

УДК 681.511.46

Е.А. Шушляпин, профессор, д-р техн. наук

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина

E-mail: ru541@sevcom.net

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУХ ДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ И МЕТОДОВ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

Рассмотрены особенности двух методов управления нелинейными системами: линеаризационного по входу/выходу (I/O linearization design method) и метода конечного состояния. Показано, что методы имеют определенные черты двойственности. Получены выражения, связывающие одно управление через другое.

В последнее время широкое распространение получил линеаризационный метод управления (ЛМ) нелинейными системами с аддитивно входящим управлением, предназначенный для решения задачи стабилизации. Основы метода изложены в [1], его приложения и обобщения – в [2, 3] и др. Особенности метода является широкая область применения, относительная простота подготовительной работы. Немаловажно то, что управления при этом получаются в виде алгебраических выражений, что важно для практической реализации.

Примерно в то же время нами предложен метод терминального управления нелинейными дифференциальными системами, названный «методом конечного состояния» (МКС) [4], который впоследствии был распространен на другие классы нелинейных систем – с дополнительными алгебраическими ограничениями, дискретные и непрерывно-дискретные, системы с распределенными параметрами в дискретной и непрерывной формах. С помощью МКС решаются не только терминальные, но и другие задачи управления, в том числе и задачи стабилизации.

Сравнение двух методов показало, что в них имеется ряд общих идей, черт и свойств, позволяющие утверждать об их двойственной природе. Исследованию и сравнительному анализу ЛМ и МКС и посвящена настоящая работа, цель которой – определение областей применимости каждого из методов.

Поскольку нам не удалось обнаружить общедоступных русскоязычных публикаций, касающихся основ линеаризационного метода, изложим его вывод, опирающийся на работу [3], где линеаризационный метод обобщен на нелинейные системы с запаздываниями и скалярным управлением. Указанный вывод необходим также и для установления связи двух методов, для чего приведем и вывод метода конечного состояния.

Вначале рассмотрим линеаризационный метод. Постановка задачи для применения этого метода имеет вид критерия стабилизации

$$J = J(x(t)) \rightarrow J^* \quad (1)$$

с дифференциальными ограничениями:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \Phi(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t), \quad (2)$$

$$t \in [t_0, \infty), \quad x(t_0) = x^0, \quad \dim x = (n \times 1), \quad \dim u = (r \times 1).$$

Для получения ЛМ-управления зададимся желаемым экспоненциальным поведением критериальной функции времени $J(t) \equiv J(x(t))$ в виде дифференциального уравнения, решением которого является экспонента, стремящаяся к значению J^* с постоянной времени T :

$$\frac{dJ(t)}{dt} = \frac{J^* - J(t)}{T}. \quad (3)$$

Вычислим производную целевой функции критерия (1) с учетом уравнений (2):

$$\frac{dJ(t)}{dt} = \frac{\partial J(x)}{\partial x} \cdot \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial J(x)}{\partial x} \cdot (\Phi(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t)). \quad (4)$$

Приравняв правые части (3) и (4) и выразим управление с помощью псевдообращения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(x)}{\partial x} \cdot (\Phi(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t)) &= \frac{J^* - J(t)}{T}, \\ \frac{\partial J(x)}{\partial x} B(t, x(t))u(t) &= -\frac{\partial J(x)}{\partial x} \Phi(t, x(t)) + \frac{J^* - J(t)}{T}, \\ u(t) &= G_1^+ \left(-\frac{\partial J(x)}{\partial x} \Phi(t, x(t)) + \frac{J^* - J(t)}{T} \right), \\ G_1^+ &= G_1^T (G_1 G_1^T)^{-1}, \quad G_1 = \frac{\partial J(x)}{\partial x} B(t, x(t)). \end{aligned} \quad (5)$$

В частном случае, когда управление скалярное, G_1 является скаляром, а псевдообратная матрица равна $G_1^+ = 1 / \left(\frac{\partial J(x)}{\partial x} B(t, x(t)) \right)$. Заметим, что ЛМ в [3] получен именно для скалярного управления.

Управление (5) существует, если матрица G_1 ненулевая. Оказывается, что во многих случаях $G_1 = 0$ тождественно. Например, для системы второго порядка с первой управляемой координатой и скалярным управлением, приложенным ко второму входу с коэффициентом b_2 , $G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix} \equiv 0$.

