

УДК 681.511.4

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЧАСТОТНЫХ УСЛОВИЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ

Барабанов А.Т., Старинская Д.Н.

Рассматривается критерий автоколебательности, основанный на методах теории абсолютной устойчивости. Предлагаются алгебраические формулировки частотных условий.

1 Общие положения

Рассматривается система со стационарной нелинейностью и без внешнего возмущения

$$\dot{x} = Ax + by, \quad \sigma = c^T x, \quad y = \phi(\sigma), \quad (1)$$

а также класс нелинейностей, графики которых лежат в некотором секторе $S[\mu_1, \mu_2]$ между прямыми $y = \mu_1 \sigma$, $y = \mu_2 \sigma$.

Далее система (1) представляется в виде выделенной линейной части с её передаточной функцией $W(s)$ и нелинейного блока в отрицательной обратной связи (см. рисунок 1). Передаточная функция линейной части системы имеет вид:

$$W(s) = -c^T (sI - A)^{-1} b.$$

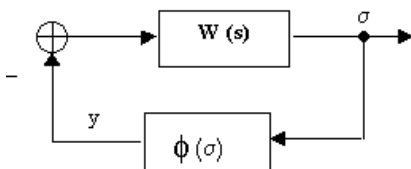


Рисунок 1 – Структурная схема системы с выделенными линейной частью и нелинейностью

Будем считать, что передаточная функция линейной части системы определена в виде отношения двух многочленов

$$W(s) = p(s)/q(s).$$

Предполагается, что $x = 0$ – единственное стационарное решение системы. Это имеет место при $\det A \neq 0$, если прямая

$$\sigma + W(0)y = 0, \quad (2)$$

называемая характеристической прямой, имеет единственную точку пересечения с графиком нелинейности $y = \phi(\sigma)$, совпадающую с началом координат.

Решение $x(t)$, $y(t)$ системы (1) называется $[-\alpha, \beta]$ -автоколебанием по выходу σ , если при $0 \leq t \leq \infty$ выполнено [1]: $\|x(t)\| \leq \text{const}$; точка $\sigma(t)$ бесконечно много раз находится в каждом из промежутков

$(-\infty, -\alpha], [-\alpha, \beta], [\beta, \infty)$.

Согласно [1] можно сформулировать следующий критерий автоколебательности пусть в системе (1) матрица A – неособая, а график функции $\phi(\sigma)$ обладает следующими свойствами:

а) при $-\alpha \leq \sigma \leq \beta$ лежит в секторе абсолютной неустойчивости $S[\mu_1, \mu_2]$;

б) имеет лишь одну общую точку $\sigma = 0, y = 0$ с характеристической прямой (2);

в) при всех s , достаточно больших по модулю, лежит в некотором расширенном секторе абсолютной устойчивости (условие диссипативности системы (1)).

Тогда почти любое решение системы (1) $[-\alpha, \beta]$ -колебательно по выходу $\sigma(t)$.

Приведенный критерий $[-\alpha, \beta]$ -колебательности позволяет не только установить автоколебательность системы, но и оценить амплитуду числами β и α . На рисунке 2 изображена графическая интерпретация приведенного критерия автоколебательности

Как видно из формулировки критерия, ключевое значение имеет построение секторов абсолютной устойчивости и неустойчивости. Под понятием сектора абсолютной устойчивости и неустойчивости подразумевается следующее. Пусть

$$Q(s, \mu) = q(s) + \mu p(s) \quad (3)$$

– характеристический многочлен линейной системы с обратной связью $y = \mu \sigma$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$. Пусть при некотором μ многочлен $Q(s, \mu)$ не имеет чисто мнимых корней и имеет k корней в правой полуплоскости. Число k называют степенью неустойчивости линейной системы.

На плоскости (σ, y) можно выделить секторы линейной устойчивости ($k = 0$) и неустойчивости (степеней $k = 1, k = 2, \dots$), соответствующие интервалам устойчивости и неустойчивости оси вещественного параметра m .

