

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

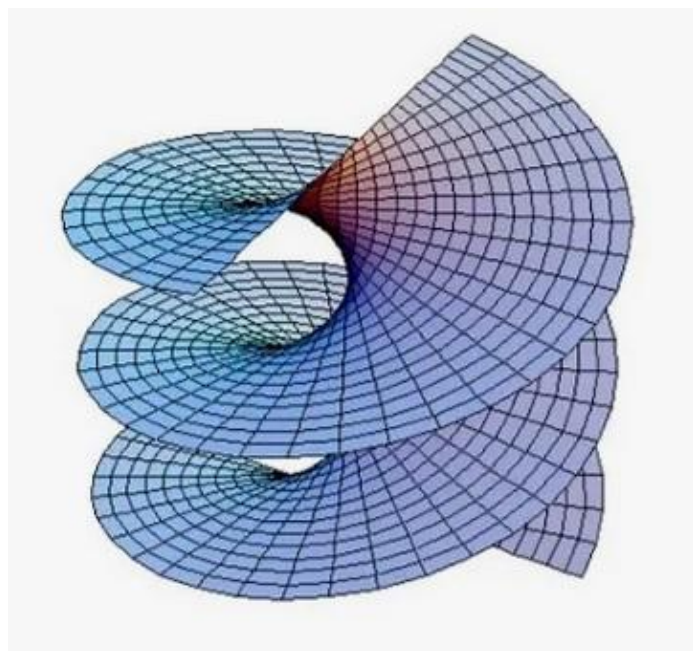
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

С.А. Чернявская, В.Г. Царёв

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания

к проведению практических занятий по высшей математике
для студентов технических и естественно-научных специальностей



Севастополь
СевГУ
2025

УДК 517.373(075.8)
ББК 22.161.1я73
Ч49

Р е ц е н з е н т:
О.В. Матузаева – канд. техн. наук, доцент

Чернявская, С. А.

Ч49 Криволинейные и поверхностные интегралы: методические указания к проведению практических занятий по высшей математике для студентов технических и естественно-научных специальностей / С.А. Чернявская, В.Г. Царёв; Севастопольский государственный университет. – Севастополь: СевГУ, 2025. – 74 с. – Текст: электронный.

Предназначены для студентов технических специальностей направления подготовки 14.05.02 «Атомные станции: проектирование, эксплуатация и инжиниринг» и 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 16.03.03 «Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения» Института ядерной энергии и промышленности», выполняющих индивидуальные задания по дисциплине «Высшая математика».

Содержат практические занятия по разделу «Криволинейные и поверхностные интегралы». В целом, включает в себя достаточное количество методически подобранных задач (основных и дополнительных). Пособие содержит четыре практических занятия. В каждом из них конспективно приведены основные сведения из теории, решены типовые примеры и задачи по данной теме, предложены задачи (с ответами) для классных и самостоятельных занятий, приведены варианты индивидуальных заданий по теме «Криволинейные и поверхностные интегралы». Для студентов, желающих расширить свой кругозор знаний по рассматриваемой теме, в конце пособия приводится список литературы.

УДК 517.373(075.8)
ББК 22.161.1я73

Рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании кафедры «Высшая математика», протокол № 4 от 29 ноября 2024 года.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ: «Вычисление и применение криволинейного интеграла по длине дуги (I рода)»	4
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ: «Вычисление и применение криволинейного интеграла по координатам (II рода)»	14
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ: «Вычисление и применение поверхностного интеграла по площади поверхности (I рода)».	28
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ: «Вычисление и применение поверхностных интегралов по координатам (II рода)»	39
ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ	48
ЛИТЕРАТУРА	74

Тема: ВЫЧИСЛЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ПО ДЛИНЕ ДУГИ (I РОДА)

Основные понятия из теории криволинейных интегралов

Определение криволинейного интеграла I рода.

Пусть $z = f(x, y)$ – непрерывная функция в каждой точке гладкой дуги AB кривой L плоскости XOY .

1. Произвольным образом разобьем дугу на n частей, не имеющих общих внутренних точек.
2. Обозначим длины, полученных при этом частичных дуг через Δl_i , $(i = \overline{1, n})$.
3. Выберем на каждой частичной дуге точки $M_i(x_i, y_i)$, $(i = \overline{1, n})$.
4. Найдем значение функции $z = f(x, y)$ в выбранных точках: $f(M_1), f(M_2), \dots, f(M_n)$.
5. Составим произведения $f(M_1)\Delta l_1, f(M_2)\Delta l_2, \dots, f(M_n)\Delta l_n$.
6. Просуммировав полученные произведения запишем интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta l_i.$$

Определение. Конечный предел интегральной суммы функции $f(x, y)$ на дуге AB при неограниченном уменьшении максимальной длины частичных дуг ($\max \Delta l_i \rightarrow 0$) и неограниченном увеличении числа разбиений ($n \rightarrow \infty$), называется криволинейным интегралом функции по длине дуги функции $f(x, y)$ по дуге AB и обозначается:

$$\int_L f(x, y)dl \text{ или } \int_{AB} f(x, y)dl$$

$$\text{Таким образом, } \int_L f(x, y)dl = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta l_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)\Delta l_i$$

Теорема существования и единственности

Если функция $f(x, y)$ непрерывна и дифференцируема в каждой точке гладкой дуги AB , то предел ее интегральной суммы на этой дуге при $\max \Delta l_i \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$ существует, конечен и не зависит ни от способа разбиения кривой AB на частичные, ни от выбора точек на каждой частичной дуге.

Криволинейные интегралы от функции $f(x, y, z)$, взятые по пространственной кривой L , определяются аналогично.

Основные свойства криволинейного интеграла первого рода:

Практически все свойства определенного интеграла выполняются и для криволинейного. Отметим только два свойства.

1. Криволинейный интеграл I рода не зависит от направления кривой интегрирования AB :

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl$$

$$2. \int_{AB} f(x, y) dl = \int_{AC} f(x, y) dl + \int_{BC} f(x, y) dl,$$

где C – некоторая точка на кривой AB .

Применение криволинейного интеграла I рода

Вычисление криволинейных интегралов по длине дуги сводится к вычислению определенных интегралов.

1. Если дуга AB задана явно уравнением $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$), где $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a; b]$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx \quad (1)$$

2. Если дуга AB задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

($t_1 \leq t \leq t_2$), функции $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_1; t_2]$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt \quad (2)$$

В случае пространственной кривой криволинейный интеграл вычисляется аналогично, т.е.

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt \quad (3)$$

3. Если плоская кривая задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ в полярных координатах, где функция $\rho(\varphi)$ – непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha; \beta]$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cdot \sqrt{\rho^2 + (\rho'_{\varphi})^2} d\varphi \quad (4)$$

Применение криволинейного интеграла I рода

1. Геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода.

Длина l дуги AB плоской или пространственной линии вычисляется по формуле

$$l = \int_{AB} dl \quad (5)$$

2. Механический смысл криволинейного интеграла первого рода.

Пусть $\gamma(x, y)$ линейная плотность гладкой неоднородной дуги AB .

- а) Масса m с заданной линейной плотностью вычисляется по формуле:

$$m = \int_{AB} \gamma(x, y) dl \quad (6)$$

- б) Статические моменты S_x и S_y дуги относительно осей OX и OY соответственно определяются по формулам:

$$S_x = \int_{AB} y \cdot \gamma(x, y) dl, \quad S_y = \int_{AB} x \cdot \gamma(x, y) dl \quad (7)$$

- в) Координаты центра тяжести точки C дуги AB находятся по формулам:

$$x_C = \frac{\int_{AB} x \cdot \gamma(x, y) dl}{m}, \quad y_C = \frac{\int_{AB} y \cdot \gamma(x, y) dl}{m} \quad (8)$$

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Вычислить $\int_L x \cdot y^2 dl$, где L – отрезок прямой между точками $O(0,0)$ и $A(4,3)$.

Решение: составим уравнение прямой OA , проходящей через две точки. Ее вид $y = \frac{3}{4}x$. Прямая задана явно. Вычислим данный интеграл по формуле (1). Так как $y' = \frac{3}{4}$, то

$$dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} dx = \frac{5}{4} dx.$$

Переходим к определенному интегралу, получим

$$\int_L x \cdot y^2 dl = \int_0^4 x \cdot \left(\frac{3}{4}x\right)^2 \cdot \frac{5}{4} dx = \frac{45}{64} \int_0^4 x^3 dx = 45.$$

2. Вычислить $\int_L (2x + y) dl$, где L – контур треугольника ABO с вершинами $A(1,0)$, $B(0,2)$, $O(0,0)$ (рис.1).

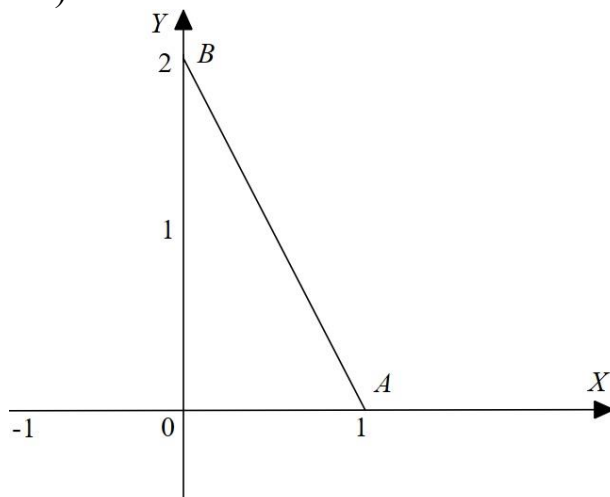


Рис. 1

Решение: так как, кривая интегрирования состоит из трех отрезков, то применим свойство аддитивности:

$$\int_L (2x+y) dl = \int_{AB} (2x+y) dl + \int_{BO} (2x+y) dl + \int_{OA} (2x+y) dl.$$

На отрезке AB : $y = -2x + 2$ поэтому $y' = -2$, $dl = \sqrt{1+(y'_x)^2} dx = \sqrt{5} dx$, $0 \leq x \leq 1$.

На отрезке BO : $x = 0$, $x' = 0$, $dl = \sqrt{1+(x'_y)^2} dy = dy$, $0 \leq y \leq 2$.

На отрезке OA : $y = 0$, $y' = 0$, $dl = \sqrt{1+(y'_x)^2} dx = dx$, $0 \leq x \leq 1$.

Таким образом, получаем

$$\int_L (2x+y) dl = \int_0^1 2\sqrt{5} dx + \int_0^2 y dy + \int_0^1 2x dx = 2\sqrt{5} x \Big|_0^1 + \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 + x^2 \Big|_0^1 = 3 + 2\sqrt{5}.$$

3. Вычислить $\int_L (x+y) dl$, где L – лепесток лемнискаты $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$, расположенной в I координатном углу (рис.2).

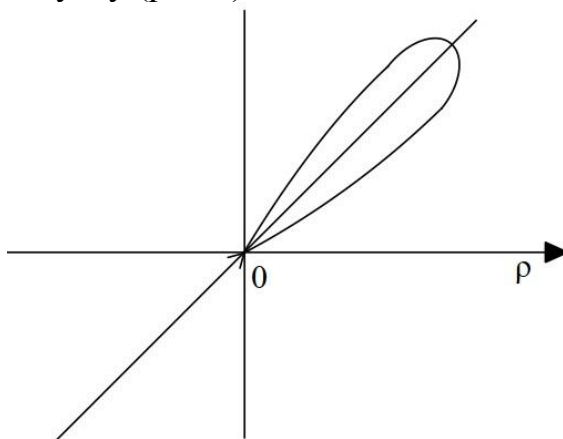


Рис. 2

Решение: Воспользуемся формулой (4). Так как

$$\rho' = a \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin 2\varphi}} \cdot \cos 2\varphi \cdot 2,$$

то

$$dl = \sqrt{a^2 \sin 2\varphi + \frac{a^2 \cdot \cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}} d\varphi = \frac{a \cdot d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{a^2 \cdot d\varphi}{a\sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{a^2 \cdot d\varphi}{\rho}$$

Заметив, что $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, т.е. $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, получаем по формуле (4)

$$\int_L (x+y) dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi) \cdot \frac{a^2 d\varphi}{\rho} = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi = a^2 (\sin \varphi - \cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2.$$

Замечание: лемниската Бернулли – есть плоская кривая, уравнение которой в декартовых координатах имеет вид $(x^2 + y^2) - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$. Имеет форму восьмерки. В полярных координатах уравнение может быть записано в виде $\rho^2 = 2a^2 \cdot \cos 2\varphi$.

4. Найти массу материальной дуги кривой $2y = x^2$ между точками $A(0,0)$, $B(1,1/2)$, если линейная плотность вещества в точке $M(x,y)$ пропорциональна абсциссе этой точки.

Решение: применим формулу (6). Из условия следует, что линейная плотность выражается формулой $\gamma(x,y) = kx$, где k – коэффициент пропорциональности.

Из уравнения линии $y = \frac{1}{2}x^2$ находим $y' = x$, поэтому $dl = \sqrt{1+x^2}dx$. По формуле (6)

$$m = \int_L \gamma(x,y) dl = \int_0^1 kx \sqrt{1+x^2} dx = \frac{k}{2} \int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{2}} d(1+x^2) = \frac{k}{2} \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \bigg|_0^1 = \frac{k}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

5. Найти центр тяжести полуокружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащей в верхней полуплоскости. Плотность считать равной единице.

Решение: Из соображения симметрии ясно, что центр тяжести находится на оси OY . Поэтому $x_C = 0$. Ордината центра тяжести

$$y_C = \frac{\int_{AB} y \cdot dl}{\int_{AB} dl}.$$

Знаменатель этой дроби – длина полуокружности.

Поэтому

$$\int_{AB} dl = \pi R.$$

Для вычисления числителя воспользуемся параметрическими уравнениями окружности $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}$.

Тогда

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = R dt$$

и

$$\int_{AB} y dl = \int_0^\pi R \sin t \cdot R dt = 2R^2.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Вычисление криволинейных интегралов по длине дуги

6. Вычислить $\int_L x dl$, где L – парабола $y = x^2$ от точки $A(2,4)$ до точки $B(1,1)$.

$$\text{Ответ: } \frac{1}{12} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}).$$

7. Вычислить $\int_L y \cdot \sqrt{y^2 + 1} dl$, где L – длина кривой $x = \ln y$ между точками, для которых $y = 1$, $y = 4$.

Ответ: 24.

8. Вычислить $\int_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) dl$ по отрезку прямой между точками $E(-1, 0)$ и $H(0, 1)$.

Ответ: $5\sqrt{2}$.

9. Вычислить $\int_L \sqrt{1 + x^2} dl$, где L – дуга кривой $2y - x^2 = 0$ ($1 \leq x \leq 3$).

Ответ: $32/3$.

10. Вычислить $\int_L \sqrt{1 + \cos^4 x} dl$, где L – дуга $y = \tan x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$).

Ответ: $\frac{1}{8}(10 + \pi)$.

11. Вычислить $\int_L x dl$, где L – длина окружности $\rho = R$, лежащая в первой четверти.

Ответ: R^2 .

12. Вычислить $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, где L – верхняя половина кардиоиды $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

Ответ: $\frac{13}{6}a^2$.

13. Вычислить $\int_L x^2 y dl$, где L – дуга окружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащая в первой четверти.

Ответ: $\frac{R^4}{3}$.

14. Вычислить $\int_L xy^2 dl$, где L – дуга окружности $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, лежащая в I четверти.

Ответ: $\frac{R^4}{3}$.

Применение криволинейных интегралов по длине дуги

Вычислить длины указанных дуг следующих линий:

15. $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - \sqrt{x}$ (между точками пересечения линии с осью OX).

Ответ: $2\sqrt{3}$.

16. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ (одна арка)

Ответ: $8a$.

17. $y = \ln x$ от $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$.

