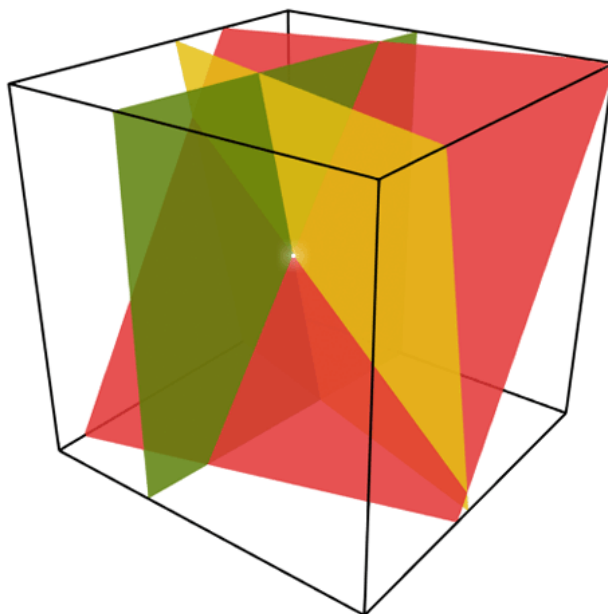


С.А. Чернявская
Л.В. Третьякова
В.Г. Царёв

Э Л Е М Е Н Т Ы ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебно-методическое пособие



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

С.А. Чернявская, Л.В. Третьякова, В.Г. Царёв

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебно-методическое пособие

к проведению практических занятий по высшей математике
для студентов технических и естественно-научных специальностей

Севастополь
СевГУ
2024

УДК 512(076.5)
ББК 22.143я73
Ч-408

Р е ц е н з е н т:
О.В. Матузаева – канд. техн. наук

Чернявская С. А.
Ч-408 **Элементы линейной алгебры: методическое пособие к проведению практических занятий по высшей математике для студентов технических и естественно-научных специальностей / С.А. Чернявская, Л.В. Третьякова, В.Г. Царёв; Севастопольский государственный университет. – Севастополь: СевГУ, 2024. – 116 с. – Текст: электронный.**

Разработано преподавателями кафедры «Высшая математика» СевГУ и предназначено для студентов 1-го курса технических и естественно-научных специальностей, выполняющих индивидуальные задания по дисциплине «Высшая математика».

Пособие знакомит читателя с понятиями: матрица, виды матриц, определитель, ранг матрицы, обратная матрица, с системами линейных однородными и неоднородными уравнений второго и методами их решения. В пособии приведено достаточное количество примеров и задач по рассматриваемым темам, приведены варианты индивидуальных заданий по теме «Элементы линейной алгебры». Для студентов, желающих расширить свой кругозор знаний по рассматриваемой теме, в конце пособия приводится список литературы.

УДК 512(076.5)
ББК 22.143я73

Рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании кафедры «Высшая математика», протокол № 9 от 26 апреля 2024 года.

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2024

СОДЕРЖАНИЕ

1. Основные сведения из теории матриц	4
2. Основные действия над матрицами	7
3. Определители и их свойства	28
4. Обратная матрица и ее построение	47
5. Ранг матрицы и его вычисление	58
6. Системы линейных алгебраических уравнений	66
7. Критерий совместности линейных систем	78
8. Теорема о числе решений совместных систем	80
9. Решение линейных систем методом Гаусса (Методом исключения неизвестных)	88
10. Однородные системы линейных уравнений	97
11. Однородные системы двух линейных уравнений с тремя неизвестными	98
Варианты индивидуального задания	103
Литература	116

1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МАТРИЦ

Определение. Прямоугольной матрицей называется совокупность mn чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов.

Матрицы записываются в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, сокращенно, $A = (a_{ij})$,

где $i = \overline{1, m}$ (т.е. $i = 1, 2, 3, \dots, m$); $j = \overline{1, n}$ (т.е. $j = 1, 2, 3, \dots, n$), либо

$$A = \left\| \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\|$$

или, сокращенно, $A = \|a_{ij}\|$, где $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$.

Для читателя, знакомого с программированием, заметим, что матрица — это в точности то же, что и двумерный массив.

Числа a_{ij} , составляющие матрицу, называются ее элементами.

Индекс i указывает номер строки, j — номер столбца, на пересечении которых находится рассматриваемый элемент. Например, элемент a_{ij} принадлежит 2-й строке и 3-му столбцу.

Матрица, имеющая m строк и n столбцов, называется матрицей размера mn или типа $m \times n$.

Так $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ — матрица размера 2×3 или B — матрица порядка 2×3 (два на три). Элемент $b_{23} = 5$ стоит на пересечении 2-ой строки и 3-го столбца.

Все элементы одной и той же строки имеют одинаковый первый индекс, а все элементы одного столбца — одинаковый второй индекс. Так, третья строка матрицы A_{mn} состоит из элементов $a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots, a_{3n}$.

Определение. Две матрицы, имеющие одинаковое количество (m) строк и одинаковое количество (n) столбцов, называются матрицами одинакового типа или одного размера.

Например, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 7 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & -8 & 1 & 11 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 14 & 3 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Здесь матрицы A и B размера 2×5 .

Определение. Две матрицы одного размера называются равными, если попарно равны, их элементы, стоящие на одинаковых местах.

То есть, если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, где $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$, то $A = B$, когда $a_{ij} = b_{ij}$ при всех рассматриваемых i и j .

Определение. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой и обозначается буквой O , т.е. например:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется квадратной.

Квадратную матрицу из n строк и n столбцов называют матрицей n -го порядка, число n – порядком матрицы. Очевидно, что ранее записанная нулевая матрица – квадратная 3-го порядка.

Совокупность элементов с одинаковыми индексами $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, образуют главную диагональ матрицы, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ – побочную.

Например, у квадратной матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

на главной диагонали стоят элементы $a_{11} = 4$, $a_{22} = 0$, $a_{33} = -3$, а на побочной $a_{13} = 0$, $a_{22} = 0$, $a_{31} = 3$.

У прямоугольной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$

главная диагональ – a_{11}, a_{22}, a_{33} .

Определение. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется диагональной.

Такие матрицы записываются в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Диагональная матрица, у которой отличные от нуля элементы равны между собой, называется скалярной.

Скалярные матрицы имеют вид

$$S = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

Определение. Диагональная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, называется единичной и обозначается через E .

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

В матричном исчислении единичная и нулевая матрицы играют аналогичную роль, той какую в арифметике играют числа 1 и 0.

Определение. Квадратная матрица называется треугольной, если все элементы, стоящие выше (или ниже) главной диагонали, равны нулю.

При этом матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

где $a_{ij} = 0$, когда $i > j$, называется правой (или верхней) треугольной матрицей, а матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

где $a_{ij} = 0$, когда $i < j$, называется левой (или нижней) треугольной матрицей.

Определение. Матрица, состоящая только из одной строки или только из одного столбца, называется, соответственно, матрицей-строкой и матрицей-столбцом.

$A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$ – матрица-строка;

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix} \text{ – матрица-столбец.}$$

Матрицу-строку называют еще и вектор-строкой; матрицу-столбец – вектор-столбцом.

Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом. Иначе говоря, любое число можно рассматривать как матрицу размера 1×1 .

2. ОСНОВНЫЕ ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

2.1. Сложение матриц

Определение. Суммой двух матриц A и B одного и того же размера называется третья матрица C того же размера, у которой элементы равны суммам соответствующих элементов матриц A и B .

То есть, если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, где $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$, то $C = A + B$, когда $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ при всех рассматриваемых i и j .

Операция составления суммы матриц называется сложением этих матриц.

Пример.

Найти сумму матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 3+4 & -1-2 & 0+3 & -7+1 \\ 2-1 & 1+0 & -1-1 & 9+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Правило сложения двух матриц обобщается на случай любого конечного числа слагаемых матриц.

Определение. Разностью двух матриц A и B одного и того же размера называется третья матрица C того же размера, у которой элементы равны разностям соответствующих элементов матриц A и B .

То есть, если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, где $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$,
то $C = A - B$, когда $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ при всех i и j .

Пример.

Найти разность матриц

$$A = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$C = A - B = \begin{pmatrix} 7 - (-4) \\ (-3) - 3 \\ 0 - 8 \\ 11 - 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Сложение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A + B = B + A$ (переместительный или коммутативный закон).
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (сочетательный или ассоциативный закон).
3. $A + 0 = A$, где 0 – нулевая матрица.
4. $A - A = 0$.

2.2. Умножение матрицы на число

Определение. Произведением матрицы A на число a – называется матрица C , у которой элементы есть соответствующие элементы матрицы A , умноженные на число a .

То есть, если $A = (a_{ij})$, $C = (c_{ij})$, где $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$,
то $C = a \cdot A$, и $c_{ij} = a \cdot a_{ij}$ при всех i и j .

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 17 \\ 4 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad a = -\frac{1}{2}.$$

Найти $C = a \cdot A$.

Решение

$$C = a \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-\frac{1}{2}) & (-2) \cdot (-\frac{1}{2}) \\ (-1) \cdot (-\frac{1}{2}) & 17 \cdot (-\frac{1}{2}) \\ 4 \cdot (-\frac{1}{2}) & 3 \cdot (-\frac{1}{2}) \\ 0 \cdot (-\frac{1}{2}) & (-8) \cdot (-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{17}{2} \\ -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Из определения произведения матрицы на число вытекают следующие его свойства:

1. $1 \cdot A = A$.
2. $0 \cdot A = 0$.
3. $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$.
4. $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$.
5. $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$.

Здесь A и B – матрицы одного размера, a и b – числа.

2.3. Умножение матриц

Произведение матрицы A на матрицу B определяется в предположении, что число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B .

Пусть даны матрица A размера $m \times n$ и матрица B размера $n \times p$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}.$$

Определение. Произведением двух матриц A и B , взятых в указанном порядке, называется третья матрица C , у которой элементы c_{ij} определяются равенством

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj},$$

где $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, p}$.

Т. е. элемент i – той строки и j – того столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i – той строки матрицы A на соответствующие элементы j – того столбца матрицы B .

Произведение двух матриц есть матрица, число строк которой равно числу строк первой, а число столбцов равно числу столбцов второй из перемножаемых матриц. Произведение матриц A и B обозначается $A \cdot B$ или AB . Операция получения произведения матриц называется их умножением.

Пример

Найти произведение матриц $A \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение

Размер матрицы A есть 3×3 , B – 3×2 , следовательно, умножение матрицы A на матрицу B возможно.

Размер матрицы произведения $C = A \cdot B$ будет 3×2 , т. е.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}.$$

Находим элементы матрицы произведения C :

$$c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 8;$$

$$c_{12} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) = 5;$$

$$c_{21} = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 2;$$

$$c_{22} = 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 + 4 \cdot (-3) = -17;$$

$$c_{31} = 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 10;$$

$$c_{32} = 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-3) = 27.$$

Отсюда

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & -17 \\ 10 & 27 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
2. $a \cdot (B \cdot C) = (a \cdot B) \cdot C = B \cdot (a \cdot C)$.
3. $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$.
4. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Здесь A , B и C – матрицы, a – число. При этом предполагается, что все произведения матриц существуют.

В общем случае произведение двух матриц зависит от порядка сомножителей, т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$, а это значит, произведение матриц неперестановочно или некоммутативно. Более того, может случиться, что произведение $A \cdot B$ существует, но $B \cdot A$ – нет (и наоборот).

Например, пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & 17 \\ 1 & -10 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 12 \\ 5 & 9 & 0 \\ -3 & 1 & 8 \\ 0 & 7 & 19 \end{pmatrix}.$$

Размер A есть 2×4 , размер B есть 4×3 , следовательно, произведение $A \cdot B$ существует, но $B \cdot A$ – нет.

Если матрицы A и B квадратные одного и того же размера, то произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ всегда существуют.

Определение. Две матрицы A и B , для которых выполняется равенство $A \cdot B = B \cdot A$, называются перестановочными или коммутирующими.

Единичная матрица перестановочна с любой квадратной матрицей A её порядка, при этом $A \cdot E = E \cdot A = A$.

2.4. Транспонирование матриц

Пусть имеем произвольную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица A' (A^T), полученная из данной A путем замены всех её строк соответствующими столбцами, называется транспонированной по отношению к матрице A , т.е.

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Свойства транспонированных матриц:

1. Если матрицу A дважды последовательно транспонировать, то она не изменится:

$$(A')' = A'' = A.$$

2. Транспонированная матрица суммы двух матриц равна сумме транспонированных матриц:

$$(A + B)' = A' + B'.$$

3. Транспонированная матрица произведения двух матриц равна произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке:

$$(A \cdot B)' = B' \cdot A'.$$

2.5. Элементарные преобразования матриц Эквивалентные матрицы

К элементарным преобразованиям относятся следующие преобразования матриц:

1. Перестановка двух любых столбцов (или строк).
2. Умножение столбца (или строки) на число, отличное от нуля.

3. Прибавление к столбцу (или строке) линейной комбинации других столбцов (или строк).

Определение. Две матрицы A и B называются эквивалентными, если одна из них получена из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований.

Эквивалентные матрицы A и B обозначаются $A \sim B$. В общем случае эквивалентные матрицы не являются равными.

Замечание. При решении примеров, связанных с элементарными преобразованиями матриц, и в некоторых других случаях удобно пользоваться следующими обозначениями действий, проводимых над строками или столбцами:

а) перестановка двух строк (столбцов) матрицы.

Например, перестановка второй и m -й строк обозначается

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix};$$

б) умножение всех элементов строки (столбца) на число $a \neq 0$.

Например, все элементы 2-й строки умножаются на (-5) :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \times (-5) \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -5a_{21} & -5a_{22} & \dots & -5a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

в) умножение всех элементов строки (столбца) на число и прибавление их к соответствующим элементам другой строки (столбца).

Например, 1-ый столбец умножается на (-2) и прибавляется ко 2-му:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} - 2a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 2a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} - 2a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример

Свести матрицу

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

с помощью элементарных преобразований к верхней треугольной.

