

УДК 621.38(62-50)

КРИТЕРИЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Лазарева Е.В., Старожилов Е.Ф.

Рассматривается задача исследования управляемости линейных непрерывно-дискретных систем, описываемых дифференциальными и разностными уравнениями с постоянными коэффициентами. Получено необходимое и достаточное условие управляемости.

Рассмотрим систему дифференциальных и разностных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \quad t \in I \setminus \Theta, \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t-0), \quad t \in \Theta,\end{aligned}\tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$; $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$; $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}$ – постоянные матрицы соответствующих размерностей; $I = [0, \infty)$; $\Theta = \{t_k : t_k = kh, h > 0, k = 1, 2, \mathbf{K}\}$.

Решениями непрерывно-дискретной системы (1) являются кусочно-непрерывные функции, удовлетворяющие при $t \in I \setminus \Theta$ первому уравнению системы (1), а в моменты $t \in \Theta$, терпящие разрывы первого рода, в соответствии со вторым уравнением.

При решении задач анализа и синтеза непрерывно-дискретных систем (например, при анализе абсолютной устойчивости в задачах оптимального управления [1, 2]) возникает необходимость исследования управляемости таких систем.

Будем считать, что непрерывно-дискретная система (1) является **полностью управляемой**, если для любых заданных состояний $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ и $\mathbf{x}_f = \mathbf{x}(t_f)$ можно выбрать такое управление $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_f$, которое переводит эту систему из состояния $\mathbf{x}_0$ в состояние $\mathbf{x}_f$ за конечное время $t_f - t_0$.

Прежде всего докажем утверждение, которое неоднократно будет использоваться в дальнейших доказательствах.

Лемма. Если невырожденное преобразование

$$\mathbf{L} = [\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2],$$

где матрица $\mathbf{L}_1$ имеет размер $n \times r$, а $\mathbf{L}_2$ – $n \times (n-r)$, приводит $n \times n$ матрицу $\mathbf{A}$ к виду

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix},$$

то верно равенство

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_1 \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{11} t}.$$

Доказательство

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A} t} \mathbf{L}_1 = \mathbf{I}_n \mathbf{e}^{\mathbf{A} t} \mathbf{I}_n \mathbf{L}_1 = \mathbf{L} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{e}^{\mathbf{A} t} \mathbf{L} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L}_1 = \mathbf{L} \mathbf{e}^{\mathbf{L}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{L} t} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L}_1 = \mathbf{L} \mathbf{e}^{\mathbf{L}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{L} t} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{\mathbf{L}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{L} t} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\mathbf{L}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{L} \right)^i \frac{t^i}{i!} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \frac{t^i}{i!} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^i \cdot \frac{t^i}{i!} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{11} t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A} t} \mathbf{L}_1 = \mathbf{L} \mathbf{e}^{\mathbf{L}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{L} t} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = [\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{11} t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_1 \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{11} t}.$$

Утверждение леммы доказано.

Выделим момент

$$t_f = t_l + \tau_f,$$

где $t_f > nh$, $t_f \in I \setminus \Theta$; $t_l = lh$, $l = \text{entier} \left[\frac{t_f}{h} \right] > n$.

Будем далее считать, что начальный момент $t_{нач} = t_0 - 0$, $t_0 \in \Theta$ и $\mathbf{x}(t_0 - 0) = \mathbf{0}$. Это не уменьшает общности рассуждений, так как если существует управление $\mathbf{u}(t)$, переводящее систему из состояния $\mathbf{x}(t_0 - 0) = \mathbf{0}$ в состояние $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f - \mathbf{e}^{\mathbf{A}_1 \tau_f} \mathbf{P}^l \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_0$, то управление $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{u}(t) \cdot 1(t - t_0)$ переводит систему из состояния $\mathbf{x}(t_0 - 0) = \mathbf{x}_0$ в состояние $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$. Если же t_0 не принадлежит множеству Θ , то управление $\mathbf{u}'(t)$ переводит систему из состояния $\mathbf{x}(t'_0) = \mathbf{x}'_0$, $t'_0 \in [t_0 - h; t_0)$ в состояние $\mathbf{x}(t_0 - 0) = \mathbf{x}_0 = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_1(t_0 - t'_0)} \mathbf{x}'_0$, а затем в $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$.

Состояние непрерывно-дискретной системы (1) в момент $t \in [t_k, t_{k+1})$ определяется по формуле

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_1(t-t_k)} \mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}_1(t-\vartheta)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\vartheta) d\vartheta. \quad (2)$$

Известно, что любая непрерывная стационарная система

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{y}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (3)$$

может быть преобразована к канонической форме управляемости [3]

$$\dot{\tilde{\mathbf{y}}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{y}}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}(t)$$

с помощью линейного невырожденного преобразования

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{L} \tilde{\mathbf{y}}(t), \quad \mathbf{L} = [\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2],$$

где столбцы матрицы $\mathbf{L}_1$ образуют базис r -мерного ($r \leq n$) подпространства управляемых состояний системы (3), полученный из линейно независимых столбцов матрицы $[\mathbf{B}, \mathbf{A}_1 \mathbf{B}, \mathbf{K} \mathbf{A}_1^{n-1} \mathbf{B}]$ ранга r , а столбцы матрицы $\mathbf{L}_2$ вместе со столбцами матрицы $\mathbf{L}_1$ образуют базис всего n -мерного пространства. Пара $\{\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_1\}$ является полностью управляемой.