Ответ: $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

18. $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

Ответ: $8a$.

Найти массу материальной дуги данной линии при указанной плотности γ :

19. $2y = x^2$ между точками $A(0,0)$, $B(1,1/2)$, если линейная плотность вещества в точке $M(x,y)$ пропорциональна абсциссе этой точки.

Ответ: $\frac{k}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

20. $xy = 1$, $(1 \leq y \leq 2)$, $\gamma(x,y) = \frac{ky^2}{x^2}$.

Ответ: $\frac{k}{6}(17\sqrt{17}-2\sqrt{2})$.

21. Найти координаты центра тяжести однородной дуги циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Ответ: $\begin{matrix} x_c = \pi a \\ y_c = \frac{4}{3}a \end{matrix}$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Вычисление криволинейных интегралов по длине дуги

22. Вычислить $\int_L xy dl$, где L – контур прямоугольника с вершинами $O(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,2)$, $D(0,2)$.

Ответ: 24.

23. Вычислить $\int_L xy dl$, где L – контур квадрата $|x| + |y| = 2$.

Ответ: 0.

24. Вычислить $\int_L \sqrt{\frac{a^2}{b^2} \cdot y^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2} dl$, где L – дуга эллипса $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}(a^2 + b^2)$.

25. Вычислить $\int_L (2x + 4y - 4z + 7) dl$, где L – отрезок прямой между точками $M_1(8,9,3)$, $M_2(6,10,5)$.

Ответ: 129.

26. Вычислить $\int_L xy dl$, где L – длина винтовой линии $\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = a \cdot \sin t \\ z = b \cdot t \end{cases}$, ограни-

ченная точками, для которых $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{ab}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$.

27. Вычислить $\int_L \sqrt{1 + \frac{x}{R}} dl$, где L – длина кривой $x = R \sin^2 t$, $y = R \sin t \cos t$,
 $z = R \cos t$ $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: $\frac{3}{4} \pi R$.

28. Вычислить $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl$, где L – длина кривой $x = a \cos t$, $y = a \sin t$,
 $z = bt$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

Ответ: $\frac{2}{3} \pi (3a^2 + 4\pi^2 b^2) \sqrt{a^2 + b^2}$.

29. Вычислить $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, где L – длина лемнискаты
 $\rho = a \sqrt{\cos 2\varphi}$ $\left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\right)$.

Ответ: $\frac{\pi a^2}{4}$.

30. Вычислить $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = Rx$.

Ответ: $2R^2$.

31. Вычислить $\int_L \frac{dl}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$, где L – дуга гиперболической спирали $\rho\varphi = 1$
от $\varphi = \sqrt{3}$ до $\varphi = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $19/3$.

Вычислить длины указанных дуг следующих линий:

32. $\begin{cases} x = 4a \cos t \\ y = 4a \sin t \\ z = 3at \end{cases}, (0 \leq t \leq 2\pi)$.

Ответ: $10\pi a$.

33. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ от $x = 0$ до $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{a}{2} \left(e^{\frac{b}{a}} + e^{-\frac{b}{a}} \right)$.

Найти массу материальной дуги данной линии при указанной линейной плотности:

34. $y = \ln x$ от $x = 1$ до $x = 3$, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна квадрату абсциссы точки.

Ответ: $\frac{k}{3} (10\sqrt{10} - 2\sqrt{2})$.

35. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$, если линейная плотность в каждой ее точке обратно пропорциональна ординате точки $(0 \leq x \leq a)$.

Ответ: k .

$$36. \begin{cases} x = t^3 \\ y = t \\ z = t^2 \end{cases}, (0 \leq t \leq 1), \gamma(x, y, z) = k\sqrt{1+4z+9xy}.$$

Ответ: $62/15 k$.

37. Найти центр тяжести дуги NP астроида $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{5}}$, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна абсциссе точки: $N(0, a), P(a, 0)$.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x_c = \frac{5a}{8}, \\ y_c = \frac{15\pi a}{256} \end{cases}.$$

38. Вычислить статический момент первого витка конической винтовой линии $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t$ относительно плоскости ОХУ, если плотность пропорциональна квадрату расстояния точки до этой плоскости.

$$\text{Ответ: } \frac{8k\sqrt{2}}{15} \left[(3\pi^2 - 1)(2\pi^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + 1 \right].$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ:

Вычисление криволинейных интегралов по длине дуги

39. Вычислить $\int_L (x-y) dl$, где L – отрезок прямой от точки $A(0, 0)$ до точки $B(4, 3)$.

Ответ: $5/2$.

40. Вычислить $\int_L \frac{x^2}{y^2} dl$, где L – дуга кривой $xy=1$ между точками $A(1, 1)$, $B(2, 1/2)$.

$$\text{Ответ: } \frac{1}{6} (17\sqrt{17} - 2\sqrt{2}).$$

41. Вычислить $\int_L \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dl$, где L – дуга $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{2}.$$

42. Вычислить $\int_L x dl$, где L – первая арка циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} (a > 0)$.

$$\text{Ответ: } 8\pi a^2.$$

43. Вычислить $\int_L \sqrt{1+4y+9xz} dl$, где L – дуга кривой $x=t, y=t^2, z=t^3$ ($0 \leq t \leq 1$).

Ответ: $62/15$.

44. Вычислить $\int_L (x^2 + y^2)^{2025} dl$, где L – окружность $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$.

Ответ: $2\pi a^{4051}$.

45. Вычислить $\int_L y^2 dl$, где L – верхняя полуокружность $\rho = R$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} \cdot R^3$.

46. Вычислить $\int_L \sqrt{x^2 + y^2 + a^2} dl$, где L – дуга спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ ($a > 0$) между точками $A(0,0)$, $B(a^2, a)$.

Ответ: $a^3 \left(\frac{a^2}{3} + 1 \right)$.

Применение интегралов по длине дуги

а) Вычислить длины указанных дуг следующих линий:

47) $\begin{cases} x = 3t \\ y = 3t^2 \\ z = 2t^3 \end{cases}$ от $O(0,0,0)$ до $A(3,3,2)$.

Ответ: 5.

48) $y = 2\sqrt{x}$ от $x = 0$ до $x = 1$.

Ответ: $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$.

49) $\rho = a\varphi$ первый виток.

Ответ: $\pi a \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{a}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})$.

50) $y = \ln(1 - x^2)$ от $x_1 = 0$ до $x_2 = 1/2$.

Ответ: $\ln 3 - \frac{1}{2}$.

б) Найти массу материальной дуги данной линии при указанной линейной плотности:

51) $x = \ln y$, $1 \leq y \leq 2$, $\gamma(x, y) = y^3 \sqrt{y^2 + 1}$.

Ответ: $\frac{128}{15}$.

52) $3y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$, $\gamma(x, y) = k \cdot x^3$.

Ответ: $\frac{k}{6} (2\sqrt{2} - 1)$.

53) $3y = 2x\sqrt{x}$, если в каждой ее точке M линейная плотность пропорциональна длине дуги OA : $O(0,0)$, $A(4, 16/3)$.

Ответ: $\frac{4}{9} k (65 - 5\sqrt{5})$.

54) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $(0 \leq t \leq \pi)$, если линейная плотность ее в каждой точке $M(x, y)$

равна y .

Ответ: 2.

55) Найти координаты центра тяжести однородной дуги кривой

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad 0 \leq x \leq \ln 2$$

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } x_c &= \frac{1}{3}(\ln 8 - 1) \\ y_c &= \frac{1}{24}(16 \ln 2 + 15) \end{aligned}$$

Тема: ВЫЧИСЛЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ПО КООРДИНАТАМ (II РОДА)

Основные сведения из теории

Определение криволинейного интеграла II рода.

Пусть в плоскости $ХОУ$ задана гладкая направленная дуга AB кривой L . На этой кривой определена непрерывная функция $P(x, y)$.

1. Разобьем кривую на n частичных дуг, проекции которых на ось OX будут $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$.
2. Выберем на каждой частичной дуге произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$.
3. Вычислим значения функции $P(x, y)$ в этих точках: $P(M_1), P(M_2), \dots, P(M_n)$.
4. Составим произведения $P(M_1)\Delta x_1, P(M_2)\Delta x_2, \dots, P(M_n)\Delta x_n$.
5. Просуммируем полученные произведения $\sum_{i=1}^n P(x_i, y_i)\Delta x_i$.

Определение. Криволинейным интегралом по координате x от функции $P(x, y)$ называется предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^n P(x_i, y_i)\Delta x_i$ при условии, что $n \rightarrow \infty$ и $\max|\Delta x_i| \rightarrow 0$ и обозначается: $\int_L P(x, y)dx$. Т.о., из определения следует:

$$\int_L P(x, y)dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max|\Delta x_i| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i. \quad (1)$$

Аналогично определяются интегралы

$$\int_L Q(x, y)dy = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max|\Delta y_i| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n Q(x_i, y_i) \cdot \Delta y_i \quad (2)$$

и

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_L P(x, y)dx + \int_L Q(x, y)dy, \quad (3)$$

как сумма интегралов (1) и (2).

Теорема существования. Если функция $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны, в каждой точке непрерывной дуги AB , то существуют интегралы (1), (2), (3).

Криволинейные интегралы от функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, взятые по пространственной кривой L , определяются аналогично.

Основные свойства криволинейного интеграла II рода

1. При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл II рода меняет знак на противоположный, т.е.

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

2. Если точка C находится внутри дуги AB , то

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{CB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

3. Криволинейные интегралы II рода, взятые по замкнутой кривой обозначаются: $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$; и не зависят от выбора на контуре начальной точки, но зависят от направления.

4. При вычислении криволинейного интеграла по координатам направление задают дополнительно. Если оно не указано, то предполагается, что в случае замкнутого контура он обходится в положительном направлении. За положительное направление обхода по контуру L понимается такое направление, при котором область, которую ограничивает этот контур, остается слева.

Формула Остроградского-Грина. Условия независимости криволинейного интеграла II типа от пути интегрирования

Если L – граница области и функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в замкнутой области D , то справедлива формула Остроградского-Грина

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy. \quad (4)$$

Криволинейный интеграл $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, где контур L целиком лежит внутри некоторой односвязной области S , в которой функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными, не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (5)$$

При этом подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU(x, y)$$

и

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1) \quad (6)$$

где $M_1(x_1, y_1)$ – начальная, $M_2(x_2, y_2)$ – конечная точки пути интегрирования. В частности, в этом случае

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Аналогичные соответствия имеются и для интеграла

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

В частности, условиями полного дифференциала подынтегрального выражения являются равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Вычисление криволинейного интеграла II рода.

Вычисление криволинейных интегралов по координатам, в общем случае, сводится к вычислению определенных интегралов.

I. Если подынтегральная функция является полным дифференциалом некоторой функции, т.е. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU(x, y)$ или выполняется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ и}$$

а) контур интегрирования замкнут, то $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$;

б) контур интегрирования не замкнут, интеграл не зависит от формы кривой интегрирования, но зависит от выбора начальной и конечной точек.

Поэтому такой интеграл принято записывать в виде: $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. В

качестве пути интегрирования, целесообразно брать ломаную, со звеньями параллельными осям координат.

II. Если $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ и

а) контур интегрирования L замкнутая кривая, ограничивающая область D , то применяем формулу Остроградского-Грина:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy;$$

б) контур интегрирования не замкнут и при этом

1. кривая L задана уравнением $y = f(x)$, причем перемещение точки по L происходит при изменении x от a до b , то

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b (P[x, f(x)] + Q[x, f(x)] \cdot f'(x)) dx \quad (7)$$

2. линия L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(t_1 \leq t \leq t_2)$, то

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{t_1}^{t_2} (P[x(t), y(t)] \cdot x'(t) + Q[x(t), y(t)] \cdot y'(t)) dt \quad (8)$$

В случае пространственной кривой криволинейный интеграл II рода вычисляется аналогично.

Применение криволинейных интегралов по координатам.

1. Нахождение работы переменной силы

Пусть материальная точка перемещается по кривой L под действием силы $\vec{F}$. И пусть величина и направление силы зависит только от ее точки приложения. Тогда координаты вектора силы будут функциями координат точки, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$. И криволинейный интеграл II рода есть работа совершаемая силой $\vec{F}$.

$$A = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (9)$$

2. Нахождение функции по ее полному дифференциалу.

Пусть в области существует полный дифференциал функции, т.е. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU(x, y)$. Тогда

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + C \quad (10)$$

или

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + C, \quad (11)$$

где (x_0, y_0) – произвольная фиксированная точка области,

(x, y) – произвольная переменная.

3. Вычисление площадей плоских фигур.

Площадь плоской фигуры, расположенной в плоскости XOY и ограниченной замкнутой линией L , можно найти по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx. \quad (12)$$

При этом кривая L обходится против часовой стрелки.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

56. Вычислить $\int_L x^2 dx + xy^2 dy$, где L – отрезок прямой от точки $A(0,1)$ до точки $B(1,2)$.

Решение: уравнение прямой, проходящей через точки A и B имеет вид $y = x + 1$, поэтому на отрезке AB : $dy = dx$. Подставляя в подынтегральную функцию вместо y его выражение через x и замечая, что при перемещении от A до B x меняется от 0 до 1 по формуле (7), получаем:

$$\int_L x^2 dx + xy^2 dy = \int_0^1 x^2 dx + x(x+1)^2 dx = \int_0^1 (x^3 + 3x^2 + x) dx = \left(\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{4}.$$

57. Вычислить $\int_L ydx + xdy$, где L – дуга астроида $x = a \cos^3(t)$, $y = a \sin^3(t)$ от

точки $M_1(t_1)$ до точки $M_2(t_2)$, для которых $t_1 = 0$ и $t_2 = \frac{\pi}{4}$.

Решение: из уравнения линии находим $dy = 3a \sin^2(t) \cdot \cos(t) dt$,
 $dx = -3a \cos^2(t) \cdot \sin(t) dt$ по формуле (8) имеем:

$$\begin{aligned} \int_L y dx + x dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[a \sin^3 t (-3a \cos^2 t \cdot \sin t) + a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cdot \cos t \right] dt = \\ &= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^4 t \cdot \sin^2 t - \cos^2 t \cdot \sin^4 t) dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \cdot \cos^2 t \cdot \cos 2t dt = \\ &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t \cdot \cos 2t dt = \frac{3a^2}{4} \frac{\sin^3 2t}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

58. Вычислить $\int_L y^2 dx + (x^2 + z) dy + (x + y + z^2) dz$, где L – отрезок прямой в пространстве от точки $A(1,0,2)$ до точки $B(3,1,4)$.

Решение: составим уравнение прямой, проходящей через точки A и B :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2},$$

откуда

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t \\ z = 2t + 2 \end{cases}.$$

Из параметрических уравнений видно, что при перемещении от точки A к точке B параметр t меняется от 0 до 1. Находим, что

$$\begin{aligned} \int_L y^2 dx + (x^2 + z) dy + (x + y + z^2) dz &= \\ &= \int_0^1 t^2 \cdot 2dt + \left[(1+2t)^2 + (2+2t) \right] dt + \left[(1+2t) + t + (2+2t)^2 \right] \cdot 2dt = \int_0^1 (14t^2 + 28t + 13) dt = \frac{95}{3}. \end{aligned}$$

59. Вычислить $\int_L (4xy + 5y^3) dx + (2x^2 + 15xy^2) dy$ в случаях:

а) L – отрезок прямой $y = x$ от точки $O(0,0)$ до точки $B(1,1)$;

б) L – дуга параболы $y^2 = x$ между теми же точками.