Если для сектора $S[\mu_1, \mu_2]$ выполняется неравенство (круговой критерий) [1]

$$\operatorname{Re}\{[1 + \mu_1 W(-j\omega)][1 + \mu_2 W(j\omega)]\} > 0, \quad (4)$$

то сектор называется сектором абсолютной устойчивости или сектором абсолютной неустойчивости, построенным по круговому критерию, в зависимости от того, принадлежит ли он сектору линейной устойчивости ($k = 0$) или сектору линейной неустойчивости ($k \geq 1$).

Замечание. Построения сектора $S[\mu_1, \mu_2]$ могут выполняться и по

другим критериям абсолютной устойчивости/неустойчивости. Здесь они не рассматриваются.

Если сектор $S[\mu_1, \mu_2]$ является сектором абсолютной устойчивости, то расширенным сектором абсолютной устойчивости [1] называется множество на плоскости (σ, y) , определенное для каких-либо $C_1 > 0, C_2 > 0$ неравенствами:

$$\mu_1\sigma - C_1 \leq y \leq \mu_2\sigma + C_2 \text{ при } \sigma \geq 0, \mu_2\sigma - C_2 \leq y \leq \mu_1\sigma + C_1 \text{ при } \sigma \leq 0.$$

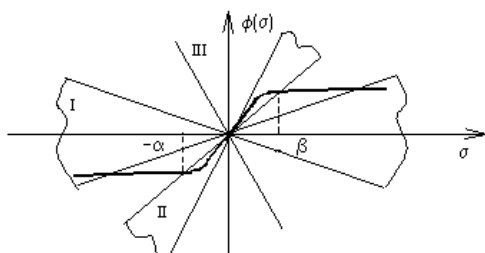


Рисунок 2— Графическая интерпретация критерия автоколебательности

- I — сектор абсолютной устойчивости;
- II — сектор абсолютной неустойчивости;
- III — характеристическая прямая (2)

Система (1) диссипативна, если график функции $y = \phi(\sigma)$ расположен в каком-либо расширенном секторе, отвечающем сектору $S[\mu_1, \mu_2]$ при всех $t \geq 0$, а также выполнен круговой критерий абсолютной устойчивости для сектора $S[\mu_1, \mu_2]$ (в частности, при $y = \mu\sigma, \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ система (1) асимптотически устойчива)

[1].

Таким образом, в анализе $[-\alpha, \beta]$ -автоколебательности можно выделить следующее

- а) задачу построения секторов устойчивости/неустойчивости линейной системы с соответствующими значениями k ;
- б) задачу построения секторов абсолютной устойчивости/неустойчивости

Указанные задачи традиционно решаются графоаналитическими методами [1].

Здесь рассматривается возможность применения алгебраических методов к анализу $[-\alpha, \beta]$ -колебательности

Для этого частотное неравенство (4) будем рассматривать в эквивалентной полиномиальной форме [4]:

$$G(\xi) > 0, \xi \leq 0, \quad (5)$$

где

$$G(\xi) = D(\xi) + (\mu_1 + \mu_2)A(\xi) + \mu_1\mu_2d(\xi). \quad (6)$$

Здесь $\xi = -\omega^2$, а многочлены $A(\xi)$, $D(\xi)$, $d(\xi)$ определены по многочленам числителя и знаменателя передаточной функции $W(s) = p(s)/q(s)$ равенствами

$$\left. \begin{aligned} A(s^2) &= \frac{1}{2}[p(s)q(-s) + p(-s)q(s)], \quad B(s^2) = \frac{1}{2}[(-s)p(s)q(-s) + sp(-s)q(s)] \\ D(s^2) &= q(s)q(-s), \quad d(s^2) = p(s)p(-s) \end{aligned} \right\} . \quad (7)$$

Соотношения (6), (7) следуют из (3) в силу представлений

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \operatorname{Re} W(j\omega) = \frac{1}{2}[W(j\omega) + W(-j\omega)], \\ Q(\omega) &= \operatorname{Im} W(j\omega) = \frac{1}{2j}[W(j\omega) - W(-j\omega)] \quad \text{и} \end{aligned}$$

$$P(\omega) = A(\xi)/D(\xi), \quad \omega Q(\omega) = B(\xi)/D(\xi), \quad \xi = -\omega^2.$$

Согласно [2] для выполнения неравенства (5) необходимо и достаточно, чтобы

$$G(0) > 0, \quad \rho^-(G) = 0, \quad (8)$$

где $\rho^-(G)$ – число всех различных отрицательных корней многочлена $G(\xi)$.