Решение:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поменяем местами первую и четвертую строки.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выполним последовательно следующие действия:

- 1) умножим каждый элемент первой строки на (-2) и сложим с каждым соответствующим элементом второй строки;
- 2) умножим элементы первой строки на (-3) и сложим с элементами третьей строки;
- 3) окончательно, умножим первую строку на (2) и сложим с четвертой.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 10 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Поменяем местами второй и четвертый столбцы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & -5 & -2 & 10 \\ 0 & 9 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Выполняя следующие действия:

- 1) умножая вторую строку на (-5) и складывая с третьей строкой;
 - 2) вторую строку, умножая на (9) и складывая с четвертой,
- получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -25 \\ 0 & 0 & -4 & 58 \end{pmatrix}.$$

Окончательно, сложим третью строку, предварительно умноженную на (-2) с четвертой, получим ответ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 108 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Матрицы и действия над ними

№ 1 Получить транспонированную матрицу A' , если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

№ 2 Найти x, y, z , если

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами

Найти сумму матриц:

№ 3 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$

№ 4 $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \\ -5 & 2 & 11 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -7 \end{pmatrix}.$

№ 5 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Найти сумму и разность матриц A и B :

№ 6 $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$

№ 7 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$

№ 8 Найти матрицу $C = 2A - 3B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

№ 9 Выполнить действия:

$$6 \cdot \begin{pmatrix} -7 & 2 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

№ 10 Найти матрицу T , для которой $A + 2T = 3B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

№ 11 Найти матрицу C , для которой $A - 2C = 2B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти x, y, z , если:

$$\text{№ 12} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 13} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

№ 14 Найти x, y, z , и t , если

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot (4 \ 2 \ 0 \ -2) + 8 \cdot (1 \ 1 \ 1 \ 1).$$

Найти x, y из уравнения:

$$\text{№ 15} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3+2y \\ 5-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 16} \quad \begin{pmatrix} 5+3y \\ x+7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x-1 \\ y+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 17} \quad \begin{pmatrix} 2 & x^2 \\ 1 & -4 \\ 5 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 8x \\ 4 & -1 \\ 3 & 0 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -3 \\ 3 & -\frac{9}{2} \\ \frac{13}{2} & 1 \\ -11 & \frac{11}{2} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A представить в виде произведения числа на единичную матрицу:

$$\text{№ 18} \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \quad \text{№ 19} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 20} \quad \text{При каком } \alpha \text{ справедливо равенство}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \cos^2 \alpha & -\sin^2 \alpha \\ 2 & -4 & -1 & -2 \\ -7 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -6 & -1 & \sqrt{2} \\ -4 & 8 & 2 & 4 \\ 14 & -2 & -10 & 0 \end{pmatrix}.$$

№ 21 Над векторами-строками $U = (2 \ -1 \ 2)$, $V = (-1 \ 0 \ 5)$, $W = (1 \ 4 \ 3)$ произвести указанные действия:

- | | |
|------------------|--------------------|
| 1) $2U$; | 4) $2U + V - W$; |
| 2) $-3V$; | 5) $U + 2V + 3W$. |
| 3) $U + V - W$; | |

№ 22 Какое соотношение связывает компоненты векторов U и V , если имеет место равенство $3U - 2V = 0$.

№ 23 Произвести указанные действия над векторами-столбцами

$$U = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

- | | |
|------------------|---------------------|
| 1) $3U$; | 5) $U - V + W$; |
| 2) $-V$; | 6) $3U - 2V + 4W$; |
| 3) $U + 4V$; | 7) $2U - V - 3W$. |
| 4) $U + V + W$; | |

-++

Умножение матриц

Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если:

$$\text{№ 24} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 25} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 11 & 4 & 8 & 3 \\ 9 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 26 } A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, B = (2 \ 3 \ -1).$$

$$\text{№ 27 } A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, B = (0 \ 2 \ -7 \ 3 \ 4).$$

$$\text{№ 28 } A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, B = (2 \ 3 \ -1).$$

$$\text{№ 29 } A = (4 \ 5), B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 30 } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 31 } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 32 } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 33 } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & -5 \\ -2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

№ 34 На изготовление некоторого изделия требуется 5 деталей типа A , 6 деталей – типа B и 2 детали – типа C . Это можно коротко записать матрицей-строкой $(5 \ 6 \ 2)$. Прейскурант цен в рублях на детали этих ти-

пов указан в матрице-столбце $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 1,2 \end{pmatrix}$. Найти произведение строки деталей на

столбец цен. Какой смысл имеет это произведение?

№ 35 При проведении математической олимпиады университета институты выставили следующее количество студентов первых трех курсов, записанное в виде матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 5 & 6 \\ 10 & 14 & 9 & 8 \\ 8 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix},$$

(где первый, второй, третий и четвертый столбцы соответствуют количеству студентов I, II, III и IV институтов, соответственно; а первая, вторая и третья строки – 1-го, 2-го, 3-го курсов, соответственно).

Пусть $T = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ – матрица-строка максимального количества баллов, которые может получить каждый студент соответствующего курса, и пусть

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения $T \cdot A$, $A \cdot B$, $T \cdot A \cdot B$ и T , и объяснить их смысл.

Перемножить матрицы:

№ 36 $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$

№ 37 $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$

№ 38 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

№ 39 $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$

№ 40 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

№ 41 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

№ 42 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & 6 & 3 \\ 7 & 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$$\text{№ 43 } (-1 \ 2 \ 0 \ -3), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 44 } (-3 \ 0 \ 1 \ 1), \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 45 } (13 \ 1 \ 7), \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 46 } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 47 } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 48 } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 49 } \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, (1 \ 2 \ -2 \ 3 \ 4).$$

$$\text{№ 50 } (5 \ 7 \ -2), \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 51 } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 52 } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 53} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \\ 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 54} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -a & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 55} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 56} \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 57} (1 \ 2 \ -2 \ 3 \ 4), \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 58} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 59} (1 \ -2 \ 3 \ 4 \ 0), \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 60} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 61} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 62} \begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 63} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 64} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \\ -16 & -11 & -15 & 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 22 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 65} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 66} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 67} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 68} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 69} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти x и y , если:

$$\text{№ 70} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 71} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 72} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 73 } (x \ y) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = x \text{ и } (x \ y) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = y.$$

$$\text{№ 74 } (x \ y) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \text{ и } (x \ y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = -1.$$

$$\text{№ 75 } \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 76 Из равенства } (-3 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ c & a \end{pmatrix} = (3 \ -7) \text{ найти матрицу } \begin{pmatrix} a & c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 77 Найти } A^2, A^3, A^4, A^6, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 78 Найти } A^2, A^3, \dots, A^n, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Выполнить действия:

№ 79

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2.$$

№ 80

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3.$$

№ 81

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

$$\text{№ 82 } \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^n.$$

$$\text{№ 83 } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5.$$

№ 84 Доказать, что если матрицы A и B перестановочны, то:

$$1) \quad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2;$$

$$2) \quad A^2 - B^2 = (A+B) \cdot (A-B).$$

Найти $f(A)$, если:

$$\text{№ 85 } f(x) = x^2 - 5x + 6, A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 86 } f(x) = x^2 - 5x + 3, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 87 } f(x) = x^2 - x - 1, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 88 } f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5, A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти все матрицы, перестановочные с данной:

$$\text{№ 89 } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad \text{№ 90 } \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}. \quad \text{№ 91 } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

№92 Найти все матрицы 2-го порядка, квадраты которых равны нулевой матрице

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

№ 93 Найти все матрицы 2-го порядка, квадраты которых равны единичной матрице

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

№ 94 Как изменится произведение $A \cdot B$ матриц A и B , если:

- а) переставить i -ю и j -ю строки матрицы A ;
- б) к i -й строке матрицы A прибавить j -ю строку, умноженную на число α ;
- в) переставить i -й и j -й столбцы матрицы B ;
- г) к i -му столбцу матрицы B прибавить j -й столбец, умноженный на число α ?

ОТВЕТЫ

$$\text{№ 1. } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{№ 2. } \quad & x = 2; \\ & y = 1; \\ & z = 0 \end{aligned}$$

$$\text{№ 3. } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 4. } \begin{pmatrix} 9 & 0 & 7 \\ 0 & 9 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 5. } \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 4 & 9 & 9 \\ -4 & 7 & -3 \\ 1 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 6. } A+B+\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 7 \\ 9 & 7 \end{pmatrix};$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$7. \quad A+B+\begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A-B=\begin{pmatrix} -6 & -5 & -7 \\ 8 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8. C = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 & 6 \\ -3 & 10 & -2 & -13 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 9. } \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 & 15 & 33 \\ -3 & 3 & 6 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 10. } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 11. } C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \\ -6 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 12. } \begin{aligned} x &= 5; \\ y &= 5; \\ z &= -2. \end{aligned}$$

$$\text{№ 13. } \begin{aligned} x &= 10; \\ y &= 32; \\ z &= 21. \end{aligned}$$

$$\text{№ 14. } \begin{aligned} x &= 6; \\ y &= 7; \\ z &= 8; \\ t &= 9. \end{aligned}$$

$$\text{№ 15. } \begin{aligned} x &= -1; \\ y &= 3. \end{aligned}$$

$$\text{№ 16. } \begin{aligned} x &= 17; \\ y &= 6. \end{aligned}$$

$$\text{№ 17. } \begin{aligned} x_1 &= -1; \\ x_2 &= -3. \end{aligned}$$

$$\text{№ 20. } a = np + (-1)^n \cdot \frac{p}{4} \dots$$

$$\begin{aligned} &1) (4 \ -2 \ 4); \\ &2) (3 \ 0 \ -15); \\ \text{№ 21. } &3) (0 \ -5 \ 4); \\ &4) (2 \ -6 \ 6); \\ &5) (3 \ 11 \ 21). \end{aligned}$$

$$\text{№ 22. } U_i = \frac{2v_i}{3}.$$

$$\text{№ 23. } 1) \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} -17 \\ 25 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad 4) \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad 5) \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad 6) \begin{pmatrix} 23 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad 7) \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 24. } AB = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 2 \\ 7 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 25. } AB = \begin{pmatrix} 80 \\ 106 \\ 141 \\ 127 \end{pmatrix}; \quad BA \text{ не существует.}$$

$$\text{№ 26. } AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 6 & 9 & -3 \\ -10 & -15 & 5 \end{pmatrix}; \quad BA \text{ не существует.}$$

$$\text{№ 27. } AB = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -21 & 9 & 12 \\ 0 & 8 & -28 & 12 & 16 \\ 0 & -2 & 14 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & -14 & 6 & 8 \end{pmatrix}; \quad BA \text{ не существует.}$$

$$\text{№ 28. } AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 6 & 9 & -3 \\ -10 & -15 & 5 \end{pmatrix}; \quad BA \text{ не существует.}$$

$$\text{№ 29. } AB \text{ не существует; } BA = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ -12 & -15 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 30. } AB = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 4 \\ 26 & 36 & 22 \\ 15 & 26 & -3 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} 24 & 17 & 21 \\ 24 & 6 & 30 \\ 16 & 23 & 23 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 31. } AB \text{ не существует; } BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 13 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 32. } AB = \begin{pmatrix} 10 & -19 & 15 \\ 4 & -12 & 26 \\ 6 & -15 & 19 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 13 & 14 \\ 0 & 6 & 8 \\ -4 & -9 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 33. } AB = \begin{pmatrix} -5 & 27 \\ 22 & -11 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}; \quad BA \text{ не существует.}$$

№ 34. (6, 7) – стоимость всего изделия в рублях.

№ 35. TA – матрица максимального количества баллов, которое может набрать каждый институт:

$$TA = \begin{pmatrix} \text{I инст} & \text{II инст} & \text{III инстит} & \text{IV инстит} \\ 266 & 232 & 161 & 190 \end{pmatrix}.$$

AB – матрица общего количества студентов каждого курса, принявших участие в олимпиаде:

$$AB = \begin{pmatrix} 30 \\ 41 \\ 24 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{1 курса} \\ \text{2 курса} \\ \text{3 курса.} \end{matrix}$$

TAB – максимальное количество баллов, которое могут набрать все студенты, участвующие в олимпиаде: $TAB = (849.)$

$$\text{№ 36. } \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 37. } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 38. } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 39. } \begin{pmatrix} 10 & 22 \\ 2 & 25 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 40. } \begin{pmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 0 & 2 & 16 \\ 0 & 1 & 17 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 41. } \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 42. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & 6 & 3 \\ 7 & 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 43. } (-7). .$$

$$\text{№ 44. } (-2). .$$

$$\text{№ 45. } (92). .$$

$$\text{№ 46. } \left(\frac{-1}{8} \right).$$

$$\text{№ 47. } \left(\frac{2}{-2} \right).$$

$$\text{№ 48. } \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 3 \\ -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 49. } \begin{pmatrix} 5 & 10 & -10 & 15 & 20 \\ 7 & 14 & -14 & 21 & 28 \\ -3 & -6 & 6 & -9 & -12 \\ 2 & 4 & -4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 50. } (21 \ 37 \ 21).$$

$$\text{№ 51. } \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 52. } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 53. } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 54. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 55. } \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 56. } \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 57. } (31).$$

$$\text{№ 58. } \begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 59. } (9).$$

$$\text{№ 60. } \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 3 \\ -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 61. } \begin{pmatrix} 10 & 17 & 19 & 23 \\ 17 & 23 & 27 & 35 \\ 16 & 12 & 9 & 20 \\ 7 & 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 62. } \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & -10 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 63. } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 64. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 65. } \begin{pmatrix} -22 & 9 \\ -59 & 26 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 66. } \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 67. } \begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 68. } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 69. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 70. } \begin{matrix} x = 37; \\ y = 12. \end{matrix}$$

$$\text{№ 71. } \begin{matrix} x = \frac{7}{13}; \\ y = \frac{15}{13}. \end{matrix}$$

$$\text{№ 72. } \begin{matrix} x = \frac{3}{2}y \\ \text{или} \\ x = 3k; \\ y = 2k. \end{matrix}$$

$$\text{№ 73. } \begin{matrix} x = 0; \\ y = 0. \end{matrix}$$

$$\text{№ 74. } \begin{matrix} x = \frac{1}{3}; \\ y = \frac{1}{3}. \end{matrix}$$

$$\text{№ 75. } \begin{matrix} x = \frac{-7+3y}{5} \\ \text{или} \\ y = k; \\ x = 3/5k - 7/5 \end{matrix}$$

$$\text{№ 76. } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 77. } A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 18 & 19 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 32 & 31 \\ 93 & 94 \end{pmatrix}; A^4 = \begin{pmatrix} 157 & 156 \\ 468 & 469 \end{pmatrix}; A^6 = \begin{pmatrix} 3907 & 3906 \\ 11718 & 11719 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 78. } A^2 = A^3 = \dots = A^n = A.$$

$$\text{№ 79. } \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 80. } \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 81. } \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 82. } \begin{pmatrix} \cos nj & -\sin nj \\ \sin nj & \cos nj \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 83. } \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 85. } f(A) = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 86. } f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 87. } f(A) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 88. } f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 89. } \begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix}, \text{ где } a \text{ и } b \text{ — любые числа.}$$

$$\text{№ 90. } \begin{pmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{pmatrix}, \text{ где } a \text{ и } b \text{ — любые числа.}$$

№ 91. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, где a, b, c – любые числа.

№ 92. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, где a, b, c – произвольные числа, удовлетворяющие соотношению $a^2 + bc = 0$.

№ 93. $\pm E; \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, где $a^2 + bc = 1$.

№ 94. а) i -я и j -я строки произведения поменяются местами;
 б) к i -й строке произведения прибавится j -я строка, умноженная на a ;
 в) i -й и j -й столбцы произведения поменяются местами;
 г) к i -му столбцу произведения прибавится j -й столбец, умноженный на a .

3. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

Определители 2-го порядка

Пусть имеем квадратную матрицу 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Определение. Определителем 2-го порядка, соответствующим матрице (3.1), называется число, равное $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Обозначается:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ или } \Delta A, \det A, |A|.$$

Из определения вытекает правило вычисления определителя второго порядка: определитель 2-го порядка равен разности между произведениями элементов, стоящих на главной и побочной диагоналях.

Где главную диагональ определителя образуют элементы a_{11} и a_{22} , а побочную – a_{12} и a_{21} . Следовательно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad (3.2)$$

Пример
Вычислить

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot (-1) = 10 + 4 = 14.$$

3.2. Определители 3-го порядка

Пусть имеем квадратную матрицу 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Определение. Определителем 3 – го порядка, соответствующим матрице (3.3), называется число, которое обозначается символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} \quad (3.4)$$

Проанализировав правую часть равенства (3.4), получим способ вычисления определителей 3-го порядка, который называется правилом треугольника.