Решение: в случае а) уравнение прямой, проходящей через точки O и B имеет вид $y = x$, поэтому $dy = dx$ и

$$\int_L (4xy + 5y^3) dx + (2x^2 + 15xy^2) dy = \int_0^1 (4x^2 + 5x^3 + 2x^2 + 15x^3) dx = (2x^3 + 5x^4) \Big|_0^1 = 7.$$

В случае б) $dx = 2y \cdot dy$, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_L (4xy + 5y^3) dx + (2x^2 + 15xy^2) dy &= \int_0^1 (4y^2 \cdot y + 5y^3) 2y dy + (2y^4 + 15y^2 \cdot y^2) dy = \\ &= \int_0^1 (18y^4 + 17y^4) dy = 7 \cdot y^5 \Big|_0^1 = 7. \end{aligned}$$

Заметим, что в данном примере

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(4xy + 5y^3) = 4x + 15y^2, \text{ а } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + 15xy^2) = 4x + 15y^2,$$

т.е. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Таким образом, выполнено условие (5) и криволинейный ин-

теграл не зависит от формы пути интегрирования.

60. С помощью формулы Остроградского-Грина вычислить

$$\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \left[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right] dy,$$

где L – контур прямоугольника с вершинами $A(3,2)$, $B(6,2)$, $C(6,4)$, $D(3,4)$.

Решение: поскольку

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y \left(\frac{y\sqrt{x^2 + y^2} + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right); \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

по формуле (4) имеем

$$\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \left[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right] dy = \iint_D \left(\frac{y\sqrt{x^2 + y^2} + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dxdy = \iint_D y^2 dxdy$$

где D – область, ограниченная контуром L .

Вычислим полученный двойной интеграл по прямоугольнику $ABCD$ (рис.3):

$$\iint_D y^2 dxdy = \int_3^6 dx \int_2^4 y^2 dy = \int_3^6 \frac{y^3}{3} \Big|_2^4 dx = 56.$$

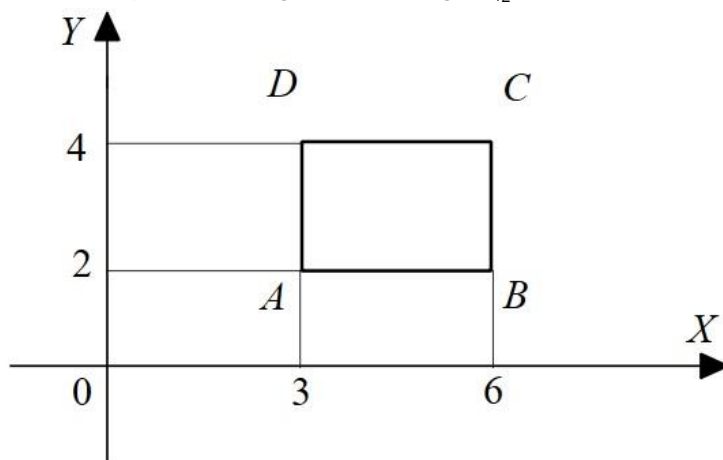


Рис. 3

61. Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение: запишем выражение для dx и dy :

$$dx = -3a \cos^2 t \cdot \sin t dt,$$

$$dy = 3a \sin^2 t \cdot \cos t dt.$$

По формуле (8) имеем:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cos^3 t \cdot 3a \cos t \cdot \sin^2 t dt + a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t \cdot \sin t dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 3a^2 \sin^4 t \cdot \cos^2 t) dt = \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2t}{4} dt = \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{3a^2 \pi}{8}.$$

62. Найти работу, производимую силой $\vec{F} = 4x^6 \vec{i} + xy \vec{j}$ вдоль дуги кривой $y = x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

Решение: проекции силы $\vec{F}$ на оси координат равны: $P(x, y) = 4x^6$, $Q(x, y) = xy$. По формуле (9) находим

$$A = \int_L 4x^6 dx + xy dy = \int_0^1 (4x^6 + x \cdot x^3 \cdot 3x^2) dx = \int_0^1 7x^6 dx = 1.$$

63. Показать, что криволинейный интеграл $I = \int_L (x^3 + 3x^2 y^2) dx + (y^3 + 2x^3 y) dy$

не зависит от пути интегрирования.

Решение: условием независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования является выполнение равенства: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

У нас

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (x^3 + 3x^2 y^2)'_y = 6x^2 y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (y^3 + 2x^3 y)'_x = 6x^2 y.$$

Итак, заданный интеграл не зависит от пути интегрирования. Проверим это для конкретного контура. Возьмем для этого два различных контура $y = x$ и $y = x^2$, и вычислим заданный интеграл по этим путям от точки $O(0,0)$ до $A(1,1)$. Имеем: путь OA по прямой $y = x$. Тогда

$$I = \int_0^1 (x^3 + 3x^2 \cdot x^2) dx + (x^3 + 2x^3 \cdot x) dx = \int_0^1 (2x^3 + 5x^4) dx = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Путь OA по параболе $y = x^2$. Тогда

$$I = \int_0^1 (x^3 + 3x^2 \cdot x^4) dx + (x^6 + 2x^3 \cdot x^2) \cdot 2x dx = \int_0^1 (x^3 + 7x^6 + 2x^7) dx = \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$

Результаты вычислений одинаковы.

64. Вычислить $\int_{(1,-2)}^{(3,0)} (y^2 - 21yx^2) dx + (2xy - 7x^3 + 6y^2) dy$, предварительно установив, что он не зависит от пути интегрирования.

Решение: Так как условие (5) выполняется:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y - 21x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y - 21x^2,$$

то подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$.

Воспользуемся формулой (6). Найдем функцию $U(x, y)$.

Данный интеграл не зависит от пути интегрирования. Тогда

$$dU(x, y) = (y^2 - 21yx^2) dx + (2xy - 7x^3 + 6y^2) dy.$$

С другой стороны,

$$dU(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

Сравнивая последние выражения для $dU(x, y)$, получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y^2 - 21yx^2 \quad (12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy - 7x^3 + 6y^2 \quad (13)$$

Интегрируя по x равенство (12), получаем

$$U(x, y) = \int_0^x (y^2 - 21yx^2) dx = y^2x - 7x^3y + \varphi(y),$$

где φ зависит от y или является постоянной величиной. Полученное равенство дифференцируем по y , результат приравниваем к правой части равенства (13)

$$\frac{\partial U}{\partial y} = (y^2x - 7x^3y + \varphi(y))'_y = 2yx - 7x^3 + \varphi'(y);$$

$$2yx - 7x^3 + \varphi'(y) = 2xy - 7x^3 + 6y^2.$$

Следует, что

$$\varphi'(y) = 6y^2$$

откуда

$$\varphi(y) = 2y^3 + C$$

Следовательно,

$$U(x, y) = y^2x - 7x^3y + 2y^3 + C.$$

Функцию $U(x, y)$ можно было найти, используя формулу (10)

$$U(x, y) = \int_0^x (0) dx + \int_0^y (2xy - 7x^3 + 6y^2) dy + C = y^2x - 7x^3y + 2y^3 + C.$$

По формуле (6) вычислим значение данного интеграла

$$\int_{(1,-2)}^{(3,0)} (y^2 - 21yx^2) dx + (2xy - 7x^3 + 6y^2) dy = U(3, 0) - U(1, -2) = -2.$$

Замечание: данный интеграл можно вычислить по любому пути L , соединяющему точки $A(1, -2)$ и $B(3, 0)$. Например, если L – отрезок прямой $y = x - 3$ (уравнение проходящее, через две точки),

то

$$\begin{aligned} & \int_{(1,-2)}^{(3,0)} (y^2 - 21yx^2) dx + (2xy - 7x^3 + 6y^2) dy = \\ & = \int_1^3 [(x-3)^2 - 21(x-3)x^2 + 2x(x-3) - 7x^3 + 6(x-3)^2] dx = -2. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

65. Вычислить $\int_L (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy$, где L – ломанная ABC , причем $A(1,1), B(3,1), C(3,5)$.

Ответ: 190.

66. Вычислить $\int_L ydx - (y + x^2)dy$, если L – дуга параболы $y = 2x - x^2$, расположенная над осью OX и пробегаемая по ходу часовой стрелки.

Ответ: 4.

67. Вычислить $\int_L x^2 y dx + x^3 dy$, если L – контур, ограниченный параболками $y^2 = x$, $x^2 = y$ и пробегаемый против часовой стрелки.

Ответ: 6/35.

68. Вычислить $\int_L (x - y)dx + (x + y)dy$, где L :

а) отрезок прямой, соединяющей точки $A(2,3)$ и $B(3,5)$;

Ответ: 23/2.

б) дуга параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$;

Ответ: 38/3.

в) дуга параболы $x = y^2$ от $O(0,0)$ до $D(4,2)$.

Ответ: 22/3.

69. Вычислить $\int_L \cos^2 x dx + \frac{dy}{y^3}$, где L – длина кривой $y = \tan x$ от $x = \frac{\pi}{4}$ до $x = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{12}$.

70. Вычислить $\int_L x^2 y dx + y^2 x dy$, если $x = \sqrt{\cos t}$, $y = \sqrt{\sin t}$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

71. Вычислить $\int_L y dx + x dy$, где L – дуга астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$,

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $-\frac{3}{16}\pi a^2$.

72. Вычислить $\int_L yz dx + z^2 dy + (x - y) dz$, где L – отрезок прямой от $A(1,0,2)$ до $B(-2,-1,0)$.

Ответ: 17/3.

73. Проверить, зависит ли от пути интегрирования следующий криволинейный интеграл:

$$\int_L (x^2 - 4xy + x^4)dx + (y^3 - 2x^2 + y)dy.$$

Ответ: не зависит.

74. Вычислить следующий криволинейный интеграл, предварительно определив функцию $U(x, y)$, соответствующим полным дифференциалом которого является подынтегральное выражение:

$$\int_{AB} (3x^2y - 4xy^2)dx + (x^3 - 4x^2y + 3y^2)dy, \text{ где } A(1, -1), B(1, 1).$$

$$\text{Ответ: } 2; U(x, y) = x^3y - 2x^2y^2 + y^3 + C.$$

75. Применив формулу Остроградского-Грина, вычислить следующий криволинейный интеграл:

$$\oint_L (1 - x^2)y dx + x(1 + y^2)dy, L - \text{окружность } x^2 + y^2 = R^2.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi R^4}{2}.$$

76. Показать, что $\oint_L (6xy + 5y)dx + x(3x^2 + 5x)dy$ по любому замкнутому контуру равен нулю.

Применение интегралов по координатам

77. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данной линией: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ (эллипс).

$$\text{Ответ: } \pi ab.$$

78. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$; $8xy = 1$. Площадь примыкает к началу координат.

$$\text{Ответ: } \frac{1 + \ln 8}{24}.$$

79. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = e^{-x}$ и прямой $x = 1$.

$$\text{Ответ: } e + \frac{1}{e} - 2.$$

Найти работу, производимую силой $\vec{F}(x, y)$ вдоль указанного пути L (в направлении возрастания параметра).

$$80. \vec{F} = \left\{ x, \frac{1}{y^2} \right\} L - \text{дуга кривой } xy = 1, 1 \leq x \leq 4. \quad \text{Ответ: } 9/2.$$

$$81. \vec{F} = \{ \sin^2 x, y^2 \}, L - \text{дуга эллипса } x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Ответ: } ab^2.$$

82. Найти работу упругой силы, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению точки от начала координат, если точка приложения силы описывает против часовой стрелки четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащего в первом квадранте.

$$\text{Ответ: } \frac{k}{2}(a^2 - b^2).$$

83. В каждой точке плоскости на материальную точку действует сила $\vec{F}$, проекции которой на оси координат равны $X = xy$ и $Y = x + y$. Вычислить работу силы $\vec{F}$ при перемещении точки из начала координат в точку $(1, 1)$:

а) по прямой $y = x$;

б) по параболе $y = x^2$;

Ответ: а) $4/3$; б) $17/12$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

84. Вычислить $\oint_L ydx + 2x dy$, если L – пробегаемый против часовой стрелки

контур ромба, сторонами которого являются прямые $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \pm 1$, $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \pm 1$.

Ответ: 12.

85. Вычислить $\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy dx + x^2 dy$ вдоль линий:

а) $y = x$;

б) $y = x^2$;

в) $y = x$.

Ответ: а) 1; б) 1; в) 1.

86. Вычислить $\int_L (xy - 1) dx + x^2 y dy$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(0,2)$:

а) по прямой $2x + y = 2$;

б) по дуге параболы $4x + y^2 = 4$;

в) по дуге эллипса $x = \cos t$, $y = 2 \sin t$.

Ответ: а) 1; б) $-1/5$; в) $4/3$.

87. Вычислить $\oint_{-L} 2x dx - (x + 2y) dy$ вдоль периметра треугольника с верши-

нами $A(-1,0)$, $B(0,2)$, $C(2,0)$.

Ответ: 3.

88. Вычислить $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, где L – первая арка циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, a > 0.$$

Ответ: $\pi a^3 (5 - 2\pi)$.

89. Вычислить $\int_L yz dx + xz dy + xy dz$, где L – дуга кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$,

$0 \leq t \leq 1$.

Ответ: 1.

90. Проверить, зависит ли от пути интегрирования следующий криволинейный интеграл:

$$\int_L (3x^2 + 3z^2 + 10xy) dx + (5x^2 - 8yz) dy + (9xz^2 - 4y^2) dz.$$

Ответ: не зависит.

91. Вычислить $\int_L x^2 dx + (x + z) dy + xy dz$:

а) L – отрезок прямой от точки $A(0,0,0)$ до точки $B(1,1,1)$;

б) L – дуга кривой $x = \sin t$, $y = \sin^2 t$, $z = \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;

в) L – дуга кривой $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$, $0 \leq t \leq 1$.

Ответ: а) $5/3$; б) $1,9$; в) $1,9$.

Вычислить следующий криволинейный интеграл, предварительно определив функции $U(x, y)$, соответствующими полными дифференциалами которых являются подынтегральные выражения:

$$92. \int_{(0,2)}^{(1,3)} (4xy - 15x^2y) dx + (2x^2 - 5x^3 + 7) dy$$

Ответ: -2 ; $U(x, y) = 2x^2y - 5x^3y + 7y + C$.

$$93. \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} 2xy^2 dx + 2x^2yz^3 dy + 3x^2y^2z^2 dz$$

Ответ: 1 .

94. Применить формулу Остроградского-Грина, вычислить следующий криволинейный интеграл: $\oint_L \frac{4}{x} dx + 2 \ln x dy$, где L – замкнутый контур, составленный из отрезка оси Ox от точки $(1,0)$ до точки $(2,0)$, отрезка прямой $y = 4 - 2x$ и отрезка прямой $x = 1$ от точки $(1,0)$ до точки $(1,2)$.

Ответ: $4 \ln 2 - 2$.

95. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данной линией:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases} \quad (\text{кардиоида})$$

Ответ: 6π .

96. Вычислить площадь фигуры, ограниченной контуром $OABCO$, если $A(1,3)$, $B(0,4)$, $C(-1,2)$, $O(0,0)$; OA , BC , CO – отрезки прямых, а AB – дуга параболы $y = 4 - x^2$.

Ответ: $25/6$.

97. Вычислить площадь фигуры, заключенной между линией $y = \frac{1}{1+x^2}$ и параболой $y = \frac{x^2}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$.

98. Найти работу, производимую силой $\vec{F}$ вдоль указанного пути: $\vec{F} = \{y - z, xz, x^2\}$, L – отрезок прямой от точки $A(0,2,-1)$ до точки $B(2,1,0)$.

Ответ: $17/3$.

99. Найти работу, производимую силой $\vec{F} = \{4x^6, xy\}$, вдоль дуги кривой $y = x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

Ответ: 1 .

100. Показать, что работа, производимая силой $\vec{F} = \{x, y, z\}$, не зависит от пути с началом в точке M_1 и концом в точке M_2 ; вычислить величину работы:

а) $\vec{F} = \{2xy, x^2\}$ $M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$;

б) $\vec{F} = \{xy^2, x^2y\}$ $M_1(0,0)$, $M_2(2,2)$;

в) $\vec{F} = \{x, y, -z\}$ $M_1(1, -1, -2)$, $M_2(6, 4, -4)$;

г) $\vec{F} = \{5y^2 + 4xz, 10xy - 3z^2, 2x^2 - 6yz\}$ $M_1(1, 0, 2)$, $M_2(2, 1, 1)$.