2 Алгебраические построения в задаче $[-\alpha, \beta]$ -колебательности

2.1 Секторы устойчивости и неустойчивости $S[\mu^i, \mu^{i+1}]$ многочлена (3)

В соответствии с вышесказанным в этой задаче необходимо определить интервалы устойчивости и неустойчивости многочлена (3). Представим $q(s)$ и $p(s)$ в виде

$$q(s) = q_2(s^2) + sq_1(s^2), \quad p(s) = p_2(s^2) + sp_1(s^2).$$

Тогда

$$Q(s, \mu) = q_2(s) + \mu p_2(s) + s[q_1(s) + \mu p_1(s)].$$

Уравнение кривой Д-разбиения $Q(j\omega, \mu) = 0$ эквивалентно

$$\left. \begin{aligned} q_2(\xi) + \mu p_2(\xi) &= 0 \\ q_1(\xi) + \mu p_1(\xi) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

где $\xi = -\omega^2 \neq 0$. При $\omega = 0$ имеем $\xi = 0$ и $\mu(0) = -\frac{q_2(0)}{p_2(0)}$.

Система (9) имеет решение, если равен нулю определитель

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} q_2(\xi) & p_2(\xi) \\ q_1(\xi) & p_1(\xi) \end{vmatrix} = p_1(\xi)q_2(\xi) - p_2(\xi)q_1(\xi) = 0.$$

Следовательно, необходимо определить точки $\xi^i < 0$ такие, что

$$\Delta(\xi^i) = 0.$$

Тогда

$$\mu(\xi^i) = -\frac{q_2(\xi^i)}{p_2(\xi^i)} = -\frac{q_1(\xi^i)}{p_1(\xi^i)}.$$

Множество выделенных указанным образом точек ξ (включая $\underline{x} = 0$)

$$\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^N \quad (10)$$

определяет соответственно множество точек m

$$\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^N.$$

Нумерацию точек выберем так, чтобы

$$\mu^1 < \mu^2 < \dots < \mu^N.$$

Интервалы

$$(-\infty, \mu^1), (\mu^1, \mu^2), \dots, (\mu^{N-1}, \mu^N), (\mu^N, +\infty).$$

определяют секторы устойчивости и неустойчивости. При каком-либо μ в каждом из них определяется k_i – число правых корней, т.е. степень неустойчивости. Интервалы с $k_i = 0$ – интервалы устойчивости.

Задачу определения числа правых корней многочлена (3) в каждом интервале (с фиксированным μ из этого интервала) можно решать алгебраическим методом анализа неустойчивости по таблице Рауса для характеристического многочлена. Согласно обобщенному алгоритму Рауса [3], число k правых корней для $n = 2m$ и $n = 2m - 1$ соответственно определяют соотношения

$$k = m + P(c_1^1, c_2^1, \mathbf{K}, c_p^1) - P(l_1, l_2, \mathbf{K}, l_p),$$

$$k = m - 1 + P(c_1^1, c_2^1, \mathbf{K}, c_p^1) - P(l_2, l_3, \mathbf{K}, l_p),$$

а число r чисто мнимых корней – соотношение

$$r = P(l_e, l_{e+1}, \mathbf{K}, l_p) - P(c_e^1, c_{e+1}^1, \mathbf{K}, c_p^1),$$

где c_j^i – элемент таблицы, $i = 1 \dots n_j$, $j = 1, \dots, p$; $l_j = (-1)^{n_j} c_j^{n_j}$ (n_j – номер последнего элемента в j -той строке, p – номер последней строки таблицы); $P(x_i, x_{i+1}, \dots, x_j)$ – число перемен знака в последовательности отличных от нуля величин $x_i, x_{i+1}, \dots, x_j$; e – номер первой индикаторной (см. [3]) строки таблицы.

