a_n(x, t) F(x, t)], \quad (1)$$

где $F(x, t)$ – функция распределения числа заявок в системе; $a_n(x, t)$ – инфинитезимальные n -е моменты распределения количества заявок.

Приближение второго порядка уравнения (1) является диффузионным уравнением или прямым уравнением Колмогорова. Для проведения более точного анализа параметров рассматриваемой СМО предлагается использовать три первых члена ряда, стоящего в правой части уравнения Фоккера–Планка. В этом случае система аппроксимируется приближением третьего порядка, а уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [a_1(x, t) F(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [a_2(x, t) F(x, t)] - \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} [a_3(x, t) F(x, t)], \quad (2)$$

где $m(x, t) = a_1$, $\sigma^2(x, t) = a_2$, $a_3(x, t) = a_3$ – инфинитезимальные среднее, дисперсия и третий центральный момент распределения количества заявок в системе соответственно

Предполагается, что величины a_n ($n = \overline{1, 3}$) являются постоянными (формулы для их определения приводятся в работах [1, 3]), тогда уравнение (2) можно переписать следующим образом:

$$-\frac{a_3}{6} \frac{d^3 F(x,t)}{dx^3} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2 F(x,t)}{dx^2} - m \frac{dF(x,t)}{dx} = \frac{dF(x,t)}{dt}. \quad (3)$$

Для получения частных решений (3) вводятся следующие граничные условия

$$\begin{cases} F(0,t) = 0; \\ F(K,t) = 1; \\ F'(0,t) = J_0 \end{cases} \quad (4)$$

и начальное условие

$$F(x,0) = F_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < x_0; \\ 1, & x_0 \leq x < K, \end{cases} \quad (5)$$

которые выбираются, исходя из определения функции распределения, и по своему физическому смыслу соответствуют функционированию межоперационных накопителей (x_0 - количество заявок в системе в момент времени $t = 0$, K - емкость накопителя) [3].

Один из вариантов решения рассматриваемого уравнения приведен в [3], где для нахождения искомой функции использовался операционный метод. Здесь при сохранении общей методологии предлагается решить уравнение (3) при следующих допущениях:

1) третье краевое условие в (4) не зависит от времени и является постоянной величиной, равной [3]

$$J_0 = -\frac{2m}{\sigma^2(1 - e^{2mK/\sigma^2})};$$

2) начальное условие (5) может быть разложено в ряд Фурье на интервале $[0, K]$:

$$F_0(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(b_n x), \quad (6)$$

$$\text{где } a_0 = \frac{K - x_0}{K}; \quad a_n = -\frac{2 \sin(\frac{\pi n x_0}{K})}{\pi n}; \quad b_n = \frac{\pi n}{K}.$$

Предполагая, что искомая функция распределения является оригиналом и производя преобразования по Лапласу уравнения (3) и краевых условий (4) по переменной t (считая независимую переменную x параметром), получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^3 f(x, p)}{dx^3} - \frac{3\sigma^2}{a_3} \frac{d^2 f(x, p)}{dx^2} + \frac{6m}{a_3} \frac{df(x, p)}{dx} + \frac{6p}{a_3} f(x, p) = \frac{6}{a_3} F_0(x), \quad (7)$$

с краевыми условиями

$$f(0, p) = 0; \quad f(K, p) = \frac{1}{p}; \quad f'_x(0, p) = \frac{J_0}{p}, \quad (8)$$

где $f(x, p)$ – изображение функции $F(x, t)$.