Ответ: а)1; б)8; в)19; г)11.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ

101. Вычислить $\int_L (x^2 - y^2) dx + xy dy$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1, 1)$, $B(3, 4)$.

Ответ: 111/6.

102. Вычислить $\int_L (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy$, если L – ломаная линия OAB , где $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(4, 2)$.

Ответ: 136/3.

103. Вычислить $\int_L (x^2 - y^2) dy$, если L – дуги кубической параболы $y = 2x^3$ от точки $x = 0$ до точки $x = 1$.

Ответ: -22/15.

104. Вычислить: а) $\int_L (x^2 - y^2) dx$, если L – дуга параболы $y = x^2$ от точки $x = 0$ до точки $x = 2$;

б) $\int_L (x^2 - y^2) dy$, если L – та же дуга, что и в первом интеграле.

Ответ: а) -56/15; б) 40/3.

105. Вычислить $\int_L (2y - 6xy^3) dx + (2x - 9x^2y^2) dy$, где L – одна из линий, соединяющих точки $O(0, 0)$, $A(2, 2)$:

1) отрезок прямой, соединяющий эти точки;

2) парабола $y = \frac{x^2}{2}$;

3) парабола $x = \frac{y^2}{2}$;

4) кубическая парабола $y = \frac{1}{4}x^3$.

Ответ: 1) -88; 2) -88; 3) -88; 4) -88;.

106. Вычислить $\int_L \cos^3 x dx + y dy$, где L – дуга кривой, $y = \sin x$ от точки $x = 0$ до точки $x = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: 7/6.

107. Вычислить $\oint_L 2x(y - 1) dx + x^2 dy$, по контуру фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 9$.

Ответ: 0.

108. Вычислить $\int_L \frac{dy}{x} - \frac{dx}{y}$, если L – первая четверть окружности $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$, пробегающая против хода часовой стрелки.

Ответ: π .

109. Вычислить $\int_L \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2}$, если L – полуокружность $x = a \cdot \cos t$, $y = a \cdot \sin t$, от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$.

Ответ: $-4/3a$.

110. Вычислить $\int_L x^2 dx + (x+z)dy + xy dz$, если L – дуга кривой $x = \sin t$, $y = \sin^2 t$, $z = \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Ответ: 1,9.

Проверить, зависят ли от пути интегрирования следующие интегралы:

111. $\int_L (x + 2x^3 y^2 - y^4) dx + (y^2 - 3x^2 y^3 + 4xy) dy$.

Ответ: зависит.

112. $\int_L (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz$.

Ответ: зависит.

113. Вычислить следующий криволинейный интеграл, предварительно определив функцию $U(x, y)$, соответствующим полным дифференциалом которого является подынтегральное выражение

$\int_L (3y^2 - 4y) dx + (6xy + 4x - 4y) dy$, где $A(0,1)$, $B(1,2)$.

Ответ: 14; $U(x, y) = 3x^2 y + 4xy - 2y^2 + C$.

Применив формулу Остроградского-Грина, вычислить следующие криволинейные интегралы:

114. Вычислить $\oint_L (-x^2 y) dx + xy^2 dy$, если L – окружность радиуса a , пробегаемая в положительном направлении.

Ответ: $\frac{\pi a^4}{2}$.

115. Вычислить $\oint_L (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy$, если L – эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ответ: 0.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

116. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$, (циклоида).

Ответ: $3\pi a^2$.

117. $y^2 = x$, (парабола), $x^2 = y$, (парабола).

Ответ: 1/3.

118. Вычислить площадь четырехугольника с вершинами $A(6,1)$, $B(4,5)$, $C(1,6)$, $D(-1,1)$. Ответ: 45/2.

119. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y = x(x-1)^2$ и осью абсцисс. Ответ: 1/12.

Найти работу, производимую силой $\vec{F}$ вдоль указанного пути:

120. $\vec{F} = \{\sin^2 x, y^2\}$, L – дуга линии $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$.

121. $\vec{F} = \{z^3, x, y^2\}$, L – дуга линии $x = t^3$, $y = t^2$, $z = t$, $0 \leq t \leq 1$.

Ответ: 1,1.

122. Поле, образовано силой, имеющей постоянную величину F и направление положительной полуоси OX . Найти работу поля, когда материальная точка описывает по ходу часовой стрелки четверть окружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащую в I-ой четверти. Ответ: FR .

Тема: ВЫЧИСЛЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПО ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ (I РОДА)

Основные понятия из теории

Определение поверхностного интеграла I рода.

Пусть в каждой точке гладкой поверхности σ задана непрерывная функция $f(x, y, z)$.

1. Разобьем область σ на n частей, площади которых $\Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_n$.
2. Выберем на каждой элементарной площадке произвольно по одной точке $P(x_1, y_1, z_1), P(x_2, y_2, z_2), \dots, P(x_n, y_n, z_n)$.
3. Подсчитаем значение функции $f(x, y, z)$ в этих точках, получим частные значения функции $f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_n)$.
4. Составим произведения $f(P_1)\Delta q_1, f(P_2)\Delta q_2, \dots, f(P_n)\Delta q_n$.
5. Просуммировав полученные произведения

$$\sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta q_i \quad (1)$$

Полученная сумма называется интегральной суммой функции $f(x, y, z)$ по поверхности σ .

Определение. Конечный предел интегральной суммы (1) функции $f(x, y, z)$ на поверхности σ при условии, что $\max d_i \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ (d – диаметр, максимальное расстояние от крайних точек границы σ) называют поверхност-

ным интегралом 1 рода функции $f = f(x, y, z)$ по поверхности σ и обозначаются

$$\lim_{\substack{\max d_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta q_i = \iint_{\sigma} f(x, y, z) dq \quad (2)$$

Теорема существования и единственности

Если функция $f = f(x, y, z)$ непрерывна в каждой точке гладкой поверхности σ , то предел ее интегральной суммы на этой поверхности при $\max d_i \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$ существует, конечен и не зависит ни от способа разбиения, ни от выбора точек на каждой частичной поверхности.

Поверхностный интеграл первого рода является обобщением криволинейного интеграла.

Вычисление поверхностного интеграла I рода

Вычисление поверхностного интеграла первого рода сводится к вычислению двойного интеграла.

Положим поверхность σ такая, что любая прямая параллельная оси Oz пересекает поверхность σ не более чем в одной точке. Тогда уравнение поверхности σ можно однозначно представить в виде $z = z(x, y)$ и поверхность проецируется на плоскость в двумерную область D_{xy} , тогда

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dq = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy \quad (3)$$

Аналогично вычисляются поверхностные интегралы I рода, когда поверхность σ однозначно проецируется на плоскости Oxz и Oyz

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dq = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} dx dz \quad (4)$$

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dq = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \cdot \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dy dz \quad (5)$$

Поверхностный интеграл I типа обладает свойствами, аналогичными свойствам криволинейного интеграла I типа.

Применение поверхностных интегралов I типа.

Площадь S поверхности σ вычисляется по формуле

$$S = \iint_{\sigma} dq \quad (6)$$

Если $\gamma(x, y, z)$ – поверхностная плотность массы материальной поверхности σ , то масса всей поверхности определяется интегралом

$$m = \iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) dq \quad (7)$$

Координаты центра тяжести $C(x_c, y_c, z_c)$ поверхности σ вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} x \cdot \gamma(x, y, z) dq; \quad y_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} y \cdot \gamma(x, y, z) dq; \quad z_c = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} z \cdot \gamma(x, y, z) dq, \quad (8)$$

где m определяется формулой (7).

Моменты инерции I_x, I_y, I_z относительно координатных осей OX, OY, OZ находятся по формулам:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y, z) dq; & I_y &= \iint_{\sigma} (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) dq; \\ I_z &= \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y, z) dq. \end{aligned} \quad (9)$$

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

123. Вычислить интеграл $\iint_{\sigma} \sqrt{1+4x^2+4y^2} dq$, где σ – конечная часть поверхности $z=1-x^2-y^2$, отсеченная плоскостью $z=0$ (рис.4).

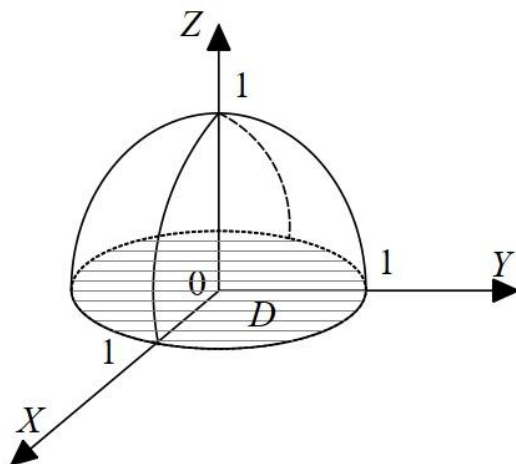


Рис. 4

Решение: применим формулу (3).

Так как

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y,$$

то

$$dq = \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy$$

Проекцией части данного параболоида вращения $z=1-x^2-y^2$ на плоскость XOY является область D, ограниченная окружностью $x^2+y^2=1$.

Переходим к двойному интегралу по формуле (3)

$$\iint_{\sigma} \sqrt{1+4x^2+4y^2} dq = \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2} \cdot \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy = \iint_D (1+4x^2+4y^2) dx dy = I$$

Для вычисления двойного интеграла I перейдем к полярным координатам, так область D – окружность:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Здесь $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 1$.

Таким образом

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1+4\rho^2) \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho+4\rho^3) d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2} + \rho^4 \right) \Big|_0^1 d\varphi = \frac{3}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} = 3\pi$$

124. Вычислить $\iint_{\sigma} x(y+z) dq$, где σ – часть цилиндрической поверхности

$x = \sqrt{1-y^2}$, отсеченной плоскостями $z=0$ и $z=2$.

Решение: так как поверхность задана уравнением, разрешенным относительно x , необходимо воспользоваться формулой

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dq = \iint_{D_1} f[x(y, z), y, z] \cdot \sqrt{1+x_y'^2 + x_z'^2} dydz,$$

где D_1 – проекция поверхности σ на плоскость OYZ (рис. 5).

Поскольку

$$x_y' = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, \quad x_z' = 0,$$

$$\text{то } dq = \sqrt{1 + \frac{y^2}{1-y^2} + 0} dydz = \frac{dydz}{\sqrt{1-y^2}}.$$

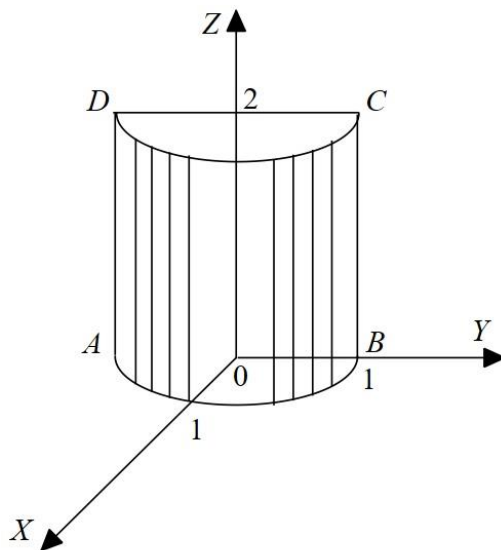


Рис. 5

Область D_1 в данном случае – прямоугольник ABCD. По указанной формуле находим:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} x(y+z) dq &= \iint_{D_1} \sqrt{1-y^2} (y+z) \cdot \frac{dydz}{\sqrt{1-y^2}} = \iint_{D_1} (y+z) dydz = \int_{-1}^1 dy \int_0^2 (y+z) dz = \\ &= \int_{-1}^1 \left(yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^2 dy = \int_{-1}^1 (2y+2) dy = 4. \end{aligned}$$

125. Найти площадь боковой поверхности кругового конуса с радиусом основания R и высотой H .

Решение: площадь поверхности вычисляется по формуле (6). Поместим конус так, как изображено на рис.6.

Как известно, уравнение конуса II порядка имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$. У нас $a = b = R$, $c = H$. Поэтому уравнение конуса имеет вид $\frac{x^2 + y^2}{R^2} = \frac{z^2}{H^2}$, то есть $z = \frac{H}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$.

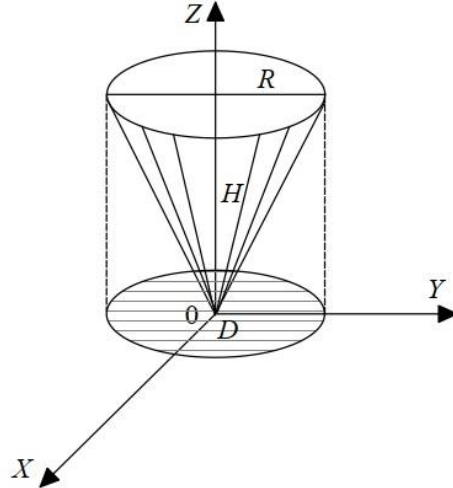


Рис. 6

Поскольку

$$z'_x = \frac{H}{R} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{H}{R} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

то

$$dq = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy = \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{H^2}{R^2} \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}} dx dy.$$

Поэтому

$$S = \iint_{\sigma} dq = \iint_D \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}} dx dy = \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}} \iint_D dx dy = \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}} \pi R^2 = \pi R \sqrt{R^2 + H^2} = \pi R L,$$

где $L = \sqrt{R^2 + H^2}$.

126. Найти массу полусферы $x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$, если поверхностная плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния точки до начала координат.

Решение: масса поверхности вычисляется по формуле (7). По условию функция $\gamma(x, y, z)$ имеет вид $\gamma(x, y, z) = K(x^2 + y^2 + z^2)$, где K – коэффициент пропорциональности, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$ – расстояние точки $M(x, y, z)$ до начала координат. По формуле (3)

$$m = \iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) dq = \iint_{\sigma} K(x^2 + y^2 + z^2) dq,$$

но

$$dq = \sqrt{1 + x'^2_y + x'^2_z} dy dz = \frac{R}{x} dy dz,$$

т.о.

$$m = K \iint_D R^2 \cdot \frac{R}{x} dydz = K \cdot R^3 \iint_D \frac{dydz}{\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}},$$

где D – круг $y^2 + z^2 \leq R^2$ на плоскости OYZ . Переходя к полярным координатам, находим

$$m = K \cdot R^3 \iint_D \frac{dydz}{\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}} = K \cdot R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = K \cdot R^3 \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{(R^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} 2\pi = 2\pi K R^4.$$

127. Найти центр тяжести однородной поверхности параболоида $y^2 + z^2 = 10x$, отсеченной плоскостью $x=10$.

Решение: координаты центра тяжести поверхности находим по формулам (8). В нашем случае $y_C = 0$ и $z_C = 0$, так как данная поверхность симметрична относительно оси OX (рис.7).

$$x_C = \frac{\gamma \cdot \iint_{\sigma} x dq}{\gamma \cdot \iint_{\sigma} dq} = \frac{\frac{\gamma}{50} \cdot \iint_D (y^2 + z^2) \sqrt{25 + y^2 + z^2} dydz}{\frac{\gamma}{5} \cdot \iint_D \sqrt{25 + y^2 + z^2} dydz} = \frac{A}{B}.$$

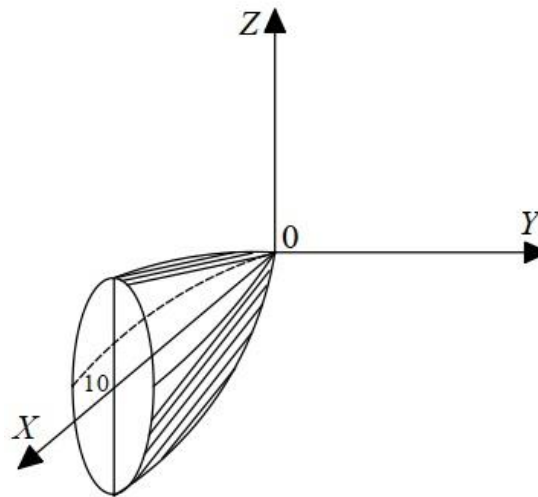


Рис. 7

Переходим к полярным координатам: $y = \rho \cos \varphi$, $z = \rho \sin \varphi$, $dydz = \rho d\rho d\varphi$.