Кроме того, могут быть особенности локального характера, зависящие от значений вектора $x(t)$. Локальные особенности порождают разрывы управления, которые на практике могут преодолеваются наложением амплитудных ограничений на управление. Что же касается особенности тождественного характера, то для ее преодоления А. Исидори предложил следующее преобразование. Если $G_1 \equiv 0$, вместо уравнения (3) для критериальной функции используем уравнение:

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = -\frac{1}{T} z_1(t) + z_2, \quad z_1 = J(t) - J^*. \quad (6)$$

Выразим из (6) z_2 , которое с учетом (2) и $G_1 \equiv 0$ равно:

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{dz_1}{dt} + \frac{1}{T} z_1 = \frac{dJ(x(t))}{dt} + \frac{1}{T} z_1 = \frac{\partial J}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{1}{T} z_1 = \frac{\partial J}{\partial x} (\Phi(t, x) + B(t, x)u) + \frac{1}{T} z_1 = \\ &= \frac{\partial J}{\partial x} \Phi(t, x) + G_1 u + \frac{1}{T} z_1 = \frac{\partial J}{\partial x} \Phi(t, x) + \frac{1}{T} z_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Над z_2 вновь произведем те же действия, что и над J при получении (4) и (5), имея в виду, что, согласно (7), z_2 зависит не только от x , но и от z_1 :

$$\begin{aligned} \frac{dz_2}{dt} &= \frac{\partial z_2}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z_2}{\partial z_1} \cdot \frac{dz_1}{dt} = \frac{\partial z_2}{\partial x} (\Phi(t, x) + B(t, x)u) + \frac{1}{T} \left(-\frac{1}{T} z_1 + z_2 \right), \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \Phi(t, x) + \frac{1}{T} z_1 \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \Phi(t, x) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Задавая для желаемого z_2 дифференциальное уравнение

$$\frac{dz_2}{dt} = -\frac{1}{T} z_2 \quad (9)$$

и приравнявая правые части (8) и (9) получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_2}{\partial x}(\Phi(t, x) + B(t, x)u) + \frac{1}{T} \left(-\frac{1}{T} z_1 + z_2 \right) &= -\frac{1}{T} z_2, \\
\frac{\partial z_2}{\partial x} B(t, x(t))u(t) &= -\frac{\partial z_2}{\partial x} \Phi(t, x) + \frac{1}{T^2} z_1 - \frac{2}{T} z_2, \\
u(t) &= G_2^+ \left(-\frac{\partial z_2}{\partial x} \Phi(t, x) + \frac{1}{T^2} z_1 - \frac{2}{T} z_2 \right), \\
z_1 &= J(x(t)) - J^*, \quad z_2 = \frac{\partial J(x(t))}{\partial x} \Phi(t, x(t)) + \frac{1}{T} z_1, \\
G_2^+ &= G_2^T (G_2 G_2^T)^{-1}, \quad G_2 = \frac{\partial z_2}{\partial x} B(t, x(t)), \\
\frac{\partial z_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \Phi(t, x) \right).
\end{aligned} \tag{10}$$

При этом получена эквивалентная линейная стационарная система (6), (9), представляющая собой последовательное соединение двух инерционных звеньев первого порядка с одинаковой постоянной времени T (в общем случае, как следует из вывода, они могут быть и различными). Данная система при $T > 0$ асимптотически устойчивая, т.е. при любых начальных условиях $\lim_{t \rightarrow \infty} (z_i(t)) = 0$, $i = 1, 2$, а

$$J(t) \rightarrow J^*.$$

Управление (10) существует, если матрица $G_2 \neq 0$ тождественно. Если же это не так, то уравнение (9) заменяем уравнением

$$\frac{dz_2}{dt} = -\frac{1}{T} z_2 + z_3, \tag{11}$$

берем полную производную по времени от новой переменной z_3 , выраженной из (11), и задаем для нее желаемое движение дифференциальным уравнением, аналогичным (9). В итоге получаем:

