

УДК 681.5

В.А. Крамарь, доцент, канд. техн. наук

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, Севастополь, Украина, 99053

E-mail: kramarv@mail.ru

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА АНАЛИЗА РОБАСТНОГО КАЧЕСТВА САУ

Предложенные методы алгебраизации частотных условий применены в задаче теории робастного качества системы с непараметрической неопределенностью.

Рассматривается система управления с единичной отрицательной обратной связью передаточная функция прямой цепи которой (объекта) имеет вид $W(s)$.

Для неполностью определенной передаточной функции объекта неопределенность может быть аддитивной, мультипликативной или дробно-рациональной. Пусть

$$W^0(s) = \frac{P^0(s)}{Q^0(s)}$$

номинальная фиксированная передаточная функция объекта. Предполагается, что $W^0(s)$ не имеет полюсов на мнимой оси.

При аддитивной неопределенности передаточная функция прямой цепи имеет вид

$$W(s) = W^0(s) + \delta W_1(s).$$

При мультипликативной неопределенности –

$$W(s) = W^0(s)(1 + \delta W_2(s)).$$

При дробно-рациональной неопределенности –

$$W(s) = \frac{P^0(s) + \delta P(s)}{Q^0(s) + \delta Q(s)},$$

или

$$W(s) = W^0(s)(1 + \delta W_3(s)),$$

где

$$\delta W_3(s) = \frac{(\delta P(s)/P^0(s)) - (\delta Q(s)/Q^0(s))}{1 + (\delta Q(s)/Q^0(s))}. \quad (1)$$

Вариации $\delta W_1(s), \delta W_2(s), \delta W_3(s)$ имеют вид передаточных функций, у которых все полюсы расположены в левой полуплоскости и при $s = j\omega$ они удовлетворяют неравенствам

$$|\delta W_1(j\omega)| \leq \beta_1(\omega), \quad |\delta W_2(j\omega)| \leq \beta_2(\omega).$$

Предполагая, что справедливы также неравенства

$$\left| \frac{\delta P(j\omega)}{P^0(j\omega)} \right| \leq \alpha_1(\omega), \quad \left| \frac{\delta Q(j\omega)}{Q^0(j\omega)} \right| \leq \alpha_2(\omega) < 1,$$

из соотношения (1) следует, что

$$|\delta W_3(j\omega)| \leq \frac{\alpha_1(\omega) + \alpha_2(\omega)}{1 - \alpha_2(\omega)} = \beta_3(\omega).$$

Функции $\beta_1(\omega), \beta_2(\omega), \beta_3(\omega)$ положительны для всех $\omega \in [0, \infty)$. Они определяют уровень неопределенности, вызванной изменениями объекта.

Представим все приведенные выше неопределенности в виде общего семейства передаточных функций объекта

$$W(s) = W^0(s)(1 + \eta \delta W_2(s)) + (1 - \eta) \delta W_1(s), \quad (2)$$

где $0 \leq \eta \leq 1$. Причем, аддитивная неопределенность соответствует $\eta = 0$, мультипликативная – $\eta = 1$, а дробно-рациональная – $\eta = 1$ и $\delta W_2(s) = \delta W_3(s)$. Промежуточные значения $0 < \eta < 1$ будут определять комбинации этих неопределенностей. Используя приведенные соотношения исходная система может быть представлена в виде структурной схемы номинальной линейной системы при наличии изменений объекта.

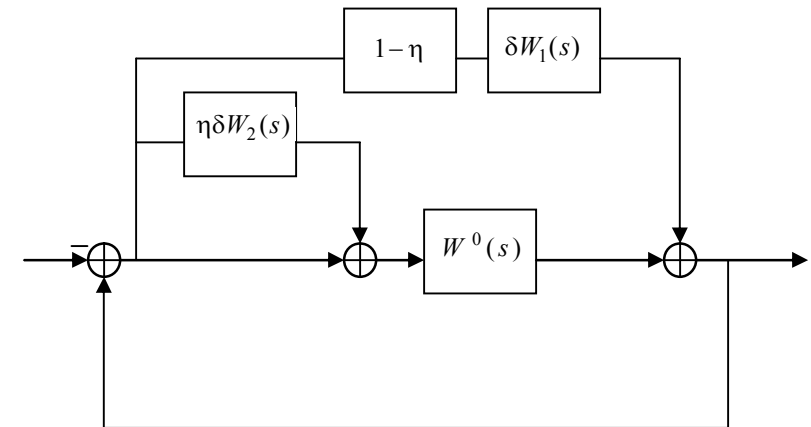


Рисунок 1 – Структурная схема номинальной системы

Рассмотрим анализ качества возмущенного объекта. Предположим, что ПФ объекта принадлежит некоторому множеству P . Общее понятие робастного качества подразумевает, что внутренняя устойчивость и качество определенного типа должно иметь место для всех объектов из P . Приведем построение алгебраического критерия анализа робастного качества для системы с мультипликативной неопределенностью. Другие случаи рассматриваются аналогично.