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{\frac{\gamma}{50} \cdot \iint_D \rho^2 \sqrt{25 + \rho^2} \rho d\rho d\varphi}{\frac{\gamma}{5} \cdot \iint_D \sqrt{25 + \rho^2} \rho d\rho d\varphi} = \frac{1}{10} \cdot \frac{\iint_D \rho^3 \sqrt{25 + \rho^2} d\rho d\varphi}{\iint_D \rho \sqrt{25 + \rho^2} d\rho d\varphi} = \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{10} \rho^3 \sqrt{25 + \rho^2} d\rho}{\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{10} (25 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} d(25 + \rho^2)} = \frac{25\sqrt{5} + 1}{5\sqrt{5} - 1}. \end{aligned}$$

Замечание: интеграл $\int_0^{10} \rho^3 \sqrt{25 + \rho^2} d\rho$ вычислен с помощью подстановки $\sqrt{25 + \rho^2} = t$ или по формуле интегрирования по частям.

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Вычисление поверхностных интегралов I рода

128. Вычислить $\iint_{\sigma} z dq$ по части поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leq z \leq 2$.

Ответ: $\frac{2\pi\sqrt{2} \cdot 7}{3}$.

129. Вычислить $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z) dq$, где σ — верхняя поверхность сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Ответ: $\frac{4}{3}\pi R^4 + \pi R^3$.

130. Вычислить $\iint_{\sigma} (6x + 4y + 3z) dq$, где σ — часть плоскости $x + 2y + 3z = 6$,

расположенная в первом октанте.

Ответ: $54\sqrt{14}$.

131. Вычислить $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) dq$, где σ — поверхность, отсекаемая от параболоида

$x^2 + y^2 = 2z$ плоскостью $z = 1$.

Ответ: $4/5\pi(5 + 2\sqrt{3})$.

132. Вычислить $\iint_{\sigma} z(x + y) dq$, где σ — часть поверхности $z = \sqrt{9 - x^2}$, отсеченная плоскостями

$y = 0, y = 2$.

Ответ: 36.

133. Вычислить $\iint_{\sigma} \left(x + y^2 + z^2 - \frac{3}{2}\right) dq$, где σ — конечная часть поверхности

$x = 2 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}$, отсеченная плоскостью $x = 0$.

Ответ: $\frac{\pi}{5}(25\sqrt{5} - 1)$.

Применения интегралов по площади поверхности (I рода)

Найти площадь части поверхности:

134. Параболоида $x^2 + y^2 = 6z$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 27$.

Ответ: 42π .

135. Цилиндра $2z = x^2$, отсеченной плоскостями $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$.

Ответ: 13.

136. Плоскости $z = x$, которая заключена внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ выше плоскости $z = 0$.

Ответ: $2\pi\sqrt{2}$.

Найти массу поверхности при указанной поверхностной плотности $\gamma(x, y, z)$:

137. $z = \sqrt{4-x^2}$, отсеченной плоскостями $y=0$, $y=5$, $\gamma(x,y,z)=k(x+y)z$.

Ответ: $100k$.

138. Куба $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, если $\gamma(x,y,z)$ в каждой точке пропорциональна произведению ее координат.

Ответ: $3/4k$.

139. $2z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$, если $\gamma(x,y,z)$ в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки.

Ответ: $\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})k}{15}$.

Найти координаты центра тяжести поверхности:

140. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсеченной плоскостями $z=0$, $z=h$, $\gamma(x,y,z)=\gamma=const$.

Ответ: $(0,0,2/3h)$.

141. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, если $\gamma(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $(0,0,4/3\pi R)$.

142. Вычислить момент инерции относительно оси OZ части однородной поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, для которой $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Ответ: $I_z = \frac{\pi R^4}{3}$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Вычисление поверхностных интегралов I рода

143. Вычислить $\iint_{\sigma} x(y+z)dq$, где σ – часть цилиндрической поверхности $x = \sqrt{4-y^2}$, отсеченной плоскостями $z=0$, $z=3$.

Ответ: 36.

144. Вычислить $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2)dq$, где σ – часть конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, заключенной между плоскостями $z=0$, $z=1$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{2}$.

145. Вычислить $\iint_{\sigma} dq$, где σ – часть цилиндрической плоскости $x+y+z=a$, расположенная в первом октанте.

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

146. Вычислить $\iint_{\sigma} x dq$, где σ – полусфера $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Ответ: 0.

147. Вычислить $\iint_{\sigma} \sqrt{1+4x^2+4z^2} dq$, где σ – конечная часть поверхности $y = 2 - x^2 - z^2$, отсеченная плоскостью $y = 0$.

Ответ: 10π .

Приложения интегралов по площади поверхности (I рода)

Найти площадь части поверхности:

148. Цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, заключенной между плоскостями $y + z = 0$, $z = 0$.

Ответ: $4R^2$.

149. Плоскости $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, заключенной между координатными плоскостями.

Ответ: $\frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$.

150. Конуса $y^2 + z^2 = x^2$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

Ответ: $2\pi a^2$.

Найти массу поверхности при указанной поверхностной плотности $\gamma(x, y, z)$:

151. Полусферы $y^2 + z^2 = x^2$, если в каждой ее точке поверхностная плотность численно равна расстоянию этой точки от радиуса, перпендикулярного основанию полусферы.

Ответ: $\frac{\pi^2 R^3}{2}$.

152. $2z = 9 - x^2 - y^2$, отсеченной плоскостью $z = 0$, если $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 2$.

Ответ: $\frac{\pi}{15} (500\sqrt{10} - 23)$.

153. $y = \sqrt{9 - z^2}$, отсеченной плоскостями $x = 0$, $x = 2$, если $\gamma(x, y, z) = ky(x + z)$.

Ответ: $36k$.

Найти координаты центра тяжести поверхности:

154. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $h \leq z \leq R$, $\gamma(x, y, z) = \gamma = \text{const}$.

Ответ: $C\left(0, 0, \frac{R+h}{2}\right)$.

155. $z = x$, ограниченной плоскостями $x + y = 1$, $y = 0$, $x = 0$, $\gamma(x, y, z) = \gamma = \text{const}$.

Ответ: $C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

156. Найти момент инерции параболоида $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$ относительно оси OZ при $0 \leq z \leq 1$.

Ответ: $\frac{4\pi}{15} (1 + 6\sqrt{3})$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ

Вычисление поверхностных интегралов I рода

157. Вычислить $\iint_{\sigma} (3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2) dq$, где σ — часть поверхности $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, отсеченная плоскостью $y = 0$, $y = 2$.

Ответ: $56\sqrt{2}\pi$.

158. Вычислить $\iint_{\sigma} (y + z - \sqrt{1 - x^2}) dq$, где σ — поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, заключенная между плоскостями $z = 0$, $z = 2$.

Ответ: $2(4 + 2\pi)$.

159. Вычислить $\iint_{\sigma} (x + y + z) dq$, где σ — поверхность куба $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

Ответ: 9.

160. Вычислить $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) dq$, где σ — граница тела $\sqrt{x^2 + z^2} \leq z \leq 1$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{2})$.

161. Вычислить $\iint_{\sigma} \left(x^2 + y^2 + z - \frac{1}{2}\right) dq$, где σ — конечная часть поверхности $2z = 2 - x^2 - y^2$, отсеченная плоскостью HOY .

Ответ: $\frac{\pi}{5}(9\sqrt{3} - 1)$.

162. Вычислить $\iint_{\sigma} \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2} dq$, где σ — конечная часть поверхности $x = 4 - y^2 - z^2$, отсеченная плоскостью $x = 0$.

Ответ: 36π .

163. Вычислить $\iint_{\sigma} (2z^2 - x^2 - y^2) dq$, где σ — часть поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанная цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi$.

164. Вычислить $\iint_{\sigma} (x^2 + 2y^2z^2 + y^4 + z^4) dq$, где σ — часть плоскости $x + y + z = 2$, вырезанная цилиндром $y^2 + z^2 = 1$.

Ответ: $\frac{29}{6}\sqrt{3}\pi$.

165. Вычислить $\iint_{\sigma} \frac{dq}{r^2}$, где σ – цилиндр $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченная плоскостями $z = 0$, $z = H$, а r – расстояние от точки поверхности до начала координат.

Ответ: $2\pi \operatorname{arctg}\left(\frac{H}{R}\right)$.

Приложения интегралов по площади поверхности (I рода).

Найти площадь части поверхности:

166. а) цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$, расположенной внутри $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

б) сферы, расположенной внутри цилиндра.

Ответ: $4R^2$; $2R^2(\pi - 2)$.

167. Параболоида $x = 1 - y^2 - z^2$, вырезанной цилиндром $y^2 + z^2 = 1$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi$.

Найти массу поверхности при указанной поверхностной плотности $\gamma(x, y, z)$:

168. Цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$, $z = H$, если $\gamma(x, y, z)$ в каждой точке обратно пропорциональна квадрату расстояния ее до начала координат.

Ответ: $2\pi k \operatorname{arctg}\left(\frac{H}{R}\right)$.

169. $x + y + z = 4$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 4$, $\gamma(x, y, z) = x^4 + z^4 + 2x^2z^2 + y^2$.

Ответ: $\frac{280}{3}\pi\sqrt{3}$.

170. Найти координаты центра тяжести поверхности $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, если $\gamma(x, y, z)$ в каждой ее точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки от радиуса, перпендикулярного основанию полусферы.

Ответ: $C\left(0, 0, \frac{4}{3}\pi R\right)$.

171. Найти моменты инерции относительно координатных плоскостей поверхности однородного конуса, ось которого совпадает с осью OZ, а вершина лежит в начале координат.

Ответ: $I_{xy} = \frac{\pi l h^2 R}{2}$, $I_{yz} = \frac{\pi l R^3}{4}$,

где h – высота конуса,

R – радиус основания, $l = \sqrt{R^2 + h^2}$ – образующая конуса.

Тема: ВЫЧИСЛЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПО КООРДИНАТАМ (II РОДА)

Основные понятия из теории

Те поверхности, которые до сих пор встречались, обладали одним общим свойством: каждая из них содержала две стороны. Причем переход с одной стороны на другую невозможен был без того, чтобы не перейти через границу этой поверхности, если она ее имела. Если же поверхность границы не имела, то для того, чтобы перейти с одной стороны на другую, достаточно было проколоть ее и перейти на другую сторону.

Оказывается, имеются такие поверхности, которые имеют только одну сторону. Примером таких поверхностей является поверхность Мебиуса (рис.8).

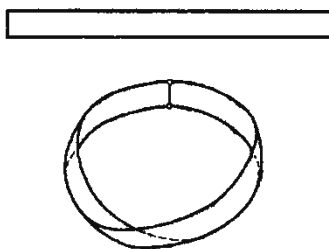


Рис. 8

В дальнейшем мы будем рассматривать только двусторонние поверхности. Причем одну сторону мы будем считать положительной, а другую отрицательной.

Сторона поверхности называется положительной (отрицательной) в направлении оси Oz , если вектор нормали $\vec{n}$, проведенный в произвольной точке к этой стороне, составляет с осью Oz острый (тупой) угол (рис.9).

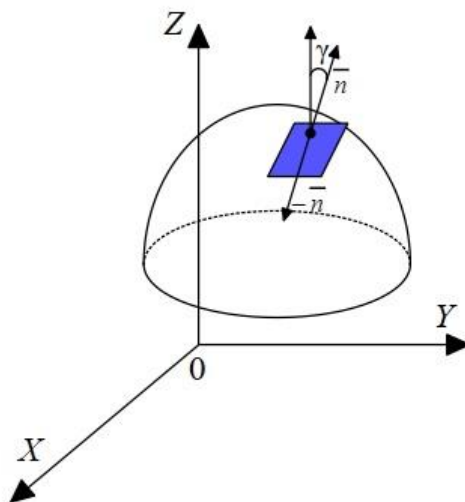


Рис. 9

Верхняя сторона положительная в направлении оси Oz , нижняя – отрицательная.

Аналогично, определяются стороны положительная и отрицательная в направлении Ox и Oy .

Выбор одной из 2-х сторон поверхности положительной или отрицательной в направлении одной оси называется ориентацией поверхности в направлении этой оси.

Определение поверхностного интеграла II рода.

Пусть имеем некоторую гладкую поверхность σ . Сориентируем ее в направлении оси Oz с помощью нормального вектора $\vec{n}$. Положим, что в каждой точке этой поверхности задана непрерывная функция $R(x, y, z)$.

1. Разобьем поверхность σ произвольным образом на n -частей, не имеющих общих внутренних точек и обозначим площадь каждой частичной поверхности через Δq_i ($i = \overline{1, n}$).

2. Спроектируем каждую частичную поверхность на плоскость XOY , и обозначим величины, полученных при этом частичных площадей через ΔS_i ($i = \overline{1, n}$). Очевидно, что $\Delta S_i = \Delta q_i \cos \gamma$, ($i = \overline{1, n}$), (γ – угол между вектором нормали $\vec{n}$ и осью Oz). Т.е., ΔS_i – число со знаком.

3. Выберем на каждой частичной поверхности одну произвольную точку M_i ($i = \overline{1, n}$) и составим интегральную сумму вида:

$$\sum_{i=1}^n R(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i. \quad (1)$$

Определение. Конечный предел интегральной суммы функции $R(x, y, z)$ на поверхности σ при условии, $n \rightarrow \infty$ и $\max d_i \rightarrow 0$ называется поверхностным интегралом по координатам (x, y) от функции $R(x, y, z)$ поверхности σ и обозначается

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\substack{\max d_{i_{xy}} \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n R(M_i) \Delta S_{i_{xy}} \quad (2)$$

Аналогично определяются поверхностные интегралы по координатам (y, z) от функции $P(x, y, z)$ и (x, z) от функции $Q(x, y, z)$

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz = \lim_{\substack{\max d_{i_{yz}} \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n (M_i) \Delta S_{i_{yz}} \quad (3)$$

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz = \lim_{\substack{\max d_{i_{xz}} \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n R(M_i) \Delta S_{i_{xz}} \quad (4)$$

Сумма всех этих трех интегралов называется составным поверхностным интегралом по координатам и обозначается

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy \quad (5)$$

Теорема существования и единственности

Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны в каждой точке гладкой поверхности σ , то на этой поверхности существуют каждый из четырех поверхностных интегралов по координатам (1), (2), (3) и (4).

Значение поверхностного интеграла II рода зависит от стороны поверхности σ , по которой производится интегрирование.

Если S – замкнутая поверхность, то интеграл по внешней стороне обозначается $\oint_{+\sigma}$, а по внутренней стороне $\oint_{-\sigma}$.

Свойства поверхностного интеграла II рода

1. Простые поверхностные интегралы по координатам зависят от ориентации поверхности в направлении соответствующей оси.

Например, $\iint_{\sigma^{+Oz}} R(x, y, z) dx dy = - \iint_{\sigma^{-Oz}} R(x, y, z) dx dy$;

2. Если σ – цилиндрическая поверхность с образующей параллельной оси Oz , то $\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = 0$.

Т.е. если в интеграле отсутствует дифференциал некоторой переменной и поверхность параллельна этой оси, то $\iint_{\sigma} = 0$.

Все остальные свойства совпадают со свойствами двойного интеграла.