$$\begin{aligned}
z_3 &= \frac{dz_2}{dt} + \frac{1}{T} z_2 = \frac{\partial z_2}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z_2}{\partial z_1} \cdot \frac{dz_1}{dt} + \frac{1}{T} z_2 = \frac{\partial z_2}{\partial x} (\Phi(t, x) + B(t, x)u) + \\
&+ \frac{1}{T} \left(-\frac{1}{T} z_1 + z_2 \right) + \frac{1}{T} z_2 = \frac{\partial z_2}{\partial x} \Phi(t, x) + G_2 u - \frac{1}{T^2} z_1 + \frac{2}{T} z_2 = \\
&= \frac{\partial z_2}{\partial x} \Phi(t, x) - \frac{1}{T^2} z_1 + \frac{2}{T} z_2, \\
\frac{dz_3}{dt} &= \frac{\partial z_3}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z_3}{\partial z_1} \cdot \frac{dz_1}{dt} + \frac{\partial z_3}{\partial z_2} \cdot \frac{dz_2}{dt} = \frac{\partial z_3}{\partial x} (\Phi(t, x) + B(t, x)u) - \frac{1}{T^2} \left(-\frac{1}{T} z_1 + z_2 \right) + \\
&+ \frac{2}{T} \left(-\frac{1}{T} z_2 + z_3 \right) = G_3 u + \frac{\partial z_3}{\partial x} \Phi(t, x) + \frac{1}{T^3} z_1 - \frac{3}{T^2} z_2 + \frac{2}{T} z_3, \\
\frac{\partial z_3}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z_2}{\partial x} \Phi(t, x) - \frac{1}{T^2} z_1 + \frac{2}{T} z_2 \right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \Phi(t, x) \right) \Phi(t, x) \right),
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\text{Здесь } G_3 = \frac{\partial z_3}{\partial x} B(t, x).$$

Задавая для желаемого z_3 дифференциальное уравнение

$$\frac{dz_3}{dt} = -\frac{1}{T} z_3 \tag{13}$$

и приравнивая правые части (12) и (13), получаем управление:

$$\begin{aligned}
u(t) &= G_3^+ \left(-\frac{\partial z_3}{\partial x} \Phi(t, x) - \frac{1}{T^3} z_1 + \frac{3}{T^2} z_2 - \frac{2}{T} z_3 \right), \\
z_1 &= J(x(t)) - J^*, \quad z_2 = \frac{\partial J(x(t))}{\partial x} \Phi(t, x(t)) + \frac{1}{T} z_1, \\
z_3 &= \frac{\partial z_2}{\partial x} \Phi(t, x) - \frac{1}{T^2} z_1 + \frac{2}{T} z_2, \\
G_3^+ &= G_3^T (G_3 G_3^T)^{-1}, \quad G_3 = \frac{\partial z_3}{\partial x} B(t, x(t)), \\
\frac{\partial z_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \Phi(t, x) \right), \quad \frac{\partial z_3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \Phi(t, x) \right) \Phi(t, x) \right).
\end{aligned} \tag{14}$$

Таким способом строятся управления до тех пор, пока некоторая матрица G_m , $m \leq n$ окажется ненулевой, а управление – осуществимым.

Далее рассмотрим метод конечного состояния для решения следующей терминальной задачи:

$$J = J(x(t_f)) \rightarrow J^*, \tag{15}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \Phi(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t), \tag{16}$$

$$t \in [t_0, t_f), \quad x(t_0) = x^0,$$

$$\dim x = (n \times 1), \quad \dim u = (r \times 1).$$

Для конструирования терминального управления методом конечного состояния (МКС-управления) воспользуемся соотношением В.М. Алексеева, обобщающим известную формулу Коши-Лагранжа на дифференциальные нелинейные системы с аддитивным управлением:

$$x(t_f) = \bar{x}(t_f, t, x(t)) + \int_t^{t_f} W(t_f, \tau, x(\tau)) B(\tau, x(\tau)) u(\tau) d\tau, \tag{17}$$

где внеинтегральный член, названный нами вектором переменных конечного состояния (ПКС), отображает прогноз конечного (в момент t_f) состояния неуправляемой системы, находящейся в момент t в точке (состоянии) $x(t)$. Указанный смысл ПКС следует непосредственно из (17). Интегральный член содержит под знаком интеграла нелинейную переходную матрицу $W(t_f, t, x(t))$, определяемую вместе с ПКС как функции первого аргумента уравнениями:

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{x}(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= \Phi(\vartheta, \bar{x}(\vartheta, t, x(t))), \\
\frac{dW(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= A(\vartheta, \bar{x}(\vartheta, t, x(t))) W(\vartheta, t, x(t)), \\
A(\vartheta, \bar{x}(\vartheta, t, x(t))) &\equiv \frac{\partial \Phi(\vartheta, \bar{x}(\vartheta, t, x(t)))}{\partial \bar{x}}, \\
\vartheta &\in [t, t_f], \quad \bar{x}(t, t, x(t)) = x(t), \quad W(t, t, x(t)) = I.
\end{aligned} \tag{18}$$

Здесь I – единичная матрица, A – якобиан.

