

УДК 519.873

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОФИЛАКТИКИ ДЛЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ЯЧЕЙКИ

Глеч С.Г.

Построена полумарковская модель с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний технологической ячейки с учетом проведения профилактики. Получены приближенные выражения для основных стационарных характеристик надежности, которые позволяют находить оптимальные моменты проведения профилактики.

При решении проблемы повышения надежности и эффективности функционирования технических систем возникает задача разработки обоснованной стратегии эксплуатации. Стратегия эксплуатации (правила технического обслуживания) строится на основании: объективных данных о технической системе (характеристик безопасности и ремонтпригодности); специфических особенностей системы (структуры системы, характеристик индикации отказов, наличия встроенного контроля работоспособности); данных об условиях эксплуатации. Стратегия эксплуатации должна обладать свойством оптимальности по некоторому показателю, характеризующему качество функционирования и эксплуатации системы. Выбор оптимальной стратегии технического обслуживания позволяет добиваться наилучших результатов за счет реорганизации правил эксплуатации без привлечения дополнительных сил и средств [1 – 3].

Рассматривается полумарковская модель технологической ячейки (ТЯ) с учетом проведения профилактических работ. Для нее получены основные стационарные характеристики и с их помощью определены некоторые оптимальные моменты проведения профилактики.

Опишем порядок функционирования рассматриваемой технологической ячейки. Время безотказной работы ТЯ – случайная величина (СВ) α_1 с функцией распределения (ФР) $F_1(t) = P(\alpha_1 \leq t)$, время восстановления ТЯ – СВ β_1 с ФР $G_1(t) = P(\beta_1 \leq t)$. В случайные моменты времени (через промежутки времени α_2 с ФР $F_2(t) = P(\alpha_2 \leq t)$) проводится профилактика, время проведения профилактики – СВ β_2 с ФР $G_2(t) = P(\beta_2 \leq t)$. При этом профилактика проводится, если момент профилактики попал на момент работы ТЯ. После проведения профилактики работа ТЯ начинается сначала. СВ α_1 , α_2 , β_1 , β_2 предполагаются независимыми, имеющими конечные математические

ожидания и дисперсии; у ФР $F_1(t)$, $F_2(t)$, $G_1(t)$, $G_2(t)$ существуют плотности $f_1(t)$, $f_2(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$.

Для описания функционирования исходной системы введем следующее пространство полумарковских состояний

$$E = \{221, 210, 102x, 112x, 200x\},$$

где

221 – началась профилактика, работа ТЯ прервана;

210 – профилактика завершена, работа ТЯ началась сначала;

102x – ТЯ завершила работу, началось восстановление; время, оставшееся до проведения профилактики, $x > 0$;

112x – произошло восстановление ТЯ; время, оставшееся до проведения профилактики, $x > 0$;

200x – профилактика не проводится, поскольку момент профилактики совпал с моментом восстановления ТЯ; время, оставшееся до окончания восстановления, $x > 0$.

Временная диаграмма функционирования ТЯ показана на рисунке 1.

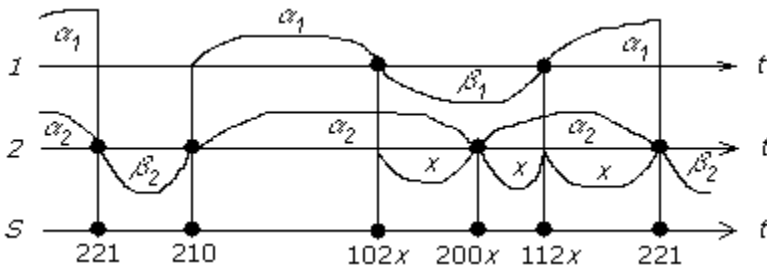


Рисунок 1 – Временная диаграмма функционирования ТЯ

Используем приближенный метод нахождения стационарных характеристик системы, основанный на алгоритме фазового укрупнения [4,5].

Выберем опорную систему S_0 . Предположим, что у ТЯ время безотказной работы значительно больше времени восстановления и времени проведения профилактики. Это приводит к тому, что опорной системой S_0 будет ТЯ, которая восстанавливается мгновенно и имеет мгновенную профилактику. Временная диаграмма функционирования опорной системы S_0 изображена на рисунке 2.