Правило треугольника. Определитель 3-го порядка равен алгебраической сумме шести слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение трех элементов определителя. Со своим знаком берутся произведения элементов главной диагонали, а также два произведения элементов, образующих треугольники с основаниями параллельными главной диагонали и с вершиной в противоположном углу. С противоположным знаком берутся произведения элементов побочной диагонали, а также два произведения элементов, образующих треугольники с основаниями параллельными побочной диагонали и с вершиной в противоположном углу.

Схематическая запись правила треугольника изображена на рис. 1.

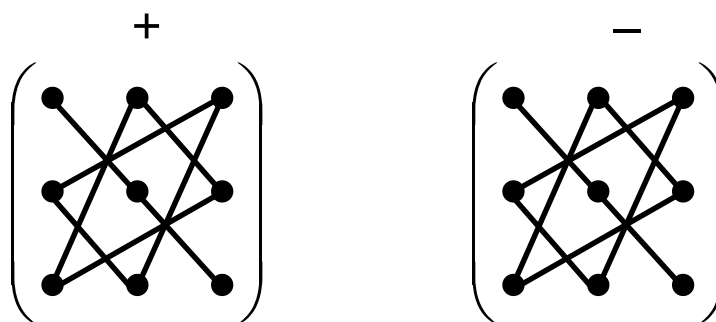


Рис. 1

Пример

Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -5 \\ -3 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Решение

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -5 \\ -3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 7 + 4 \cdot 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-5) \cdot (-3) - 1 \cdot 0 \cdot (-3) - (-3) \cdot 4 \cdot 7 - (-5) \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$= 8 - 45 + 20 + 84 = 67.$$

Определитель 3-го порядка можно вычислить и методом, приписывания строк либо столбцов. Рассмотрим суть этого метода применительно к столбцам.

Припишем к основной матрице (3.3) справа ее первый и второй столбцы, получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Тогда определитель 3-го порядка, соответствующий матрице (3.3), будет равен сумме шести произведений, где со своим знаком берут произведения элементов, стоящих на главной диагонали матрицы (3.4) ($a_{11}a_{22}a_{33}$) и на двух полных параллелях к ней ($a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$).

С противоположным знаком – произведения элементов стоящих на побочной диагонали $(a_{12}a_{21}a_{33})$ и на двух полных параллелях к ней $(a_{11}a_{23}a_{32}, a_{13}a_{22}a_{31})$.

Пример

Вычислить определитель

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = 2 \cdot 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 \cdot 4 + (-5) \cdot 3 \cdot 1 - (-5) \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - (-2) \cdot 3 \cdot 0 = -16 - 15 + 20 - 4 = -15.$$

3.3. Свойства определителей

Свойство 1. Величина определителя не изменится, если все его строки заменить соответствующими столбцами, т.е. если его транспортировать.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство

По правилу треугольника

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33} \quad (3.5)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad (3.6)$$

Сравним (3.5) и (3.6). Их правые части равны, следовательно, равны и левые, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Из доказанного вытекает равноправность строк и столбцов определителя. В связи с этим в дальнейшем строки и столбцы будем называть просто рядами элементов.

Свойство 2. Перестановка двух любых параллельных рядов определителя равносильна его умножению на минус единицу.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}.$$

Доказательство аналогично доказательству свойства 1.

Свойство 3. Если определитель имеет два одинаковых параллельных ряда, то он равен нулю.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство

По правилу треугольника

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{23} + a_{22} a_{23} a_{31} - \\ - a_{31} a_{22} a_{23} - a_{32} a_{23} a_{21} - a_{21} a_{22} a_{33} = 0$$

Что и требовалось доказать.

Для рассмотрения остальных свойств введем новые понятия.

Пусть имеем определитель 3-го порядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определение. Минором некоторого элемента a_{ij} определителя 3-го порядка называется определитель 2-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент.

Минор элемента a_{ij} обозначается δ_{ij} или m_{ij} . Например, для элемента a_{23} его минор будет

$$\delta_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Определение. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определяется называется соответствующий ему минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент, есть число четное, и с противоположным знаком, если эта сумма – число нечетное.

Таким образом,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \delta_{ij}.$$

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначается A_{ij} .

Например,

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Свойство 4. Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \dots = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

У определителя третьего порядка всего шесть таких разложений.

Докажем, например, последнее равенство.

Доказательство.

По правилу треугольника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33} \quad (3.7)$$

Раскроем сумму $a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$, используя определение алгебраического дополнения:

$$a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

Окончательно,

$$a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} =$$

$$= a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{23}a_{31}a_{12} + a_{33}a_{11}a_{22} - a_{33}a_{21}a_{12} \quad (3.8)$$

Сравним равенства (3.7) и (3.8): их правые части равны, следовательно, будут равны и левые, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} ,$$

что и требовалось доказать.

Запись определителя в виде суммы произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения называются разложением определителя по элементам выбранного ряда.

Рассмотренное свойство дает еще один способ вычисления определителей 3-го порядка.

Пример

Вычислить

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & -8 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} ,$$

Разложив его по элементам любого ряда.

Решение.

Разложим определитель по элементам 2-й строки

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & -8 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - (-8) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= -7(12 - 5) + 8(-15 - 0) = -49 - 120 = -169. \end{aligned}$$

Свойство 5. Сумма произведений элементов какого-либо ряда на алгебраические дополнения элементов параллельного ряда равна нулю.

Например,

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$$

или

$$a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33} = 0.$$

Для доказательства достаточно расписать алгебраические дополнения по определению.

Свойство 6. Если все элементы некоторого ряда содержат один и тот же множитель, то его можно вынести за знак определителя.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

Разложим первый определитель по элементам 3-й строки, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = ka_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - ka_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + ka_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= k \cdot a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если все элементы некоторого ряда равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

Для доказательства этого положения достаточно считать множитель k равным нулю.

Следствие 2. Если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Доказательство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Но последний определитель равен нулю, так как содержит две одинаковые строки, следовательно, и

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Свойство 7. Если каждый элемент некоторого ряда определителя равен сумме двух слагаемых, то такой определитель можно представить в виде суммы двух определителей, из которых один в рассматриваемом ряду

имеет первые слагаемые, а другой – вторые. На остальных местах у всех трёх определителей стоят одни и те же элементы.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} + a''_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} + a''_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} + a''_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a''_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a''_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a''_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Это свойство можно доказать, разложив первый определитель по элементам 2-го столбца.

Свойство 8. Величина определителя не изменится, если к элементам некоторого ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, предварительно умножив их на один и тот же множитель.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + ka_{31} \end{vmatrix}.$$

Доказательство

Учитывая свойство 7, имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + ka_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{31} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель равен нулю в силу пропорциональности первого и последнего столбцов, поэтому

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + ka_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. На этом свойстве основано приведение определителя к так называемому «удобному виду», т.е. к такому определителю, у которого все элементы, кроме одного, равны нулю.

Определитель «удобного вида» прост в вычислении.

Пример 1

Вычислить определитель «удобного вида»

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -3 & 7 & 0 \\ 11 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Решение

Разложим заданный определитель по элементам «удобного» третьего столбца:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -3 & 7 & 0 \\ 11 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 11 & -2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 11 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (14 - 12) = 4.$$

Итак, вычисление определителя 3-го порядка «удобного вида» методом разложения по элементам «удобного вида» сводится к вычислению одного определителя 2-го порядка.

Пример 2

Привести к «удобному виду» и вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ 7 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение

Выполним следующие операции. Умножим все элементы третьей строки на 3 и сложим с соответствующими элементами второй строки. И умножив третью строку на (-3) сложим с первой.

$$\begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ 7 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 13 \\ -5 & 0 & -11 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 13 \\ -5 & -11 \end{vmatrix} = 77 - 65 = 12$$

3.4. Определители n -го порядка

Пусть имеем квадратную матрицу n -го порядка ($n = 4, 5, 6, \dots$):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Определителем n -го порядка, соответствующим матрице (3.9), называют число, обозначаемое символом

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для определителей n -го порядка остаются справедливыми все понятия и свойства, отмеченные у определителей 2-го и 3-го порядков.

Вычисляют определители n -го порядка методом последовательного понижения порядка определителя, используя правило разложения определителя по элементам некоторого ряда.

При вычислении определителей n -го порядка исходный определитель и все промежуточные, следует сводить к «удобному виду», если это возможно.

Пример

Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ -5 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение

Четвертый столбец сложим со вторым, эту же строку, умноженную на (-2), – с первой, на (-1) – с третьей.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ -5 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 0 & 5 \\ 1 & -6 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -4 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \\ 1 & -6 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \\ 1 & -6 & -4 \end{vmatrix}$$

Третью строку умножим на (-3) и сложим с первой, эту же строку умножим на 3 и сложим со второй.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \\ 1 & -6 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 22 & 12 \\ 0 & -11 & -7 \\ 1 & -6 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 22 & 12 \\ 11 & -7 \end{vmatrix} = -11 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -22 \cdot (7 - 6) = -22$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Определители и их свойства

Определители 2-го порядка

Вычислить определители:

№ 1 $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$

№ 2 $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

№ 3 $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$

№ 4 $\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$

№ 5 $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

№ 6 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$

№ 7 $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$

№ 8 $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

№ 9 $\begin{vmatrix} 1 & 0,5 \\ -0,75 & \frac{7}{8} \end{vmatrix}$

№ 10 $\begin{vmatrix} 0,2 & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \end{vmatrix}$

№ 11 $\begin{vmatrix} \frac{4}{15} & 0,8 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{11} \end{vmatrix}$

№ 12 $\begin{vmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{4}{9} & -\frac{13}{11} \end{vmatrix}$

№ 13 $\begin{vmatrix} 0,13 & \frac{2}{11} \\ -0,7 & \frac{7}{15} \end{vmatrix}$

№ 14 $\begin{vmatrix} 0,27 & \frac{3}{4} \\ 0,18 & -\frac{2}{5} \end{vmatrix}$

№ 15 $\begin{vmatrix} \frac{a \cdot b}{b+c} & b-c \\ \frac{a}{b^2-c^2} & \frac{1}{a^2} \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{lll} \text{№ 16} \begin{vmatrix} a-b & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a^2+ab+b^2 \end{vmatrix} & \text{№ 17} \begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix} & \text{№ 18} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \\ \text{№ 19} \begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix} & \text{№ 20} \begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix} & \text{№ 21} \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \\ \text{№ 22} \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta \end{vmatrix} & & \end{array}$$

Решить уравнения:

$$\begin{array}{lll} \text{№ 23} \begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 & \text{№ 24} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0 & \text{№ 25} \begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0 \\ \text{№ 26} \begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0 & \text{№ 27} \begin{vmatrix} x+1 & -5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0 & \text{№ 28} \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \\ \text{№ 29} \begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0 & \text{№ 30} \begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0 \\ \text{№ 31} \begin{vmatrix} \sin 3x & -\cos x \\ \cos 6x & \sin 4x \end{vmatrix} = 0 & \text{№ 32} \begin{vmatrix} \sin^2 5x & \frac{1}{4} \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \text{№ 33} \begin{vmatrix} \cos 3x & \sin x \\ \cos 6x & \sin 4x \end{vmatrix} = 0 & \text{№ 34} \begin{vmatrix} \cos 3x & -\frac{1}{4} \\ 1 & \sin 3x \end{vmatrix} = 0 \\ \text{№ 35} \begin{vmatrix} tg^2 2x & 3ctgx \\ tgx & 1 \end{vmatrix} = 0 & \text{№ 36} \begin{vmatrix} \sin x & ctg^3 7x \\ tg^3 7x & \frac{1}{5\cos x} \end{vmatrix} = 0 \end{array}$$

Решить неравенства:

$$\begin{array}{lll} \text{№ 37} \begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0 & \text{№ 38} \begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0 & \text{№ 39} \begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > 5 \\ \text{№ 40} \begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14 & \text{№ 41} \begin{vmatrix} x^2+5 & 3 \\ x+1 & 1 \end{vmatrix} > 0 & \text{№ 42} \begin{vmatrix} x-2 & 0 \\ 1 & x-3 \end{vmatrix} < 0 \\ \text{№ 43} \begin{vmatrix} x+2 & -2 \\ 3 & x-3 \end{vmatrix} \leq 0 & & \end{array}$$

Определители 3-го порядка

Вычислить определители по правилу треугольника:

$$\begin{array}{llll} \text{№ 44} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} & \text{№ 45} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} & \text{№ 46} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} & \text{№ 47} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{№ 48} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} & \text{№ 49} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} & \text{№ 50} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
\text{№ 51} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} & \text{№ 52} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} & \text{№ 53} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} \\
\text{№ 54} \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix} & \text{№ 55} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} & \text{№ 56} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\
\text{№ 57} \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} & \text{№ 58} \begin{vmatrix} 30 & 25 & 6 \\ 3 & 10 & 8 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix} & \text{№ 59} \begin{vmatrix} 3 & -6 & 18 \\ -4 & -2 & 10 \\ 1 & -8 & 7 \end{vmatrix} \\
\text{№ 60} \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^3 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} & \text{№ 61} \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} & \text{№ 62} \begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}
\end{array}$$

Не раскрывая определителей, доказать справедливость равенств:

$$\begin{array}{ll}
\text{№ 63} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} & \text{№ 64} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix} \\
\text{№ 65} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \end{vmatrix} = 0 & \text{№ 66} \begin{vmatrix} \beta b_1 + \gamma c_1 & b_1 & c_1 \\ \beta b_2 + \gamma c_2 & b_2 & c_2 \\ \beta b_3 + \gamma c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \\
\text{№ 67} \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \cos 2\beta \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0
\end{array}$$

Вычислить определители, разложив их по элементам некоторого ряда:

$$\begin{array}{lll}
\text{№ 68} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} & \text{№ 69} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix} & \text{№ 70} \begin{vmatrix} 10 & -15 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} \\
\text{№ 71} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \text{№ 72} \begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} & \text{№ 73} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}
\end{array}$$

$$\text{№ 74} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 75} \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 76} \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 77} \begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 78} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \beta & 1 \\ \sin \alpha & \cos \beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 79} \begin{vmatrix} \sin \alpha & \sin \beta & 1 \\ -\cos \alpha & \cos \beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Вычислить определители, предварительно приведя их к «удобному виду».

$$\text{№ 80} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 81} \begin{vmatrix} 11 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 82} \begin{vmatrix} 0 & 30 & -6 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 20 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 83} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 84} \begin{vmatrix} 20 & 0 & 1 \\ 10 & 15 & 1 \\ -10 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 85} \begin{vmatrix} -8 & 12 & 24 \\ -3 & -6 & -3 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 86} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 87} \begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 88} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 89} \begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 90} \begin{vmatrix} 12 & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 3 \\ 18 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 91} \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 92} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 93} \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 94} \begin{vmatrix} 0 & \sin \alpha & \operatorname{ctg} \alpha \\ \sin \alpha & 0 & \sin \alpha \\ \operatorname{ctg} \alpha & \sin \alpha & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 95} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 96} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 97} \begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 98} \begin{vmatrix} 1+\cos \alpha & 1+\sin \alpha & 1 \\ 1-\sin \alpha & 1+\cos \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 99} \begin{vmatrix} 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} & \sin \alpha & 1 \\ 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} & \sin \beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 100} \begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 101} \begin{vmatrix} \sin 3\alpha & \cos 3\alpha & 1 \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 1 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 102} \quad \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \lambda & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix}$$

№ 103

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 104} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$$