Используя доказанную лемму, преобразуем матрицу $\mathbf{e}^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{B}$:

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{B} = (\mathbf{e}^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{L}) \cdot (\mathbf{L}^{-1} \mathbf{B}) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_1 t} [\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1 = \mathbf{L}_1 \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{11} t} \mathbf{B}_1.$$

Уравнение (2) примет вид:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_1(t-t_k)} \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t_k - 0) + \mathbf{L}_1 \int_{t_k}^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{11}(t-\vartheta)} \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(\vartheta) d\vartheta, \quad t_k \leq t < t_{k+1}.$$

Следовательно, состояние системы в моменты $t = t_{k+1} - 0$, $k = 0, 1, \mathbf{K}$ описывается системой разностных уравнений

$$\mathbf{x}(t_{k+1} - 0) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_1 h} \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t_k - 0) + \mathbf{e}^{\mathbf{A}_1 h} \mathbf{L}_1 \xi_k, \quad (4)$$

где вектор $\xi_k = \mathbf{e}^{-\mathbf{A}_{11} h} \int_0^h \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{11}(h-\tau)} \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(t_k + \tau) d\tau$ может принимать любые значения, так как пара $\{\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_1\}$ – полностью управляемая, а матрица $\mathbf{e}^{-\mathbf{A}_{11} h}$ – невырожденная.

Будем считать, что разностное уравнение (4) описывает поведение некой дискретной системы с вектором состояния $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k - 0)$ и вектором

внешних воздействий ξ_k . В соответствии с теорией дискретных систем, так как $\mathbf{x}(t_0 - 0) = 0$, то

$$\mathbf{x}_k = \sum_{j=0}^{k-1} (\mathbf{e}^{\mathbf{A}_1 h} \mathbf{A}_2)^{k-j-1} \mathbf{e}^{\mathbf{A}_1 h} \mathbf{L}_1 \xi_j = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_1 h} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{P}^{k-j-1} \mathbf{L}_1 \xi_j,$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{A}_2 \mathbf{e}^{\mathbf{A}_1 h}$.

Таким образом, состояние системы в момент t_f

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_f) &= \mathbf{e}^{\mathbf{A}_1 \tau_f} \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_l + \mathbf{L}_1 \int_0^{\tau_f} \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{11}(\tau_f - \vartheta)} \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(t_l + \vartheta) d\vartheta = \\ &= \mathbf{e}^{\mathbf{A}_1 \tau_f} \sum_{j=0}^{l-1} \mathbf{P}^{l-j} \mathbf{L}_1 \mathbf{e}^{-\mathbf{A}_{11} h} \int_0^h \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{11}(h-\vartheta)} \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(t_j + \vartheta) d\vartheta + \mathbf{L}_1 \int_0^{\tau_f} \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{11}(\tau_f - \vartheta)} \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(t_l + \vartheta) d\vartheta. \end{aligned}$$

Рассмотрим закон управления

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}_1^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{11}^T (t_k + \bar{h}_k - t)} \Psi_k \mathbf{L}_1^T (\mathbf{P}^{l-k})^T \mathbf{W} \mathbf{x}_f, \quad (5)$$

где $k = \text{entier} \left[\frac{t}{h} \right]$; $\bar{h}_k = \begin{cases} h, & k < l \\ \tau_f, & k = l \end{cases}$;

$$\Psi_k = \left[\int_0^{\bar{h}_k} \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{11}(\bar{h}_k - \vartheta)} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{11}^T (\bar{h}_k - \vartheta)} d\vartheta \right]^{-1} \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{11} \bar{h}_k};$$

$$\mathbf{W} = \left[\sum_{j=0}^l \mathbf{P}^{l-j} \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_1^T (\mathbf{P}^{l-j})^T \right]^{-1} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}_1 \tau_f}.$$

Управление (5) переводит непрерывно-дискретную систему (1) из начального состояния $\mathbf{x}(t_0 - 0) = 0$ в конечное состояние $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$. Такое $\mathbf{u}(t)$ существует тогда и только тогда, когда пара $\{\mathbf{P}, \mathbf{L}_1\}$ полностью управляемая, т.е. когда выполняется условие

$$\text{rank}[\mathbf{L}_1, \mathbf{P} \mathbf{L}_1, \mathbf{P}^2 \mathbf{L}_1, \mathbf{K}, \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{L}_1] = n.$$

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. Непрерывно-дискретная система (1) полностью управляема, тогда и только тогда, когда матрица размера $n \times nr$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{L}_1, \mathbf{P} \mathbf{L}_1, \mathbf{P}^2 \mathbf{L}_1, \mathbf{K}, \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{L}_1]$$

имеет ранг n .

Библиография

1 Старожилов Е.Ф. Об условиях абсолютной устойчивости нелинейных непрерывно-дискретных систем управления/ Е.Ф. Старожилов// Вест. СевГТУ: Сб. науч. тр. — Севастополь, 1997. — Вып.7. — С. 129 – 133.

2 Старожилов Е.Ф. Об оптимальной стабилизации линейных непрерывно-дискретных систем управления / Е.Ф. Старожилов // Оптимизация производственных процессов: Сб. науч. тр. — Севастополь, 1999. — Вып.2. — С. 149 – 154.

3 Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления/ Х. Квакернаак, Р. Сиван. — М.: Мир, 1977. — 656 с.

Поступила в редакцию 17.01.2000 г.