Определим вероятности переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n^0, n \geq 0\}$ опорной системы:

$$P_{210}^{221} = \int_0^{\infty} \bar{F}_1(y) f_2(y) dy, \quad P_{221}^{210} = 1, \quad p_{210}^{102x} = \int_0^{\infty} f_1(y) f_2(x+y) dy,$$

$$p_{112x}^{102y} = f_1(x-y), \quad x \geq y, \quad P_{102x}^{112x} = 1, \quad P_{112x}^{210} = \bar{F}_1(x).$$

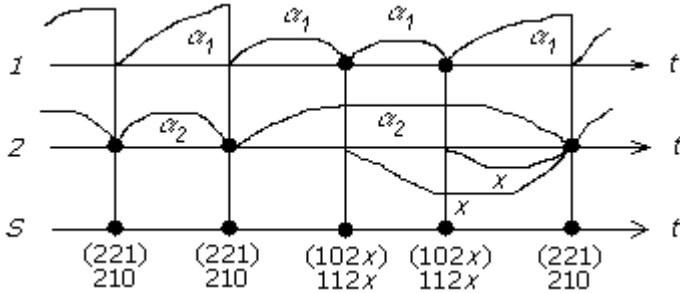


Рисунок 2 – Временная диаграмма функционирования опорной системы S_0

Обозначим через ρ_0 и ρ_1 значения стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n^0, n \geq 0\}$ на состояниях 210 и 221 и предположим существование стационарной плотности $\rho_{102}(x)$ и $\rho_{112}(x)$ для состояний 102x и 112x. Составим для них систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \rho_0 = \rho_1 + \int_0^{\infty} \bar{F}_1(y) \rho_{112}(y) dy; \rho_0 = \rho_1; \rho_{112}(x) = \rho_{102}(x); \\ \rho_{102}(x) = \rho_0 \int_0^{\infty} f_1(y) f_2(x+y) dy + \int_x^{\infty} f_1(y-x) \rho_{112}(y) dy, x > 0; \\ \rho_0 + \rho_1 + \int_0^{\infty} \rho_{102}(x) dx + \int_0^{\infty} \rho_{112}(x) dx = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Методом последовательных приближений можно показать, что система уравнений (1) имеет следующее решение:

$$\rho_{112}(x) = \rho_0 \int_0^{\infty} f_2(x+y) h_1(y) dy, \quad (2)$$

где $h_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_1^{*(n)}(y)$ – плотность функции восстановления.

Таким образом, стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n^0, n \geq 0\}$ опорной системы определяется формулой (2), где постоянная ρ_0 находится в явном виде из условия нормировки.

Класс эргодических состояний опорной системы имеет вид: $E^0 = \{210, 221, 102x, 112x\}$.

Для исходной системы множества работоспособных E_+ и E_- отказовых состояний имеют вид:

$$E_+ = \{210, 112x\}, E_- = \{221, 200x, 102x\}.$$

Перейдем к нахождению стационарных характеристик исходной системы. Определим вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$ исходной системы:

$$p_{200x}^{200y} = f_2(x-y), x \geq y, p_{200x}^{112y} = f_2(x+y), y \geq 0, p_{112x}^{102y} = f_1(x-y), x \geq y, p_{112x}^{211} = \bar{F}_1(x), p_{102x}^{112y} = g_1(x-y), x \geq y, p_{102x}^{200y} = g_1(x+y), y \geq 0,$$

$$P_{221}^{210} = 1, P_{210}^{221} = \int_0^\infty \bar{F}_1(y) f_2(y) dy,$$

$$p_{210}^{102x} = \int_0^\infty f_1(y) f_2(x+y) dy. \quad (3)$$

Найдем средние значения времен пребывания в состояниях исходной системы, которые представляются формулами: $\theta_{221} = \beta_2$, $\theta_{210} = \alpha_1 \wedge \alpha_2$, $\theta_{112x} = \alpha_1 \wedge x$, $\theta_{200x} = \alpha_2 \wedge x$ и $\theta_{102x} = \beta_1 \wedge x$, где $\wedge$ – знак минимума. Следовательно

$$M\theta_{221} = M\beta_2, M\theta_{210} = \int_0^\infty \bar{F}_1(t) \bar{F}_2(t) dt, M\theta_{112x} = \int_0^x \bar{F}_1(t) dt, \\ M\theta_{200x} = \int_0^x \bar{F}_2(t) dt, M\theta_{102x} = \int_0^x \bar{G}_1(t) dt. \quad (4)$$

Среднюю стационарную наработку на отказ T_+ и среднее стационарное время восстановления T_- приближенно найдем, используя формулы [4]

$$T_+ \approx \frac{\int_{E_+} m(z) \rho(dz)}{\int_{E_+} \rho(dz) P(z, E_-)}, T_- \approx \frac{\int_{E_-} m(z) \rho(dz)}{\int_{E_-} \rho(dz) P(z, E_+)}, \quad (5)$$

где $\rho(dz)$ – стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n^0, n \geq 0\}$ опорной системы; $m(z)$ – средние времена пребывания в состояниях исходной системы; $P(z, dy)$ – вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$ исходной системы.