Решить уравнения:

$$\text{№ 105} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

№ 106

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{№ 107} \quad \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

№ 108

$$\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{№ 109} \quad \begin{vmatrix} x & -1 & 3 \\ -4 & x & 5 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

№ 110

$$\begin{vmatrix} x & 2x & 9 \\ 3 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{№ 111} \quad \begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

№ 112

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0$$

Решить неравенства:

$$\text{№ 113} \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1$$

№ 114

$$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$$

$$\text{№ 115} \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0$$

Определители высших порядков

Вычислить определители:

$$\text{№ 116} \quad \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

№ 117

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{№ 118} \\ \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№ 120} \\ \left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & -7 \\ -3 & 4 & 0 & 4 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№ 122} \\ \left| \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№ 124} \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№ 126} \\ \left| \begin{array}{cccc} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№ 128} \\ \left| \begin{array}{cccc} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№ 130} \\ \left| \begin{array}{cccc} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№ 132} \\ \left| \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & 2 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№ 134} \\ \left| \begin{array}{cccc} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№ 119} \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№ 121} \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№ 123} \\ \left| \begin{array}{cccc} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№ 125} \\ \left| \begin{array}{cccc} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№ 127} \\ \left| \begin{array}{cccc} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№ 129} \\ \left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№ 131} \\ \left| \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & -6 & 2 \\ 8 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№ 133} \\ \left| \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & 1 & 8 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{№ 135} \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 8 & 16 \end{array} \right| \end{array}$$

№ 136	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	№ 137	$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}$
№ 138	$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -12 & 6 & 21 \\ 1 & 8 & 7 & 2 \end{vmatrix}$	№ 139	$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$
№ 140	$\begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{vmatrix}$	№ 141	$\begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 4 & d & x \end{vmatrix}$
№142	$\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}$	№143	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$
№144	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$	№145	$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
№146	$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$	№147	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
№148	$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$	№149	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$
№150	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 5 & 7 & -5 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$	№151	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

$$\text{№ 152} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ x & x & x & \dots & x & n+x \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 153} \quad \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \\ n-2 & n-1 & n & \dots & 4 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 154} \quad \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & n-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & n-1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 155} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{№ 156} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

ОТВЕТЫ

$$\begin{array}{llll} \text{№ 1. } 18. & \text{№ 2. } 10. & \text{№ 3. } 0. & \text{№ 4. } -50. \\ \text{№ 5. } 26. & \text{№ 6. } -38. & \text{№ 7. } 7. & \text{№ 8. } 2. \\ \text{№ 9. } 1,25. & \text{№ 10. } -\frac{104}{315}. & \text{№ 11. } \frac{92}{165}. & \text{№ 12. } -\frac{497}{693}. \\ \text{№ 13. } \frac{3101}{16500}. & \text{№ 14. } -0,243. & \text{№ 15. } \frac{a^2 - a}{a(b+c)}. & \text{№ 16. } \\ & & & -2b^3. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{№ 17. } 0. & \text{№ 18. } x_2 - x_1. & \text{№ 19. } 2a. & \text{№ 20. } 0. \\ \text{№ 21. } 1. & \text{№ 22. } \sin(a+b) \cdot \sin(a-b). & \text{№ 23. } 12. & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{№ 24. } 2. & \text{№ 25. } \begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = -4. \end{cases} & \text{№ 26. } \begin{cases} x_1 = 2; \\ x_{2,3} = -2 \pm i. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{№ 27. } x_{1,2} = \pm 2i. & \text{№ 28. } \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}; \\ x_2 = -\frac{1}{6}. \end{cases} & \text{№ 29. } x = (-1)^n \frac{p}{12} + \frac{p}{2} n (n \in \mathbb{Z}). \end{array}$$

№ 30. $x = \frac{p}{6}(2n+1) (n \in \mathbb{Z}).$	№ 31. $\begin{cases} x_1 = \frac{p}{6} + \frac{p}{3}n; \\ x_2 = \frac{p}{4} + \frac{p}{2}n, \end{cases} (n \in \mathbb{Z}).$	
№ 32. $x = \pm \frac{p}{15}(-1)^n + \frac{p}{5}n (n \in \mathbb{Z}).$	№ 33. $\begin{cases} x_1 = \frac{p}{3}n \\ x_2 = \frac{p}{2}n \end{cases} . (n \in \mathbb{Z})$	
№ 34. $x = \frac{p}{36}(-1)^{n+1} + \frac{p}{6}n (n \in \mathbb{Z}).$	№ 35. $x = \pm \frac{p}{6} + \frac{p}{2}n (n \in \mathbb{Z}).$	
№ 36. $x = \frac{p}{4} + pn (n \in \mathbb{Z}).$	№ 37. $(3; +\infty).$	
№ 38. $(-10; +\infty).$	№ 39. $(-\infty; -3).$	№ 40. $(-1; 7).$
№ 41. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty).$	№ 42. $(2; 3).$	№ 43. $[0; 1].$
№ 44. 0.	№ 45. 12.	№ 46. 0.
№ 47. 0.	№ 48. 0.	№ 49. -12.
№ 50. -1.	№ 51. 87.	№ 52. 0.
№ 53. -29.	№ 54. $2a^3.$	№ 55. -4.
№ 56. -48.	№ 57. $-2(x^3 + y^3).$	№ 58. -225.
№ 59. 582.	№ 60. $2x^3.$	№ 61. $abc + x(ab + bc + ca).$
№ 62. $a^2 + b^2 + y^2 + 1.$	№ 68. -10.	№ 69. 18.
№ 70. -15.	№ 71. -4.	№ 72. 180.
№ 73. 87.	№ 74. 0.	№ 75. $4a.$
№ 76. $-2b^2.$	№ 77. $-2x.$	№ 78. $\cos(a + b).$
№ 79. $\sin(a + b).$	№ 80. 18.	№ 81. 220.
№ 82. 288.	№ 83. -10..	№ 84. 990.
№ 85. -240.	№ 86. 8.	№ 87. 288.
№ 88. 10.	№ 89. 72.	№ 90. 96.
№ 91. 103.	№ 92. $(x - y)(y - z)(z - x).$	№ 93. $2a^2b.$
№ 94. $\sin 2a..$	№ 95. $xyz(y - x)(z - x)(z - y).$	
№ 96. $ab.$	№ 97. $-4a^3.$	№ 98. 1.
№ 99. $\sin(b - a).$	№ 100. $amn.$	№ 101. $4\sin a \cdot \sin^2 \frac{a}{2}.$
№ 102. $\sin(a - b) + \sin(b - j) + \sin(j - a).$		№ 103. $(e^2 - e)^2.$
№ 104. $-e^4 + 3e^2 - 2e.$	№ 105. -3.	№ 106. $\begin{cases} x_1 = -10; \\ x_2 = 2. \end{cases}$

№ 107	$\begin{cases} x_1 = 2; \\ x_2 = 3. \end{cases}$	№ 108.	$\begin{cases} x_1 = -2; \\ x_2 = 0. \end{cases}$	№109.	$\begin{cases} x_1 = -\frac{11}{7}; \\ x_2 = 2. \end{cases}$		
№ 110.	2.	№ 111.	$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{22}.$	№ 112.	$(-\infty; + \infty).$		
№ 113.	$\left(\frac{7}{2}; + \infty\right).$	№ 114.	$(-6; -4).$	№ 115.	$(4; + \infty).$		
№ 116.	30.	№ 117.	$-20..$	№ 118.	24.	№ 119.	4.
№ 120.	0.	№ 121.	54.	№ 122.	0.	№ 123.	48.
№ 124.	$-14.$	№ 125.	1800.	№ 126.	$-7.$	№ 127.	2.
№ 128.	$-204.$	№ 129.	24.	№ 130.	1.	№ 131.	48.
№ 132.	56.	№ 133.	$-42.$	№ 134.	$-20.$	№ 135.	8.
№ 136.	160.	№ 137.	223.	№ 138.	0.		
№ 139.	$9\sqrt{10}(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$	№ 140.	$(b + c + d)(b + c - d).$				
№ 141.	0.	№ 142.	$(be - cd)^2.$	№ 143.	120.		
№ 144.	$-4.$	№ 145.	$-141.$	№ 146.	32.	№ 147.	$-96.$
№ 148.	38.	№ 149.	$-60.$	№ 150.	42.	151.	1104.
№ 152.	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$	№ 153.	$(n + 1) \cdot 2^{n-2}.$	№154.	$n^{n-1}.$		
№ 155	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$	№ 156.	$2n + 1.$				

4. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА И ЕЕ ПОСТРОЕНИЕ

4.1. Понятие о невырожденной и союзной матрицах

Пусть имеем квадратную матрицу n -го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение. Квадратная матрица A называется неособенной, или невырожденной, если ее определитель не равен нулю. В противном случае матрица A называется особенной, или вырожденной.

Например,

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ – невырожденная матрица, так как

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2 \neq 0.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & -5 & 2 \\ 9 & 13 & 3 \end{pmatrix} - \text{вырожденная, так как ее определитель}$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & -5 & 2 \\ 9 & 13 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

(1-й и 3-й столбы пропорциональны).

Определение. Матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов квадратной матрицы A с последующим транспонированием, называется союзной, или присоединенной к исходной матрице A .

Ее обозначение A^* или $\tilde{A}$. Таким образом,

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Алгебраические дополнения элементов матрицы определяются так же, как и алгебраические дополнения элементов определителя.

Пример

$$\text{Найти союзную матрицу для матрицы } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение

Вычислим алгебраическое дополнение каждого элемента данной матрицы.

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 11; & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -3; & A_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -17; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 21; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11; \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 6; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2, \end{aligned}$$

Откуда

$$A^* = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.2. Обратная матрица и ее свойства

Определение. Матрица A^{-1} называется обратной квадратной матрице A , если она, будучи умноженной как слева, так и справа на данную матрицу A , дает соответствующую единичную матрицу; т.е. если $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, то A^{-1} – обратная матрице A .

Нахождение обратной матрицы для заданной называется обращением данной матрицы.

Теорема. Всякая невырожденная матрица имеет обратную матрицу.

Доказательство.

Рассмотрим невырожденную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ее определитель $\Delta A \neq 0$.

Составим для матрицы A ее союзную A^* .

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Умножим союзную матрицу A^* на число $\frac{1}{\Delta A}$, получим матрицу вида

$$\frac{1}{\Delta A} \cdot A^* = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta A} & \frac{A_{21}}{\Delta A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta A} \\ \frac{A_{12}}{\Delta A} & \frac{A_{22}}{\Delta A} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta A} & \frac{A_{2n}}{\Delta A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta A} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что полученная матрица $\frac{1}{\Delta A} \cdot A^*$ и есть обратная матрица, т. е. что $\frac{1}{\Delta A} \cdot A^* = A^{-1}$. Для этого проверим определение обратной матрицы, т. е. установим, что

$$A \cdot \frac{1}{\Delta A} \cdot A^* = E \quad \text{и} \quad \frac{1}{\Delta A} \cdot A^* \cdot A = E.$$

1) Перемножим матрицы A и $\frac{1}{\Delta A} \cdot A^*$, в результате получим матрицу C , у которой элементы главной диагонали имеют вид

$$c_{11} = \frac{a_{11}A_{11}}{\Delta A} + \frac{a_{12}A_{12}}{\Delta A} + \dots + \frac{a_{1n}A_{1n}}{\Delta A} = \frac{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}}{\Delta A} = \frac{\Delta A}{\Delta A} = 1$$

$$c_{22} = \frac{a_{21}A_{21}}{\Delta A} + \frac{a_{22}A_{22}}{\Delta A} + \dots + \frac{a_{2n}A_{2n}}{\Delta A} = \frac{a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{2n}A_{2n}}{\Delta A} = \frac{\Delta A}{\Delta A} = 1$$

.....

$$c_{nn} = \frac{a_{n1}A_{n1}}{\Delta A} + \frac{a_{n2}A_{n2}}{\Delta A} + \dots + \frac{a_{nn}A_{nn}}{\Delta A} = \frac{\Delta A}{\Delta A} = 1.$$

Остальные элементы матрицы C равны нулю, так как при их составлении элементы одной строки матрицы A умножаются на алгебраические дополнения элементам параллельной строки, например:

$$c_{11} = \frac{a_{11}A_{21}}{\Delta A} + \frac{a_{12}A_{22}}{\Delta A} + \dots + \frac{a_{1n}A_{2n}}{\Delta A} = \frac{a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \dots + a_{1n}A_{2n}}{\Delta A} = 0.$$

Таким образом

$$A \cdot \frac{1}{\Delta A} \cdot A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

2) Совершенно аналогично можно показать, что

$$\frac{1}{\Delta A} \cdot A^* \cdot A = E$$

Итак, $A \cdot \frac{1}{\Delta A} \cdot A^* = \frac{1}{\Delta A} \cdot A^* \cdot A = E$, следовательно,

$$\frac{1}{\Delta A} \cdot A^* = A^{-1}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Свойства обратной матрицы

1. Определитель обратной матрицы равен обратной величине определителя исходной матрицы, т. е.

$$\Delta(A^{-1}) = \frac{1}{\Delta A}.$$

2. Обратная матрица произведения двух матриц равна произведению обратных матриц, взятых в обратном порядке, т. е.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

3. Транспонированная обратная матрица равна обратной от транспонированной, т. е.

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

4.3. Построение обратной матрицы

Построение обратной матрицы с помощью союзной

Из теоремы существования обратной матрицы следует правило построения обратной матрицы с помощью союзной.

1. Проверяем, является ли заданная матрица A невырожденной. Для этого вычисляем её определитель ΔA .

2. Составляем союзную матрицу A^* .

3. Умножаем союзную матрицу A^* на число $\frac{1}{\Delta A}$, в результате получаем искомую обратную матрицу.

Пример

Найти матрицу, обратную

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{Умножим третий столбец} \\ \text{на } (-1) \text{ и сложим с третьим} \end{array} \right] = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 6 = -12.$$

Так как $\Delta A = -12 \neq 0$, то обратная матрица существует. Строим её.

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2; & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(4 + 2) = -6; & A_{31} &= \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20; \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3; & A_{32} &= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -14; \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 20 \\ -1 & 3 & -14 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot A^* = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -6 & 20 \\ -1 & 3 & -14 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix};$$

или

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 & -5/3 \\ 1/6 & 1/4 & 7/6 \\ -1/6 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}.$$

Построение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

Любую невырожденную матрицу A с помощью элементарных преобразований, произведенных только над строками или только над столб-

цами, можно свести к соответствующей единичной матрице E . Если совершенные над матрицей A элементарные преобразования и том же порядке применить к единичной матрице E , того же размера, что и матрица A , то единичная матрица E преобразуется в обратную матрицу A .

Элементарные преобразования над матрицами A и E удобно совершать одновременно, записывая их рядом, через черту.