Заметим, что обобщенный алгоритм Рауса анализа неустойчивости всегда может быть завершён в отличие от классического «чревато» как известно, критическими случаями, в которых алгоритм «останавливается».

2.2 Секторы абсолютной устойчивости и неустойчивости

Секторы абсолютной устойчивости/неустойчивости определяются соответствующим частотным критерием в полиномиальной форме (5),

который перепишем в виде

$$G(\xi; \mu_1, \mu_2) > 0, \quad \xi \leq 0.$$

Рассмотрим множество точек $M^i = (\mu_1^i, \mu_2^i)$ на плоскости (μ_1, μ_2) , например, сетку подходящих размеров (см. рисунок 3).

В каждой точке будем проверять условие

$$\rho^-(G, \mu_1^i, \mu_2^i) = 0,$$

где $\rho^-(G, \mu_1^i, \mu_2^i)$ – число всех различных отрицательных корней многочлена $G(\xi; \mu_1, \mu_2)$. Оно определяется соответствующим алгоритмом обобщенного метода Рауса [3], по таблице Рауса, первую и вторую строку которой образуют коэффициенты многочлена $G(\xi)$ и его производной $G'(\xi)$.

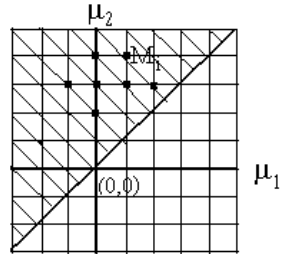


Рисунок 3 – Область $\mu_2 \geq \mu_1$

На множестве точек, в которых условие выполняется, найдем наибольшее значение

$$\gamma = \max_i (\mu_2^i - \mu_1^i).$$

Соответствующие ему числа μ_1, μ_2 определяют искомым сектор.

В зависимости от того, находится ли построенный сектор внутри сектора линейной устойчивости или неустойчивости, он будет соответственно сектором абсолютной устойчивости или неустойчивости.

3 Пример анализа периодических режимов в нелинейной системе

В качестве примера исследуется влияние нелинейностей на динамику летательного аппарата (ЛА) в случае нелинейного элемента, характеризующего статическую устойчивость (неустойчивость) ЛА по каналу рыскания. Используется модель самолета «Боинг-747» из [4]. Рассматривается нелинейность с насыщением (рисунок 4).

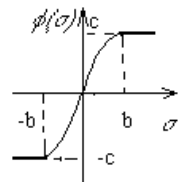


Рисунок 4 – Нелинейность с насыщением

Числитель и знаменатель передаточной функции линейной части системы имеют вид:

$$p(s) = 1,98s^4 + 2,2432s^3 + 0,7143s^2 + 0,4906s + 0,1223,$$

$$q(s) = s^6 + 2,5756s^5 + 2,9764s^4 + 2,4059s^3 + 1,2765s^2 + 0,3791s + 0,0541.$$

Многочлены $A(\xi), B(\xi), D(\xi), d(\xi)$ записываются как

$$A(\xi) = 1,98\xi^5 + 0,8268\xi^4 - 1,8958\xi^3 - 0,6561\xi^2 + 0,0068\xi + 0,0065,$$

$$B(\xi) = 2,8563\xi^5 - 0,5695\xi^4 - 1,5508\xi^3 - 0,1874\xi^2 + 0,0194\xi,$$

$$D(\xi) = \xi^6 - 0,6818\xi^5 - 0,9843\xi^4 - 0,035\xi^3 + 0,1277\xi^2 - 0,0057\xi + 0,0029,$$

$$d(\xi) = 3,9208\xi^4 - 2,2032\xi^3 - 1,2065\xi^2 - 0,0660\xi + 0,0150.$$

Параметры нелинейности: $c = 4,2$; $b = 2,21$.