Используя формулы (2) – (4), определим выражения, входящие в (5)

$$\begin{aligned} \int_{E_+} \rho(dz) P(z, E_-) &= \rho(210) P(210, E_-) + \int_0^\infty \rho(112x) P(112x, E_-) dx = \rho_0 + \\ \rho_0 \int_0^\infty dx \int_0^\infty h_1(y) f_2(x+y) dy &= \rho_0 + \rho_0 \int_0^\infty h_1(y) \bar{F}_2(y) dy = \rho_0 \int_0^\infty \bar{H}_1(y) f_2(y) dy, \end{aligned}$$

где $\bar{H}_1(y) = \sum_{n=0}^\infty F_1^{*(n)}(y)$ – функция восстановления;

$$\begin{aligned} \int_{E_+} m(z) \rho(dz) &= \rho(210) m(210) + \int_0^\infty \rho(112x) m(112x) dx = \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(y) \bar{F}_2(y) dy + \\ &+ \rho_0 \int_0^\infty dx \int_0^\infty h_1(y) f_2(x+y) dy \int_0^x \bar{F}_1(t) dt = \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(y) \bar{F}_2(y) dy + \\ &+ \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(t) dt \int_0^\infty h_1(y) \bar{F}_2(t+y) dy = \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(y) \bar{F}_2(y) dy + \\ &+ \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(t) dt \left[\bar{F}_2(t+y) \bar{H}_1(y) \right]_0^\infty + \int_0^\infty \bar{H}_1(y) f_2(y+t) dy = \\ &= \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(y) \bar{F}_2(y) dy - \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(y) \bar{F}_2(y) dy + \\ &+ \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(t) dt \int_t^\infty \bar{H}_1(y-t) f_2(y) dy = \rho_0 \int_0^\infty f_2(y) dy \int_0^y \bar{H}_1(y-t) \bar{F}_1(t) dt = \\ &= \rho_0 \int_0^\infty f_2(y) y dy = \rho_0 M\alpha_2. \end{aligned}$$

Таким образом, средняя стационарная наработка на отказ T_+ рассматриваемой системы приближенно вычисляется по формуле

$$T_+ \approx \frac{M\alpha_2}{\int_0^\infty \bar{H}_1(y) f_2(y) dy}. \quad (6)$$

Перейдем к нахождению среднего стационарного времени восстановления T_- .

$$\begin{aligned}
 \int_{E_-} \rho(dz) P(z, E_+) &= \rho(221) P(221, E_+) + \int_0^\infty \rho(102x) P(102x, E_+) dx = \\
 &= \rho_0 + \rho_0 \int_0^\infty dx \int_0^\infty h_1(y) f_2(x+y) dy = \rho_0 + \rho_0 \int_0^\infty h_1(y) \bar{F}_2(y) dy = \\
 &= \rho_0 \int_0^\infty \bar{H}_1(y) f_2(y) dy. \\
 \int_{E_-} m(z) \rho(dz) &= \rho(221) m(221) + \int_0^\infty \rho(102x) m(102x) dx = \rho_0 \int_0^\infty \bar{G}_2(y) dy + \\
 &+ \rho_0 \int_0^\infty dx \int_0^\infty h_1(y) f_2(x+y) dy \int_0^x \bar{G}_1(t) dt = \rho_0 M\beta_2 + \rho_0 \int_0^\infty \bar{G}_1(t) dt \int_0^\infty h_1(y) \bar{F}_2(t+y) dy.
 \end{aligned}$$

Следовательно

$$T_- \approx \frac{M\beta_2 + \int_0^\infty \bar{G}_1(t) dt \int_0^\infty h_1(y) \bar{F}_2(t+y) dy}{\int_0^\infty \bar{H}_1(y) f_2(y) dy}. \quad (7)$$

Используя формулы (6) и (7), определяем стационарный коэффициент готовности системы. Учитывая соотношение $K_\Gamma = T_+ / (T_+ + T_-)$, получаем:

$$K_\Gamma \approx \frac{M\alpha_2}{M\alpha_2 + M\beta_2 + \int_0^\infty \bar{G}_1(t) dt \int_0^\infty h_1(y) \bar{F}_2(t+y) dy}. \quad (8)$$

Формулы (6) – (8) могут быть использованы для анализа надежности технологической ячейки с учетом проведения профилактики.