Если ПФ разомкнутой системы $W(s)$ возмущается до $(1 + \beta(s))W(s)$, то функция чувствительности системы – $S(s)$ возмущается до:

$$S(s) = \Phi_{\varepsilon}^U(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{1}{1 + (1 + \beta(s))W(s)} = \frac{S(s)}{1 + \beta(s)T(s)}, \quad (3)$$

где $W(s)$ – передаточная функция разомкнутой системы; $\beta(s)$ – передаточная функция неопределенности, на которую наложено ограничение $\|\beta\|_{\infty} < 1$; $S(s)$ – функция чувствительности; $T(s)$ – функция дополнительной чувствительности.

Следовательно, условие робастного качества [1] имеет следующий вид

$$\|\beta T\|_{\infty} < 1 \quad \text{и} \quad \left\| \frac{S}{1 + \beta T} \right\|_{\infty} < \alpha. \quad (4)$$

Говорят, что обеспечивается робастное качество уровня α , если выполняются 2 условия:

$$\|\beta T\|_{\infty} < 1 \quad \text{и} \quad \left\| \frac{S}{1 + W_2 T} \right\|_{\infty} < \alpha. \quad (5)$$

Таким образом, критерий робастного качества (4) обеспечивает робастное качество уровня 1.

Рассмотрим алгебраизацию частотного критерия робастного качества. Этот метод основан на анализе распределения вещественных корней многочлена (без их непосредственного вычисления) с помощью применения математического аппарата общей проблемы Рауса.

Рассмотрим для начала первый критерий из (4), а второй критерий будет проверяться аналогично.

Так как ∞ -норма равна максимальному значению амплитудно-частотной характеристики, то перепишем (4) таким образом

$$\sup_{\omega} |\beta T| < 1. \quad (6)$$

Выражение (6) означает, что годограф $\beta(j\omega)T(j\omega)$ должен целиком лежать внутри единичной окружности.

Пусть $\beta(s)T(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$. Тогда критерий будет иметь общий вид

$$\left| \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} \right| < 1. \quad (7)$$

Возведем обе части неравенства в квадрат и выполним преобразования

$$\left| \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} \right|^2 < 1, \quad (8)$$

$$\frac{A(j\omega)A(-j\omega)}{B(j\omega)B(-j\omega)} < 1, \quad (9)$$

$$\frac{B(j\omega)B(-j\omega) - A(j\omega)A(-j\omega)}{B(j\omega)B(-j\omega)}. \quad (10)$$

Для выполнения неравенства (10) необходимо выполнение неравенства

$$Q_1(s) = B(s)B(-s) - A(s)A(-s) > 0, \quad (11)$$

или

$$Q_1(x) > 0, \quad s^2 = -\omega^2 = x < 0. \quad (12)$$

Тогда для проверки положительности (12) [2] достаточно будет проверить условия отсутствия отрицательных вещественных корней многочлена $Q_1(x)$:

$$\rho^-(Q_1) = 0, \quad Q_1(-\infty) > 0. \quad (13)$$

Как указывалось ранее, второе условие проверяется аналогично. Пусть $\frac{S(s)}{1+\beta(s)T(s)} = \frac{C(s)}{D(s)}$. Тогда, второе условие критерия (4) примет вид

$$\left| \frac{C(j\omega)}{D(j\omega)} \right| < 1. \quad (14)$$

Рассуждая аналогично, построим многочлен $Q_2(s) = D(s)D(-s) - C(s)C(-s)$. Тогда, для выполнения второго условия критерия (4) необходимо выполнение неравенства

$$Q_2(x) > 0, \quad s^2 = -\omega^2 = x < 0 \quad (15)$$

или

$$\rho^-(Q_2) = 0, \quad Q_2(-\infty) > 0. \quad (16)$$

Таким образом, для того, чтобы система обладала робастным качеством необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (13) и (15).