Пример

Найти матрицу, обратную

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Над единичной матрицей будем совершать те же преобразования, что и над исходной. Поменяем местами первый и четвертый столбцы.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Умножим первый столбец на (-3) и сложим со вторым столбцом, умножим первый столбец на (-2) и прибавим к третьему, на (-4) – с четвертым:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -3 & 1 & -3 & -2 & -4 \end{array} \right).$$

Поменяем местами второй и четвертый столбцы местами:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & -2 & 1 & -4 & -2 & -3 \end{array} \right).$$

Второй столбец умножим на (-1) :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & 1 & 4 & -2 & -3 \end{array} \right).$$

Прибавим к первому столбцу второй, умноженный на (-1) :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & -2 & -3 & 4 & -2 & -3 \end{array} \right).$$

Поменяем местами третий и четвертый столбцы местами:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & -1 & -3 & 4 & -3 & -2 \end{array} \right).$$

Третий и четвертый столбцы умножим на (-1) :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & -3 & 4 & 3 & 2 \end{array} \right).$$

Сложим третий столбец с первым и со вторым, предварительно умножив третий на (-2) :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & -2 & 3 & 2 \end{array} \right).$$

Четвертый столбец складываем со вторым и с третьим, умножив четвертый на (-2) :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right).$$

Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Обратная матрица

Доказать, что матрица A является обратной для B , если:

$$\text{№ 1} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 2} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 3} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти обратную A^{-1} матрицу для матрицы A и показать, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, если:

$$\text{№ 4} \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{№ 5} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти обратную матрицу матрицам:

$$\text{№ 6} \quad \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{№ 7} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{№ 8} \quad \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 9} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{№ 10} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 11} \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{№ 12} \quad \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 13} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{№ 14} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{№ 15} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 16} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{№ 17} \quad \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 18} \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{№ 19} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 20} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{№ 21} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 22} \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{№ 23} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 24} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}. \quad \text{№ 25} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 26} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{№ 27} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 28} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{№ 29} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 30} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{№ 31} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 32} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{№ 33} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 34} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad \text{№ 35} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 36} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}. \quad \text{№ 37} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решить матричные уравнения:

$$\text{№ 38} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{№ 39} X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 40 } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{№ 41 } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 42 } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 43 } \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{№ 44 } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 45 } X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{№ 46 } X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 47 } \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 48 } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 49 } X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 50 } X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 51 } \begin{pmatrix} 21 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 13 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

ОТВЕТЫ

$$\text{№ 4. } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{№ 5. } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 6. } 1/10 \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{№ 7. } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{№ 8. } -1/2 \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 9. } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{№ 10. } \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 11. } \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} \quad \text{№ 12. } \begin{pmatrix} 1/5 & -4/5 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & -3/8 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 13.} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 15.} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 17.} \begin{pmatrix} -8 & 29 & -1 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 19.} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 21.} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 23.} \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 7 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 25.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 27.} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 29.} \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 31.} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 33.} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 14.} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 8 & -1 & -5 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 16.} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 18.} \begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 20.} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 22.} \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -12 & 17 & -43 \\ -7 & 11 & -24 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 24.} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 26.} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -11 & 14 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 28.} \begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & 19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 30.} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -55/2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 32.} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 34.} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 35.} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 36.} \begin{pmatrix} 24 & 3 & -4 & -8 \\ -23/2 & -1 & 2 & 7/2 \\ 10 & 1 & -2 & -3 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 37.} \begin{pmatrix} -1/6 & 1/2 & -7/6 & 10/3 \\ -7/6 & -1/2 & 5/6 & -5/3 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 38.} \begin{pmatrix} 24 & -5/2 \\ -10 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 39.} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 40.} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 41.} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 42.} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 43.} \begin{pmatrix} 2 + \frac{3}{2}a \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 + \frac{3}{2}b \\ b \end{pmatrix}, \text{ где } a \text{ и } b \text{ – любые действитель-}$$

ные числа.

$$\text{№ 44.} \begin{pmatrix} a & b \\ 2-2a & 1-2b \end{pmatrix}, \text{ где } a \text{ и } b \text{ – любые числа.}$$

№ 45. Нет решений.

$$\text{№ 46.} \begin{pmatrix} \frac{2-4b}{3} & b \\ \frac{9-4a}{3} & a \end{pmatrix}, \text{ где } a \text{ и } b \text{ – любые числа.}$$

№ 47. Нет решения.

$$\text{№ 48.} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 49.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 50.} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 8 & -3 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 51.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. РАНГ МАТРИЦЫ И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ

5. 1. Определение и свойства матрицы

Пусть имеем произвольную прямоугольную матрицу A размера $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Выделим k строк и k столбцов, получим квадратную матрицу, для которой существует определитель k -го порядка. Назовем этот определитель минором k -го порядка матрицы A .

Очевидно, что матрица A имеет всевозможные миноры порядков от 1 до $\min\{m, n\}$. При этом среди всех отличных от нуля миноров найдется, по крайней мере, один, порядок которого будет наибольшим.

Определение. Наивысший порядок ненулевого минора матрицы A называется её рангом.

Ранг матрицы A обозначается $r(A)$ или $\text{rang} A$.

Если ранг матрицы A равен k , то это значит, что матрица A имеет, по крайней мере, один минор k -го порядка, отличный от нуля, но всякий минор, порядок которого больше, чем k , равен нулю или не существует.

Ранг матрицы $m \times n$ может быть одним из чисел: $0, 1, 2, \dots, \min\{m, n\}$.

Пример

Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

используя определение.

Решение

1. Вычислим минор самого высокого, 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

так как, в частности, 4-я строка состоит из нулей.

2. Рассмотрим всевозможные миноры 3-го порядка. Все они будут равны нулю за счет пропорциональности 1-й и 3-й строк и за счет равенства нулю всех элементов 4-й строки.

3. Вычислим всевозможные миноры 2-го порядка. Все миноры, включающие в себя попарно элементы 1-й, 3-й и 4-й строк, будут равны нулю, но

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0.$$

Следовательно, ранг заданной матрицы равен 2.

Свойства ранга матрицы

1. При транспонировании ранг матрицы не меняется.
2. Ранг матрицы не изменится, если удалить из неё столбец (или строку) из нулей.

3. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях.

Из этих свойств следует, что ранги двух эквивалентных матриц равны.

5.2. Вычисление ранга матрицы

Находить ранг матрицы по определению не всегда выгодно, так как весьма часто приходится вычислять большое число определителей и при этом высокого порядка.

Рассмотрим другие способы нахождения ранга матрицы.

Нахождение ранга матрицы методом окаймления.

Определение. Окаймляющим минором для выбранного минора называется минор, который целиком содержит выбранный и порядок которого на единицу выше порядка выбранного минора.

Например, пусть имеем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \\ 5 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & -8 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

Выберем минор 2-го порядка

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Тогда окаймляющими его минорами будут

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -8 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -8 & 12 & 4 \end{vmatrix}$$

но, например минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & 3 \\ -8 & 12 & 4 \end{vmatrix}$$

не будет окаймляющим.

Теорема. Если матрица A имеет отличный от нуля минор порядка k , а все окаймляющие его миноры равны нулю, то ранг матрицы A равен k .

На этой теореме основано правило нахождения ранга матрицы методом окаймления.

1. Ищем в заданной матрице минор 2-го порядка, отличный от нуля.
2. Вычисляем окаймляющие его миноры до тех пор, пока не найдем отличного от нуля.
3. Для этого найденного минора 3-го порядка вычисляем окаймляющие его миноры до тех пор, пока не найдем отличного от нуля и т. д.
4. Если минор k -го порядка не равен нулю, а все окаймляющие его миноры равны нулю или не существуют, то ранг матрицы равен k .

Пример

Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

методом окаймления.

Решение

1. Выберем минор 2-го порядка, отличный от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

2. Вычислим окаймляющие его миноры.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Для выбранного минора 2-го порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ все окаймляющие миноры равны нулю, следовательно, ранг матрицы равен 2.

Замечание. Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется базисным. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

В рассмотренном примере минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ – базисный.

Нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.

Определение. Матрица, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю, называется канонической.

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{каноническая матрица.}$$

Очевидно, нулевая матрица является частным случаем канонической.

Любую матрицу с помощью элементарных преобразований можно свести к канонической. Полученная каноническая матрица будет эквивалентна исходной, следовательно, ранги этих матриц равны. Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали.

Пример

Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

с помощью элементарных преобразований.

Решение.

Умножим первую строку на $\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сложим первую строку со второй и третьей, умножив ее на (-1) :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Первый столбец сложим со вторым, третьим, четвертым и последним, умножив его на 1, (-3) , 2 и (-4) соответственно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Сложим второй столбец с четвертым и пятым:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вторую строку прибавим к третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Третий столбец умножим на $\frac{1}{2}$ и поменяем его местами со вторым:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Умножим второй столбец на 3 и сложим с третьим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Умножим третий столбец на $\left(-\frac{1}{4}\right)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Окончательно, умножим третий столбец на (-9) , а затем на 3 и сложим четвертым и пятым, соответственно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На главной диагонали канонической матрицы стоят три единицы, следовательно, ранг заданной матрицы A равен 3.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Ранг матрицы

Найти ранг матрицы:

$$\text{№ 1 } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{№ 2 } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{№ 3 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 4 } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{№ 5 } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 7} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 8} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 10} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 11} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 12} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 13} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 14} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 15} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 16} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 13 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 17} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 18} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 19} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & -5 \\ 7 & -5 & -9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 20} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 21} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 22} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 23} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 24} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 25} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 26} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 27} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 28} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычислить ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$\text{№ 29} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 30} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 31} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 32} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 33} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 5 & 2 & -3 \\ 5 & 15 & -11 & 1 & 18 \\ 7 & -24 & 26 & 5 & -27 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 34} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 35} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 36} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 37} \begin{pmatrix} 17 & 51 & 27 & 31 \\ 93 & 25 & 14 & 121 \\ 94 & 27 & 15 & 120 \\ 18 & 53 & 28 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 38} \begin{pmatrix} 3 & 18 & 23 & 48 \\ 17 & 15 & 31 & -47 \\ 4 & 6 & 27 & -110 \\ 26 & 21 & 30 & 67 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 39} \begin{pmatrix} 132 & 75 & 94 & 54 \\ 43 & 25 & 31 & 17 \\ 134 & 75 & 94 & 54 \\ 48 & 25 & 32 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 40} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{No 41} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{No 42} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 12 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{\mathbf{0} \ 42} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 12 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \text{N}_\text{0 43} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} & \text{N}_\text{0 44} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{No 44} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{\mathbf{0}} \mathbf{45} \begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$$

ОТВЕТЫ

N ₀ 1. 1.	N ₀ 2. 1.	N ₀ 3. 1.	N ₀ 4. 2.	N ₀ 5. 3.	N ₀ 6. 3.
N ₀ 7. 2.	N ₀ 8. 2.	N ₀ 9. 2.	N ₀ 10. 2.	N ₀ 11. 1.	N ₀ 12. 2.
N ₀ 13. 3.	N ₀ 14. 3.	N ₀ 15. 2.	N ₀ 16. 2.	N ₀ 17. 2.	N ₀ 18. 2.
N ₀ 19. 2.	N ₀ 20. 3.	N ₀ 21. 3.	N ₀ 22. 2.	N ₀ 23. 3.	N ₀ 24. 2.
N ₀ 25. 2.	N ₀ 26. 2.	N ₀ 27. 3.	N ₀ 28. 3.	N ₀ 29. 3.	N ₀ 30. 2.
N ₀ 31. 2.	N ₀ 32. 2.	N ₀ 33. 2.	N ₀ 34. 3.	N ₀ 35. 3.	N ₀ 36. 3.
N ₀ 37. 3.	N ₀ 38. 4.	N ₀ 39. 3.	N ₀ 40. 4.	N ₀ 41. 2.	N ₀ 42. 3.
N ₀ 43. 3.	N ₀ 44. 3.	N ₀ 45. 2.			

6. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

6.1. Основные понятия

Пусть имеем произвольную систему линейных уравнений

[illegible]

Здесь m – количество уравнений, а n – количество неизвестных. $x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные, которые надо определить. $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ – коэффициенты системы; $b_1, b_2, \dots, b_m$ – свободные члены. Здесь коэффициенты a_{ij} ($i \equiv \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$), b_i ($i \equiv \overline{1, m}$) – предполагаются известными числами. Индексы коэффициентов a_{ij} системы обозначают номера уравнения (i) и неизвестного (j), при котором стоит этот коэффициент, соответственно.

Неизвестные x_j ($j = \overline{1, n}$) входят в уравнение в первой положительной степени. Поэтому уравнения называются – линейными.

Определение. Система (6.1) называется однородной, если все её свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$), иначе – неоднородной.

Определение. Система (6.1) называется квадратной, если число m уравнений равно числу n неизвестных.

Определение. Решением системы (6.1) называется совокупность n чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ таких, что подстановка каждого c_i вместо x_i системы (6.1) обращает все её уравнения в тождества.

Определение. Система (6.1) называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у неё нет ни одного решения.

Совместная система вида (6.1) может иметь одно или более решений.

Определение. Совместная система вида (6.1) называется определенной, если она имеет единственное решение; если же у неё их бесконечное множество, то она называется неопределенной. Если уравнений больше, чем неизвестных, она называется переопределенной.

Определение. Если система неопределенна, то каждое её решение называется частным решением данной системы.

Определение. Совокупность всех частных решений называется общим решением неопределенной системы.

6.2. Формула Крамера

Рассмотрим вопрос о решении системы n линейных уравнений с n неизвестными. Для простоты записи ограничимся случаем $n = 4$, но приведенные ниже соображения будут иметь общий характер.

Итак, пусть дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases} \quad (6.2)$$

И пусть определитель этой системы, составленный из коэффициентов при неизвестных, отличен от нуля, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6.3)$$

Введем четыре определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}.$$

Где определитель Δ_1 , полученный из определителя Δ , путем замены первого столбца столбцом свободных членов; определитель Δ_2 , – из Δ , путем замены второго столбца столбцом свободных членов; аналогично, Δ_3 и Δ_4 , замены третьего и четвертого столбцов соответственно столбцом свободных членов.

Пусть $A_{11}, A_{21}, A_{31}, A_{41}$ – алгебраические дополнения первого столбца. Умножим первое уравнение системы (6.2) на A_{11} , второе на A_{21} , третье на A_{31} , четвертое на A_{41} и все сложим, получим

$$\begin{aligned} & (A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31} + A_{41}a_{41})x_1 + (A_{21}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32} + A_{41}a_{42})x_2 + \\ & + (A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33} + A_{41}a_{43})x_3 + (A_{11}a_{14} + A_{21}a_{24} + A_{31}a_{34} + A_{41}a_{44})x_4 = \\ & = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 + A_{41}b_4 \end{aligned} \quad (6.4)$$

По свойству 5 определителей (сумма произведений элементов какого-либо ряда на алгебраические дополнения элементов параллельного ряда равна нулю), выражения во второй, третьей и четвертой скобках равна нулю. А по свойству 4 определителей выражение в первой скобке равно определителю (6.2). А выражение в правой части есть определитель Δ_1 .

Т.о. выражение (6.4) примет вид

$$\Delta \cdot x_1 = \Delta_1.$$

И так как $\Delta \neq 0$, то

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Поступая аналогичным образом, получаем остальные неизвестные. Для нахождения неизвестного x_1 – умножаем каждое уравнение системы на алгебраические дополнения второго столбца определителя (6.3). Неизвестных x_3 и x_4 – умножаем на алгебраические дополнения третьего и четвертого столбцов, соответственно. Будем иметь

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta}.$$

В силу равноправности всех неизвестных приходим к следующему результату.

Теорема Крамера. Если определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система имеет единственное решение, причем каждое неизвестное равно дроби, знаменателем которой служит определитель системы, а числителем определитель, полученный из знаменателя заменой столбца коэффициентов при определяемом неизвестном столбцом свободных членов.

Формулы: $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, где $k = \overline{1, n}$ – называются формулами Крамера.