Получим формулу для K_Γ при условии неслучайного распределения промежутков времени между проведениями профилактик. Учитывая, что

$$F_2(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}, \text{ где } c = \text{const} :$$

$$K_\Gamma(c) \approx \frac{c}{M\beta_2 + c + \int_0^c H_1(c-t) \bar{G}_1(t) dt}. \quad (9)$$

Выражение (9) может быть использовано для решения оптимальной задачи нахождения значения c , при котором K_G достигает наибольшего значения.

Для решения этой задачи найдем производную $K'_G(c)$:

$$K'_G(c) \approx \frac{M\beta_2 + \int_0^c H_1(c-t)\bar{G}_1(t)dt - c \cdot \int_0^c h_1(c-t)\bar{G}_1(t)dt}{\left(M\beta_2 + c + \int_0^c H_1(c-t)\bar{G}_1(t)dt \right)^2}.$$

Приравняв $K'_G(c)=0$, можно определить значение c , при котором K_G достигает наибольшего значения.

Решим поставленную задачу при условии, что обслуживание ТЯ характеризуется законом распределения Эрланга. Используя пакет MathCad 2000 Professional, решим уравнение $K'_G(c)=0$, и построим график K_G для следующих исходных данных:

$$Ma_1=10, Mb_1=2, Mb_2=1.$$

для $k=5$, $c=25,261$

для $k=10$, $c=58,355$

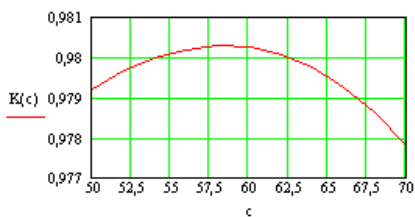
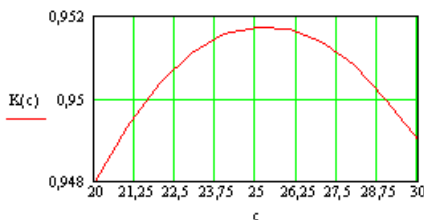


Рисунок 3 – Графики $K_G(c)$ при различных порядках закона распределения Эрланга

$$Ma_1=10, Mb_1=2, k=5.$$

для $Mb_2=0,5$, $c=21,7$

для $Mb_2=1,5$, $c=27,362$

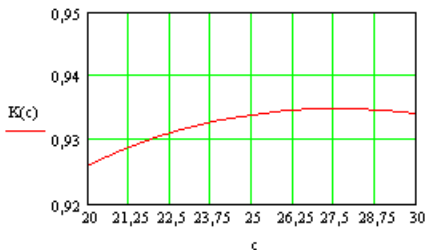
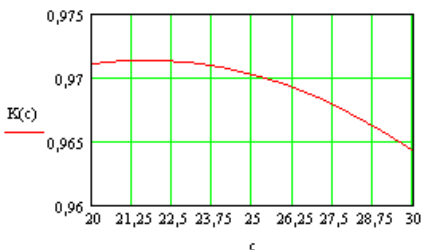


Рисунок 4 – Графики K_{Γ} (с) при различных длительностях профилактик

На рисунке 3 и 4 показаны графики зависимости коэффициента готовности рассматриваемой ТЯ от промежутка времени между проведениями профилактик: при различных порядках закона распределения Эрланга, при различных длительностях профилактик. На основе полученных результатов можно сделать заключение о том, что порядок закона распределения Эрланга существенно влияет на оптимальный промежуток времени между проведениями профилактик. Кроме того, уменьшение времени профилактики ведет к уменьшению оптимального промежутка времени между проведениями профилактик и увеличению максимального значения K_{Γ} , т.е. также к повышению надежности ТЯ.

Библиография

1 Надежность технических систем / Под ред. И.А. Ушакова — М.: Радио и Связь, 1985. — 606 с.

2 Барзилович Е.Ю. Организация обслуживания при ограниченной информации о надежности системы / Е.Ю. Барзилович, В.А. Каштанов. — М.: Сов. радио, 1975. — 136 с.

3 Байхельт Ф. Надежность техническое обслуживание. Математический подход Пер. с нем. / Ф. Байхельт, П. Франкен. — М.: Радио и связь, 1988. — 392 с.

4 Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания / А.Н. Корлат, В.Н. Кузнецов, М.М. Новиков, А.Ф. Турбин. — Кишинев: Штиинца, 1991. — 276 с.

Поступила в редакцию 04.10.2000 г.