В связи с тем, что для решения поставленной задачи необходимо знать месторасположение корней без их точного вычисления, то эффективным методом может выступить обобщенный метод Рауса [3].

Пример. Рассмотрим систему управления подводного сближения объекта с целью. Передаточная функция прямой цепи системы имеет вид

$$W_{раз} = \frac{-0.7s^5 - 7.69s^4 + 10.36s^3 + 91.7s^2 + 118.3s + 39.96}{0.56s^6 + 15.83s^5 + 135.4s^4 + 354.6s^3 + 356.5s^2 + 122.5s + 6.69}. \quad (14)$$

Передаточная функция неопределенности –

$$\beta(s) = \frac{1}{s+1}. \quad (15)$$

Функция дополнительной чувствительности

$$T(s) = \frac{-0.9301s^2 + 2.223s + 5.85}{0.752s^3 + 10.06s^2 + 17.63s + 6.83}. \quad (16)$$

Сначала осуществим проверку первого критерия робастного качества (5). В результате подстановки численных значений (4) примет следующий вид.

$$\left\| \frac{-0.93s^3 + 2.223s + 5.85}{0.752s^4 + 10.81s^3 + 27.69s^2 + 24.46s + 6.83} \right\|_{\infty} < 1. \quad (17)$$

По приведенным выше соотношениям, получим

$$Q_1(x) = 0.565 \cdot x^4 - 75.2 \cdot x^3 + 247.3 \cdot x^2 - 204.2 \cdot x + 12.42 > 0. \quad (18)$$

В соответствии с алгоритмом, изложенном в [3], составим таблицу Рауса, по которой определим, что число отрицательных вещественных корней многочлена равно нулю. Следовательно, можно сделать вывод о том, что данная система является робастно устойчивой.

Далее аналогичным образом проведем проверку второго критерия робастного качества (4). По приведенным выше соотношениям построим многочлен

$$Q_2(x) = 0.0502 \cdot x^{10} - 14.379 \cdot x^9 + 1321.44 \cdot x^8 - 30473 \cdot x^7 + 262119 \cdot x^6 - 970694 \cdot x^5 + 3061593 \cdot x^4 - 3567825 \cdot x^3 + 2869431 \cdot x^2 - 877851 \cdot x + 100187.$$

В соответствии с теоремой о распределении корней многочлена относительно вещественной оси находим, что число отрицательных вещественных корней указанного многочлена равно нулю. Теперь, когда оба критерия робастного качества выполняются, то можно сделать вывод о том, что данная система обладает робастным качеством.

Приведем графические решения поставленной задачи. Построим годограф $\beta(j\omega)T(j\omega)$ для мультипликативной неопределенности, вид которого представлен на рисунке 2.

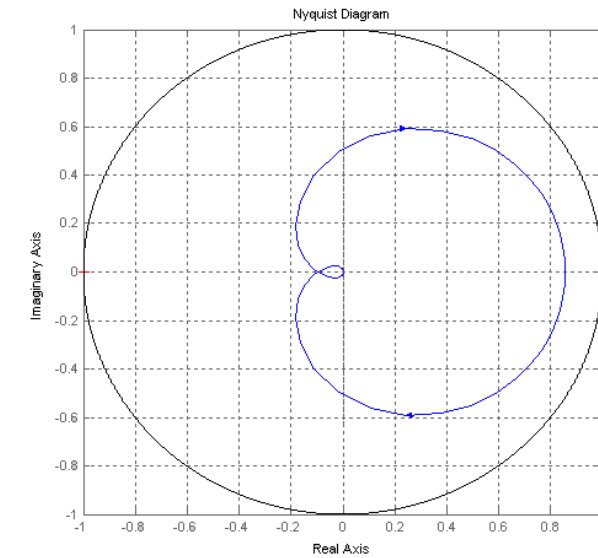


Рисунок 2 – Годограф $W_2(j\omega)T(j\omega)$

Из рисунка 2 видно, что годограф целиком лежит внутри единичной окружности. Это означает выполнение первого условия критерия (4), а, следовательно, можно сделать вывод, что система обладает робастной устойчивостью.

Осталось проверить второе условие критерия (4), т.е. проверить, что годограф $\frac{S(j\omega)}{1+W_2(j\omega)T(j\omega)}$ целиком лежит в окружности заданного радиуса $R < 1$.