Из графика на рисунке 5 видно, что рассматриваемая нелинейность имеет одну точку пересечения с характеристической прямой (2), где $W(0) = 2,244$.

Множество точек ξ (10) имеет вид: $\xi^1 = 0$; $\xi^2 = -0,539$; $\xi^3 = -0,214$.

Тогда $\mu^1 = -0,446$; $\mu^2 = -0,237$; $\mu^3 = 1,566$. Сектор $S[\mu^2, \mu^3]$ является сектором линейной устойчивости, остальные секторы – секторами линейной неустойчивости

Рассмотрим сектор $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1,429$. Тогда многочлен $G(\xi)$ (6) имеет вид:

$$G(\xi) = \xi^6 + 2,147\xi^5 + 0,1968\xi^4 - 2,743\xi^3 - 0,8095\xi^2 + 4,026 \cdot 10^{-3}x + 1,226 \cdot 10^{-2}.$$

Условия (8) выполнены, так как $G(0) = 0,012$, $\rho^-(G) = 0$.

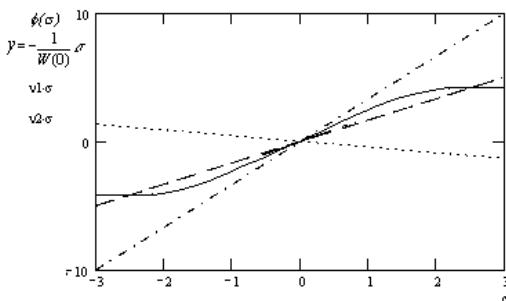


Рисунок 5 – График нелинейности, характеристическая прямая, сектор $S[v_1, v_2]$:

— график нелинейности; — $v_1\sigma$; - - $v_2\sigma$;
- - - характеристическая прямая $\sigma + W(0)y = 0$

Следовательно рассматриваемый сектор $S[\mu_1, \mu_2]$ является сектором абсолютной устойчивости. Можно сделать вывод, что рассматриваемая система диссипативна, так очевидно, что существует расширенный сектор абсолютной устойчивости, соответствующий сектору $S[\mu_1, \mu_2]$, в который входит рассматриваемая

нелинейность.

Рассмотрим сектор $S[v_1, v_2]$, $v_1 = 1,667$; $v_2 = 3,333$ (см. рисунок 5), принадлежащий сектору линейной неустойчивости

Для этого сектора многочлен $G(\xi)$ имеет вид:

$$G(x) = x^6 + 9,218x^5 + 24,929x^4 - 21,80x^3 - 9,927x^2 - 0,3557x + 0,1172.$$

Условия (8) выполнены, так как $G(0) = 0,117$, $\rho^-(G) = 0$.

Следовательно рассматриваемый сектор является сектором

абсолютной неустойчивости

Соответственно, имеет место $[-\alpha, \beta]$ -колебательность, где $\alpha = \beta = c/v_1 = 2,52$.

В заключение заметим, что предлагаемый подход расширяет возможности анализа автоколебательности нелинейных систем. В частности, он может быть реализован на основе современных программных средств (например, пакета Matlab) без всяких геометрических построений, обычно применяемых в частотных методах анализа.

Библиография

1 Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского — М.: Наука, 1987. — 712 с.

2 Барабанов А.Т. Вещественный полиномиальный анализ частотных критериев абсолютной устойчивости /А.Т. Барабанов // Изв. РАН, Теория и системы управления. — 2000. — №1. — С. 5 – 14.

3 Барабанов А.Т. Полное решение общей проблемы Рауса в теории систем. /А.Т. Барабанов // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика — 1991. — №2. — С. 39 – 47.

4 Брайсон А. Новые идеи по теории управления / А.Брайсон // Аэрокосмическая техника. — 1986. — №8. — С. 31 – 42.

Поступила в редакцию 13.12.2001 г.