Общим решением (7) без правой части является функция

$$\bar{f}(x, p) = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x} + C_3 e^{s_3 x},$$

где $s_1 = s_1(p)$, $s_2 = s_2(p)$, $s_3 = s_3(p)$ – корни характеристического уравнения

$$s^3 - \frac{3\sigma^2}{a_3} s^2 + \frac{6m}{a_3} s + \frac{6p}{a_3} = 0,$$

равные $s_1(p) = u(p) + v(p) + s_0$; $s_{2,3}(p) = -\frac{u(p) + v(p)}{2} \pm i\sqrt{3} \frac{u(p) - v(p)}{2} + s_0$,

где $u(p) = \sqrt[3]{-\frac{E(p)}{2} + \sqrt{D(p)}}$; $v(p) = \sqrt[3]{-\frac{E(p)}{2} - \sqrt{D(p)}}$; $s_0 = \frac{\sigma^2}{a_3}$;

$$D(p) = \left(\frac{E(p)}{2}\right)^2 + \left(\frac{G}{3}\right)^3; \quad G = \frac{3(2ma_3 - \sigma^4)}{a_3^2}; \quad E(p) = \frac{2\sigma^2(3ma_3 - \sigma^4)}{a_3^3} + \frac{6p}{a_3}.$$

Частное решение (7) в соответствии с видом функции $F_0(x)$ определяется следующим образом:

$$f^*(x, p) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(b_n x) + d_n \sin(b_n x). \quad (9)$$

Коэффициенты $c_0(p)$, $c_n(p)$, $d_n(p)$ являются решениями системы уравнений, получаемой при подстановке (6) и (9) в (7), и определяются соотношениями

$$c_0(p) = \frac{K - x_0}{pK}; \quad c_n(p) = \frac{a_n(p - \alpha_n)}{(p - (\alpha_n + i\beta_n))(p - (\alpha_n - i\beta_n))};$$

$$d_n(p) = \frac{-\beta_n a_n}{(p - (\alpha_n + i\beta_n))(p - (\alpha_n - i\beta_n))},$$

где $\alpha_n = -\frac{\sigma^2 b_n^2}{2}$; $\beta_n = \frac{b_n^3 a_3}{6} - b_n m$.

Общее решение уравнения (7) имеет вид:

$$f(x, p) = \bar{f}(x, p) + f^*(x, p). \quad (10)$$

Неизвестные коэффициенты C_i ($i = \overline{1,3}$) определяются из системы уравнений, получаемых в результате подстановки в (10) краевых условий

(8). Подставляя выражения, полученные для данных коэффициентов в (10) и проводя алгебраические преобразования, находим:

$$f(x, p) = f_1(x, p) + f_2(x, p) + f_3(x, p) + f_4(x, p) + f_5(x, p) + f_6(x, p) + f_7(x, p), \quad (11)$$

$$\text{где } f_1(x, p) = c_0(p) + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n(p) \cos(b_n x) + d_n(p) \sin(b_n x)]; \quad (12)$$

$$f_2(x, p) = \frac{f_{c1}(x, p)}{pf_z(p)}; \quad f_3(x, p) = J_0 \frac{f_{c2}(x, p)}{pf_z(p)}; \quad (13)$$

$$f_4(x, p) = c_0 \frac{f_{c3}(x, p) - f_{c1}(x, p)}{f_z(p)};$$

$$f_5(x, p) = q_0 \frac{f_{c3}(x, p)}{f_z(p)}; \quad f_6(x, p) = -q_1 \frac{f_{c1}(x, p)}{f_z(p)}; \quad (14)$$

$$f_7(x, p) = -q_2 \frac{f_{c2}(x, p)}{f_z(p)};$$

$$q_0 = q_0(p) = \sum_n c_n(p); \quad q_1 = q_1(p) = \sum_n c_n(p) \cos(b_n K) + d_n(p) \sin(b_n K);$$

$$q_2 = q_2(p) = \sum_n d_n(p) b_n;$$

$$f_z(p) = (s_2 - s_3)e^{s_1 K} - (s_1 - s_3)e^{s_2 K} + (s_1 - s_2)e^{s_3 K};$$

$$f_{c1}(x, p) = (s_2 - s_3)e^{s_1 x} - (s_1 - s_3)e^{s_2 x} + (s_1 - s_2)e^{s_3 x};$$

$$f_{c2}(x, p) = (e^{s_3 K} - e^{s_2 K})e^{s_1 x} - (e^{s_3 K} - e^{s_1 K})e^{s_2 x} + (e^{s_2 K} - e^{s_1 K})e^{s_3 x};$$

$$f_{c3}(x, p) = (s_2 e^{s_3 K} - s_3 e^{s_2 K})e^{s_1 x} - (s_1 e^{s_3 K} - s_3 e^{s_1 K})e^{s_2 x} + (s_1 e^{s_2 K} - s_2 e^{s_1 K})e^{s_3 x}.$$