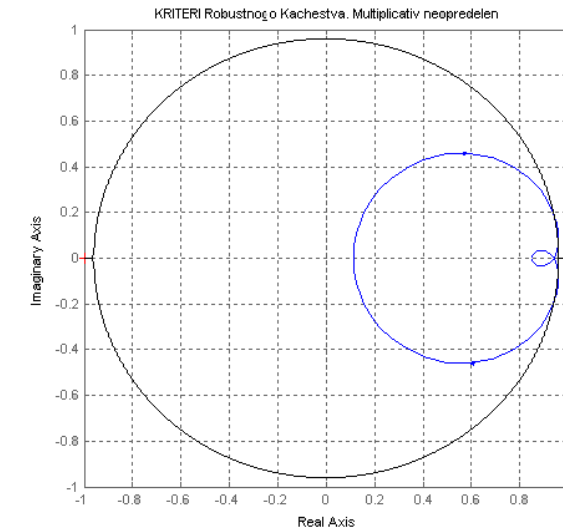


Рисунок 3 – Годограф $\frac{S(j\omega)}{1+W_2(j\omega)T(j\omega)}$

Из рисунка 3 видно, что годограф $\frac{S(j\omega)}{1+W_2(j\omega)T(j\omega)}$ лежит целиком внутри окружности.

Переходные процессы для системы с мультипликативной неопределенностью и без неопределенности приведены на рисунке 4.

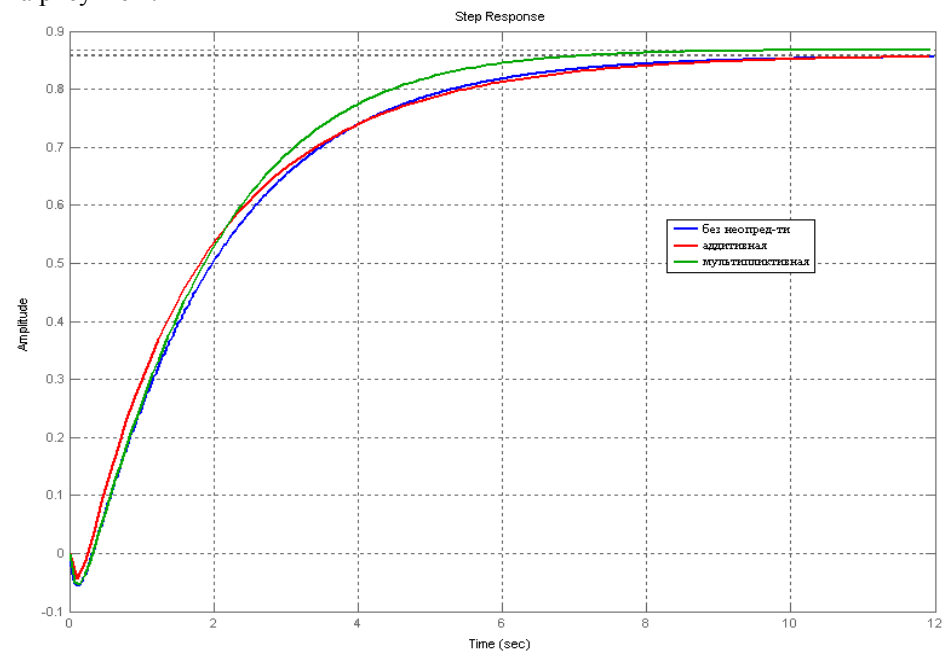


Рисунок 4 – Графики переходных процессов в системе с учетом неопределенностей и без них

По графикам можно видеть, что исследуемая система слабо чувствительна к присутствующей неопределенности, т.е. способна противодействовать влиянию неопределенности и сохранять устойчивость и качество. Таким образом, можно сделать вывод о том, что система действительно обладает хорошим робастным качеством.

Библиографический список

1. Методы классической и современной теории автоматического управления: Т. 3. Методы современной теории автоматического управления. / Под общ. ред. Н.Д. Егупова. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. — 748 с.
2. Барабанов А.Т. Алгебраические формы частотных критериев качества линейных систем управления / А.Т. Барабанов, В.А. Крамарь // Вестник СевГТУ. Сер. Автоматизация процессов и управление. Сб. науч. тр. — Севастополь, 1996. — Вып. 2. — С. 3–17.
3. Барабанов А.Т. Гурвицевы формы решения общей проблемы Рауса / А.Т. Барабанов // Изв. АН России. Сер. Техническая кибернетика. — 1994. — № 1. — С. 3–19.

Поступила в редакцию 10.01.2007 г.