Вычисление поверхностных интегралов по координатам.

Вычисление поверхностных интегралов по координатам сводится к вычислению двойных интегралов.

Если поверхность σ такова, что любая прямая параллельная оси Oz , пересекает поверхность не более чем в одной точке, тогда она однозначно проецируется в область D_1 плоскости XOY и $z = z(x, y)$ – ее уравнение,

то

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_1} R[x, y, z(x, y)] dx dy \quad (6)$$

где знак «плюс» берется в том случае, если на выбранной стороне поверхности $\cos \gamma > 0$ (γ – угол между поверхностью и осью OZ). Аналогично,

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz &= \pm \iint_{D_2} Q[x, y(x, z), z] dx dz, \\ \iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz &= \pm \iint_{D_3} P[x(y, z), y, z] dy dz \end{aligned}$$

Формула связи поверхностных интегралов первого и второго видов связаны формулой:

$$\iint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS,$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – направляющие косинусы нормали, направленной в ту сторону поверхности, по которой берется интеграл второго рода.

Формула Стокса. Формула Остроградского-Гаусса.

Интеграл по незамкнутой поверхности σ связан с криволинейным интегралом по контуру L , ограничивающему эту поверхность по формуле Стокса

$$\iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy + R dz, \quad (7)$$

где $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ функции и их частные производные первого порядка должны быть непрерывны в некоторой области V , содержащей σ ; с той стороны поверхности σ , по которой ведется интегрирование, обход контура L должен быть направлен против часовой стрелки.

Если σ – замкнутая поверхность, то поверхностный интеграл II рода можно преобразовать в тройной интеграл по области V , ограниченной этой поверхностью, и, наоборот, по формуле Остроградского-Гаусса

$$\oiint_{+\sigma} P dydz + Q dx dz + R dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (8)$$

где функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и их частные производные первого порядка должны быть непрерывны в области V .

Применение поверхностных интегралов II рода

Объем тела, ограниченного сверху поверхностью $\sigma_1 (z = z_1(x, y))$, снизу – поверхностью $\sigma_2 (z = z_2(x, y))$, сбоку – цилиндрической поверхностью σ_3 , образующие которой параллельны оси OZ, выражается формулой

$$V = \frac{1}{3} \oiint_{\sigma} x dydz + y dz dx + z dx dy, \text{ где } \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

а интегрирование берется по внешней стороне поверхности σ .

С помощью поверхностных интегралов II рода могут быть вычислены:

1. Поток K векторного поля, образованного вектором $\vec{a} \{a_x, a_y, a_z\}$ через поверхность S :

$$K = \iint_{\sigma} a_x dydz + a_y dx dz + a_z dx dy$$

2. Циркуляция Γ векторного поля $\vec{n}$ по контуру L . Применяется формула Стокса (формула 6).

Эти и другие применения поверхностных интегралов подробнее будут рассмотрены в разделе «Элементы теории поля».

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

172. Вычислить $\iint_{\sigma} (y^2 + z^2) dx dy$, где σ – верхняя сторона поверхности $z = \sqrt{1-x^2}$, отсеченная плоскостями $y=0, y=2$ (рис.10).

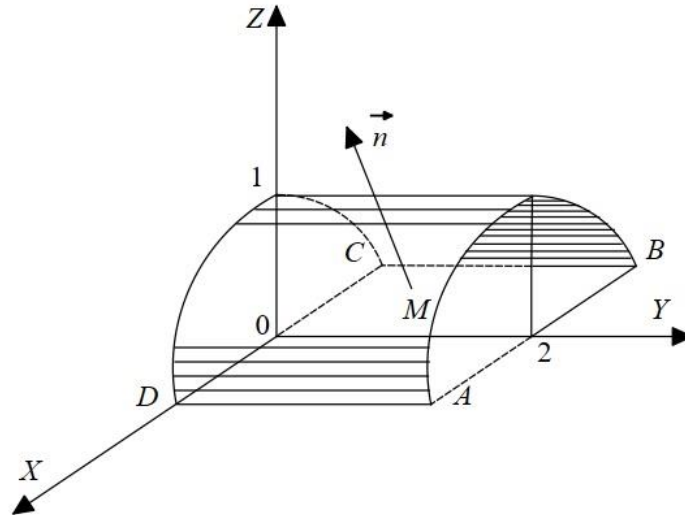


Рис. 10

Решение: нормаль $\vec{n}$ в точке M , соответствующая указанной стороне поверхности, составляет с осью OZ острый угол. Поэтому в формуле (5) будем брать знак «плюс». Проекцией σ данной поверхности на плоскость XOY является прямоугольник $ABCD$. По формуле (5) находим:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (y^2 + z^2) dx dy &= \iint_D \left[y^2 + \left(\sqrt{1-x^2} \right)^2 \right] dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^2 (y^2 + 1 - x^2) dy = \\ &= \int_{-1}^1 dx \left(\frac{y^3}{3} + y - x^2 y \right) \Big|_0^2 = \int_{-1}^1 \left(\frac{8}{3} + 2 - 2x^2 \right) dx = \left(\frac{14}{3} x - \frac{2}{3} x^3 \right) \Big|_{-1}^1 = 8. \end{aligned}$$

173. Найти $\oint_L x^2 y^3 dx + dy + z dz$, применяя формулу Стокса, если L – окружность $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$.

Решение: воспользуемся формулой (6). Здесь $P = x^2 y^3, Q = 1, R = z$.
Получаем

$$I = \oint_L x^2 y^3 dx + dy + z dz = \iint_S (0-0) dy dz + (0-0) dx dz + (0-3x^2 y^2) dx dy,$$

т.е. $I = -3 \iint_S x^2 y^2 dx dy.$

Положив $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$, получим

$$\begin{aligned} I &= -3 \iint_D \rho^5 \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi d\varphi d\rho = -12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^2 \rho^5 d\rho = \\ &= -2R^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi d\varphi = -\frac{R^6}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi = -\frac{R^6}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = -\frac{\pi R^6}{8}. \end{aligned}$$

174. Вычислить $I = \oint_{+\sigma} 4x^3 dydz + 4y^3 dx dz - 6z^4 dx dy$, где σ – полная поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, заключенная между плоскостями $z = 0, z = 2$ (рис.11).

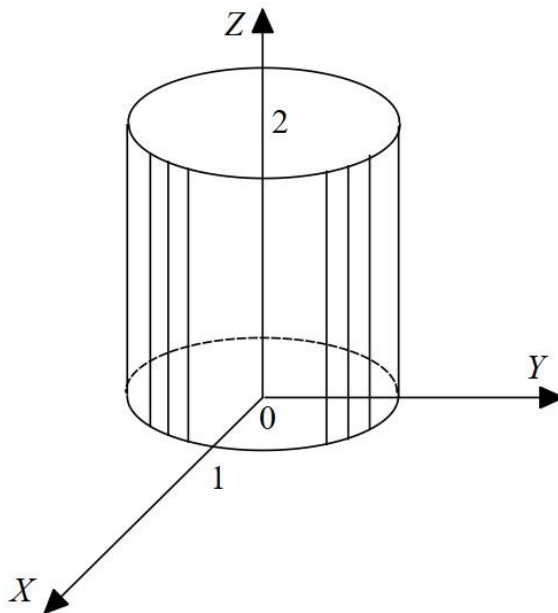


Рис. 11

Решение: применим формулу (7) Остроградского-Гаусса. Здесь $P = 4x^3$, $Q = 4y^3$, $R = -6z^4$.

Так как $P'_x = 12x^2$, $Q'_y = 12y^2$, $R'_z = -24z^3$,

то по формуле (7) имеем

$$\begin{aligned} I &= 12 \iiint_V (x^2 + y^2 - 2z^3) dx dy dz = 12 \iint_D dx dy \int_0^2 (x^2 + y^2 - 2z^3) dz = 12 \iint_D \left[(x^2 + y^2)z - \frac{z^4}{2} \right]_0^2 dx dy = \\ &= 12 \iint_D [2(x^2 + y^2) - 8] dx dy = 24 \iint_{\rho \leq 1} (\rho^4 - 4) \rho d\rho d\varphi = 24 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho^3 - 4\rho) d\rho = 24 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - 2 \right) d\varphi = \\ &= -42\varphi \Big|_0^{2\pi} = -84\pi. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Вычисление поверхностных интегралов по координатам

175. Вычислить $\iint_{\sigma} \sqrt[4]{x^2 + y^2} dx dy$, где σ – нижняя сторона круга $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Ответ: $-\frac{4}{5}\pi\sqrt{R^5}$.

176. Вычислить $\oint_{-\sigma} y dx dz$, где σ – поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Ответ: $-1/6$.

177. Вычислить $\iint_{\sigma} 2xdy + ydxdz + (-x^2z)dydz$, где σ – внешняя сторона поверхности эллипсоида $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, расположенной в первом октанте.

Ответ: $\frac{4}{3}\pi - \frac{4}{15}$.

178. Вычислить $\iint_{\sigma} (y^2 + z^2)dxdy$, где σ – верхняя сторона поверхности $z = \sqrt{1-x^2}$, отсеченной плоскостями $y=0$, $y=2$.

Ответ: 8.

179. Вычислить $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + 3z^2)dxdy$, где σ – внешняя сторона поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсеченной плоскостями $z=0$, $z=2$.

Ответ: -32π .

180. Вычислить $\iint_{\sigma} (x^2 - 2y^2 + 6z)dxdy$, где σ – нижняя сторона поверхности $6z = y^2$, отсеченной плоскостями $z=6$, $x=0$, $x=3$.

Ответ: 324.

181. Вычислить $\iint_{\sigma} x^2y^2z dxdy$, где σ – положительная сторона нижней половины сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Ответ: $\frac{2\pi R^7}{105}$.

182. С помощью формулы Стокса вычислить следующий криволинейный интеграл, проверить результат непосредственным вычислением $\oint_L x^2y^3dx + dy + zdz$, где L – окружность $x^2 + y^2 = R^2$, $z=0$. В качестве поверхности взять полусферу $z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Ответ: $-\frac{\pi R^6}{8}$.

С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить следующие интегралы:

183. Решить задачу №185.

184. Вычислить $\iint_{\sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, где σ – внешняя граница куба $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$.

Ответ: $3a^4$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Вычисление поверхностных интегралов по координатам

185. Вычислить $\oiint_{-\sigma} z^2dxdy$, где σ – эллипсоид $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.

Ответ: 0.

186. Вычислить $\iint_{\sigma} (5x^2 + 5y^2 + z^2) dx dy$, где σ – внешняя сторона части верхней полусферы $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, вырезанной конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: 16π .

187. Вычислить $\iint_{\sigma} y^2 z dx dy + zx dy dz + x^2 y dx dz$, где σ – внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из параболоида вращения $z = x^2 + y^2$, цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и координатных плоскостей.

Ответ: $\pi/8$.

188. С помощью формулы Стокса вычислить следующий криволинейный интеграл, проверить результат непосредственным вычислением

$$\oint_L y dx + z dy + x dz, L - \text{окружность } x = R \cos^2 t, y = \frac{R}{\sqrt{2}} \sin 2t, z = R \sin^2 t.$$

Ответ: 0.

С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить следующие интегралы:

189. $\iint_{\sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, где σ – внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Ответ: $4\pi abc$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ

Вычисление поверхностных интегралов по координатам:

190. Вычислить $\iint_{\sigma} (y^2 + z^2) dy dz$, где σ – внешняя сторона части параболоида $x = a^2 - y^2 - z^2$, отсеченной плоскостью YOZ .

Ответ: $\frac{\pi a^4}{2}$.

191. Вычислить $\oiint_{-\sigma} z dx dy + y dx dz + x dy dz$, где σ – поверхность куба, ограниченного плоскостями $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.

Ответ: -3 .

192. Вычислить $\oiint_{+\sigma} (z + 1) dx dy$, где σ – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Ответ: $\frac{4}{3} \pi R^3$.

193. Вычислить $\iint_{\sigma} (x^2 + z^2 + ay^2) dx dz$, где σ – внешняя сторона поверхности $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, отсеченной плоскостью $y = 0, y = b$.

Ответ: $\frac{\pi b^4}{2}$.

194. Вычислить $\iint_{\sigma} \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \right) dx dy$, где σ – нижняя сторона поверхности $z = 4 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}$, отсеченной плоскостью $z = 0$.

Ответ: -96π .

195. Вычислить $\iint_{\sigma} xz dx dy + xy dy dz + yz dx dz$, где σ – внешняя сторона пирамиды, составленной плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Ответ: $1/8$.

С помощью формулы Стокса вычислить следующие криволинейные интегралы, проверить результаты непосредственным вычислением:

196. $\oint_L y dx + z dy + x dz$, L – окружность $x = R \cos^2 t$, $y = \frac{R}{\sqrt{2}} \sin 2t$, $z = R \sin^2 t$.

Ответ: $-\frac{\pi R^2}{\sqrt{2}}$.

197. $\oint_{-L} (2x + y) dx - 2y dy$, L – периметр треугольника $A(0, -1)$, $B(0, 2)$, $C(2, 0)$.

За поверхность S принять данный треугольник.

Ответ: 3.

С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить следующие интегралы:

198. $\iint_{\sigma} x dy dz + y dx dz + z dx dy$, где σ – поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, $-h \leq z \leq h$.

Ответ: $6\pi a^2 h$.

199. $\iint_{\sigma} x^3 dy dz + y^3 dx dz + z^3 dx dy$, взятый по наружной поверхности пирамиды, образованной плоскостями $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Ответ: $0,15a^5$.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ

Криволинейные и поверхностные интегралы

Вариант 1

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_L \sqrt{2-z^2} (2z - \sqrt{x^2+y^2}) dl$, где L – дуга кривой $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

б) $\int_{L_{AB}} (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, где L_{AB} – дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(-1,1)$ до точки $B(1,1)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$\left(\sin^2 y - y \sin 2x + \frac{1}{2} \right) dx + (x \sin 2y + \cos^2 x + 1) dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (2x + 3y + 2z) dq, \quad (p): x + 3y + z = 3.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\sigma} (y^2 + z^2) dy dz, \quad \text{где } \sigma \text{ – часть поверхности параболоида } x = 9 - y^2 - z^2$$

(нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует острый угол с ортом $\vec{i}$), отсеченная плоскостью $x = 0$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} 3x dy dz + (y + z) dx dz + (x - z) dx dy, \quad (p): x + 3y + z = 3.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L z dx + (x + y) dy + y dz, \quad (p): 2x + y + 2z = 2.$$

7. Вычислить координаты центра тяжести (y_C) части плоскости $z = x$, ограниченной плоскостями $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

Вариант 2

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\oint_L (x^2 + y^2) dl$ где L – окружность $x^2 + y^2 = 4$.

б) $\int_{L_{AB}} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, где L_{AB} – дуга астроида $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$ от точки $A(2,0)$ до точки $B(0,2)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$\left(\frac{y}{x} + \ln y + 2x \right) dx + \left(\frac{x}{y} + \ln x + 1 \right) dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (2 + y - 7x + 9z) dq, \quad (p): 2x - y - 2z = -2.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$\iint_{\sigma} z^2 dx dy$, где σ – внешняя сторона поверхности эллипсоида $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (3x - 1) dy dz + (y - x + z) dx dz + 4z dx dy, \quad (p): 2x - y - 2z = 2.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (x + z) dx + z dy + (2x - y) dz, \quad (p): 3x + 2y + z = 6.$$

7. Найти массу сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, находящейся в I-ом октанте, если $\gamma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Вариант 3

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_{L_{OB}} \frac{dl}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$, где L_{OB} – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,0)$ и $B(2,2)$.