Оригинал $F(x, t)$ может быть восстановлен при помощи обратного преобразования Лапласа. Выражение (12) представляет собой дробно-рациональную функцию, степень знаменателя которой превосходит степень числителя. Так как точки $p_n = \alpha_n \pm i\beta_n$ являются простыми полюсами слагаемых данной функции, то переход в пространство оригиналов можно совершить, используя формулу

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\psi} \frac{A(p_n)}{B'(p_n)} e^{p_n t}, \quad (15)$$

где $A(p)$, $B(p)$ - числитель и знаменатель дробно-рациональной функции соответственно; p_n - простые полюсы функции; ψ - количество полюсов.

Применяя формулу (15), получаем оригинал рассматриваемой функции

$$F_1(x, t) = \frac{K - x_0}{K} + \sum_n \left[a_n e^{i\alpha_n} \cos(b_n x + \beta_n t) \right]. \quad (16)$$

Рассмотрим остальные слагаемые правой части соотношения (11). Предполагая, что для них выполняются условия второй теоремы разложения, приведенные в [3], оригиналами $f_j(x, p)$ ($j = \overline{(2,7)}$) являются функции, определяемые следующим образом

$$F_j(x, t) = \sum_{(p_k)}^{\infty} \text{Res} \{ f_j(x, p) \} e^{p_k t}, \quad j = \overline{(2,7)}, \quad (17)$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функций $f_j(x, p)$.

Рассмотрим нули знаменателей соотношений (13), (14). Точка $p = 0$ является простым полюсом функций (13). Обозначим

$$L^{-1}(f_2(x, p)|_{p=0}) = F_1(x); \quad L^{-1}(f_3(x, p)|_{p=0}) = F_2(x); \quad L^{-1}(f_3(x, p)|_{p=0}) = F_3(x),$$

где L^{-1} - оператор обратного преобразования Лапласа.

Оригиналы $f_j(x, p)$ ($j = \overline{(2,4)}$) в соответствии с формулой (17) равны

$$F_1(x) = \frac{f_{c1}(x, 0)}{f_z(0)}; \quad F_2(x) = J_0 \frac{f_{c2}(x, 0)}{f_z(0)}; \quad F_3(x) = c'_0 \frac{f_{c3}(x, 0) - f_{c1}(x, 0)}{f_z(0)}, \quad (18)$$

где $c'_0 = \frac{K - x_0}{K}$. Здесь и далее при определении оригиналов используются подобные обозначения ввиду ограниченного объема статьи.

Рассмотрим выражения (14). Получим оригиналы $f_j(x, p)$ ($j = \overline{(5,7)}$), определяемые как сумма вычетов, взятых в простых полюсах $p_n = \alpha_n \pm i\beta_n$. Обозначим

$$L^{-1}(f_5(x, p)|_{p_n = \alpha_n \pm i\beta_n}) = F_2(x, t); \quad L^{-1}(f_6(x, p)|_{p_n = \alpha_n \pm i\beta_n}) = F_3(x, t);$$

$$L^{-1}(f_7(x, p)|_{p_n = \alpha_n \pm i\beta_n}) = F_4(x, t),$$

тогда оригиналы рассматриваемых функций будут определяться соотношениями

$$F_2(x, t) = \sum_n \frac{a_n}{2} \left[e^{(\alpha_n + i\beta_n)t} \left[\frac{f_{c3}(x, p)}{f_z(p)} \right]_{p_n = \alpha_n + i\beta_n} + e^{(\alpha_n - i\beta_n)t} \left[\frac{f_{c3}(x, p)}{f_z(p)} \right]_{p_n = \alpha_n - i\beta_n} \right]; \quad (19)$$