Из (17) и (18) следует, что $\bar{x}(t_f, t_f, x(t_f)) = x(t_f)$, поэтому терминальный критерий (15), определенный через конечное состояние $x(t_f)$ системы (16), заменяем эквивалентным критерием

$$J = J(\bar{x}(t_f, t_f, x(t_f))) \rightarrow J^*. \tag{19}$$

Исходя из (19), введем критериальную функцию времени $J(t) \equiv J(\bar{x}(t_f, t, x(t)))$ и определим ее желаемое экспоненциальное поведение в виде дифференциального уравнения, решением которого является стремящаяся к значению J^* экспонента с постоянной времени T :

$$\frac{dJ(t)}{dt} = \frac{J^* - J(t)}{T}. \tag{20}$$

Для определения управления воспользуемся следующим из (17) соотношением:

$$\frac{d\bar{x}(t_f, t, x(t))}{dt} = W(t_f, t, x(t))B(t, x(t))u(t). \quad (21)$$

Система дифференциальных уравнений (21), которую мы называем моделью конечного состояния, получена дифференцированием по t формулы Алексева (17) и определяет ПКС как функции второго аргумента. Заметим, что в (18) ПКС определены как функции первого аргумента.

Найдем производную по времени критериальной функции с учетом уравнений (21):

$$\frac{dJ(t)}{dt} = \frac{\partial J(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{d\bar{x}(t_f, t, x(t))}{dt} = \frac{\partial J(\bar{x})}{\partial \bar{x}} W(t_f, t, x(t))B(t, x(t))u(t). \quad (22)$$

Приравняв правые части (20) и (22) и выразим управление с помощью операции псевдообращения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\bar{x})}{\partial \bar{x}} W(t_f, t, x(t))B(t, x(t))u(t) &= \frac{J^* - J(t)}{T}, \\ u(t) &= G^+ \frac{J^* - J(t)}{T}, \quad G^+ = G^T / (GG^T), \\ G &= \frac{\partial J(\bar{x})}{\partial \bar{x}} W(t_f, t, x(t))B(t, x(t)). \end{aligned} \quad (23)$$

Как видим, схема получения ЛМ и МКС управлений отличается, главным образом, тем, что в ЛМ используются переменные состояния, а в МКС – переменные конечного состояния.

Сравнивая два метода, можно сделать следующие выводы.

1. ЛМ-управление выражается в явном виде, т.е. в виде алгебраического соотношения между вектором управления и параметрами модели; МКС-управление имеет явный вид только в отдельных случаях, когда удастся получить аналитическое решение системы (18); в общем же случае при расчете управления в каждый момент времени требуется численно интегрировать систему (18), что требует определенных, иногда весьма существенных затрат компьютерного времени.
2. Для получения ЛМ-управления в тех случаях, когда $G_1, G_2, \dots, G_{m-1}$ тождественно равны нулю, а $G_m \neq 0$, для реализации ЛМ-управления требуется существование производных по переменным состояния целевой функции критерия m -го порядка и правых частей системы (2) $(m-1)$ -го порядка – см. выражения для $\partial z_i / \partial x$ в (8), (12), (14); в частности, если $G_1 \neq 0$, непрерывность и дифференцируемость $\Phi(t, x)$ не требуется. Для реализации МКС-управления, выражаемого через градиент целевой функции $\partial J / \partial x$ и якобиан A (см. (18) и (23)), требуется непрерывность и дифференцируемость $J(x)$ и $\Phi(t, x)$, однако требуемый порядок производных при этом всегда только первый.
3. ЛМ-метод в случаях $m \geq 2$ требует большей в сравнении с МКС подготовительной работы по получению производных $J(x)$ и $\Phi(t, x)$ и трудоемкость этой работы тем больше, чем больше m .

Покажем, что при определенных условиях ЛМ-управление и МКС-управление можно выразить одно через другое.