б) $\int_{L_{OA}} (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$, где L_{OA} – дуга кубической параболы $y = x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$(x^2 - 2xy)dy - (y^2 - 2xy)dx.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (6x + y + 4z) dq, \quad (p): 3x + 3y + z = 3.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\sigma} z dx dy + y dx dz + x dy dz, \quad \text{где } \sigma \text{ – внешняя сторона поверхности куба, ограниченного плоскостями } y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1.$$

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} x dy dz + (x + z) dx dz + (y + z) dx dy, \quad (p): 3x + 3y + z = 3.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (y + z) dy dz + x dx dz + (y - 2z) dx dy, \quad (p): 2x + 2y + z = 2.$$

7. Вычислить работу силы $\vec{F} = (x, -y, x)$ при перемещении единицы массы по контуру квадрата со сторонами $x = \pm a, y = \pm a$.

Вариант 4

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_{L_{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) dl$ где L_{AB} – отрезок прямой AB ; $A(-1, 0)$; $B(0, 1)$.

б) $\oint_L (x + 2y) dx + (x - y) dy$ где L – окружность $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t$ при положительном направлении обхода.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$\left(\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 y^2}} + x^2 \right) dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 y^2}} + y \right) dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (x + 2y + 3z) dq, \quad (p): x + y + z = 2.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\sigma} (z + 1) dx dy, \quad \text{где } \sigma \text{ – внешняя сторона поверхности сферы } x^2 + y^2 + z^2 = 16.$$

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (x+z)dydz + (z-x)dx dz + (x+2y+z)dxdz, \quad (p): x+y+z=2.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax+By+Cz=D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n}=(A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (2y-z)dx + (x+2y)dy + ydz, \quad (p): x+3y+2z=6.$$

7. Определить работу при перемещении единицы массы по контуру, образованному полуосями координат и первой четвертью эллипса $x=a \cdot \cos t$, $y=b \cdot \sin t$. Поле образовано силой $\vec{F}(y,a)$.

Вариант 5

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{5}(x-y)}$ где L_{AB} – отрезок прямой, заключенный между точками $A(0,4)$; $B(4,0)$.

б) $\oint_L (x^2y-x)dx + (y^2x-2y)dy$ где L – дуга эллипса $x=3\cos t$, $y=2\sin t$ при положительном направлении обхода.

2. Найти функцию $U(x,y)$ по ее полному дифференциалу.

$$\left(\frac{y}{1+x^2y^2} - 1 \right) dx + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} - 10 \right) dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (3x-2y+6z)dq, \quad (p): 2x+y+2z=2.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\sigma} yzdydz + xzdx dz + xydxdy, \quad \text{где } \sigma \text{ – верхняя сторона плоскости}$$

$x+y+z=4$, отсеченной координатными плоскостями.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (y+2z)dydz + (x+2z)dxdz + (x-2y)dxdy, \quad (p): 2x+y+2z=2.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (y+z)dx + (x+6y)dy + ydz, \quad (p): x+2y+2z=2.$$

7. Найти длину дуги линии $y = \ln x$ от точки с абсциссой $x = \sqrt{3}$ до точки с абсциссой $x = \sqrt{8}$.

Вариант 6

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_L \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dl$ где L -дуга кардиоиды $\rho = 2(1 + \cos \varphi), 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

б) $\oint_{L_{AB}} (xy-1)dx + x^2ydy$ где L_{AB} -дуга эллипса $x = \cos t, y = 2 \sin t$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(0,2)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2} + 2x \right) dx + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 2y \right) dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (2x + 5y - z) dq, \quad (p): x + 2y + z = 2.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\sigma} x^2 dydz + y^2 dx dz + z^2 dx dy, \quad \text{где } \sigma - \text{внешняя сторона сферы } x^2 + y^2 + z^2 = 16,$$

лежащая в первом октанте.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (x+z)dydz + 2ydx dz + (x+y-z)dx dy, \quad (p): x+2y+z=2.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (y+z)dx + (2x-z)dy + (y+3z)dz, \quad (p): 2x+y+3z=6.$$

7. Найти массу астроида $x = a \cdot \cos^3 t$, $y = a \cdot \sin^3 t$, расположенной в I-ой четверти, если $\gamma(x, y) = xy$.

Вариант 7

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_{L_{AB}} y dl$ где L_{AB} – дуга астроида $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, заключенная между точками $A(1,0)$; $B(0,1)$.

б) $\int_{L_{OBA}} 2xydx - x^2dy$ где L_{OBA} – ломаная OBA ; $O(0,0)$; $B(2,1)$; $A(2,1)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$(y^2 e^{xy^2} + 3)dx + (2xye^{xy^2} - 1)dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (5x - 8y - z) dq, \quad (p): 2x - 3y + z = 6.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\sigma} x dy dz + y dx dz + z dx dy, \quad \text{где } \sigma - \text{внешняя сторона сферы } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (3x - y) dy dz + (2y + z) dx dz + (2z - x) dx dy, \quad (p): 2x - 3y + z = 6.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (3x + y) dx + (x + z) dy + y dz, \quad (p): x + 2y + z = 2.$$

7. Вычислить работу силы $\vec{F}(y^2, x^2)$ вдоль дуги $x^2 = y$ от точки $O(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

Вариант 8

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_{L_{OB}} y dl$, где L_{OB} – дуга параболы $y^2 = \frac{2}{3}x$ между точками $O(0,0)$ и $B\left(\sqrt{\frac{35}{6}}, \sqrt{\frac{35}{3}}\right)$.

б) $\int_{L_{AB}} (x^2 - y^2) dx + xy dy$ где L_{AB} – отрезок прямой AB ; $A(1,1)$; $B(3,4)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$\left(\sin x + \frac{\cos x \cos y}{\sin^2 x} \right) dx + \left(\frac{\sin y}{\sin x} - \cos y \right) dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (3y - x - z) dq, \quad (p): x - y + z = 2.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\sigma} xz dx dy + xy dy dz + yz dx dz, \quad \text{где } \sigma \text{ – верхняя часть плоскости } x + y + z = 1,$$

отсеченной координатными плоскостями.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (2y + z) dy dz + (x - y) dx dz - 2z dx dy, \quad (p): x - y + z = 2.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (x + z) dx + z dy + (2x - y) dz, \quad (p): 2x + 2y + z = 4.$$

7. Найти длину линии $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ от точки с абсциссой $x_1 = 1$ до точки с абсциссой $x_2 = 4$.

Вариант 9

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl$, где L – дуга кривой $x = \cos t, y = \sin t, z = \sqrt{3}t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

б) $\int_{L_{AB}} \cos y dx - \sin x dy$, где L_{AB} – отрезок прямой AB ; $A(2\pi, -2\pi)$; $B(-2\pi, 2\pi)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$\frac{1-y}{x^2y}dx + \frac{1-2x}{xy^2}dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (3y - 2x - 2z) dq, \quad (p): 2x - y - 2z = -2.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$\iint_{\sigma} yz dx dy + xz dy dz + xy dx dz$, где σ – наружная поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, отсеченная плоскостями $z = 0, z = 5$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (x + y) dy dz + 3y dx dz + (y - z) dx dy, \quad (p): 2x - y - 2z = -2.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (x + z) dx + (x + 3y) dy + y dz, \quad (p): x + y + 2z = 2.$$

7. Найти массу материальной дуги линии $x = \frac{1}{y}$, $1 \leq y \leq 2$, если

$$\gamma(x, y) = \frac{k \cdot y^2}{x^3}.$$

Вариант 10

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_L \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl$ где L – дуга кардиоиды $\rho = (1 + \cos \varphi), 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

б) $\int_{L_{AB}} \frac{y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ где L_{AB} – отрезок прямой $AB; A(1, 2); B(3, 6)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$\left(\frac{y^2}{(x+y)^2} - \frac{1}{x} \right) dx + \left(\frac{x^2}{(x+y)^2} + \frac{1}{y} \right) dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (2x - 3y + z) dq, \quad (p): x + 2y + z = 2.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$\iint_{\sigma} y^2 z dx dy + x z dy dz + x^2 y dx dz$, где σ – часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$ (нормальный вектор $\vec{n}$ образует тупой угол с ортом $\vec{k}$), отсеченная плоскостью $z = 1$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (x + y - z) dy dz - 2y dx dz + (x + 2z) dx dy, \quad (p): x + 2y + z = 2.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (2y - z) dx + (x + y) dy + x dz, \quad (p): x + 2y + 2z = 4.$$

7. Найти массу материальной дуги линии $3y = x^3 (0 \leq x \leq 1)$, если $\gamma(x, y) = x^3$.

Вариант 11

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_L \sqrt{2y} dl$ где L – первая арка циклоиды $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$.

б) $\int_{L_{AB}} \cos y dx - \sin x dy$, где L_{AB} – дуга кубической параболы $y = x^3$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$(x^2 + 3xy^2) dx + (3x^2 y - y^2) dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (5x + y - z) dq, \quad (p): x + 2y + 2z = 2.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) z dx dy$, где σ – внешняя сторона нижней половины сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (y - z) dy dz + (2x + y) dx dz + z dx dy, \quad (p): 2x + y + z = 2.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (2z - x)dx + (x - y)dy + (3x + z)dz, \quad (p): x + y + 2z = 2.$$

7. Вычислить работу силы $\vec{F}(y^2, x^2)$ вдоль дуги $y^2 = x$ от точки $O(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

Вариант 12

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_{L_{OA}} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$ где L_{OB} – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,0)$ и $A(1,2)$.

б) $\int_{L_{ABC}} (x^2 + y^2)dx + (x + y^2)dy$, где L_{ABC} – ломаная ABC ; $A(1,2)$; $B(3,2)$; $C(3,5)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} \right) dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} \right) dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (3x + 2y + 2z)dq, \quad (p): 3x + 2y + 2z = 6.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\sigma} x^2 dydz + z^2 dx dy, \quad \text{где } \sigma \text{ – часть поверхности конуса } z^2 = x^2 + y^2 \text{ (нормальный}$$

вектор $\vec{n}$ которой образует тупой угол с ортом $\vec{k}$), лежащая между плоскостями $z = 0, z = 1$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} x dydz + (y - 2z) dx dz + (2x - y + 2z) dx dy, \quad (p): x + 2y + 2z = 2.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (2x - z)dx + (y - x)dy + (x + 2z)dz, \quad (p): x - y + z = 2.$$

7. Найти статический момент полуокружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащей в верхней полуплоскости, относительно оси OX ($\gamma(x, y) = 1$).

Вариант 13

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_L \frac{(y^2 - x^2)xy}{(x^2 + y^2)^2} dl$ где L – дуга кривой $\rho = 9 \sin 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

б) $\int_{L_{OB}} xy^2 dx + yz^2 dy - x^2 z dz$ где L_{OB} – отрезок прямой OB ; $O(0, 0, 0)$; $B(-2, 4, 5)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$\left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (2x + 3y - z) dq, \quad (p): 2x + y + z = 2.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\sigma} (2y^2 - z) dx dy, \quad \text{где } \sigma \text{ – часть поверхности параболоида } z = x^2 + y^2 \text{ (нор-}$$

мальный вектор $\vec{n}$, которой образует тупой угол с ортом $\vec{k}$), отсекаемая плоскостью $z = 2$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (x + 2z) dy dz + (y - 3z) dx dz + z dx dy, \quad (p): 3x + 2y + 2z = 6.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (x + y + z) dx + 2z dy + (y - 7z) dz, \quad (p): 2x + 3y + z = 6.$$

7. Найти массу четверти окружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной в I-ой четверти, если $\gamma(x, y) = 2x$.

Вариант 14

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_{L_{OABC}} xy dl$, где L_{OABC} – контур прямоугольника с вершинами $O(0,0), A(4,0), B(4,2), C(0,2)$.

б) $\int_{L_{OA}} y dx + x dy$, где L_{OA} – дуга окружности $x = R \cos t, y = R \sin t; O(R,0); A(0,R)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$(3x^2 - 2xy + y^2)dx + (2xy - x^2 - 3y^2)dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (9x + 2y + z) dq, \quad (p): 2x + y + z = 4.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\sigma} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}, \quad \text{где } \sigma \text{ – часть поверхности гиперболоида } x^2 + y^2 = z^2 + 1$$

(нормальный вектор $\bar{n}$ которой образует тупой угол с ортом $\bar{k}$), отсекаемая плоскостями $z = 0, z = \sqrt{3}$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} 4x dy dz + (x - y - z) dx dz + (3y + 2z) dx dy, \quad (p): 2x + y + z = 4.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\bar{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (x + y) dx + (y + z) dy + 2(x + z) dz, \quad (p): 3x - 2y + 2z = 6.$$

7. Найти площадь части поверхности $x^2 + y^2 = 6z$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 27$.

Вариант 15

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_{L_{ABO}} (x + y) dl$, где L_{ABO} – контур треугольника с вершинами $A(1,0), B(0,1), O(0,0)$.

б) $\int_{L_{OA}} xy dx + (y - x) dy$, где L_{OA} – дуга параболы $y^2 = x$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$(\sin 2x - 2\sin x \sin y - 12x^2 y)dx + (\sin 2y + 2\cos x \cos y - 4x^3)dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (3x + 8y + 8z)dq, \quad (p): x + 4y + 2z = 8.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\sigma} xydydz + yzdx dz + xzdx dy, \quad \text{где } \sigma \text{ – внешняя сторона сферы } x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

лежащая в первом октанте.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (2z - x)dydz + (x + 2y)dx dz + 3zdx dy, \quad (p): x + 4y + 2z = 8.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L 4zdx + (x - y - z)dy + (3y + z)dz, \quad (p): x - 2y + 2z = 2.$$

7. Вычислить работу силы $\vec{F} = x \cdot \vec{i} + \frac{1}{y^2} \vec{j}$ вдоль кривой $y^2 = x$ от точки

$$A(1,1) \text{ до точки } B\left(4, \frac{1}{4}\right).$$

Вариант 16

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_L \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2}$ где L – первый виток линии $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 2t$.

б) $\int_{L_{AB}} xdx + ydy + (x - y + 1)dz$, где L_{AB} – отрезок прямой AB ; $A(1,1,1)$; $B(2,3,4)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$\left(12x^2 y + \frac{1}{y^2}\right)dx + \left(4x^3 - \frac{2x}{y^3}\right)dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (4y - x + 4z)dq, \quad (p): x - 2y + 2z = 2.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\sigma} x^2 dydz + z dx dy, \text{ где } \sigma - \text{ часть поверхности параболоида } z = x^2 + y^2 \text{ (нормальный вектор } \vec{n} \text{ которой образует тупой угол с ортом } \vec{k} \text{), отсекаемая плоскостью } z = 4.$$

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} 4z dydz + (x - y - z) dx dz + (3y + z) dx dy, \quad (p): x - 2y + 2z = 2.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (2z - x) dx + (x + 2y) dy + 3z dz, \quad (p): x + 4y + 2z = 8.$$

7. Найти координаты центра тяжести однородной дуги циклоиды $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t \quad (0 \leq t \leq \pi)$.

Вариант 17

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_{L_{OAB}} (x + y) dl$, где L_{OAB} – контур треугольника с вершинами $O(0,0)$, $A(-1,0)$, $B(0,1)$.

б) $\int_{L_{AB}} (xy - 1) dx + x^2 y dy$, где L_{AB} – дуга параболы $y^2 = 4 - 4x$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(0,2)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$\left(2xy - \frac{1}{x^2} \right) dx + \left(x^2 - \frac{2}{y^2} \right) dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (7x + y + 2z) dq, \quad (p): 3x - 2y + 2z = 6.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\sigma} x^2 dydz + y^2 dx dz - z dx dy, \text{ где } \sigma - \text{ часть поверхности конуса } z^2 = x^2 + y^2$$

(нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует острый угол с ортом $\vec{k}$), отсекаемая плоскостями $z = 0$ и

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (x+y)dydz + (y+z)dxdz + 2(z+x)dxdy, \quad (p): 3x-2y+2z=6.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax+By+Cz=D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n}=(A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L 4xdx + (x-y-z)dy + (3y+2z)dz, \quad (p): 2x+y+z=4.$$

$$\vec{a}(M) = 4x\vec{i} + (x-y-z)\vec{j} + (3y+2z)\vec{k}, \quad (p): 2x+y+z=4.$$

7. Найти массу кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$, если $\gamma(M) = 2\sqrt{\rho}$.