$$F_3(x, t) = -\sum_n \frac{a_n}{2} \left[e^{(\alpha_n + i\beta_n)t + i b_n K} \left[\frac{f_{c1}(x, p)}{f_z(p)} \right]_{p_n = \alpha_n + i\beta_n} + e^{(\alpha_n - i\beta_n)t - i b_n K} \left[\frac{f_{c1}(x, p)}{f_z(p)} \right]_{p_n = \alpha_n - i\beta_n} \right]; \quad (20)$$

$$F_4(x, t) = \sum_n \frac{ia_n b_n}{2} \left[e^{(\alpha_n - i\beta_n)t} \left[\frac{f_{c2}(x, p)}{f_z(p)} \right]_{p_n = \alpha_n - i\beta_n} - e^{(\alpha_n + i\beta_n)t} \left[\frac{f_{c2}(x, p)}{f_z(p)} \right]_{p_n = \alpha_n + i\beta_n} \right]. \quad (21)$$

Последним шагом решения является переход в пространство оригиналов $f_j(x, p)$ ($j = \overline{2, 7}$), определяемый суммой вычетов, взятых в особых точках, являющихся нулями трансцендентного уравнения

$$f_z(p) = 0. \quad (22)$$

Получение точных аналитических выражений для определения корней этого уравнения затруднительно. В работе [3] предлагалось определять решения (22) как корни полинома, получающегося при разложении функции $f_z(p)$ в степенной ряд с конечным числом членов.

Здесь предлагается воспользоваться численными методами поиска корней, например, методом секущих, алгоритм которого реализован на ЭВМ в математической системе MathCad (функция root). Рассмотрим результаты отыскания корней трансцендентного уравнения

$$(s_2(p) - s_3(p))e^{s_1(p)K} - (s_1(p) - s_3(p))e^{s_2(p)K} + (s_1(p) - s_2(p))e^{s_3(p)K} = 0 \quad (23)$$

с параметрами

$$m=2; \sigma^2=23,5; a_3=-4,2; K=20,$$

входящими в уравнение (23) и функции $s_1(p)$, $s_2(p)$, $s_3(p)$. Предполагается, что аргумент p функции $f_z(p)$ не содержит комплексной части. Начальные приближения, используемые при поиске корней, могут быть определены по графику функции $f_z(p)$, показанному на рисунке 3.

Результаты поиска первых пяти корней уравнения (23) сведены в таблицу 1.

Таблица 1 – Результаты поиска корней уравнения $f_z(p) = 0$

Начальное приближение, p_0	Корни уравнения, s_g	Проверка решения, $f_z(s_g)$
------------------------------	------------------------	------------------------------

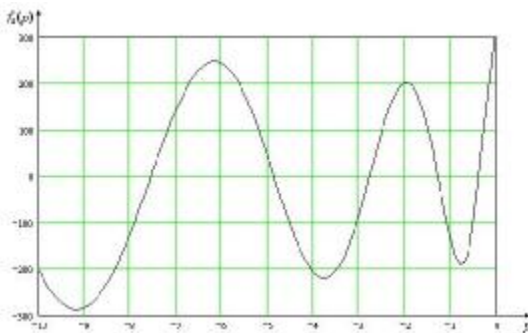


Рисунок 3 – График зависимости $f_z(p)$

-0,5	-0,38158681	$-2,251861 \cdot 10^{-11}$
-1,5	-1,27374308	$1,760514 \cdot 10^{-11}$
-2,5	-2,76191166	$-3,650083 \cdot 10^{-12}$
-5	-4,84795246	$1,211652 \cdot 10^{-11}$
-7,5	-7,5344647	$7,291949 \cdot 10^{-12}$

В результате поиска корней трансцендентного уравнения указанным выше методом при различных параметрах, входящих в функции (23), установлено:

1) корни уравнения являются действительными (даже при использовании при поиске начальных приближений, содержащих комплексные части);

2) корни уравнения лежат в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} p < 0$) и являются однократными.