Прежде всего, поставим задачу: как соотносятся между собой поведения критериальных функций $J(x(t))$ при воздействии ЛМ-управления и $J(\bar{x}(t_f, t, x(t)))$ при воздействии МКС-управления? Для этого вычислим производную по времени от вспомогательной функции $\bar{J}(t) = J(x(t)) / J(\bar{x}(t_f, t, x(t)))$ в предположении, что желаемый выход $J^* = 0$, постоянные времени T желаемых траекторий $J(x(t))$ и $J(\bar{x}(t_f, t, x(t)))$ одинаковы (сами траектории разные ввиду того, что они начинаются от разных ординат), а ЛМ-управление определяется выражением (5), т.е. существует при $m = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{J}(t)}{dt} &= \frac{\dot{J}(x(t))J(\bar{x}(t_f, t, x(t))) - J(x(t))\dot{J}(\bar{x}(t_f, t, x(t)))}{(J(\bar{x}(t_f, t, x(t))))^2} = \\ &= \frac{\left(-\frac{1}{T}J(x(t))\right)J(\bar{x}(t_f, t, x(t))) - J(x(t))\left(-\frac{1}{T}J(\bar{x}(t_f, t, x(t)))\right)}{(J(\bar{x}(t_f, t, x(t))))^2} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом, при оговоренных условиях отношение между значениями критериальных функций в разные моменты времени постоянно.

Теперь вновь рассмотрим числитель (24) и заменим производные критериальных функций их определениями из (4) и (22) соответственно.

$$\begin{aligned} &\dot{J}(x(t))J(\bar{x}(t_f, t, x(t))) - J(x(t))\dot{J}(\bar{x}(t_f, t, x(t))) = \\ &= \frac{\partial J(x)}{\partial x} \cdot (\Phi(t, x(t)) + B(t, x(t))u^{LM}(t))J(\bar{x}(t_f, t, x(t))) - \\ &- J(x(t))\frac{\partial J(\bar{x})}{\partial \bar{x}} W(t_f, t, x(t))B(t, x(t))u^{MKS}(t) = 0. \end{aligned}$$

Из последнего выражения следуют соотношения для ЛМ-управления через МКС-управление и обратное:

$$u^{MKS}(t) = \tilde{G}^+ (\tilde{G}_1 u^{LM}(t) + H), \quad (25)$$

$$u^{LM}(t) = \tilde{G}_1^+ (\tilde{G} u^{MKS}(t) - H), \quad (26)$$

$$H = J(\bar{x}(t_f, t, x(t))) \frac{\partial J(x(t))}{\partial x} \Phi(t, x(t)),$$

$$\tilde{G} = J(x(t))G, \quad \tilde{G}_1 = J(\bar{x}(t_f, t, x(t)))G_1,$$

$$\tilde{G}^+ = \tilde{G}^T / (\tilde{G}\tilde{G}^T), \quad \tilde{G}_1^+ = \tilde{G}_1^T / (\tilde{G}_1\tilde{G}_1^T),$$

где G_1 и G определены в (5) и (23) соответственно.

Симметрия соотношений (25) и (26) подчеркивает определенные черты двойственности рассматриваемых задач (стабилизации и терминального управления) и методов.

Компьютерное моделирование показало, что ЛМ особенно эффективен, когда целевая функция J зависит только от одной координаты. Когда же указанная целевая функция зависит от многих координат, значительно лучшие результаты показывает МКС.

На основании выполненного анализа можно сделать общий вывод: каждый из исследованных методов управления имеет свои преимущества при решении определенных (прямых) задач управления: ЛМ – для задач стабилизации при управлении одной координатой, МКС – для терминальных задач при управлении несколькими координатами; каждый из методов можно применять и для решения двойственных задач (ЛМ – для терминальной, МКС – для стабилизации), однако при этом соответствующие результаты будут хуже, чем при решении прямых задач.

Задачами дальнейших исследований в данном направлении могут быть:

- сравнительный анализ робастных свойств методов;
- разработка комплексированного метода, сочетающего достоинства двух методов.

Библиографический список

1. Isidori A. Nonlinear Control Systems, 3-nd Ed. / A. Isidori. — N.Y.: Springer Verlag, 1995. — 244 p.
2. Монако С. Цифровое нелинейное управление скоростью синхронного двигателя / С. Монако, Д. Норман-Сиро, А. Шелуа // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 6. — С. 143–158.
3. Wei Wu. Lyapunov-Based Design Procedures for a State-Delay Chemical Process / Wu Wei // Proc. of 14th World Congress of IFAC. Vol. N, Section 7a-05. — Beijing, 1999. — P. 127–132.
4. Шушляпин Е.А. Синтез линейных и нелинейных систем управления конечным положением на основе моделей конечного состояния / Е.А. Шушляпин // Проблемы управления и информатики. — 1997. — № 3. — С. 10–15.

Поступила в редакцию 26.04.2007 г.