Пример: Найти решение системы по формулам Крамера. Для этого вычислим определитель системы:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x + y + 2z = 7 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}.$$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя удвоенный второй столбец к первому, а затем (в полученном определителе) второй столбец к третьему, найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 6 = 18 \neq 0.$$

Найдем $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя второй столбец к первому и третьему столбцам, получим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычитая удвоенную вторую строку из первой и третьей строк, получаем

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 40.$$
$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{38}{18} = \frac{19}{9}; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{40}{18} = \frac{20}{9}.$$

6.3. Матричная запись системы линейных уравнений

[illegible]
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2) матрицу-столбец из неизвестных

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix};$$

3) матрицу-столбец из свободных членов

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Умножим матрицу A на матрицу X , имеем

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{212}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_{21} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n = b_{m1} \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

Отсюда следует, что левые части системы (6.5) являются элементами матрицы–столбца $A \cdot X$. Правые части этой системы – элементы матрицы–столбца B . Но если соответствующие элементы матриц одного размера (здесь $m \times 1$) попарно равны, то равны и сами матрицы.

Таким образом,

$$A \cdot X = B \quad (6.8)$$

или

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Равенства (6.8) и (6.9) называют матричными уравнениями. Они дают запись системы (6.2) в матричной форме.

Пример

Записать в матричной форме систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение

6.4. Получение формул Крамера с помощью теории матриц

Рассмотрим систему (6.1) n линейных уравнений с n неизвестными

[illegible]

и пусть определитель этой системы

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Найдем при этих условиях решение системы. Обозначим через Δ_i ($i = \overline{1, n}$) определитель, полученный из определителя системы путем замены столбца коэффициентов при i -том неизвестном столбцом свободных членов, тогда, например:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n1} & \dots & b_n \end{vmatrix} \quad (6.10)$$

Запишем систему (6.1) в матричной форме

$$A \cdot X = B \quad (6.11)$$

Умножим обе части уравнения (6.10) слева на обратную матрицу для матрицы A :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Но по определению обратной матрицы, $A^{-1} \cdot A = E$, поэтому

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

В силу свойства единичной матрицы $E \cdot X = X$, следовательно,

$$X = A^{-1} \cdot B \quad (6.12)$$

Равенство (6.12) – матричная форма решения системы (6.9).

Но $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot A^*$, где A^* – союзная матрица матрице A , поэтому

$$X = \frac{1}{\Delta A} \cdot A^* \cdot B \quad (6.13)$$

(6.13) – ещё одна матричная форма решения системы (6.12).

Распишем равенство (6.13).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Перемножим матрицы A^* и B , тогда равенство (6.14) примет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + \dots A_{n1} \cdot b_n \\ A_{12} \cdot b_1 + A_{22} \cdot b_2 + \dots A_{n2} \cdot b_n \\ \dots \\ A_{1n} \cdot b_1 + A_{2n} \cdot b_2 + \dots A_{nn} \cdot b_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда, используя определение равенства двух матриц, имеем:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + \dots A_{n1} \cdot b_n}{\Delta A} \\ x_2 = \frac{A_{12} \cdot b_1 + A_{22} \cdot b_2 + \dots A_{n2} \cdot b_n}{\Delta A} \\ \dots \\ x_n = \frac{A_{1n} \cdot b_1 + A_{2n} \cdot b_2 + \dots A_{nn} \cdot b_n}{\Delta A} \end{cases}.$$

Но $A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + \dots A_{n1} \cdot b_n$ – разложение определителя Δ_1 (см. (6.10)) по элементам первого столбца, поэтому

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta A}.$$

Аналогично

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta A}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta A}.$$

Итак, формулы Крамера имеют вид:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta A} \\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta A} \\ \dots \\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta A} \end{cases} \quad (6.15)$$

Вывод. Если определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое можно найти либо матричным способом по формуле (6.13), либо с помощью формул Крамера (6.15).

Пример. Решить систему матричным способом

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Решение

Матричное решение системы имеет вид

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

В нашем случае

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу A^{-1} – обратную матрице A с помощью элементарных преобразований.

Будем учитывать, что если совершать над матрицей A элементарные преобразования и в том же порядке применять к единичной матрице E , того же размера, что и матрица A те же преобразования, то единичная матрица E преобразуется в обратную матрице A . Запишем матрицу A и матрицу E

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Вычтем из второго столбца удвоенный первый, получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Поменяем местами второй и третий столбцы

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Прибавим к третьему столбцу второй умноженный на (-3)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

Разделим третий столбец на (-5)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3/5 \end{array} \right)$$

Умножим третий столбец на (-2) и прибавим ко второму

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 \end{array} \right).$$

Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4/5 & 2/5 \\ 0 & 2/5 & -1/5 \\ 0 & -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Распишем матричное решение $X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4/5 & 2/5 \\ 0 & 2/5 & -1/5 \\ 0 & -1/5 & 3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Перемножим две последние матрицы, тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -36/5 & +16/5 \\ 0 & +18/5 & -8/5 \\ 0 & -9/5 & +24/5 \end{pmatrix}.$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, используя условия равенства двух матриц, имеем $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ – единственное решение заданной системы.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить системы матричным способом:

$$\text{№ 1} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9 \\ 3x_1 - 4x_2 = 5 \end{cases}$$

$$\text{№ 2} \quad \begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

$$\text{№ 3} \quad \begin{cases} 4x_1 + 7y - 13 = 0 \\ 5x + 8y + 14 = 0 \end{cases}$$

$$\text{№ 4} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$$

$$\text{№ 5} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\text{№ 6} \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

№ 7	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$	№ 8	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$
№ 9	$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$	№ 10	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$
№ 11	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -13 \end{cases}$	№ 12	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$
№ 13	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$	№ 14	$\begin{cases} 4x_1 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - 6x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_3 = 1 \end{cases}$
№ 15	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$	№ 16	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 5x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$
№ 17	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 = -3 \end{cases}$	№ 18	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 17 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$
№ 19	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$	№ 20	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \end{cases}$

Решить системы уравнений, используя формулы Крамера:

№ 21	$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 5y = 40 \end{cases}$	№ 22	$\begin{cases} ax - 3y = 1 \\ ax - 2y = 2 \end{cases}$
№ 23	$\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 7x + 4y = 8 \end{cases}$	№ 24	$\begin{cases} mx - ny = (m - n)^2 \\ 2x - y = n \end{cases} \text{ при } m \neq 2n$
№ 25	$\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ 2x + 7y = 81 \end{cases}$	№ 26	$\begin{cases} 3y - 4x = 1 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$
№ 27	$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x + 6y = 5 \end{cases}$	№ 28	$\begin{cases} 2x - \sqrt{3}y = 1 \\ x\sqrt{3} - 3y = \sqrt{3} \end{cases}$
№ 29	$\begin{cases} ax + by = c \\ bx - ay = d \end{cases}$	№ 30	$\begin{cases} \sqrt{5}x - 5y = \sqrt{5} \\ x + \sqrt{5}y = 5 \end{cases}$
№ 31	$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 0 \end{cases}$	№ 32	$\begin{cases} 2ax - 3by = 0 \\ 3ax - 6by = ab \end{cases}$

$$\text{№ 33} \quad \left. \begin{aligned} 7x + 2y + 3z &= 15 \\ 5x - 3y + 2z &= 15 \\ 10x - 11y + 5z &= 36 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{№ 34} \quad \left. \begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ x + 3z &= 16 \\ 5y - z &= 10 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{№ 35} \quad \left. \begin{aligned} x + y - 2z &= 6 \\ 2x + 3y - 7z &= 16 \\ 5x + 2y + z &= 16 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{№ 36} \quad \left. \begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 &= 10 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 &= -10 \\ 3x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{№ 37} \quad \left. \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 6 \end{aligned} \right\}$$

ОТВЕТЫ

$$\text{№ 1.} \quad \begin{aligned} x_1 &= 3; \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{№ 2.} \quad \begin{aligned} x_1 &= -1; \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{№ 3.} \quad \begin{aligned} x &= 2; \\ y &= -3 \end{aligned}$$

$$\text{№ 4.} \quad \begin{aligned} x &= 0; \\ y &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{№ 5} \quad \begin{aligned} x &= 2/13; \\ y &= 3/13. \end{aligned}$$

$$\text{№ 6.} \quad \begin{aligned} x_1 &= 1; \\ x_2 &= 4; \\ x_3 &= 3. \end{aligned}$$

$$\text{№ 7.} \quad \begin{aligned} x_1 &= -1; \\ x_2 &= 2; \\ x_3 &= 5. \end{aligned}$$

$$\text{№ 8.} \quad \begin{aligned} x_1 &= 2; \\ x_2 &= -3; \\ x_3 &= 4. \end{aligned}$$

$$\text{№ 9.} \quad \begin{aligned} x_1 &= 1; \\ x_2 &= -2; \\ x_3 &= 3. \end{aligned}$$

$$\text{№ 10.} \quad \begin{aligned} x_1 &= 1; \\ x_2 &= 2; \\ x_3 &= -2. \end{aligned}$$

$$\text{№ 11.} \quad \begin{aligned} x_1 &= -1; \\ x_2 &= 2; \\ x_3 &= 1. \end{aligned}$$

$$\text{№ 12.} \quad \begin{aligned} x_1 &= 2; \\ x_2 &= 1; \\ x_3 &= 3. \end{aligned}$$

$$\text{№ 13.} \quad \begin{aligned} x_1 &= 1; \\ x_2 &= 1; \\ x_3 &= 1. \end{aligned}$$

$$\text{№ 14.} \quad \begin{aligned} x_1 &= -5; \\ x_2 &= 29; \\ x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{№ 15.} \quad \begin{aligned} x_1 &= 2; \\ x_2 &= -2; \\ x_3 &= 3. \end{aligned}$$

$$\text{№ 16.} \quad \begin{aligned} x_1 &= 3; \\ x_2 &= -1; \\ x_3 &= 1. \end{aligned}$$

$$\text{№ 17.} \quad \begin{aligned} x_1 &= 2; \\ x_2 &= -1; \\ x_3 &= 1. \end{aligned}$$

$$\text{№ 18.} \quad \begin{aligned} x_1 &= 1; \\ x_2 &= 0; \\ x_3 &= -1; \\ x_4 &= 2. \end{aligned}$$

$$\text{№ 19.} \quad \begin{aligned} x_1 &= -1; \\ x_2 &= -1; \\ x_3 &= 0; \\ x_4 &= 1. \end{aligned}$$

$$\text{№ 20.} \quad \begin{aligned} x_1 &= 2; \\ x_2 &= 1; \\ x_3 &= 1; \\ x_4 &= 1. \end{aligned}$$

$$\text{№ 21.} \quad \begin{aligned} x &= 5; \\ y &= -4. \end{aligned}$$

$$\text{№ 22.} \quad \begin{aligned} x &= 4/a; \\ y &= 1. \end{aligned}$$

$$\text{№ 23.} \quad \begin{aligned} x &= 0; \\ y &= 2. \end{aligned}$$

$$\text{№ 24.} \quad \begin{aligned} x &= m; \\ y &= 2m - n. \end{aligned}$$

N₀ 27. $x = 17/4$;
 $y = -7/6$.

N₀ 30. $x = 3;$
 $y = 0,4\sqrt{5}.$

№ 33. $x = 2;$
 $y = -1;$
 $z = 1.$

$$\begin{array}{l} x_1 = 1; \\ \text{N}_9 \text{ 36. } x_2 = -1; \\ x_3 = 2; \\ x_4 = -2. \end{array}$$

N_o 37. $x_1 = 2;$
 $x_2 = x_3 = x_4 = 0.$

Теорема Кронекера - Капелли. Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы A равен рангу расширенной матрице $\bar{A}$.

Пример 1. Исследовать на совместность систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}.$$

Решение

Составим матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найдем её ранг методом окаймления.

Выбираем минор 2-го порядка, отличный от нуля:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 10 = 7 \neq 0.$$

Вычисляем окаймляющие миноры

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 7 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

следовательно, $\text{rang} A = 2$.

Составим расширенную матрицу

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Её ранг также найдем методом окаймления.

Для этого достаточно вычислить ещё один окаймляющий минор минора

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

А именно:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 7 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = -14 \neq 0,$$

Система несовместна.

Исследовать систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1. \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

Составляем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

И находим её ранг методом окаймления. Для этого выбираем минор 2-го порядка, отличный от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Очевидно, что все окаймляющие миноры для выбранного определителя равны нулю, поэтому $\text{rang} A = 2$.

Составим расширенную матрицу

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array} \right).$$

Её ранг будет равен рангу матрицы A , так как при составлении матрицы $\bar{A}$ добавили столбец, элементы которого равны соответствующим элементам предыдущего столбца. Таким образом, система совместна.

8. ТЕОРЕМА О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ СОВМЕСТНЫХ СИСТЕМ

Пусть имеем совместную систему линейных уравнений

[illegible]

Так как эта система совместна, то $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A} = k$.

Назовем число k рангом совместной системы.

Теорема. 1. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

2. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

Рассмотрим методы решения совместных систем.

1. Пусть ранг совместной системы равен числу неизвестных и равен числу уравнений $k = n = m$. В этом случае единственное решение находят по формулам Крамера или матричным способом.

2. Пусть ранг совместной системы равен числу неизвестных, но меньше числа уравнений $k = n < m$. В этом случае необходимо в системе оставить лишь те уравнения, коэффициенты которых составляют базисный минор матрицы A системы, а затем искать единственное решение либо по формулам Крамера, либо матричным способом.

3. Пусть ранг совместной системы меньше числа неизвестных, $k < n, (k \leq m)$, тогда:

- 1) в заданной системе выбираем k уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор матрицы A , а остальные уравнения отбрасываем;

- 2) неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор, так называемые главные неизвестные, оставляем, в левой части системы, а остальные неизвестные, называемые свободными, переносим в правую часть;

- 3) по формулам Крамера находим выражение главных неизвестных через свободные. Полученные равенства представляют собой общее решение системы;

- 4) придавая в общем решении свободным неизвестным конкретные числовые значения, находим конкретные числовые значения главных неизвестных. Совокупность числовых значений и главных, и свободных неизвестных дает определенное частное решение системы.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_3 = 9 \end{cases}.$$

Решение

Установим, является ли данная система совместной. Для этого найдем ранги основной A и расширенной $\bar{A}$ матриц методом окаймления.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Её ранг:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

следовательно, $\text{rang} A = 3$.

Расширенная матрица

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти ранг этой матрицы, необходимо для её минора 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

вычислить единственный окаймляющий:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \\ 2 & 0 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

Следовательно, и $\text{rang} \bar{A} = 3$.

Система совместна. Выясним, сколько решений она имеет. Для этого сравним ранг совместной системы, $k = 3$, с числом неизвестных $n = 3$. Эти числа равны, поэтому система имеет единственное решение. Найдем его.

Ранг системы $k = 3$, меньше числа уравнений, $m = 4$, поэтому в начале упростим систему.

Базисным минором матрицы A служит

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

Потому в заданной системе оставляем первых три уравнения, а четвертое отбрасываем. В результате имеем систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Находим её решение по формулам Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 11 & 0 & 2 \\ 9 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 15.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = -5.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 11 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 5.$$

откуда

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

Таким образом, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ – единственное решение системы.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение.

Установим, является ли данная система совместной.

Находим ранг матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

методом окаймления:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 8 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, $\text{rang} A = 2$.