Вариант 18

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_L (x+y)dl$ где L – дуга лемнискаты Бернулли $\rho^2 = \cos 2\varphi, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

б) $\int_{L_{OB}} xydx + (y-x)dy$, где L_{OB} – дуга параболы $y = x^2$ от точки $O(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

2. Найти функцию $U(x,y)$ по ее полному дифференциалу.

$$\left(e^x - \frac{2}{x^3y} \right) dx + \left(\sin 3y - \frac{1}{x^2y^2} \right) dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (2x+3y+z)dq, \quad (p): 2x+3y+z=6.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$\iint_{\sigma} x^2 dydz - z^2 dxdz + z dxdy$, где σ – часть поверхности параболоида $z = 3 - x^2 - y^2$ (нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует острый угол с ортом $\vec{k}$), отсекаемая плоскостью $z = 0$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (x+y+x)dydz + 2zdxdz + (y-7z)dxdy, \quad (p): 2x+3y+z=6.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (2z + x)dx + (y - 3z)dy + zdz, \quad (p): 3x + 2y + 2z = 6.$$

7. Найти длину кардиоиды $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$.

Вариант 19

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$ где L – окружность $x^2 + y^2 = 2y$ при положительном направлении обхода.

б) $\int_{L_{OB}} (xy - y^2) dx + xdy$, где L_{OB} – дуга параболы $y = x^2$ от точки $O(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$\left(\frac{2}{x^2} + \cos^2 y \right) dx + (y - x \sin 2y) dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (4x - y + z) dq, \quad (p): x - y + z = 2.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\sigma} yz dydz - x^2 dx dz - y^2 dx dy, \quad \text{где } \sigma \text{ – часть поверхности конуса } x^2 + z^2 = y^2$$

(нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует тупой угол с ортом $\vec{j}$), отсекаемая плоскостями $y = 0, y = 1$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (2x - z) dydz + (y - x) dx dz + (x + 2z) dx dy, \quad (p): x - y + z = 2.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L x dx + (y - 2z) dy + (2x - y + 2z) dz, \quad (p): x + 2y + 2z = 2.$$

7. Найти длину линии $x = 2 \cos t - \cos 2t$, $y = 2 \sin t - \sin 2t$ ($0 \leq t \leq \pi$).

Вариант 20

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_{L_{OABC}} xy dl$, где L_{OABC} – контур прямоугольника с вершинами $O(0,0)$, $A(5,0)$, $B(5,3)$, $C(0,3)$.

б) $\int_{L_{AB}} x dy - y dx$, где L_{AB} – дуга астроида $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$ от точки $A(2,0)$ до точки $B(0,2)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$(\cos x - 2xy)dx + (-3\sin y - x^2)dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (6x - y + 8z) dq, \quad (p): x + y + 2z = 2.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$\iint_{\sigma} x^2 dydz + 2y^2 dx dz - z dx dy$, где σ – часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$ (нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует острый угол с ортом $\vec{k}$), отсекаемая плоскостью $z = 1$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (2y - z) dydz + (x + y) dx dz + x dx dy, \quad (p): x + 2y + 2z = 4.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (x - z) dx + (2x + y) dy + z dz, \quad (p): 2x + y + z = 2.$$

7. Найти массу поверхности $x^2 + y^2 = 1$, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$, если $\gamma(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Вариант 21

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\oint_L (x^2 + y^2) dl$ где L – окружность $x^2 + y^2 = 4x$ при положительном направлении обхода.

б) $\int_{L_{AB}} (xy - 1) dx + \frac{1}{2} x^2 dy$, где L_{AB} – дуга параболы $y^2 = 4x$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(1,2)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$(2xy - 14 \sin x \cos x) dx + (x^2 + 7 \cos^2 x) dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (4x - 4y - z) dq, \quad (p): x + 2y + 2z = 4.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\sigma} 2x dy dz + (1 - z) dx dy, \quad \text{где } \sigma \text{ – внутренняя сторона цилиндра } x^2 + y^2 = 4,$$

отсекаемая плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (2z - x) dy dz + (x - y) dx dz + (3x + z) dx dy, \quad (p): x + y + 2z = 2.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (x + y - z) dx - 2y dy + (x + 2z) dz, \quad (p): x + 2y + z = 2.$$

7. Найти массу кривой $y = \ln x$ от $x_1 = 1$ до $x_2 = 3$, если $\gamma(x, y) = 3x^2$.

Вариант 22

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_{L_{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y}) dl$ где L_{AB} – дуга астроида $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$, заключенная между точками $A(1,0); B(0,1)$.

б) $\int_{L_{AB}} (xy - 1) dx + x^2 y dy$ где L_{AB} – отрезок прямой $AB; A(1,0); B(0,2)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$\left(\frac{1}{\cos^2 x} + y^3 \right) dx + 3xy^2 dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (2x + 5y + z) dq, \quad (p): x + y + 2z = 2.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\sigma} 2x dydz - y dx dz + z dx dy, \quad \text{где } \sigma \text{ – внешняя сторона замкнутой поверхности,}$$

образованной параболоидом $3z = x^2 + y^2$ и полусферой $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (x + z) dydz + (x + 3y) dx dz + y dx dy, \quad (p): x + y + 2z = 2.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (x + y) dx + 3y dy + (y - z) dz, \quad (p): 2x - y - 2z = -2.$$

7. Найти длину кривой $3y = 2x\sqrt{x}$ от $0(0,0)$ до $A\left(4, \frac{16}{3}\right)$.

Вариант 23

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_L xy dl$, где L – контур квадрата со сторонами $x = \pm 1, y = \pm 1$.

б) $\int_{L_{AB}} 2xy dx + y^2 dy + z^2 dz$, где L_{AB} – дуга одного витка винтовой линии $x = \cos t, y = \sin t, z = 2t; A(1,0,0); B(1,0,4\pi)$ до точки $B(1,2)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$\left(\frac{1}{x} + \sin y \right) dx + x \cos y dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (4x - y + 4z) dq, \quad (p): 2x + 2y + z = 4.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\sigma} 4x dydz + 2y dx dz - z dx dy, \quad \text{где } \sigma \text{ – внешняя сторона сферы } x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iiint_{\sigma} (x+z)dydz + zdx dz + (2x-y)dxdy, \quad (p): 2x+2y+z=4.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax+By+Cz=D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n}=(A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (2y+z)dx + (x-y)dy - 2zdz, \quad (p): x-y+z=2.$$

7. Найти работу силы $\vec{F}(-y, x)$ вдоль астроида $x = a \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

Вариант 24

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_L y^2 dl$, $y = 1 - \cos t$ где L – первая арка циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

б) $\int_{L_{AB}} \frac{y}{x} dx + x dy$ где L_{AB} – дуга линии $y = \ln x$ от точки $A(1,0)$; $B(e,2)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}\right)dx = \left(\frac{1-x}{y^2}\right)dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iiint_{\sigma} (5x+2y+2z)dq, \quad (p): x+2y+z=2.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iiint_{\sigma} (x+z)dydz + (z+y)dxdy, \quad \text{где } \sigma \text{ – внешняя сторона цилиндра } x^2 + y^2 = 1,$$

отсекаемая плоскостями $z=0$ и $z=2$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iiint_{\sigma} (3x+y)dydz + (x+z)dx dz + ydxdy, \quad (p): x+2y+z=2.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости

(p): $Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (3x - y)dx + (2y + z)dy + (2z - x)dz, \quad (p): 2x - 3y + z = 6.$$

7. Найти длину первого витка спирали $\rho = 2\varphi$.

Вариант 25

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_{L_{ABCD}} xy dl$, где L_{ABCD} – контур прямоугольника с вершинами $A(2,0)$, $B(4,0)$, $C(4,3)$, $D(2,3)$.

б) $\oint_L ydx - xdy$ где L – дуга эллипса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, «пробегаемая» в положительном направлении обхода.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$(x + y\sin^2 y)dx + (1 + x\sin^2 y + xy\sin 2y)dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p), отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (2x + 5y + 10z)dq, \quad (p): 2x + y + 3z = 6.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\sigma} 3xdydz - ydxdz - zdx dy, \quad \text{где } \sigma \text{ – часть поверхности параболоида}$$

$9 - z = x^2 + y^2$ (нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует острый угол с ортом $\vec{k}$), отсекаемая плоскостью $z = 0$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p), отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (y + z)dydz + (2x - z)dxdz + (y + 3z)dx dy, \quad (p): 2x + y + 3z = 6.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости (p): $Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (z + x)dx + 2ydy + (x + y - z)dz, \quad (p): x + 2y + z = 2.$$

7. Найти работу силы $\vec{F}(y, x)$ вдоль отрезка прямой от точки $A(1, 0)$ до точки $B\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Вариант 26

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_L y dl$, где L – дуга параболы $y^2 = 2x$, отсеченная параболой $x^2 = 2y$.

б) $\int_{L_{OA}} 2xy dx - x^2 dy$, где L_{OA} – дуга параболы $y = \frac{x^2}{4}$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(2, 1)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$(e^x + y \cos xy - 6x) dx + (x \cos xy - e^y) dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (2x + 15y + z) dq, \quad (p): x + 2y + 2z = 2.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\sigma} (y - x) dy dz + (z - y) dx dz + (x - z) dx dy, \quad \text{где } \sigma \text{ – внутренняя сторона за-}$$

мкнутой поверхности, образованной конусом $x^2 = y^2 + z^2$ и плоскостями $x = 0, x = 1$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (y + z) dy dz + (x + 6y) dx dz + y dx dy, \quad (p): x + 2y + 2z = 2.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (2z + y) dx + (x + 2z) dy + (x - 2y) dz, \quad (p): 2x + y + 2z = 2.$$

7. Найти статический момент однородной дуги циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $(0 \leq t \leq \pi)$ относительно оси OX .

Вариант 27

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{x-y}$ где L_{AB} – отрезок прямой, заключенный между точками $A(4,0)$; $B(6,1)$.

б) $\int_{L_{AB}} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, где L_{AB} – ломаная линия $y=|x|$ от точки $A(-1,1)$ до точки $B(2,2)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$\left(\frac{2x}{3+x^2+y^2} - 12x^2y^2 + 3 \right) dx + \left(\frac{2y}{3+x^2+y^2} - 8x^3y + 4 \right) dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (3x + 10y - z) dq, \quad (p): x + 3y + 2z = 6.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\sigma} 3x^2 dydz - y^2 dx dz - z dx dy, \quad \text{где } \sigma \text{ – часть поверхности параболоида}$$

$1 - z = x^2 + y^2$ (нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует острый угол с ортом $\vec{k}$).

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (2y - z) dydz + (x + 2y) dx dz + y dx dy, \quad (p): x + 3y + 2z = 6.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (z + x) dx + (z - y) dy + (x + 2y + z) dz, \quad (p): x + y + z = 2.$$

7. Вычислить с помощью криволинейного интеграла площадь, ограниченную линией $x = 3 \cos t, y = \sin t$.

Вариант 28

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_L (x^2 + y^2) dl$, где L – первая часть окружности $\rho = 2$.

б) $\int_{L_{OA}} 2xy dx - x^2 dy + z dz$, где L_{OA} – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,0,0)$ и $A(2,1,-1)$.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$(\cos y + y \cos x - 6xy^2)dx + (\sin x - x \sin y - 6x^2y)dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (2x + 3y + z) dq, \quad (p): 2x + 2y + z = 2.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$\iint_{\sigma} (1 + 2x^2) dydz + y^2 dx dz + z dx dy$, где σ – часть поверхности конуса $x^2 + y^2 = z^2$ (нормальный вектор $\bar{n}$ которой образует тупой угол с ортом $\bar{k}$), отсекаемая плоскостями $z = 0$ и $z = 4$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (y + z) dydz + x dx dz + (y - 2z) dx dy, \quad (p): 2x + 2y + z = 2.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\bar{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L x dx + (x + z) dy + (y + z) dz, \quad (p): 3x + 3y + z = 3.$$

7. Найти массу материальной дуги линии $y = x^4 (0 \leq x \leq 1)$, если $\gamma(x, y) = 144x^5$.

Вариант 29

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ где L_{AB} – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1,1,1)$ и $B(2,2,2)$.

б) $\oint_L x dy - y dx$ где L – контур треугольника с вершинами $A(-1,0), B(1,0), C(0,1)$ при положительном направлении обхода.

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$(y - 2x \sin(x^2 - y^2)) dx + (x + 2y \sin(x^2 - y^2)) dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (5x - y + z) dq, \quad (p): 3x + 2y + z = 6.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$\iint_{\sigma} x^2 dydz + z^2 dx dz + y dx dy$, где σ – часть поверхности параболоида $x^2 + y^2 = 4 - z$ (нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует острый угол с ортом $\vec{k}$), отсекаемая плоскостью $z = 0$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} (x + z) dydz + z dx dz + (2x - y) dx dy, \quad (p): 3x + 2y + z = 6.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L (3x - 1) dx + (y - x + z) dy + 4z dz, \quad (p): 2x - y - 2z = -2.$$

7. Найти массу поверхности $2z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$, если $\gamma(x, y, z) = z$.

Вариант 30

1. Вычислить данные криволинейные интегралы.

а) $\oint_L (x - y) dl$ где L – окружность $x^2 + y^2 = 2x$.

б) $\int_{L_{ACB}} (x^2 + y) dx + (x + y^2) dy$ где L_{ACB} – ломаная ACB ; $A(2, 0)$; $C(5, 0)$; $B(5, 3)$

2. Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + 6x^2y^3 - 3 \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + 6x^3y^2 + 8y \right) dy.$$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_{\sigma} (x + 3y + 2z) dq, \quad (p): 2x + y + 2z = 2.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

$\iint_{\sigma} (y^2 + z^2) dydz - y^2 dx dz + 2yz^2 dx dy$, где σ – часть поверхности конуса $x^2 + z^2 = y^2$ (нормальный вектор $\vec{n}$ которой образует тупой угол с ортом $\vec{j}$), отсекаемая плоскостями $y = 0$ и $y = 1$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по поверхности σ , где σ – часть плоскости (p) , отсеченная координатными плоскостями, с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\sigma} z dy dz + (x + y) dx dz + y dx dy, \quad (p): 2x + y + 2z = 2.$$

6. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p): Ax + By + Cz = D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, проверить результат непосредственным вычислением:

$$\oint_L 3x dx + (y + z) dy + (x - z) dz, \quad (p): x + 3y + z = 3.$$

7. Найти длину линии $y = \ln \sin x$, $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: Наука, 1966.
2. *Даньшин А.Ю.* Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы: учебное пособие. - Казань: Каз. гос. ун-т, 2010.
3. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М.: АСТ, 2009.
4. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. - М.: Наука, 1966.
5. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс. - 13-е изд. - М.: Айрис-пресс, 2015. - 603 с.
6. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике. Ч. IV. - Харьков: Гос. ун-т им.А.М. Горькова, 1966.
7. *Ксендзенко Л.С., Бойко Л.А.* Векторный анализ: учебное пособие для вузов / Политехнический институт ДВФУ. – Владивосток: Изд-во Дальневост. федерал. ун-та, 2022.
8. *Фролов С.В., Шостак Р.Я.* Курс высшей математики. - М.: Высшая школа, 1973.

**Чернявская Светлана Алексеевна
Царёв Валентин Геннадьевич**

**КРИВОЛИНЕЙНЫЕ
И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ**

Методические указания

В авторской редакции

Изд. № 8/2025. Объем 4,75 п.л. Усл. печ. л. 4,42. Уч.-изд. л. 4,56.
Издательский центр ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»