

УДК 681.3

ПРИМЕНЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СИНТЕЗА МНОГОМЕРНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Белоконь И. В., Дубовик С. А.

Рассмотрена процедура синтеза регулятора в многомерной системе, содержащей при производных малые параметры.

Проблема синтеза регуляторов является одной из центральных в теории автоматического регулирования. Для решения этой проблемы в статье используется приведение системы к сингулярно возмущенной канонической форме [1]. Эта форма позволяет осуществить декомпозицию системы на медленные и быстрые подсистемы и таким образом упростить процедуру синтеза.

В качестве примера будем рассматривать двухмассовую электромеханическую систему, движение которой описывается дифференциальным уравнением 5-го порядка

$$\frac{d^5 \varphi}{dt^5} + \sum_{s=0}^4 a_s \varphi^{(s)} = b_0 u, \quad (1)$$

где j - угол поворота вала нагрузки.

Приведем дифференциальное уравнение (1) к системе дифференциальных уравнений, записанной в нормальной форме Коши:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= x_5(t) \\ \dot{x}_5(t) &= -a_4 x_5(t) - a_3 x_4(t) - a_2 x_3(t) - a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + b_0 u(t) \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Используя векторно-матричные обозначения, запишем систему (2) в виде

$$\dot{X} = AX + bu, \quad (3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5]^T,$$

где A – матрица коэффициентов при переменных состояния, b – вектор коэффициентов при управлении, X – вектор переменных состояния

Многомерные системы обычно оказываются сингулярно возмущенными, т.е. содержат малые параметры при старшей производной [2]. В случае одного такого параметра λ все n корней характеристического полинома $\tilde{P}_n(s)$ с коэффициентами $D = \{d_0, d_1, \dots, d_{n-1}\}$ разбиваются на l больших и m малых по абсолютной величине, $n = m + l$. Последнее можно представить так, что

$$d_i = \begin{cases} \lambda^{-l} a_i, & 0 \leq i \leq m, \\ \lambda^{-(l-(i-m))} a_i, & m < i < n, \end{cases}$$

где a_i регулярным образом зависит от λ . Это следует из канонического разложения полинома на множители. В более общем случае в таком разложении можно выделить k групп ($k \geq 2$) корней одного порядка

$$\tilde{P}_n(s) = \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{j=0}^{n_i} (s - \lambda^{-i} a_{ij}) = s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_0,$$

что позволяет представить матрицу $\hat{A} = A + bD$ замкнутой системы в следующем виде [1]

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} J_0 & E_0 \\ \lambda^{-2} M_0 & \lambda^{-2} M_1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_{00} & d_{01} & d_{02} \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ d_{10} & d_{11} \end{bmatrix},$$

причем $d_i = \{d_{i0}, d_{i1}, \dots, d_{i(n_i-1)}\}$ - строка коэффициентов полинома, входящих в группу i -го порядка (т.е. входящих в одночлены, содержащие множитель λ^{-i}), которую будем называть i -ым блоком полинома $\tilde{P}_n(s)$.

Матрица $\tilde{A}$ в (4) подобна матрице

$$\tilde{G} = \tilde{A} + \tilde{b}D, \quad (5)$$

следующего вида [1]

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} J_0 & E_0 \\ 0 & J_1/\lambda \end{bmatrix}, \\ \tilde{b}^T &= (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \lambda^{-1}), \\ D &= (d_{00} \quad d_{01} \quad d_{02} \quad d_1 \quad d_{11}), \end{aligned}$$

где

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вариант (5) называется многочастотной (канонической) схемой сингулярных возмущений. Запишем уравнение (3) в замкнутой форме с матрицей (5):

$$\dot{\tilde{X}} = \tilde{G}\tilde{X}. \quad (6)$$

Таким образом, вместо системы 5-го порядка имеем две системы меньшего порядка. Для них можно указать эталонные характеристические полиномы. Согласно теореме Климушева-Красовского [3] данная процедура позволяет по известным эталонным полиномам судить об устойчивости всей системы. В качестве эталонных полиномов могут служить следующие

$$P_1(s) = (s^2 + 2hs + 1)(s + 0.1),$$

$$P_2(s) = (s^2 + 2hs + 1),$$

где $P_1(s)$ характеризует медленные переменные, $P_2(s)$ – быстрые переменные.

Используя теорему, приведенную в [1], получим способ восстановления блоков d_i по эталонным полиномам f_i :

$$d_{k-i} = (-1)^{i-1} f_{k-i} \prod_{j=1}^{i-1} f_{(k-j)0}, \quad i=1,2,\dots,k-1. \quad (7)$$

Применим формулу (7) к рассматриваемому примеру. В результате этого при $h = 0,705$ получим матрицу D вида

$$D = (-0,1 \ -1,141 \ -1,51 \ -1 \ -1,41).$$

Промоделируем систему (6) с учетом заданных параметров. На рисунке 1 показан результат моделирования системы при начальных

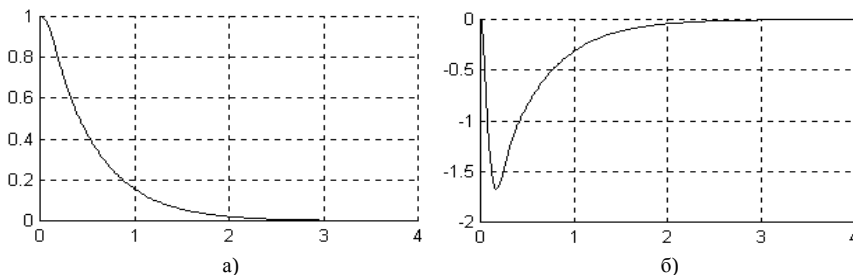


Рисунок 1 - Графики собственного движения системы:
а) – по первой координате б) – по второй координате

условиях $\tilde{x}_0 = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$.

Графики, изображенные на рисунке 1, удовлетворяют заданным требованиям качества и устойчивости

Библиография

1 Дубовик С. А. Синтез сингулярно возмущенных систем на основе канонических представлений / С.А. Дубовик // Вестн. СевГТУ: Сб. науч. тр. — Севастополь, 1998. — Вып. 14. — С. 68 – 72.

2 Васильева А. Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов — М.: Наука, 1973. — 272 с.

3 Климушев А. И. Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных / А.И.Климушев, Н.Н.Красовский // ПИММ. — 1961. — Т. 25. — № 4. — С. 680 – 690.

4 Крутько П. Д. Алгоритмы управления автоматических систем высокой динамической точности / П.Д. Крутько, Г.А.Чхеидзе // Изв. АН СССР. Сер. Техн. киберн. 1991. — № 4. — С. 13 – 35.

Поступила в редакцию 12.12.2001 г.