Следовательно точки $p = s_g$ являются простыми полюсами выражений (13), (14) и обращение $f_j(x, p)$ ($j = \overline{(2, 7)}$) может производиться по формулам (15), (17). Введем обозначения $L^{-1}(f_j(x, p))\big|_{p=s_g} = F_{j+3}(x, t)$, $j = \overline{(2, 7)}$, $\frac{df_j(p)}{dp} = f'(p)$. Оригиналами выражений (13), (14), определяемыми как сумма вычетов, взятых в простых полюсах $p = s_g$, служат функции

$$F_5(x, t) = \sum_{g=1}^{\infty} e^{s_g t} \frac{f_{c1}(x, s_g)}{s_g f'(s_g)}; \quad F_6(x, t) = J_0 \sum_{g=1}^{\infty} e^{s_g t} \frac{f_{c2}(x, s_g)}{s_g f'(s_g)}; \quad (24)$$

$$F_7(x, t) = \frac{K - x_0}{K} \sum_{g=1}^{\infty} e^{s_g t} \frac{f_{c3}(x, s_g) - f_{c1}(x, s_g)}{s_g f'(s_g)}; \quad (25)$$

$$F_8(x, t) = \sum_{g=1}^{\infty} e^{s_g t} \left[\frac{f_{c3}(x, s_g)}{f'(s_g)} \sum_n c_n(s_g) \right]; \quad (26)$$

$$F_9(x, t) = - \sum_{g=1}^{\infty} e^{s_g t} \left[\frac{f_{c1}(x, s_g)}{f'(s_g)} \sum_n (c_n(s_g) \cos(b_n K) + d_n(s_g) \sin(b_n K)) \right]; \quad (27)$$

$$F_{10}(x, t) = - \sum_{g=1}^{\infty} e^{s_g t} \left[\frac{f_{c2}(x, s_g)}{f'(s_g)} \sum_n d_n(s_g) b_n \right], \quad (28)$$

где $c_n(s_g) = \frac{a_n(s_g - \alpha_n)}{(s_g - (\alpha_n + i\beta_n))(s_g - (\alpha_n - i\beta_n))}$;

$d_n(s_g) = \frac{-\beta_n a_n}{(s_g - (\alpha_n + i\beta_n))(s_g - (\alpha_n - i\beta_n))}$, ζ - конечное число корней трансцендентного уравнения (22), определяемых численным методом.

Окончательным результатом решения уравнения (3) является сумма функций, определяемых соотношениями (16), (18) - (21), (24) - (28). Подстановкой точных аналитических выражений (16), (18) в (3) можно показать, что они являются решениями этого уравнения. Исходя из этого, можно сделать вывод о том, что обращение преобразования Лапласа произведено правильно. Среднее число заявок в очереди СМО определяется по формуле

$$\bar{L}_{оч} = \int_0^K (1 - F(x, t)) dx. \quad (29)$$

Теперь можно определить функцию распределения временного резерва накопителя ξ , являющегося случайной величиной (СВ). Для нахождения указанной функции (обозначим ее $R(t)$) необходимо поставить вспомогательную задачу, исходными данными для решения которой являются:

- 1) длина очереди в накопителе – СВ L с ФР $F(x, t)$ (или плотностью $f(x, t)$);
- 2) время обслуживания единицы продукции технологической ячейкой $ТЯ_{i-1}$ – СВ τ_{i-1} с ФР $F_{i-1}(t)$ (или плотностью $f_{i-1}(t)$);
- 3) время обслуживания единицы продукции технологической ячейкой $ТЯ_i$ – СВ τ_i с ФР $F_i(t)$ (или плотностью $f_i(t)$);
- 4) емкость накопителя - K мест.