Найдем тем же методом ранг расширенной матрицы

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим недостающий окаймляющий минор для $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 8 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, и $\text{rang } \bar{A} = 2$.

Система совместна, но будет иметь бесчисленное множество решений, так как ранг системы $k = 2$ меньше числа неизвестных $n = 3$. Найдем общее решение системы.

Базисным минором матрицы A является $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, поэтому в заданной системе оставим только два первых уравнения

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}.$$

Коэффициенты при x_1 и x_2 составляют базисный минор, следовательно, x_1 и x_2 — главные неизвестные.

В обоих уравнениях полученной системы оставим в левой части главные неизвестные x_1 и x_2 , а свободное x_3 перенесем в правую часть, тогда

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 - 3x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 = 2 + 4x_3 \end{cases}.$$

Решаем эту систему по формулам Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 - 3x_3 & -2 \\ 2 + 4x_3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6x_3 + 4 + 8x_3 = 6 + 2x_3.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 - 3x_3 \\ 3 & 2 + 4x_3 \end{vmatrix} = 2 + 4x_3 - 3 + 9x_3 = -1 + 13x_3.$$

Поэтому

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2x_3 + 6}{8} = \frac{x_3 + 3}{4};$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{13x_3 - 1}{8}.$$

Итак, $x_1 = \frac{x_3 + 3}{4}$, $x_2 = \frac{13x_3 - 1}{8}$ – общее решение заданной системы.

Найдем одно из частных решений. Пусть $x_3 = 1$, тогда

$$x_1 = \frac{1+3}{4} = 1, \text{ а } x_2 = \frac{13-1}{8} = \frac{3}{2},$$

следовательно, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = 1$ – одно из частных решений системы.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

№ 1 Определить, при каком значении a система уравнений имеет ненулевое решение:

$$\left. \begin{array}{l} 13x + 2y = 0 \\ 5x + ay = 0 \end{array} \right\}.$$

№ 2 Определить, при каких значениях a и b система уравнений

$$\left. \begin{array}{l} 3x - ay = 1 \\ 6x + 4y = b \end{array} \right\}:$$

- 1) имеет единственное решение;
- 2) не имеет решений;
- 3) имеет бесконечное множество решений.

Исследовать и решить следующие системы уравнений:

$$\text{№ 3} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 4} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 5} \quad \left. \begin{array}{l} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 6} \quad \left. \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 = -5 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 7} \quad \left. \begin{array}{l} 7x_1 - x_2 - 4x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 8} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 7x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 9} \quad \left. \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = -3 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 10} \quad \left. \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 11} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 13} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 15} \quad \left. \begin{array}{l} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 17} \quad \left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 19} \quad \left. \begin{array}{l} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 21} \quad \left. \begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 - 8 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 - 9 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 7 = 0 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 - 12 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 23} \quad \left. \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 25} \quad \left. \begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 27} \quad \left. \begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 12} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = -5 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 14} \quad \left. \begin{array}{l} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 16} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 18} \quad \left. \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 20} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 22} \quad \left. \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 24} \quad \left. \begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - 20 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 11 = 0 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 9x_4 - 40 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 - 37 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 26} \quad \left. \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8 \end{array} \right\}$$

$$\text{№ 28} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 1 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 - 4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 - 5 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{№ 29} \left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{array} \right\} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{№ 30} \left. \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 + 3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 - 1 = 0 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 + 3 = 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

ОТВЕТЫ

1) $a \neq -2$;

№ 1. $a = 10/13$. № 2. 2) $a = -2$, $b \neq 2$; № 3. Несовместна.

3) $a = -2$, $b = 2$.

$$\begin{array}{lll} \text{№ 4.} & x_1 = \frac{11-x_3}{5}; & \text{№ 5.} \quad x_1 = -3; \\ & x_2 = \frac{2x_3-2}{5}. & \text{№ 6.} \quad x_1 = -1; \\ & & x_2 = 2; \\ & & x_3 = 1. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{№ 7. Несовместна.} & \text{№ 8.} \quad \begin{array}{l} x_1 = -\frac{5}{11}x_4 + 15/17; \\ x_2 = 0; \\ x_3 = \frac{4}{11}x_4 - 1/11. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{№ 9.} & \begin{array}{l} x_1 = 11/3 - \frac{8}{3}x_3; \\ x_2 = 4/3 - \frac{1}{3}x_3. \end{array} & \begin{array}{ll} \text{№ 10. Несовместна.} & \text{№ 11.} \\ & \begin{array}{l} x_1 = \frac{2x_3+6}{8}; \\ x_2 = \frac{13x_3-1}{8}. \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{№ 12.} \quad \begin{array}{l} x_3 = 2x_2 - x_1; \\ x_4 = 1. \end{array} & \text{№ 13.} \quad \begin{array}{l} x_1 = 1; \\ x_2 = 2; \\ x_3 = 3. \end{array} & \text{№ 14. Несовместна.} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{№ 15.} \quad \begin{array}{l} x_1 = \frac{x_3-9x_4-2}{11}; \\ x_2 = \frac{-5x_3+x_4+10}{11}. \end{array} & \text{№ 16. Несовместна.} & \text{№ 17.} \quad \begin{array}{l} x_1 = 1; \\ x_2 = 2; \\ x_3 = -2. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{№ 18.} \quad \begin{array}{l} x_1 = 1; \\ x_2 = 2; \\ x_3 = 1. \end{array} & \text{№ 19. Несовместна.} & \text{№ 20.} \quad \begin{array}{l} x_3 = 2x_2 - x_1; \\ x_4 = 1. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{№ 21.} \quad \begin{array}{l} x_1 = 3; \\ x_2 = 2; \\ x_3 = 1. \end{array} & \text{№ 22.} \quad \begin{array}{l} x_1 = 1; \\ x_2 = 1; \\ x_3 = -1; \\ x_4 = -1. \end{array} & \text{№ 23.} \quad \begin{array}{l} x_1 = -2; \\ x_2 = 0; \\ x_3 = 1; \\ x_4 = -1. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{№ 24.} & \begin{array}{l} x_1 = 1; \\ x_2 = 2; \\ x_3 = 2; \\ x_4 = 0. \end{array} & \begin{array}{l} x_1 = 2; \\ x_2 = -2; \\ x_3 = 1; \\ x_4 = -1. \end{array} \\ \text{№ 27.} & \begin{array}{l} x_1 = -\frac{9}{8}x_3 - 27/8; \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 - 5/4. \end{array} & \begin{array}{l} x_2 = 1 + x_1 - x_4; \\ x_3 = 1. \end{array} \\ \text{№ 30.} & \begin{array}{l} x_1 = -8; \\ x_2 = x_4 + 3; \\ x_3 = 2x_4 + 6. \end{array} & \text{№ 29. Несовместна.} \end{array}$$

9. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ГАУССА (МЕТОДОМ ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ)

9.1. Понятие о ступенчатой системе

Ступенчатой системой (или системой ступенчатого вида) называют систему линейных уравнений вида

[illegible]

где $k \leq n$, $a_{ii} \neq 0, i = \overline{1, k}$.

Коэффициенты a_{ii} называются главными, или ведущими элементами системы.

Например, система

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 3 \\ 3x_2 - x_3 + x_5 = 5 \\ x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1 \\ x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

имеет ступенчатый вид.

Если $k = n$, то система (9.1) называется треугольной. Любая треугольная система является определенной. Если $k < n$, то система (9.1) неопределенна. В этом случае k главных неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_k$ могут быть выражены через $n - k$ свободных.

9.2. Метод Гаусса

Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных заданная система преобразуется в ступенчатую (в частности, треугольную).

Пусть имеем произвольную линейную систему

[illegible]

и пусть главные коэффициенты системы $a_{ij} \neq 0, (i = \overline{1, m})$.

Преобразуем систему (9.2), исключив неизвестное x_1 из всех уравнений, кроме первого. Для этого обе части первого уравнения умножим на число $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и вычтем почленно из второго уравнения; затем обе части первого уравнения, умноженные на число $\frac{a_{31}}{a_{11}}$, вычтем из соответствующих частей третьего уравнения и т. д.

Аналогичным образом исключим неизвестное x_2 из всех уравнений, кроме второго, и т. д.

В результате таких преобразований получим либо совместную ступенчатую систему, эквивалентную заданной, либо придем к несовместной ступенчатой системе, в которой одно из уравнений имеет отличный от нуля свободный член, а все коэффициенты левой части равны нулю. В этом случае система (9.2) также является несовместной. Таким образом, решение исходной системы (9.2) сводится к решению ступенчатой.

Замечания: 1. Метод Гаусса применим тогда и только тогда, когда все главные элементы системы a_{ii} отличны от нуля.

2. В процессе приведения заданной системы (9.2) к ступенчатому виду могут получаться уравнения вида $0 = 0$. Такие уравнения можно отбрасывать, так как это приводит к системе, эквивалентной прежней.

3. При практическом решении линейных систем методом Гаусса удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя все преобразования над ее строками. Последовательно получающиеся в ходе преобразования матрицы обычно соединяют знаком эквивалентности.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решение

Составим расширенную матрицу заданной системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -5 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

Проведем последовательно элементарные преобразования над строками так, чтобы все элементы, расположенные ниже главной диагонали, стали бы равными нулю. Для этого сначала поменяем местами первую и вторую строки.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & -5 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 6 & 0 \end{array} \right).$$

Вычтем из второй строки удвоенную первую, а затем из четвертой вычтем первую.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 7 & -5 & 13 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 12 & -9 \end{array} \right).$$

Вычтем из второй строки третью, умноженную на 3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 12 & -9 \end{array} \right).$$

Вычтем из третьей строки удвоенную вторую, а затем из четвертой – вторую умноженную на 7

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 7 & -37 & -44 \end{array} \right).$$

Вычтем из четвертой строки удвоенную третью

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -14 \end{array} \right).$$

Поменяем местами третью и четвертую строки

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & -12 & -15 \end{array} \right).$$

Вычтем из четвертой строк утроенную третью

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 27 \end{array} \right).$$

Окончательно, разделим четвертую строку на 27

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

В результате всех этих преобразований заданная система приводится к треугольному виду:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 5 \\ x_3 - 13x_4 = -14 \\ x_4 = 1 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения имеем $x_4 = 1$. Подставим это значение в третье уравнение и найдем из него, что $x_3 = -1$. Далее, из второго уравнения находим, что $x_2 = -4$ и, наконец, из первого $x_1 = 3$. Итак, заданная система имеет единственное решение:

$$x_1 = 3, x_2 = -4, x_3 = -1, x_4 = 1.$$

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 10 \end{cases}.$$

Решение

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & -12 & 10 \end{array} \right)$$

Умножим первую строку на $\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & -12 & 10 \end{array} \right).$$

Умножим элементы первой строки на (-4) и сложим с соответствующими элементами второй строки; затем на (-6) и сложим с элементами третьей строки; окончательно, умножим на (-2) и сложим с элементами четвертой строки.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -15 & 9 \end{array} \right).$$

Сложим вторую строку с четвертой, а затем с пятой умножив на (-2) и на (-3) , соответственно:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

В результате преобразований заданная система свелась к ступенчатой, которая после отбрасывания двух уравнений вида $0=0$ превращается в следующую:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 = \frac{1}{2} \\ x_3 - 5x_4 = 3 \end{cases}$$

Здесь неизвестные x_1 и x_3 можно считать главными, а x_2 и x_4 — свободными. Из второго уравнения найдем выражение x_3 через x_4 :

$$x_3 = 3 + 5x_4.$$

Затем, подставив x_3 в первое уравнение, найдем выражение x_1 через x_2 и x_4 :

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}(3 + 5x_4) - \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}.$$

или

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 + x_4 + 2.$$

Следовательно, общее решение системы можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 + x_4 + 2 \\ x_3 = 5x_4 + 3 \end{cases}.$$

Если положить, например, $x_2 = -2$, $x_4 = 1$, то найдем одно из частных решений этой системы

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 8, \quad x_4 = 1.$$

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 3x_1 \quad \quad \quad + 3x_3 - 10x_4 = 8 \end{cases}.$$

Решение

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{array} \right).$$

Сложим первую строку со второй, затем с третьей и окончательно, с четвертой, предварительно умножив ее на (-3) , на (2) и на (-3) , соответственно, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Вторую строку умножим на $\left(\frac{1}{9}\right)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{14}{9} & \frac{13}{9} & -1 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Сложим вторую строку с третьей и четвертой, предварительно умножив ее на (3) и на (-3) , соответственно:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{14}{9} & \frac{13}{9} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{20}{3} & 6 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{10}{3} & 4 \end{array} \right).$$

Умножим третью строку на $\left(-\frac{1}{2}\right)$, а затем сложим с четвертой:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{14}{9} & \frac{13}{9} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{20}{3} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

В результате проведенных преобразований заданная система свелась к ступенчатой несовместной:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_2 - \frac{14}{9}x_3 + \frac{13}{9}x_4 = -1 \\ \frac{10}{3}x_3 - \frac{20}{3}x_4 = 6 \\ 0 = 1 \end{array} \right. .$$

Следовательно, и исходная система несовместна.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить системы методом Гаусса:

$$\text{№ 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 = -3 \end{array} \right.$$

$$\text{№ 2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{array} \right.$$

$$\text{№ 3} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{№ 4} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \end{array} \right.$$

$$\text{№ 5} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -1 \end{array} \right.$$

$$\text{№ 6} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{array} \right.$$

$$\text{№ 7} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\text{№ 9} \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2 \\ 2x_2 + 3x_3 + 9x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7 \end{cases}$$

$$\text{№ 11} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 17 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$$

$$\text{№ 13} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\text{№ 15} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8 \end{cases}$$

$$\text{№ 17} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{№ 19} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}$$

$$\text{№ 21} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 15 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 17 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 14 \end{cases}$$

$$\text{№ 23} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 12 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$$

$$\text{№ 8} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

$$\text{№ 10} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 9 \end{cases}$$

$$\text{№ 12} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = -8 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -15 \end{cases}$$

$$\text{№ 14} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\text{№ 16} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -7 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 = -7 \end{cases}$$

$$\text{№ 18} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_4 = 1 \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\text{№ 20} \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 14 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -8 \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{№ 22} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 14 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

$$\text{№ 24} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

ОТВЕТЫ

- | | | |
|--|--|---|
| <p>№ 1. $x_1 = 1/6;$
 $x_2 = -1;$
 $x_3 = 5/6.$
 $x_1 = 1;$</p> | <p>№ 2. $x_1 = 1;$
 $x_2 = 2;$
 $x_3 = 3.$
 $x_1 = 1;$</p> | <p>№ 3. Несовместна.</p> |
| <p>№ 4. $x_2 = 2;$
 $x_3 = 1.$</p> | <p>№ 5. $x_2 = -1;$
 $x_3 = 2.$</p> | <p>№ 6. $x_1 = -1;$
 $x_2 = 2;$
 $x_3 = 1.$
 $x_1 = 0;$</p> |
| <p>№ 7. Несовместна.</p> | <p>№ 8. $x_1 = -1 + 2x_3;$
 $x_2 = 1 + x_3.$</p> | <p>№ 9. $x_2 = 2;$
 $x_3 = 1/3;$
 $x_4 = -3/2.$
 $x_1 = 1;$</p> |
| <p>№ 10. $x_1 = 1;$
 $x_2 = -2;$
 $x_3 = 2;$
 $x_4 = 1.$
 $x_1 = -2;$</p> | <p>№ 11. $x_1 = 1;$
 $x_2 = 0;$
 $x_3 = -1;$
 $x_4 = 2.$</p> | <p>№ 12. $x_2 = 2;$
 $x_3 = 5;$
 $x_4 = -2.$</p> |
| <p>№ 13. $x_2 = 5;$
 $x_3 = -3;$
 $x_4 = 1.$
 $x_1 = 2;$</p> | <p>№ 14. $x_1 = -17x_3 + 29x_4 + 5;$
 $x_2 = 10x_3 - 17x_4 - 2.$</p> | <p>№ 15. Несовместна.</p> |
| <p>№ 16. $x_2 = -1;$
 $x_3 = 0;$
 $x_4 = -2.$
 $x_1 = -1;$</p> | <p>№ 17. $x_1 = 2;$
 $x_2 = 1;$
 $x_3 = 0;$</p> | <p>№ 18. $x_1 = -4;$
 $x_2 = 0;$
 $x_3 = 7;$
 $x_4 = -13.$
 $x_1 = 1;$</p> |
| <p>№ 19. $x_2 = 3;$
 $x_3 = -2;$
 $x_4 = 2.$</p> | <p>№ 20. $x_1 = 1;$
 $x_2 = -1;$
 $x_3 = 0;$
 $x_4 = -2.$
 $x_1 = 2;$</p> | <p>№ 21. $x_2 = 2;$
 $x_3 = -1;$
 $x_4 = 4.$
 $x_1 = -8;$</p> |
| <p>№ 22. $x_1 = 1;$
 $x_2 = 2;$
 $x_3 = 3;$
 $x_4 = 0.$</p> | <p>№ 23. $x_2 = 1;$
 $x_3 = -1;$
 $x_4 = 1.$
 $x_5 = 3$</p> | <p>№ 24. $x_2 = 3;$
 $x_3 = 6;$
 $x_4 = 0.$</p> |

Теорема. Однородная система линейных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных, имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю.

11. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

На практике достаточно часто приходится решать однородные системы двух линейных уравнений с тремя неизвестными. Получим более простой способ решения таких систем.

Пусть имеем однородную систему двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases} \quad (11.1)$$

и пусть ранг этой системы равен 2.

Составим матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Так как ранг системы равен 2, то базисный минор матрицы A является определителем 2-го порядка. Пусть для определенности базисным минором служит

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

Тогда для получения решения системы (11.1) свободное неизвестное x_3 перенесем в её правую часть.

Имеем

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = -a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = -a_{23}x_3 \end{cases},$$

откуда

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} -a_{13}x_3 & a_{12} \\ -a_{23}x_3 & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_3; \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}x_3 \\ a_{21} & -a_{23}x_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot x_3. \end{aligned}$$

и, следовательно, по формулам Крамера общее решение системы

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \cdot x_3;$$

$$x_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \cdot x_3.$$

Введем обозначение

$$\frac{x_3}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = t.$$

В результате общее решение системы (11.1) примет вид

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t, \quad x_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t, \quad x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot t,$$

или, если обозначить

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

то

$$x_1 = \delta_1 \cdot t, \quad x_2 = -\delta_2 \cdot t, \quad x_3 = \delta_3 \cdot t,$$

где $-\infty < t < \infty$.

Отметим, что миноры d_1 , d_2 и d_3 получаются при помощи поочередного вычеркивания соответствующих столбцов матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}.$$

Решение

Составляем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

Её строки непропорциональны, поэтому $\text{rang} A = 2$.

Находим миноры d_1 , d_2 и d_3 :

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 14 - 5 = 9; \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -21 - 4 = -25;$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 8 = 23.$$

Следовательно, общее решение системы будет

$$x_1 = 9t; \quad x_2 = 25t; \quad x_3 = 23t, \text{ где } -\infty < t < \infty.$$

Замечание. Если ранг матрицы A равен единице, то, очевидно, соответствующие коэффициенты системы (11.1) пропорциональны и, следовательно, эта система сводится к одному уравнению

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0.$$

Откуда, полагая, например, что $a_{11} \neq 0$, получаем общее решение системы в виде

$$x_1 = -\frac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{a_{11}}.$$

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}.$$

Решение

Соответствующие коэффициенты системы пропорциональны, поэтому она сводится к одному уравнению.

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0.$$

Откуда $x_1 = 2x_2 - 2x_3$ – общее решение системы.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить следующие однородные системы:

$$\text{№ 1} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\text{№ 2} \quad \begin{cases} 5x_1 - 4x_2 = 0 \\ 8x_2 - 10x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{№ 3} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{№ 4} \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{№ 5} \quad \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{№ 6} \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{№ 7} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{№ 8} \quad \begin{cases} x_2 = -4x_1 \\ x_1 + x_3 = 5x_2 \end{cases}$$

$$\text{№ 9} \quad \begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{№ 10} \quad \begin{cases} x = x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 + 6x_3 = 3x_2 \end{cases}$$

$$\text{№ 11} \quad \begin{cases} x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0 \\ 21x_2 - 3x_1 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{№ 12} \quad \begin{cases} x_1 - 0,5x_2 + 0,3x_3 = 0 \\ 0,2x_1 - x_2 - 0,4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{№ 13} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1}{2} - \frac{x_3}{3} = 0 \\ x_1 - \frac{x_2}{4} + \frac{2}{3}x_3 = 0 \end{array} \right. & \text{№ 14} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} - \frac{2}{3}x_3 = 0 \end{array} \right. \\
\text{№ 15} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \end{array} \right. & \text{№ 16} \left\{ \begin{array}{l} ax = 0 \\ x + y = 0 \text{ — где } a \text{ параметр.} \\ x + z = 0, \end{array} \right. \\
\text{№ 17} \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \right. & \text{№ 18} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{array} \right. \\
\text{№ 19} \left\{ \begin{array}{l} 11x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 7x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 11x_2 + 5x_3 - 12x_4 = 0 \end{array} \right. & \text{№ 20} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0 \end{array} \right. \\
\text{№ 21} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{array} \right. & \text{№ 22} \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{array} \right. \\
\text{№ 23} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{array} \right. & \text{№ 24} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 = 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{array} \right. \\
\text{№ 25} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{array} \right. &
\end{array}$$

ОТВЕТЫ

$$\begin{array}{ll}
\text{№ 1.} \quad \begin{array}{l} x = 0; \\ y = 0. \end{array} & \text{№ 2.} \quad x_1 = \frac{4}{5}x_2. \\
\text{№ 3.} \quad \begin{array}{l} x_1 = 7t; \\ x_2 = 5t; \\ x_3 = 3t(-\infty < t < \infty). \\ x_1 = -10t; \end{array} & \text{№ 4.} \quad \begin{array}{l} x_1 = 2t; \\ x_2 = t; \\ x_3 = t(-\infty < t < \infty). \\ x_1 = 15t; \end{array} \\
\text{№ 5.} \quad \begin{array}{l} x_2 = -4t; \\ x_3 = 13t(-\infty < t < \infty). \end{array} & \text{№ 6.} \quad \begin{array}{l} x_2 = t; \\ x_3 = 11t(-\infty < t < \infty). \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{№ 7. } x_1 = 2x_2 - x_3, & \text{№ 8. } \begin{array}{l} x_1 = t; \\ x_2 = -4t; \\ x_3 = -21t(-\infty < t < \infty). \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{№ 9. } \begin{array}{l} x_1 = 4t; \\ x_2 = 6t; \\ x_3 = -10t(-\infty < t < \infty). \end{array} & \text{№ 10. } x_1 = x_2 - 2x_3. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{№ 11. } x_1 = 7x_2 - 2x_3, & \text{№ 12. } \begin{array}{l} x_1 = 5t; \\ x_2 = 4,6t; \\ x_3 = -9t(-\infty < t < \infty). \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{№ 13. } \begin{array}{l} x_1 = 2t; \\ x_2 = 16t; \\ x_3 = 3t(-\infty < t < \infty). \end{array} & \text{№ 14. } x_2 = x_1 + 2x_3. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{№ 15. } \begin{array}{l} x_1 = 17t; \\ x_2 = 2t; \\ x_3 = -7t(-\infty < t < \infty). \end{array} & \text{№ 16. } \begin{array}{l} x = 0, y = 0, z = 0 \text{ } npu \text{ } a \neq 0; \\ x = t, y = -t, z = -t \text{ } npu \text{ } a = 0. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{№ 17. } \begin{array}{l} x_1 = 0; \\ x_2 = 0; \\ x_3 = 0. \end{array} & \text{№ 18. } \begin{array}{l} x_3 = -\frac{5}{2}x_1 + 5x_2; \\ x_4 = \frac{7}{2}x_1 - 7x_2. \end{array} & \text{№ 19. } \begin{array}{l} x_1 = 0; \\ x_2 = 0; \\ x_3 = 3; \\ x_4 = 0. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{№ 20. } \begin{array}{l} x_1 = -\frac{4}{7}x_3; \\ x_2 = -\frac{1}{7}x_3. \end{array} & \text{№ 21. } \begin{array}{l} x_1 = 0; \\ x_2 = 0; \\ x_3 = 0; \\ x_4 = 0. \end{array} & \text{№ 22. } \begin{array}{l} x_1 = \frac{3x_3 - 13x_4}{17}; \\ x_2 = \frac{19x_3 - 20x_4}{17}. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{№ 23. } \begin{array}{l} x_1 = -x_3 + \frac{7}{6}x_5; \\ x_2 = x_3 + \frac{5}{6}x_5; \\ x_4 = \frac{1}{3}x_5. \end{array} & \text{№ 24. } \begin{array}{l} x_1 = x_2 = x_3 = 0; \\ x_4 = x_5. \end{array} & \text{№ 25. } \begin{array}{l} x_1 = 8x_3 - 7x_4; \\ x_2 = 5x_4 - 6x_3. \end{array} \end{array}$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

Задание 1

Вычислить определители:

$$1.1. \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$1.4. \begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$1.7. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$1.10. \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$1.13. \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$1.16. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$1.19. \begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$1.22. \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$1.2. \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$1.5. \begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$1.8. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$1.11. \begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$$

$$1.14. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$1.17. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$1.20. \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$1.23. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$1.3. \begin{vmatrix} 2 & 7 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$1.6. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$1.9. \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$1.12. \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$1.15. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$1.18. \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$1.21. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$1.24. \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$1.25. \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$1.28. \begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$1.26. \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$1.29. \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$1.27. \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$1.30. \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Задание 2

Даны две матрицы A и B и числа a и b . Найти:

а) $C = a \cdot A + b \cdot B$;

б) AB ;

в) BA ;

г) $f(A)$, если $f(x) = x^2 + bx + a$.

$$2.1. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 4, b = -4.$$

$$2.2. A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad a = -1, b = 2.$$

$$2.3. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = 3, b = -1.$$

$$2.4. A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad a = 0,5, b = -1.$$

$$2.5. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 3, b = -4.$$

$$2.6. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = 5, b = -4.$$

$$2.7. \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad a = -3, b = 1, 5.$$

$$2.8. \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad a = 3, b = -1.$$

$$2.9. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad a = 0, 5; b = -2.$$

$$2.10. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad a = -1; b = -2.$$

$$2.11. \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad a = -0, 5; b = 2.$$

$$2.12. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}, \quad a = 1, 5; b = -2.$$

$$2.13. \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = -1, 5; b = 2.$$

$$2.14. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad a = 1; b = -2, 5.$$

$$2.15. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad a = -2, 5; b = -1.$$

$$2.16. A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad a = 3; b = -4.$$

$$2.17. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = -3; b = 4.$$

$$2.18. A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a = 3; b = -2.$$

$$2.19. A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad a = -3; b = 2.$$

$$2.20. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a = 5; b = -3.$$

$$2.21. A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = -5; b = 3.$$

$$2.22. A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad a = 1, 5; b = -3, 5.$$

$$2.23. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad a = -3, 5; b = 1, 5.$$

$$2.24. A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad a = -3, b = 1, 5.$$

$$2.25. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = 5, b = -4.$$

$$2.26. A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad a=3, b=-4.$$

$$2.27. A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a=0,5, b=-1.$$

$$2.28. A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad a=3, b=-1.$$

$$2.29. A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad a=-1, b=2.$$

$$2.30. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad a=4, b=-4.$$

Задание 3

Найти матрицу, обратную данной:

$$\text{№3.1.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.2.} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{№3.3.} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.4.} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.5.} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.6.} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.7.} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.8.} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.9.} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.10.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.11.} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.12.} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.13.} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.14.} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.15.} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.16.} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.17.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.18.} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.19.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.20.} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.21.} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.22.} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.23.} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.24.} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.25.} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.26.} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.27.} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.28.} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.29.} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -7 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{№ 3.30.} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 4

Исследовать и решить данные системы по формулам Крамера или методом Гаусса.

Если система совместна, но не определена, то найти общее решение и указать одно из частных решений.

№ 4.1

$$1. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 12 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 8 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 = 5 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.2

$$1. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = -7 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 8 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.3

$$1. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.4

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.5

$$1. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -7 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.6

$$1. \begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -8 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -6 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.7

$$1. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 11 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.8

$$1. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_3 = 7 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.9

$$1. \begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.10

$$1. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = -7 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.11

$$1. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -6 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

№ 4.12

$$1. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 - 6x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.13

$$1. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -6 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.14

$$1. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.15

$$1. \begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -6 \\ x_1 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

№ 4.16

$$1. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -6 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 6x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 3x_1 = x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

№ 4.17

$$1. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

№ 4.18

$$1. \begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -6 \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 4 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.19

$$1. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

№ 4.20

$$1. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 9 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.21

$$1. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 7x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.22

$$1. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -7 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.23

$$1. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

№ 4.24

$$1. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_3 = -6 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 11 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -9 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.25

$$1. \begin{cases} 7x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -8 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

№ 4.26

$$1. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

$$3). \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -7 \\ x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$4). \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.27

$$1). \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$$

$$2). \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$3). \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$4). \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.28

$$1). \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

$$2). \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

$$3). \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

$$4). \begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.29

$$1). \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

$$2). \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$3). \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$4). \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

№ 4.30

$$1). \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

$$2). \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$$3). \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -6 \end{cases}$$

$$4). \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов.-М.:Физматлит,2009.- 312 с.
2. Блох Э.Л., Лошинский Л.И., Турин В.Я. Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения. - М.: Высшая школа, 1971. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М.: Наука, 1972. - Т.П.
3. Бурмистров Б.Н., Секаева Л.Р.. Элементы линейной алгебры и аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве: учеб. пособие / Б.Н. Бурмистров, Л.Р. Секаева - Казань: Изд-во Казан. гос.ун-та, 2008. - 81 с.
4. Гулиев Р.Б., Арефьев А.В. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учебное пособие. - СПб.: Университет при МПА ЕвразЭС, 2021. - 142 с.
5. Ильин В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Поздняк. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Часть IV. – Харьков: ХГУ, 1966.
6. Минорский, В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для вузов / В.П. Минорский. - М.: Наука, 2004. - 360 с.
7. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: учебник: в 2 частях. Часть 2 / Д. Т. Письменный. – 11-е изд. – Москва: Айрис-Пресс, 2015. – 252 с.
8. Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия. - М.: Физматлит, 2009. - 512 с.
9. Шерстнева А.И., Янущик О.В., Пахомова Е.Г., Имас О.Н. Лекции по высшей алгебре. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. - 88 с.
10. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике / В.С. Шипачев. - М.: Высшая школа, 2003. – 304 с.

В авторской редакции