Рассмотрим, например, сопряженный участок. При отказе $ТЯ_{i-1}$ накопитель участка будет работать на выдачу продукции, при этом резерв времени составляет

$$\xi = L\tau_i. \quad (30)$$

Предположим, что величины L и τ_i образуют систему случайных величин. В общем случае по законам распределения величин, входящих в

систему, нельзя восстановить закон распределения системы в целом. Функцию распределения $R(t)$ можно определить таким образом лишь в частном случае – когда СВ L и τ_i являются независимыми. На самом деле указанные величины связаны очевидной вероятностной (и функциональной) зависимостью: при фиксированном времени поступления заявок в накопитель очередь в нем будет изменяться прямо пропорционально величине τ_i . Подобная задача была рассмотрена в [4], где для ее решения принималось допущение о том, что времена обслуживания единицы продукции технологическими ячейками $ТЯ_{i-1}$ и $ТЯ_i$ являются постоянными величинами, равными математическим ожиданиям соответствующих СВ. В данной работе рассматривается второй вариант решения и принимается следующее: длина очереди в накопителе H_i является неслучайной величиной, равной математическому ожиданию СВ L , а указанные выше времена являются величинами стохастическими. В этом случае формула (30) примет вид

$$\xi = \bar{L}_i(t)\tau_i = \varphi(\tau_i),$$

где $\bar{L}_i(t)$ – математическое ожидание длины очереди в накопителе H_i , определяемое в конкретный момент времени t по формуле (29). Так как зависимость $\xi = \varphi(\tau_i)$ является монотонной функцией, то плотность распределения СВ ξ можно определить по формуле для функции случайной величины

$$r(\xi) = |\psi'(\xi)| f_i(\psi(\xi)),$$

где ψ – функция обратная по отношению к φ , $\psi(\xi) = \frac{\xi}{\bar{L}_i(t)}$. В этом случае

$$\psi'(\xi) = \frac{1}{\bar{L}_i(t)}, \text{ тогда}$$

$$r(\xi) = \left| \frac{1}{\bar{L}_i(t)} \right| f_i \left(\frac{\xi}{\bar{L}_i(t)} \right). \quad (31)$$

Аналогично для основного участка можно записать

$$r(\xi) = \left| \frac{1}{K - \bar{L}_i(t)} \right| f_i \left(\frac{\xi}{K - \bar{L}_i(t)} \right). \quad (32)$$

По найденным плотностям распределения (31), (32) функцию $R(t)$ можно определить по формуле

$$R(t) = \int_0^t r(\xi) d\xi.$$

Полученные результаты могут быть использованы при построении математических моделей участков асинхронных АЛ (приведенных в [4]) и полумарковских итерационных моделей однопоточных линий в целом.

Библиография

1 Копп В.Я. Итерационный подход при построении полумарковских моделей асинхронных автоматизированных линий / В.Я.Копп // Вестн. СевГТУ: Сб. науч. тр. — Севастополь, 2000. — Вып. 27. — С. 73 – 80.

2 Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями: Пер. с англ. /Л. Клейнрок. — М.: Мир, 1979. — 600 с.

3 Филипович О.В. Моделирование накопительных элементов автоматизированных линий /О.В.Филипович, В.Я.Копп, Ф.Д.Пряшников // Оптимизация производств. процессов: Сб. науч. тр. — Севастополь, 2001. — Вып. 4. — С. 8 – 20.

4 Филипович О.В. Моделирование участков автоматизированных линий с учетом стохастического характера межоперационных заделов / О.В.Филипович, В.Я.Копп, Л.В.Галкина // Сб. науч. тр. СИЯЭиП. — Севастополь: СИЯЭиП, 2001. — Вып. 5. — С. 213 – 217.

Поступила в редакцию 10.12.2001 г.